Гонцов Р. Р.

Теорема о неявном отображении и дифференциальные уравнения

1. Введение

Теорема о неявной функции из курса математического анализа говорит о том, что уравнение

$$f(x, y) = 0,$$

где $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция в окрестности $D \subset \mathbb{R}^2$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, такая, что

$$f(x_0, y_0) = 0,$$
$$f'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

локально разрешимо относительно переменной y: *существуют окрестности U, $V \subset \mathbb{R}$ точек x_0, y_0 соответственно, $U \times V \subset D$, и функция $y : U \to V$, дифференцируемая в точке x_0, такие, что*

$$y(x_0) = y_0, \qquad f(x, y(x)) \equiv 0, \quad x \in U.$$

Эта теорема имеет обобщение на бесконечномерный случай банаховых пространств, о котором в ноябре 2003 года нам сообщил Дмитрий Викторович Аносов и которое он попросил изучить на нашем семинаре по аналитической теории дифференциальных уравнений (по книге Ж. Дьедонне [1], теор. 10.2.1), с целью дальнейшего применения к доказательству теоремы существования решения задачи Коши для ОДУ. Об этом приложении теоремы о неявном отображении для банаховых пространств к теории ОДУ было рассказано нам тогда самим Дмитрием Викторовичем. Впоследствии, по прошествии примерно десяти лет, мы также узнали о других приложениях этой теоремы, уже к аналитической теории дифференциальных уравнений.

В данной работе мы приведем доказательство теоремы существования решения задачи Коши для ОДУ с помощью теоремы о неявном отображении для банаховых пространств, впервые опубликованное Дж. Роббином [6] в 1968 году, а также вкратце расскажем о некоторых других приложениях последней теоремы к аналитической теории дифференциальных уравнений.

2. Теорема о неявном отображении для банаховых пространств

Пусть X, Y, Z – банаховы пространства, D – область в $X \times Y$ и $f : D \to Z$ – отображение, непрерывное в точке $(x_0, y_0) \in D$ и обладающее следующими свойствами:

- $f(x_0, y_0) = 0$*;*
- *определена производная Фреше $f'_y : D \to \mathcal{L}(Y, Z)$, непрерывная в точке (x_0, y_0);*
- *отображение $f'_y(x_0, y_0) : Y \to Z$ является линейным гомеоморфизмом.*

Тогда уравнение $f(x, y) = 0$ локально разрешимо относительно переменной y в окрестности точки (x_0, y_0).

Сделаем некоторые пояснения к условию данной теоремы, относящиеся к понятию производной Фреше f'_y.

Во-первых, существование этой производной (по переменной y) в каждой точке $(x, y) \in D$ означает, что

$$f(x, y + h) - f(x, y) = A(x, y)h + o(\|h\|), \qquad \|h\| \to 0,$$

где $A(x, y) : Y \to Z$ – ограниченный линейный оператор, который и называется производной Фреше отображения f в точке (x, y) по переменной y (пространство ограниченных линейных операторов из Y в Z обозначено $\mathcal{L}(Y, Z)$).

Во-вторых, f'_y как отображение, сопоставляющее каждой точке $(x, y) \in D$ ограниченный линейный оператор $f'_y(x, y) \in \mathcal{L}(Y, Z)$, предполагается непрерывным в точке (x_0, y_0), т. е.

$$\|f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}} \to 0, \qquad \|\Delta x\|, \|\Delta y\| \to 0.$$

Наконец, ограниченный линейный оператор $f'_y(x_0, y_0) : Y \to Z$ сюръективен, инъективен, и его обратный также ограничен.

Отметим, что здесь приведены более слабые условия теоремы о неявном отображении, чем в ее конечномерном аналоге, поскольку в предстоящем контексте нам будет важна лишь разрешимость уравнения $f(x, y) = 0$, без дифференцируемости его решения $y(x)$ (см. [2], гл. X, §2, п.1).

3. О теореме существования для ОДУ

В этом параграфе мы расскажем (по статье [6]) о применении теоремы о неявном отображении к доказательству существования решения следующей (скалярной) задачи:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \\ \varphi(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f : V \times U \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция на прямом произведении окрестностей V, $U \subset \mathbb{R}$ точек $t = 0$, $x = x_0$ соответственно.

Итак, покажем, что существует интервал $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, решающая задачу (1).

