Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

# Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории

## Материалы XVIII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина.

**Тула, 23–26 сентября 2020 года**

Тула 2020

ББК 22.1
УДК 51
А45

*Председатель программного комитета* В. Н. Чубариков

*Сопредседатели программного комитета*
академик В. П. Платонов
член-корреспондент В. М. Бухштабер
академик С. В. Конягин

*Ответственный секретарь* Н. М. Добровольский

*Программный комитет:* Артамонов В. А. (Москва), Балаба И. Н. (Тула), Берник В. И. (Минск, Белоруссия), Быковский В. А. (Хабаровск), Востоков С. В. (Санкт-Петербург), Гашков С. Б. (Москва), Гриценко С. А. (Москва), Деза Е. И. (Москва), Демидов С. С. (Москва), Долбилин Н. П. (Москва), Зубков А. М. (Москва), Иванов А. О. (Москва), Иванов В. И. (Тула), Канель-Белов А. Я. (Москва) Карташов В. К. (Волгоград), Касьянов П. О. (Киев, Украина), Конягин С. В. (Москва), Королёв М. А. (Москва), Кузнецов В. Н. (Саратов), Лауринчикас А. (Вильнюс, Литва), Матиясевич Ю. В. (Санкт-Петербург), Михалёв А. В. (Москва), Мищенко С. П. (Ульяновск), Мороз Б. З. (Москва), Нестеренко Ю. В. (Москва), Нижников А. И. (Москва), Ольшанский А. Ю. (Нашвилл, США), Паршин А. Н. (Москва), Пачев У. М. (Нальчик), Подсыпанин Е. В. (Санкт-Петербург), Рахмонов З. Х. (Душанбе, Таджикистан), Устинов А. В. (Хабаровск), Фомин А. А. (Москва), Чеботарев П. Ю. (Москва), Чирский В. Г. (Москва), Antonio Mucherino (France), Patrick Sole (France), Mathieu Dutour (France), Aleksandar Jurišić (Slovenia), Yaokun Wu (China), Mikhail Bounyaev (USA), Oleg Musin (USA), Sergey Shpectorov (UK), Fukshansky Lenny (USA), Navin Singhi (India), Marcelo Firer (Brasil), Yulia Kempner (Israel),

**Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина**

— Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. – 436 с.

*Редакционная коллегия:*
доктор физико-математических наук, профессор *В. Н. Чубариков;*
доктор физико-математических наук, профессор *Н. М. Добровольский;*
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Ю. Реброва;*
кандидат физико-математических наук *Н. Н. Добровольский.*

ISBN 5–87954–388–9

**ББК 22.1**
**УДК 51**

ISBN 5–87954–388–9

© Тульский государственный педагогичекий университет им. Л. Н. Толстого, 2020

**Выдающийся советский математик,**
**доктор физико-математических наук, профессор**
**Борис Максимович Бредихин**

**1920 — 1994**

**Выдающийся советский математик,**
**доктор физико-математических наук, профессор**
**Василий Ильич Нечаев**

**1920 — 1999**

**Выдающийся советский математик,**
**доктор физико-математических наук, профессор**
**Сергей Борисович Стечкин**

**1920 — 1995**

## Пленарные доклады

УДК 511.2

# О условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах

**А. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)**
Термеский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru
**Б. Х. Абраев (Узбекистан, г. Термез)**
Термеский государственный университет
e-mail: babrayev@mail.ru

# On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers

**I. Allakov (Uzbekistan, Termez)**
Termez state of university
e-mail: iallakov@mail.ru
**B. KH. Abraev (Uzbekistan, Termez)**
Termez state of university
e-mail: babrayev@mail.ru

**1. Statement of the result.** Consider a system of equations

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{1}$$

Here $b_1, b_2, \ldots, b_s$ - natural numbers, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ — integer coefficients, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ are all Prime numbers. For $m = 2s + 1$. Wu Tang [1],investigating systems (1), under some additional conditions, obtained an asymptotic formula for the number of solutions. Ì.Ñ.Liu, Ê.Ì.Tsang [2], considered, in the case of system (1), when $s = 2, m = 2$.It is known that the solvability of the system

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

is bound by conditions: a) for any prime $p$ there are integers $l_1, l_2, l_3$ with conditions $1 \le l_1, l_2, l_3, l_4 \le$ $\le p-1$ , that satisfy the system of linear comparisons: $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3 = b_i(i = 1, 2)$. b) there are such real positive numbers $y_1, y_2, y_3$ for which the equality holds: $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3 = b_i(i = 1, 2)$. Denote $B = 3\max\{|a_{ij}|\}i = 1, 2, j = 1, 2, 3$. Let U(X) be the set of pairs $\vec{b} = (b_1, b_2), 1 \le b_1, b_2 \le X$, that satisfy the conditions a) and b).$E(X)-$ the number of $\vec{b} = (b_1, b_2) \in E(X)$ that cannot be represented as (2).

In [2] it is proved that

1) if for some positive real numbers $y_1, y_2, y_3$ the conditions are met, $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}y_j > 0$, $i = 1, 2$, then for sufficiently large $X$ we have $cardU(X) \gg X^2(B^2 \ln\ln B)^{-2}$; 2) $E(X) < X^{2-\varepsilon}$, for $X > B^A$,where $A$ (large enough) and $\varepsilon > 0$ (small enough) is an absolute, efficiently calculated constant.

I. Allakov [3] improved the first result 1), and then [4] generalized these results for system (1), for $s = n, m = n + 1$.

It follows from the above that the question of investigating the system (1), for $s = 2, m = 4$ remains open. Since this issue is not covered in the works of the above authors [5].

In this paper, we consider systems (1) for $s = 2, m = 4$. Assuming $s = 2, m = 4$ from (1), we obtain the following system:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4 \quad (i = 1, 2) \tag{3}$$

For convenience, we introduce the following notation:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1i}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \end{pmatrix} \qquad \Delta_{ij}\begin{pmatrix} a_{11}a_{1j} \\ a_{2i}a_{2j} \end{pmatrix} = \det(A_{ij}) \quad 1 \le i, j \le 4 \ (i \ne j).$$

Denote, by$\Delta_{ij}^{b}$, the determinant obtained from $\Delta_{ij}$ by replacing the $j-$ column with a column of free terms$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. To avoid triviality and degeneracy, we assume that [9]

$$\Delta_{12} \cdot \Delta_{13} \cdot \Delta_{14} \cdot \Delta_{23} \cdot \Delta_{24} \cdot \Delta_{34} \ne 0, \ gcd(\Delta_{12} \cdot \Delta_{13} \cdot \Delta_{14} \cdot \Delta_{23} \cdot \Delta_{24} \cdot \Delta_{34}) = 1 \tag{4}$$

Consider the solvability of system (3), provided:

a) for arbitrary primes $p$ , there are integers $1 \le l_1, l_2, l_3, l_4 \le p - 1$ satisfying comparison solutions

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 + a_{i4}l_4 \equiv b_i(\mod p) \quad (i = 1, 2) \tag{5}$$

b) for any positive real numbers $y_1, y_2, y_3, y_4$, the equality is true:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + y_{i4}y_4 = b_i \quad (i = 1, 2)$$

Next, we will consider vectors $\vec{b} = (b_1, b_2)$ that satisfy these two conditions.We denote: $B = \max\{3|a_{ij}|\} \ \ i = 1, 2, \ \ j = 1, 2, 3, 4$, and $W(X)$.the set of vectors $\vec{b} = (b_1, b_2), 1 \le b_1, b_2 \le X$, satisfying the conditions a), b).