Заметим, что существование такой функции равносильно существованию функции $\gamma_\varepsilon(t) = \varphi(\varepsilon t) - x_0$, непрерывно дифференцируемой на интервале $(-1, 1)$, принимающей значения в окрестности U_0 точки $x = 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\gamma'_\varepsilon(t) - \varepsilon f(\varepsilon t, x_0 + \gamma_\varepsilon(t)) = 0, \qquad \gamma_\varepsilon(0) = 0.$$

Основная идея предлагаемого доказательства – рассмотреть левую часть этого уравнения как отображение, зависящее от двух переменных, – числового параметра ε и функциональной переменной γ_ε – и применить именно к нему теорему о неявном отображении, правильно подобрав соответствующие банаховы пространства.

Обозначим I замкнутый интервал $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим следующие банаховы пространства:

- $C^p(I, \mathbb{R})$ – пространство C^p-функций из I в $\mathbb{R}$, $p = 0, 1$ (со стандартной C^p-нормой);

- $C^p_0(I,\mathbb{R}) \subset C^p(I,\mathbb{R})$ – (замкнутое) подпространство функций, обращающихся в нуль в точке $t=0$.

Также рассмотрим $C^p_0(I,U_0)$ – (открытое) подмножество в $C^p_0(I,\mathbb{R})$, состоящее из функций $\gamma \in C^p_0(I,\mathbb{R})$ таких, что $\gamma(I) \subset U_0$.

Пусть теперь $F : V \times C^1_0(I,U_0) \to C^0(I,\mathbb{R})$ – отображение, определенное в области $D = V \times C^1_0(I,U_0)$ прямого произведения $\mathbb{R} \times C^1_0(I,\mathbb{R})$ банаховых пространств формулой

$$F(\lambda,\gamma)(t) = \gamma'(t) - \lambda f(\lambda t, x_0 + \gamma(t)), \qquad \lambda \in V,\ \gamma \in C^1_0(I,U_0).$$

Проверим, что F удовлетворяет условиям теоремы о неявном отображении, а именно,

- F непрерывно в точке $(0,0) \in D$ (очевидно, $F(0,0)=0$);

- F обладает в области D производной Фреше F'_γ, непрерывной в точке $(0,0)$;

- отображение $F'_\gamma(0,0) : C^1_0(I,\mathbb{R}) \to C^0(I,\mathbb{R})$ является линейным гомеоморфизмом.

Первое условие следует из оценки

$$\|F(\lambda,\gamma) - F(0,0)\|_{C^0} = \|F(\lambda,\gamma)\|_{C^0} \leqslant \|\gamma\|_{C^1} + |\lambda| \max_{\overline{V}\times\overline{U}} |f(t,x)|.$$

Второе условие – существование производной Фреше – следует из разложения

$$\begin{aligned}
&F(\lambda,\gamma+\Delta\gamma)(t) - F(\lambda,\gamma)(t) = \\
&= \Delta\gamma'(t) - \lambda\big(f(\lambda t, x_0+\gamma(t)+\Delta\gamma(t)) - f(\lambda t, x_0+\gamma(t))\big) = \\
&= \Delta\gamma'(t) - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda t, x_0+\gamma(t)) \cdot \Delta\gamma(t) + o(\|\Delta\gamma(t)\|_{C^1}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F'_\gamma(\lambda,\gamma) : \Delta\gamma(t) \mapsto \Delta\gamma'(t) - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda t, x_0+\gamma(t)) \cdot \Delta\gamma(t).$$

В частности,

$$F'_\gamma(0,0) : \Delta\gamma(t) \mapsto \Delta\gamma'(t).$$

Следовательно,

$$\|F'_\gamma(\lambda,\gamma) - F'_\gamma(0,0)\|_{\mathcal{L}} \leqslant |\lambda| \max_{\overline{V}\times\overline{U}} \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|,$$

откуда следует непрерывность F'_γ в точке $(0,0)$.

Проверку последнего условия – того, что отображение $F'_\gamma(0,0)$ является линейным гомеоморфизмом из $C^1_0(I,\mathbb{R})$ в $C^0(I,\mathbb{R})$, – мы оставляем в качестве несложного упражнения.