In this paper, the following theorem is proved:

Theorem. *If is a sufficiently large real number and for some positive real numbers $y_1, y_2, y_3, y_4$, the conditions $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + y_{i4}y_4 > 0, \ (i = 1, 2)$ are met, then the estimate is valid*

$$cardW(W) > 1,69954X^2B^{20}[e^{\gamma_0+10}\ln lnB + 2,507e^{10}(lnlnB^{-1})]^{-1}$$

*Here $\gamma_0 = 0,5772...$ is the Euler constant.*

Note that another generalization of the result of M. S. Liu and K. M. Tsang [2] is given in [6]. Numerical results in this direction are obtained in [7].

Before proving the theorem, we prove a Lemma that gives a criterion for verifying the fulfillment of condition (4).

**2.Necessary lemmas.** Let $a_{ij}(i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$ satisfy the conditions of the theorem. For any integer $q \ge 1$ through $\sum_{(q)} -$ denote summation over all $l_1, l_2, l_3, l_4$ satisfying the conditions $1 \le l_j \le q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum_{1\le j\le 4} a_{ij}l_j \equiv b_j(modq)$, $i = 1, 2$.

Let's say

$$N(q) = \sum_{(q)} 1.$$

Lemma 1 *For any prime $p > 5$, the equality $N(p) = 0$,holds if and only if there exists such a $k$, $k, 1 \le k \le 4$, $\Delta_{j_1J_2} \equiv 0(\mod p)$,when ever $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, 4, b\} \setminus \{k\}$ .*

Lemma 2 *If $(b_1, b_2)$ is a fixed value of $\vec{b}$ squared $[\tau; 1 + \tau]^2$ , for which $N(p) > 0$ , for all $p$, then there exists at least*

$$N_1 \ge 10,125X^2(m^2B^4)^{-1}$$

*values of $(z_1, z_2)$ atisfies the conditions $1 \le z_i \le X, \ z_i \equiv b_i(\mod m)$, $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}y_j \equiv z_i \ \ (i = 1, 2)$.*

## REFERENCES


1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables// Acta Math.Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.

2. Ming-Chit Liu and Kai-Tsang. On pairs of linear equations in three prime an application to Goldbach's problem //J.reine angew.Math.-1989.-V.399-P.109- 136.

3. Allakov I. On the solvability of a pair of linear equations with three prime variables. / / UZB. Matem. zhurn.-1993. - ¹1. - pp. 26-34.

4. Allakov I. On the solvability conditions of a system of linear Diophantine equations in Prime numbers //Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., i- Kazan, 2006. - No. 1. - P. 3-10.

5. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - P.13-20.

6. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. Berlin- New York . - 1989. - P.595-624.

7. Allakov I., Safarov A. Sh. About one additive problem Hua-Loo-Keng's // Chebyshevskii sbornik, 2019, vol. 20, no 4, pp. 32-45.


---

УДК 511.3

# Теоремы о среднем значении кратных тригонометрических сумм

**Л. Г. Архипова (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su
**В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

# Mean-value theorems for multiple trigonometric sums

**L. G. Arkhipova (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su
**V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

В докладе обсуждаются обобщения теорем И. М. Виноградова и Г. И. Архипова о среднем значении степени модуля тригонометрической суммы. Первая теорема о среднем, лежащая в основе метода тригонометрических сумм, найдена И. М. Виноградовым. Ю. В. Линнику принадлежит $p$-адический вариант доказательства этой теоремы, усовершенствованный впоследствии А. А. Карацубой, Н. М. Коробовым, Г. И. Архиповым и другими.

Замечательное применение метода тригонометрических сумм найдено Д. Е. Литтлвудом в теории дзета-функции Римана, что позволило уточнить остаток Валле-Пуссена в асимптотической формуле для числа простых, не превосходящих любой наперёд заданной границы. В основе доказательства этого утверждения лежит оценка дзетовой суммы вида

$$S = S(P;t) = \sum_{n \le P} n^{it}.$$

Дальнейшие улучшения оценки дзетовой суммы связаны с применением метода И. М. Виноградова.

Нами найдены оценки для любого целого $k$, отличного от нуля, подобных кратных тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n \le P_1} \cdots \sum_{n \le P_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it}, \sum_{n \le P} \tau_s(n)(n+k)^{it}, \sum_{p \le P} (p+k)^{it},$$

где $\tau_s(n)$ — многомерная функция делителей числа $n$, выражающая число решений уравнения $n_1 \dots n_s = n$ в натуральных числах $n_1, \dots, n_s$; а переменная $p$ пробегает последовательность всех простых чисел.

## 1. Теорема о среднем для «равноправных» переменных

В качестве первого шага получения этих оценок дадим доказательство теоремы о среднем для многочленов от нескольких переменных заданной степени.

Пусть $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1 + \dots + t_r \le n, \quad t_1, \dots, t_r \ge 0,$$

где каждое неизвестное $x_{i,j}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le 2k$, принимает все целые значения от 1 до $P_j$, причём $1 < P_1 \le P_2 \le \dots \le P_r \le 2P_1, \mathbf{P} = (P_1, \dots, P_r)$, а величины $n, k, r$ являются натуральными числами. Очевидно, что

$$J = J(\mathbf{P}; n, k, r) = \int \cdots \int_{\Omega} |S(A)|^{2k} \, dA,$$

где

$$S(A) = S(A; \mathbf{P}; n, k, r) = \sum_{x_1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp\{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)\},$$

причём $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\dots t_r \le n}}^{n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

число коэффициентов многочлена $f(\mathbf{x})$ равно $m = \binom{n+r}{r}$, символ $\Omega$ обозначает куб размерности $m$ следующего вида

$$0 \le \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n,$$

буква $A$ обозначает набор вещественных коэффициентов $\alpha(t_1,\dots,t_r), 0 \le t_1,\dots,t_r, t_1+\dots+t_r \le n$, многочлена $f(x_1,\dots,x_r)$ степени $n$ от $r$ переменных $x_1,\dots,x_r$, наконец,

$$d\Omega = \prod_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_r\le n}}^{n} \cdots \prod_{t_r=0}^{n} d\alpha(t_1,\dots,t_r).$$

Теорема 1. *Пусть* $3 \le n, 2 \le r,$ *— натуральные числа,* $0 \le \tau$ *— целое число,* $m = \binom{n+r}{r}, m_1 = \frac{nrm}{r+1}$, *и пусть* $k \ge m\tau$. *Тогда для величины* $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ *имеем оценку*

$$J \le D(\tau) P_1^{2rk-\Delta(\tau)},$$

*где*

$$\Delta(\tau) = m_1(1-(1-1/n)^\tau), \quad D(\tau) = (2^{nr}(n+1^n)km^{-1})^{2k}.$$

## 2. Теоремы о среднем для «неравноправных» переменных

Приведем теоремы о среднем в качестве подготовительной работы для оценок сумм по простым числам вида

$$\sum_{p\le N} e^{2\pi i \frac{t}{p}}; \quad \sum_{p\le N} B_s\left(\left\{\frac{t}{p}\right\}\right); \quad \sum_{p\le N} (p+l)^{it}, l \ne 0; \quad \sum_{p\le N} (p+k)^{it}\chi_q(p+k), k \not\equiv 0 \pmod q;$$

где $l, k$ — целые числа, $p$ пробегает простые числа, $\chi_q(n)$ — характер Дирихле от вычета $n$ по некоторому модулю $q > 1$, $B_s(\{x\})$ — функция Бернулли с номером $s$ от дробной части вещественного числа $x$.

Первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм с простыми числами и соответствующие фундаментальные постановки задач в теории простых чисел принадлежат И.М.Виноградову.

В основе оценок этих сумм по простым лежат оценки при некоторых $v \ge 1$ сумм, скрученных с многомерной функцией делителей числа, имеющих вид

$$\sum_{n\le N} \tau_v(n) e^{2\pi i \frac{t}{n}}; \quad \sum_{n\le N} \tau_v(n) B_s\left(\left\{\frac{t}{n}\right\}\right); \quad \sum_{n\le N} \tau_v(n)(n+l)^{it}, l \ne 0;$$

$$\sum_{n\le N} \tau_v(n)(n+k)^{it}\chi_q(n+k), k \not\equiv 0 \pmod q,$$

где $\tau_v(n)$ — многомерная функция делителей числа $n$, обозначающая число решений уравнения $n_1 \dots n_v = n$ в натуральных числах $n_1,\dots,n_v$.

Первым шагом здесь являются оценки кратных тригонометрических сумм с равноправными промежутками изменения переменных суммирования,

$$M_s < M_s' \le 2M_s, M_1 \le M_s \le 2M_1, s = 1,\dots,r,$$

т.е. сумм вида

$$\sum_{M_1<n_1\le M_1'} \cdots \sum_{M_r<n_r\le M_r'} e^{2\pi i \frac{t}{n_1\dots n_r}}; \quad \sum_{M_1<n_1\le M_1'} \cdots \sum_{M_r<n_r\le M_r'} B_s\left(\left\{\frac{t}{n_1\dots n_r}\right\}\right);$$

$$\sum_{M_1<n_1\le M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\le M_r'}(n_1\dots n_r+l)^{it}, l\ne 0;$$

$$\sum_{M_1<n_1\le M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\le M_r'}(n_1\dots n_r+k)^{it}\chi_q(n_1\dots n_r+k), k\not\equiv 0 \pmod q,$$

Отметим, что полученные здесь результаты подобны теореме И. М. Виноградова для дзетовых сумм.

## 3. Формулировка теорем о среднем

Теорема 2. *Пусть $n\ge 25, r$ — натуральные числа,*

$$M_s\le M_s'<2M_s(1\le s\le r), 1<M_1\le M_2,\dots,M_r\le 2M_1,$$

$$t=M_1^{n-\theta}, 0\le\theta\le 1,$$

$$S=\sum_{m_1=M_1}^{M_1'}\cdots\sum_{m_r=M_r}^{M_r'}e^{2\pi iF(m_1\dots m_r)}, F(x)=\frac{t}{x}.$$

*Тогда найдётся положительная постоянная $\gamma$ такая, что*

$$S\ll M_1\dots M_rM_1^{-\rho}, \rho=\frac{\gamma}{m_0}, m_0=r\binom{n+r}{r+1}.$$

Теорема 3. *Пусть $n\ge 25, r$ — натуральные числа, $k\ne 0$ — целое,*

$$M_s\le M_s'<2M_s(1\le s\le r), 1\le M_1\le M_2,\dots,M_r\le 2M_1,$$

$$t=M_1^{n-\theta}, 0\le\theta\le 1,$$

$$T=\sum_{m_1=M_1}^{M_1'}\cdots\sum_{m_r=M_r}^{M_r'}e^{2\pi it\ln(m_1\dots m_r+k)}.$$

*Тогда найдётся положительная постоянная $\gamma$ такая, что*

$$T\ll M_1\dots M_rM_1^{-\rho}, \rho=\frac{\gamma}{m_0}, m_0=r\binom{n+r}{r+1}.$$

## 4. Теоремы о среднем для последовательности многочленов биномиального типа

Предметом дальнейшего рассмотрения, с одной стороны, являются последовательности многочленов, возникающих из перечислительных задач комбинаторики и классического исчисления конечных разностей в численном анализе (интерполяция, квадратурные формулы). С другой стороны, в основе статьи лежат аддитивные задачи теории чисел, в современном изложении которых выдающуюся роль играет “круговой метод Г. Харди – Дж. Литтлвуда – С.Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова”. В центре метода тригонометрических сумм находится теорема И. М. Виноградова о среднем.

Пусть задана последовательность многочленов $\{p_n(x)\}$, удовлетворяющая при $n \geq 0$ равенствам

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

причём точная степень $p_n(x)$ равна $n$, а коэффициент при старшей степени равен 1. Такую последовательность $\{p_n(x)\}$ называют последовательностью многочленов биномиального типа.

Приведём примеры. Последовательности точных степеней

$$p_n(x) = x^n, n \geq 0,$$

имеем бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k};$$

нижних факториалов

$$p_n(x) = (x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

по индукции находим формулу Вандермонда

$$p_{n+1}(x+y) = (x+y-n)p_n(x+y) = (x+y-n)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k)p_k(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)(y-n+k)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{k+1}(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} p_k(x)p_{n-k+1}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y);$$

верхних факториалов

$$p_n(x) = (x)^n = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

аналогично предыдущему доказывается, что эта последовательность многочленов относится к биномиальному типу;

многочленов Абеля

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, a \in \mathbf{R}, p_0(x) = 1;$$

экспоненциальных многочленов

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

где $s(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода, определяемые соотношением

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k, n \geq 1, (t)_0 = t^0 = s(0,0) = 1;$$

многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}(-x)^k, n \geq 0;$$

являются последовательностями многочленов биномиального типа.