Итак, к F применима теорема о неявном отображении, из которой следует существование $\varepsilon > 0$ и непрерывно дифференцируемой на I функции $\gamma_\varepsilon(t)$, обращающейся в нуль в точке $t = 0$, таких, что $F(\varepsilon, \gamma_\varepsilon) = 0$, т. е.

$$\gamma'_\varepsilon(t) - \varepsilon f(\varepsilon t, x_0 + \gamma_\varepsilon(t)) = 0.$$

Таким образом, функция

$$\varphi(t) = x_0 + \gamma_\varepsilon(t/\varepsilon)$$

является решением задачи (1).

Заметим, что в учебнике Колмогорова, Фомина [2] (см. гл. X, §2, п.2) с помощью теоремы о неявном отображении доказывается, что решение задачи (1) гладко зависит от начального условия x_0. Однако, там неявно предполагается существование самого решения хотя бы при одном фиксированном значении x_0, т. е. неявно используется теорема существования. Заинтересованный читатель может найти этот момент. В свою очередь, в статье Роббина [6] сразу доказывается как существование решения задачи (1), так и его гладкая зависимость от начального условия x_0 (для простоты мы ограничились здесь лишь изложением доказательства существования решения).

4. О приложениях теоремы о неявном отображении к аналитической теории дифференциальных уравнений

М. Шаперон [3], продолжая идеи Роббина, с использованием теоремы о неявном отображении привел доказательство теоремы Коши–Ковалевской существования и единственности локального аналитического решения следующей задачи Коши из теории уравнений в частных производных (приводим скалярный вариант):

$$\begin{cases} u'_t = f(t, x, u, u'_x), \\ u(0, x) = v(x), \end{cases}$$

где f – аналитическая функция четырех переменных в окрестности точки $(0, x_0, u_0, u_1) \in \mathbb{C}^4$, v – аналитическая функция в окрестности точки x_0, $v(x_0) = u_0$, $v'(x_0) = u_1$.

Еще одно интересное и знаменитое применение теоремы о неявном отображении – доказательство Б. Мальгранжем [5] с ее помощью теоремы Майе–Мальгранжа о скорости роста коэффициентов формального ряда $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, удовлетворяющего общему ОДУ порядка n,

$$F(z, y, \delta y, \ldots, \delta^n y) = 0, \qquad \delta = z(d/dz),$$

где F – аналитическая функция $n+2$ переменных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$. Частный случай данной теоремы – достаточное условие сходимости ряда φ. Идеи Мальгранжа далее были распространены на дифференциально–q-разностные уравнения (когда к переменным $\delta^i y$ функции F добавляются переменные вида $\delta^i \sigma_q^j y$, где $\sigma_q : y(z) \mapsto y(qz)$ – q-разностный оператор, $q \in \mathbb{C}$) для оценки скорости роста коэффициентов их формальных решений, см. работы Ш. Жанга [8] и Л. Ди Визио [4].

Недавно Л. Столович в работе [7] развил идеи Мальгранжа для доказательства локальной аналитической разрешимости системы уравнений в частных призводных со свойством "больших знаменателей". Данный результат имеет общие глубокие приложения к задачам локальной аналитической классификации (например, нормальные формы векторных полей и особенностей ростков аналитических функций многих переменных).

Литература

1. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Изд-во "Мир", 1964. — 432 с.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 7-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 572 с.

3. Chaperon M. On the Cauchy–Kowalevski theorem. Enseign. Math. V. 55. 2009. P. 359–371.

4. Di Vizio L. An ultrametric version of the Maillet–Malgrange theorem for nonlinear q-difference equations. Proc. Amer. Math. Soc. V. 136. 2008. P. 2803–2814.

5. Malgrange B. Sur le theorème de Maillet. Asympt. Anal. V. 2. 1989. P. 1–4.

6. Robbin J. W. On the existence theorem for differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. V. 19. 1968. P. 1005–1006.

7. Stolovitch L. Big denominators and analytic normal forms. (With an appendix of M. Zhitomirskii.) J. reine angew. Math. V. 710. 2016. P. 205–249.

8. Zhang C. Sur un théorème du type de Maillet–Malgrange pour les équations q-différences-différentielles. Asympt. Anal. V. 17. 1998. P. 309–314.

Сведения об авторе

Гонцов Ренат Равилевич, к. ф.-м. н.,
Инстиитут проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, ст. научн. сотр.,
gontsovrr@gmail.com