Теорема 4. *Пусть $p_n(x)$ — последовательность многочленов биномиального типа, пусть $J = J(P; n, k, \Lambda)$ — число решений системы диофантовых уравнений вида*

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j p_k(x_j) = \lambda_k, 1 \leq k \leq n,$$

*где неизвестные $x_j, 1 \leq j \leq 2k$, пробегают целые значения в пределах от 1 до $P$, а правые части уравнений $\lambda(k)$ являются постоянными и могут принимать любые целые значения.*

*Тогда при $k \geq n\tau, \tau \geq 0$, справедлива оценка*

$$J \leq D(\tau)P^{2k-\Delta(\tau)}, \Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}\right).$$

## 5. Теорема о среднем модуля $L$-функции Дирихле в критической полосе

В настоящей статье дан вывод асимптотики среднего значения модуля $L$ — функций Дирихле в критической полосе.

Пусть $q > 1$ — натуральные числа, $T > 1$ — вещественное число, $p$ — последовательность всех простых чисел, $\chi$ — примитивный характер Дирихле по модулю $q$, $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, $0 \leq \sigma \leq 1$ — критическая полоса $L$-функции Дирихле. При $\Re s = \sigma > 1$ эта функция определяется абсолютно сходящимся рядом и бесконечным произведением

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Теорема 5. *При $1/2 < \sigma < 1$ и $T \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\int_1^T |L(s,\chi)|\,dt = C(\sigma,\chi)T + O\left(q^{1-\sigma}T^{3/2-\sigma}\ln(qT)\right),$$

*где*

$$C(\sigma,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2}{n^{2\sigma}},$$

*причём коэффициенты $\alpha_n, n \geq 1$, определяются из разложения в ряд Дирихле при $Res > 1$ функции*

$$L^{1/2}(s,\chi) = \prod_p\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^s}.$$

---

УДК 512.552

# Градуированные первичные кольца и модули[1]

**И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ
e-mail: ibalaba@mail.ru
**А. В. Михалёв (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru

# Graded prime rings and modules

**I. N. Balaba (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
Moscow center for fundamental and applied mathematics of MSU
e-mail: ibalaba@mail.ru
**A V. Mikhalev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: aamikhalev@mail.ru

Первичные кольца и модули играют значительную роль в структурной теории градуированных колец. Рассмотрим различные вариации данных понятий.

Пусть $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ – ассоциативное кольцо с единицей, градуированное мультипликативной группой $G$. Градуированный идеал $P$ кольца $A$ называется *gr-первичным*, если для любых однородных элементов $a, b \in A$ из включения $aAb \subseteq P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$. Градуированное кольцо $A$ называется *gr-первичным*, если 0 является gr-первичным идеалом.

Пересечение всех gr-первичных идеалов $\mathcal{B}_{gr}(A)$ кольца $A$ называется *градуированным первичным радикалом*. Градуированный первичный радикал $\mathcal{B}_{gr}(A)$ является наибольшим градуированным идеалом, содержащимся в первичном радикале $\mathcal{B}(A)$ кольца $A$, рассматриваемого без градуировки. Множество его однородных элементов совпадает со множеством однородных строго нильпотентных элементов.

Если $\mathcal{B}_{gr}(A) = 0$, то $A$ – *gr-полупервичное* кольцо. Кольцо $A$ gr-полупервично тогда и только тогда, когда оно не содержит ненулевых градуированных нильпотентных идеалов.

Ясно, что всякое gr-первичное кольцо является gr-полупервичным, а всякое первичное (полупервично) градуированное кольцо является gr-первичным (соответственно, gr-полупервичным). Заметим, что gr-полупервичное (даже gr-простое) кольцо может не быть полупервичным. В то же время для некоторого класса групп данные понятия совпадают.

Градуированный спектр $\mathrm{Spec}_{gr}(A)$ – множество всех градуированных первичных идеалов градуированного кольца – играет важную роль при построение некоммутативной алгебраической геометрии.

Понятие первичности естественным образом обобщается на модули.

Градуированный правый $A$-модуль $M$ называется *gr-первичным*, если для каждого ненулевого градуированного подмодуля $N$ модуля $M$ и каждого градуированного идеала $I$ кольца $A$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

из того, что $IN = 0$ следует $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$. Это эквивалентно тому, что $\mathrm{Ann}_A(N) = \mathrm{Ann}_A(M)$ для каждого ненулевого градуированного подмодуля $N$ модуля $M$.

Градуированный модуль $M$ называется *точным*, если $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$, и *коточным*, если существуют такие однородные элементы $m_1, m_2, ..., m_n \in h(M)$, что $\mathrm{Ann}_A\{m_1, m_2, ..., m_n\} = 0$.

Теорема 1. *[1] Градуированное кольцо $A$ – gr-первично тогда и только тогда, когда существует точный (коточный) gr-первичный $A$-модуль.*

*Если $A$ – gr-первично кольцо, то каждый проективный градуированный $A$-модуль является gr-первичным.*

Многие классические градуированные радикалы являются специальными радикалами категории градуированных колец и определяются подклассами первичных градуированных модулей [2]. Например, $\mathcal{B}_{gr}(A)$ является пересечением аннуляторов всех gr-первичных правых $A$-модулей [3].

Градуированное кольцо $A$ называется *gr-строго первичным справа* если для любого ненулевого градуированного идеала $I$ кольца $A$ существует такое конечное множество $F \subseteq h(I)$, что правый аннулятор $r_A(F) = \{a \in A \mid Fa = 0\} = 0$.

Градуированный правый $A$-модуль $M$ называется *gr-строго первичным*, если $M$ – gr-первичный и для каждого ненулевого градуированного подмодуля $N \subseteq M$ и любого однородного элемента $m \in h(M)$ существуют однородные элементы $x_1, x_2, ..., x_k \in h(N)$ такие, что $\mathrm{Ann}_A\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathrm{Ann}_A(m)$.

Теорема 2. *[1, теорема 1] Для градуированного кольца $A$ следующие условия эквивалентны:*

*1) $A$ gr-строго первичное справа;*

*2) для любого ненулевого однородного элемента $a \in h(A)$ существуют однородные элементы $a_1, a_2, ..., a_k \in h(A)$, такие что если $aa_ib = 0$ для всех $i = 1, ..., n$, то $b = 0$;*

*3) $A_A$ – gr-строго первичный модуль;*

*4) градуированная инъективная оболочка $E^{gr}(A_A)$ не содержит ненулевых градуированных вполне инвариантных подмодулей;*

*5) существует коточный gr-строго первичный правый $A$-модуль.*

В [4] определялся *правый gr-строго первичный радикал* $\mathcal{S}_{gr}(A)$ градуированного кольца $A$, а именно,

$$\mathcal{S}_{gr}(A) = \bigcap\{P \mid A/P - \text{gr-строго первичное справа кольцо}\}.$$

А поскольку класс всех gr-строго первичных справа колец является специальным классом градуированных колец, то правый gr-строго первичный радикал определяется некоторым общим классом градуированных модулей, являющимся подклассом gr-первичных модулей, а именно классом всех gr-строго первичных модулей $M_A$ таких, что $M$ является коточным $A/\mathrm{Ann}_A(M)$-модулем.

Понятие кольца со свойством вставки множителя было введено Беллом в 1970 году для почти колец [5].

Градуированный правый идеал $I$ кольца $A$ называется *идеалом со свойством вставки множителя* или *IFP-идеалом* , если для любых однородных элементов $a, b \in A$ из того, что $ab \in I$ следует $aAb \in I$. Кольцо $A$ называется *IFP-кольцом* , если 0 – IFP-идеал.

Теорема 3. *Пусть $A$ - градуированное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*1) $A$ – IFP-кольцо;*

*2) левый аннулятор $l_A(a)$ является идеалом для любого однородного элемента $a \in A$;*

*3) $l_A(a)$ является IFP-идеалом для любого однородного элемента $a \in A$ ;*

*4) $A/l_A(a)$ является IFP-кольцом для любого однородного элемента $a \in A$ .*

Теорема 4. *Множество однородных элементов градуированного первичного радикала IFP-кольца совпадает со множеством всех однородных нильпотентных элементов.*

Отметим, что первичность с успехом используется при изучении различных алгебраических систем. В [6] авторами было введено понятие градуированной $\Omega$-группы, включающее в себя не только ассоциативные алгебры (с градуировкой и без оной) и группы, но также алгебры и супералгебры Ли, конформные и вертексные алгебры. В работе дано поэлементное описание первичного радикала градуированной $\Omega$-группы, установлено, что градуированный первичный радикал градуированной $\Omega$-группы с условием конечности совпадает с нижним слабо разрешимым (в смысле Парфенова) радикалом.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Балаба И.Н. Первичные градуированные модули // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Том 14, № 4. С. 65–74.

2. Balaba I. N. Special radicals of graded rings // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2004. Vol. 44, no. 1. P. 26–33.

3. Liu S.-X., van Oystaeyen F. Group-graded rings, smash product and additive categories // Perspectives in ring theory. – Kluwer Academ Press, 1988. P. 299 – 300.

4. Năstăsescu C., van Oystaeyen F. The strongly prime radical of graded rings // Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B. 1984. Vol. 36. P. 243–251.

5. Bell H. E. Near-rings in which each element is a power of itself // Bull. Austral. Math. Soc. 1970. Vol. 2. P. 363—368.

6. Михалёв А.В., Балаба И.Н., Пихтильков С.А. Первичный радикал градуированных $\Omega$-групп // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Том 12, № 2. С. 159–174.


---

УДК 511.32

# О равенстве и сопряженности слов в полугруппах Артина[1]

**В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
**А. Е. Устян (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

# On coherence and problem of occurrence in Artin groups with three-structure

**V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)**
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-41-710002 р-а.

**A. E. Ustian (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru

Группой Артина называется группа, заданная конечной системой образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и системой определяющих соотношений $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, где $i, j \in I$, через $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ обозначается слово $a_i a_j a_i \ldots$ состоящее из $m_{ij}$ чередующихся букв $a_i, a_j$, $m_{ij}-$ элемент симметрической матрицы Кокстера, соответствующей данной группе.

Копредставление группы $G$ будет иметь вид:

$$G = \langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j \in I\ \rangle \tag{1}$$

Каждой группе Артина можно поставить полугруппу Артина:

$$G^+ = \langle\langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j \in I\ \rangle\rangle \tag{2}$$

С каждой группой Артина связана группа Кокстера:

$$\overline{G} = \left\langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n;;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}},\ a_i^2, i, j \in I\ \right\rangle \tag{3}$$

Группа Артина $G$ называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера $\overline{G}$ является конечной группой. Данный класс групп был определен Титсом.

Классу групп Артина конечного типа принадлежит группа кос $\mathcal{B}_{n+1}$.

Ф. Гарсайдом в [1] было доказано, что полугруппа $\mathcal{B}_{n+1}^+$ изоморфна вложима в $\mathcal{B}_{n+1}$, и слова $v, w \in \mathcal{B}_{n+1}^+$ сопряжены в $\mathcal{B}_{n+1}^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в $\mathcal{B}_{n+1}$.

Аналогичное утверждение было доказано Э. Брискорном, К. Сайто для полугрупп Артина конечного типа [2]: полугруппа Артина $G^+$ изоморфно вложима в соответствующую группу Артина $G$, и слова $v, w \in G^+$ сопряжены в $G^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в $G$.

К. Аппель и П. Шупп определили группы Артина большого и экстрабольшого типа, в которых [4], [5], [6], была решена проблема сопряженности слов.

Известно, что каждой группе Артина соответствует конечный граф Г. Сопоставим взаимно-однозначным образом, каждой вершине $v_i \in \Gamma$ образующий $a_i$ группы $G$, а каждому ребру, соединяющему вершины $v_i,\ v_j$ поставим в соответствие число $m_{ij}$ матрицы Кокстера соответствующей группе $G$.

Если вершины $v_i,\ v_j$ не соединены ребром, то паре $(v_i,\ v_j)$ поставим в соответствие $\infty$.

Построенный граф Г называется графом Кокстера, а группа Артина, соответствующая данному графу будет иметь копредставление (2).

В [3] были определены группы Артина с древесной структурой.

Определение 1. *Группа Артина $G$ называется группой Артина с древесной структурой, если соответствующий ей граф Г есть дерево-граф.*

В группах Артина с древесной структурой числа Кокстера $m_{ij}$ при $i \neq j$ принимают любые значения: $m_{ij} \in \{2,\ 3,\ \ldots\}$.

Теорема 1. *[7] В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

Определение 2. *Будем говорить, что в полугруппе $B$ слова $v, w \in B$, сопряжены в $B$, если существует $z \in B$, что $zw = vz$ либо $wz = zv$.*

Теорема 2. *[9] Полугруппа Артина экстрабольшого типа изоморфно вложима в соответствующую группу Артина экстрабольшого типа.*

Теорема 3. *[9] В полугруппе Артина $G^+$ экстрабольшого типа, слова $v, w \in G^+$ сопряжены в $G^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в соответствующей группе Артина экстрабольшого типа.*

Теорема 4. *[9] В полугруппе Артина $G^+$ экстрабольшого типа алгоритмически разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 5. *[9] Полугруппа Артина $G^+$ большого типа изоморфно вложима в соответствующую группу Артина большого типа.*

Теорема 6. *[9] Слова $v, w \in G^+$, где $G^+$ - полугруппа большого типа, сопряжены в $G^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в соответствующей группе Артина большого типа.*

Теорема 7. *[9] В полугруппе Артина $G^+$ большого типа алгоритмически разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 8. *[10] Полугруппа Артина с древесной структурой $G_\Gamma^+$ изоморфно вложима в соответствующую группу Артина с древесной структурой $G_\Gamma$.*

Теорема 9. *[10] Слова $v, w \in G_\Gamma^+$, сопряжены в $G_\Gamma^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в соответствующей группе $G_\Gamma$.*

Теорема 10. *[10] В полугруппе Артина с древесной структурой алгоритмически разрешима проблема сопряженности слов.*

Определение 3. *Группа Артина $G$ называется группой Артина с обобщенной древесной структурой, если она есть свободное произведение групп Артина и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, порожденных образующими объединяемых групп.*

Теорема 11. *В группах Артина с обобщенной древесной структурой, порожденных группами Артина экстрабольшого типа и группами Артина с древесной структурой, разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 12. *Пусть $G$ - группа Артина с обобщенной древесной структурой групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, тогда соответствующая полугруппа Артина $G^+$ изоморфно вложима в соответствующую группу Артина $G$.*

Теорема 13. *В полугруппе Артина $G^+$, соответствующей группе Артина с обобщенной древесной структурой, порожденной группами Артина экстрабольшого типа и группами Артина с древесной структурой, слова $v, w \in G^+$ сопряжены в $G^+$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в соответствующей группе Артина $G$.*

Теорема 14. *В полугруппе Артина $G^+$, соответствующей группе Артина с обобщенной древесной структурой, порожденной группами Артина экстрабольшого типа и группами Артина с древесной структурой, разрешима проблема сопряженности слов.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garside F.A. The braid group and other groups//Quart. Math. Oxford ser.(2), 1969, V.20, P.235-254

2. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и Кокстера// Математика, 1974, т. 18, №6, С. 56-79

3. Безверхний. В.Н. О группах Артина и Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Тезисы V международ. конф. Тула, 2003, С. 33-34.

4. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Ivent. Math. 1983, Vd 72, P. 201-220.

5. Appel.K. One Artin groups and Coxeter groups of large type/Contemp. Math. 1984, V.33, P.50-78.

6. Безверхний. В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 26-61.

7. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1,С. 67-82.

8. Безверхний. В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа.// Фундаментальная и прикладная математика 1999 г. Т. 5, Вып. 1, С. 1-38.

9. Безверхний. В.Н., Устян А. Е., О полугруппах Артина.// Фундаментальная и прикладная математика 2019 г. Т. 22, Вып. 4, С. 39-49.

10. Безверхний. В.Н., Устян А. Е., О сопряженности слов в полугруппах Артина.//Алгебра, теория чисел и дискретная математика: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII межд. конф., Тула, 2019, С. 32-33.

---

УДК 51(091)

## Творческий путь Н. Н. Лузина в контексте европейской истории первой половины XX века

**С. С. Демидов (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru

## Creative way of N. N. Luzin in the coordinates of European history of the first half of the twentieth century

**S. S. Demidov (Russia, Moscow)**
M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: serd42@mail.ru

Процесс формирования творческой личности Н. Н. Лузина-математика начался в период его студенчества – в окрестности 1905 г. Его незаурядные способности открылись тогда его научному руководителю – Д. Ф. Егорову. Большую роль в становлении его таланта сыграла поездка в Париж в 1906 г., куда он попал до известной степени случайно. Его, в ту пору студента математического отделения физико-математического факультета Московского университета, сумел командировать туда профессор Егоров. Сделал он это, спасая талантливого студента от вовлечения в революционные события, разворачивавшиеся тогда в Москве. Так

первое столкновение с превратностями начинавшегося бурного столетия оказало плодотворное воздействие на ученого, только вступавшего на творческий путь. Пребывание молодого Лузина в Париже способствовало формированию его математического дарования и подготовило почву для вхождения в круг идей теории множеств и теории функций действительного переменного на путях, проложенных французскими математиками – Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом. Именно там и тогда он обратил особое внимание на точку зрения Бореля на актуальную бесконечность, высказанную им в только что разразившемся знаменитом споре об аксиоме выбора.

Окончив в 1906 году университет с дипломом первой степени (зачетное дипломное сочинение – «Об одном методе интегрирования дифференциальных уравнений»), он был оставлен Егоровым при кафедре чистой математики «для приготовления к профессорскому званию», Лузин долго не мог определиться с выбором тематики дальнейших исследований. Лишь к весне 1909 г. она стала проявляться – теория множеств. Одной из тем пробных лекций, полагавшихся подготовить будущему приват-доценту, он избрал континуум-гипотезу. Отныне природа арифметического континуума стала сюжетом его постоянных размышлений.

Здесь необходимо заметить, что по своему складу Лузин не принадлежал к тому типу математиков, для которых их наука является своего рода спортом – он не был «решателем задач». Он был математиком-философом. Эта черта его творческого дарования выделяла его в математическом сообществе и находила свое выражение в самых разных проявлениях. Например, в его дружбе с П. А. Флоренским, начавшейся еще на студенческой скамье. Или в его избрании в 1929 г. в Академию наук СССР по разряду ... «философия»! Эта черта сделала его удобной мишенью для нападок на него философствующих идеологов на советском математическом фронте. Она же лежит в основании тех сложностей, с которыми он столкнулся в пору своей «аспирантуры» при выборе тематики исследований. Его не устраивала тема его «кандидатского» сочинения – методы интегрирования дифференциальных уравнений, его не привлекали технически сложные проблемы дифференциальной геометрии, которыми был занят его уважаемый учитель. Ему был необходим объект, обладающий философской глубиной. Именно таким объектом стал для него арифметический континуум, над тайнами которого размышлял еще Пифагор. Отсюда и увлеченность Лузина континуум-гипотезой Кантора.

Над доказательством континуум-гипотезы он безуспешно бился в 1910 г. Отчаявшись решить проблему, он решил отложить ее на будущие времена (не оставить вовсе, но отложить!) и заняться задачами теории функций действительного переменного. Как раз в сентябре 1910 г. стало известно, что усилия Егорова добиться для него командировки в Геттинген и Париж увенчались успехом. И уже Новый год он встретил в Геттингене, ставшем для него началом периода исключительного творческого подъема. Ему удалось не только преодолеть последствия тяжелого душевного состояния, вызванного неудачей с доказательством континуум-гипотезы, но и найти силы совершить рывок в теорию тригонометрических рядов, в область метрической теории функций, ставшей для него, а впоследствии и для его учеников территорией успешных действий. Так начался первый период его творческой биографии – период исследований в области метрической теории функций.

Продлившееся почти четыре года второе заграничное пребывание Лузина в Геттингене и Париже (1910–1914) стало определяющим для его дальнейшего творческого пути: он окончательно утвердился в выборе основного направления своих исследований (теория множеств и функций действительного переменного), в главных чертах завершил свою магистерскую диссертацию («Интеграл и тригонометрический ряд»), укрепился в своей позиции сторонника Бореля во взглядах на актуальную бесконечность. Последнее во многом предопределило дальнейшее развитие его творческой мысли. И хотя главные результаты его исследований этого периода лежали в области метрической теории функций, основным объектом его напряженной мысли оставался арифметический континуум, в частности, проблема континуума.

Летом 1914 г. он успел вовремя беспрепятственно пересечь Европу (буквально через несколько недель на этом пути начали разворачиваться ожесточенные боевые действия) и вернуться из Парижа в Москву. В Москве его ждала группа студентов, подготовленных для него Егоровым, будущих его учеников. Вершиной первого периода стала его уже упомянутая диссертация, блестящая защита которой состоялась 27 апреля 1916 г., принесшая ему, минуя магистра, степень доктора чистой математики, и замечательные достижения его учеников – первого поколения легендарной Лузитании (Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, П. С. Александрова, М. Я. Суслина и др.). Их трудами Москва становилась одним из центров европейской математической мысли. Отметим, что центр интересов Лузина в 1916–17 гг. сместился в область дескриптивной теории множеств – именно на пространствах этой теории он продолжил свои изыскания о структуре арифметического континуума. Результат Александрова стал решением континуум-гипотезы для борелевских множеств, а открытие Суслиным А-множеств, наглядно показав, что используемые в математике множества вовсе не исчерпываются борелевскими, открыл перед Лузиным и его учениками новые горизонты – аналитические и проективные множества. Континуум-гипотеза продолжала служить роль заветного приза. (Лузин не уставал предлагать ее своим ученикам – вспомним Александрова, Л. Г. Шнирельмана.) Исследования по теории аналитических множеств стали основным содержанием второго периода в его творчестве.

Что важно подчеркнуть, все это разворачивалось на фоне событий, ставших тяжелым испытанием в жизни всей Европы: их сердцевина – Первая мировая война, кардинально изменившая мир и лицо человечества. В частности, для России это было время двух революций и гражданской войны, в результате которых страна оказалась вовлеченной в небывалый эксперимент – построение бесклассового общества. В координатах этих исторических событий, развивалась математическая мысль Лузина, возникла и сформировалась его школа. Такое творческое развитие произошло, казалось бы, наперекор всему. Тяготы, принесенные разразившимися социальными катастрофами, это развитие в чем-то может быть и замедлили, но не стали непреодолимым препятствием.

По законам Российской империи студенты высшей школы, лица, «оставленные при университете для подготовки к профессорскому званию», то есть, говоря нынешним языком, аспиранты, а также приват-доценты и профессора от призыва в армию освобождались. И хотя разразившиеся во время войны революции, переросшие в кровопролитную гражданскую войну, были тяжело пережиты российским обществом, они не положили конец жизни образовательным институтам.

В институты пришла новая молодежь, в частности, те, для кого еще вчера поступление в университет было трудно разрешимой проблемой. Например, выходцы из еврейских местечек. Не остановили революции и математических исследований, тем более, что эти исследования не требовали сколь-нибудь серьезного финансирования. Несмотря на внешние неблагоприятные обстоятельства, школа Лузина тех лет поражает своей творческой активностью. Для ее успешного функционирования чрезвычайно важным стало то обстоятельство, что Франция в Первой мировой войне была союзником: французские математики (а именно они были лидерами в тематике, разработкой которой была занята школа Лузина) были открыты россиянам для общения, страницы французских математических журналов (в том числе Comptes Rendus Академии наук Франции) были к услугам москвичей. И как только открылись возможности зарубежных поездок, Лузин и его ученики начали много и успешно перемещаться по крупным европейским математическим центрам, в том числе, конечно, по французским. Насколько французское математическое сообщество близко к сердцу принимало проблемы москвичей показало его вовлеченность в события «дела академика Н.Н. Лузина».

Логическим завершением второго периода в творческой биографии Лузина стало его последнее пребывание в Париже в 1928–1930 гг., на протяжении которого он усиленно трудился

над изложением своих собственных и результатов своих учеников по теории аналитических множеств – «Лекций об аналитических множествах и их приложениях» [1]. Вопросы конструкции арифметического континуума, в частности, обсуждение континуум-гипотезы, занимают в них важное место. Кстати возможность доказательства ее независимости от аксиом теории множеств он предвидел задолго до результатов К. Геделя. Решение, которое могло быть достигнуто (и было достигнуто П. Коэном в 1963 г.) на этом пути, он не считал достаточным. В этой книге мы находим и наиболее полное изложение его идей, касающихся актуально бесконечных множеств. Его исследования в этом направлении затормозила развернутая в 1936 г. кампания по «делу академика Лузина». Хотя все закончилось для него сравнительно благополучно (еще одна его удача в столкновении с историческими превратностями XX столетия), она стала препятствием для нормального течения его творческой мысли. Из этого «судилища» он вышел надломленным как морально, так и физически. Вечно неуверенный в себе, впечатлительный и мнительный, он особо тяжело пережил предательство своих учеников. Медленно приходя в себя после событий «дела», Лузин, судя по всему, не чувствовал в себе сил, достаточных для того, чтобы на прежнем уровне трудиться над изучением структуры арифметического континуума. Центр его занятий переместился на задачи дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений и др.

Над проблематикой, поднятой Лузиным в его парижских лекциях [1] 1930 г., успешно трудились его ученики (П. С. Новиков, Л. В. Келдыш и др.). Работают над ними и поныне и в нашей стране, и за рубежом.

Среди проблем, затронутых Лузиным в его парижских лекциях, и задача реформирования наших представлений об арифметическом континууме. Как он писал в «Заключении» к этим лекциям [1, с. 268–269]: «вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счетное множество... Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются паразитическими во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно...». Так что одной из проблем, которые эффективист Лузин ставил перед математикой, становится задача «очищения» арифметического континуума от паразитических образований. Таким, освобожденным от виртуальных образований, видел он арифметический континуум будущего. Реализуема ли такая идея? Если да, то долго ли предстоит ожидать ее реализации?

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лузин Н. Н. Собрание сочинений. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 9–269.

---

УДК 511

# Борис Максимович Бредихин и его исследования в теории чисел

**Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tspup.ru
**У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)**
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: urusbi@rambler.ru
**В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru

# Boris Maximovich Bredikhin and his research in numbertheory

**N. M. Dobrovolsky (Russia, Tula)**
Tula State University named after L.N. Tolstoy
e-mail: dobrovol@tspup.ru
**U. M. Pachev (Russia, Nalchik)**
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov
e-mail: urusbi@rambler.ru
**V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2009@live.ru

В докладе будет рассказано об основных результатах Б.М. Бредихина в теории чисел и его жизненном пути.

1. Краткие биографические сведения;
2. Основные достижения Б.М. Бредихина в теории чисел;
3. Научно-педагогическая деятельность Б.М. Бредихина;

Борис Максимович Бредихин родился 18 декабря 1920 году в с. Грачёвка Оренбургской области. с 1920 по 1935 гг. Бредихин Б.М. жил и учился в г. Куйбышеве. Осенью 1938 года поступил на физико-математический факультет Горьковского университета. Но, проучившись два года в этом университете, оставил учёбу из-за тяжёлых материальных обстоятельств и летом 1942 года, вернувшись в Куйбышев, поступил на третий курс Куйбышевского государственного педагогического института. По окончании КГПИ (1944) Бредихин Б.М. был приглашён в аспирантуру при кафедре математического анализа, но не имея особого интереса к этому направлению, он с 1 октября 1953 года по просьбе директора КГПИ на один год был прикомандирован в аспирантуру Саратовского университета к известному во всём мире специалисту по теории чисел Н.Г. Чудакову. За короткий срок после публикации [1] Б.М. Бредихин защитил кандидатскую диссертацию (см. [2]) на тему «Характеры числовых полугрупп с конечной и бесконечной достаточно редкой базой.»

Исследования Б.М. Бредихина можно разделить на следующие циклы:

1. Изучение поведения арифметических функции на полугруппах.
2. Бинарные аддитивные задачи: дисперсионный метод, его дальнейшее развитие и упрощение.
3. Метод сглаживания в аддитивных задачах.

В работе [3], относящийся к циклу I, установлено, что конечный гомоморфизм любой полугруппы вещественных чисел с конечной базой обладает неограниченно растущей сумматорной функцией.

В статье [4] из этого же цикла, связанной со степенными плотностями свободных полугрупп, обобщаются результаты работ Канольда [5] и Шерка [6], относящиеся к естественным множествам натуральных чисел.

В работе [7] Б.М. Бредихин на свободной полугруппе $G$ рассматривает функции

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{N(\alpha) \leqslant x \\ \alpha \in G}} 1 \qquad \text{и} \qquad \pi_G(x) = \sum_{\substack{N(\omega) \leqslant x \\ \omega \in P}} 1\,,$$

где $N(t)$ – норма элемента, $t \in G$, т.е. $N(t)$ – образ элемента $t$ при гомоморфизме полугруппы $G$ в некоторую мультипликативную числовую полугруппу; $P$ – множество образующих полугруппы $G$.

Б.М. Бредихин вводит важное понятие степенной $\theta$ – плотности полугруппы $G$ как значение $\lim_{x\to\infty} \frac{\nu_G(x)}{x^\theta}$ , где $\theta > 0$ и затем изучается взаимосвязь между $\nu_G(x)$ и $\pi_G(x)$. Заслуга Б.М. Бредихина состоит в том, что он значительно обобщил известные асимптотические формулы при $x \to \infty$ для классических функций $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$ на случай произвольной свободной полугруппы $G$ со степенной $\theta$ – плотностью; при $\theta = 1$ получаются обычные асимптотические формулы для указанных функций. Основные результаты Б.М. Бредихина, относящиеся к циклу I, описываются вместе с их применениями в книге А.Г. Постникова [8]. Исследования Б.М. Бредихина по числовым полугруппам со степенными плотностями недавно были значительно продвинуты (см. напр. [9, 10]) представителями тульской школы теории чисел.

Следующий цикл II работ Б.М. Бредихина относится к бинарным аддитивным задачам и применениям к ним дисперсионного метода Ю.В. Линника [11] для решения бинарных задач вида

$$\alpha + \beta = n,$$

где $\alpha$ и $\beta$ принадлежат к достаточно густым и хорошо распределённым в арифметических прогрессиях последовательностям натуральных чисел.

С помощью дисперсионного метода Б.М. Бредихину в работе [12] удалось решить проблему для сдвинутых простых чисел, поставленную Е.С. Титчмаршем в 1930 году и заключающуюся в отыскании асимптотической формулы при $x \to \infty$ для выражения

$$\sum_{0<p-l<n} \tau(p-l),$$

где $\tau$ – функция числа делителей, $l$ – заданное целое число; $p$ – пробегает простые числа с указанным условием. В работе [12] также даётся решение гипотезы Серпинского [13] и Голомба [14] о том, что имеется бесконечно много простых чисел вида $x^2 + y^2 + a$ при любом целом значении $a$.

Цикл работ II составил основу для докторской диссертации «Исследования по дисперсионному методу» Б.М. Бредихина, защищённой им в 1964 году в Математическом институте им. В.А. Стеклова.

К циклу III по нашему разбиению относятся работы Б.М. Бредихина по методу сглаживания, позволяющему упростить применения дисперсионного метода. Многие из этих работ выполнены Б.М. Бредихиным совместно со своими учениками. В результате под руководством Б.М. Бредихина в Куйбышевском педагогическом институте сформировалось научное направление «Разработка максимально элементарных методов решения задач аддитивной теории чисел.» Куйбышевская группа теоретико-числовиков (Б.М. Бредихин, А.А. Полянский, Л.И. Уфимцева, Т.М. Федулина, Т.И. Гришина, Н.А. Яковлева, Л.Ф. Кондакова, Ж.В. Пиядина, Н.П. Рыжова и другие) внесла весомый вклад в решение ряда трудных задач аддитивной теории чисел.

Считаем, что исследования Б.М. Бредихина всё ещё представляют большой интерес для специалистов по теории чисел не только у нас, но и зарубежом (см. напр. [9, 10, 15]).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредихин Б.М. О характеристиках числовых полугрупп с достаточно редкой базой //ДАН СССР, нов. серия, 1953. Т.90, №5. С.707-710.

2. Бредихин Б.М. Характеристика числовых полугрупп с конечной и бесконечной достаточно редкой базой: Автореф. канд. физ.-мат. наук. -Саратов, 1953.

3. Бредихин Б.М. О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп//ДАН СССР. 1954. Т.94, №4. С.609-612.

4. Бредихин Б.М. Нормированные характеры коммутативных полугрупп//Учён. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та, 1958. Вып. 21. С. 269-279.

5. Kanold H.J. Reino und andew. Math m.196, №3-4. 1954.

6. Scherk P.J. Reine und andew. Math m.196, №1-2. 1956.

7. Бредихин Б.М. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями//Матем. сб. 1958. Т.46, №2. С.143-158.

8. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. Из-во «Наука». -М., 1971.

9. Добровольский Н.Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители//Чебышевский сб. 2017. Т.15. Вып.4. С.187-207.

10. Добровольский Н.Н., Реброва И.Ю., Добровольский Н.М. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых чисел//Чебышевский сб. 2020. Т.21, №1. С.165-185.

11. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. -Л., 1961, 208с.

12. Бредихин Б.М. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа I. Проблема делителей для сдвинутых простых чисел//Из АН СССР. Сер. мат. 1963. Т.27, №2. С.439-462.

13. Sierpinski W. Teoria liozl. II. Warsczawa. PWN. 1959.

14. Golomb S.W. Sets of primes with intermediate density. Math. Scand., 3.2. 1959. Pp.264-274.

15. Friendlander I., Iwaniec H., 2018. «On a theorem of Bredikhin and Linnik», Chebyshevskii sbornik. Vol.19, no3. Pp.35-39.

---

УДК 511.3

## Работы Б. М. Бредихина по свободным числовым полугруппам и современная аналитическая теория моноидов натуральных чисел[1]

**Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

# B. M. Bredikhin's works on free numerical semigroups and the modern analytical theory of monoids of natural numbers

**N. N. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)**
Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

В серии работ [1] – [14] Б. М. Бредихин опубликовал результаты исследований, выполненных по теории свободных числовых полугрупп. Для нас важно, что гомоморфным образом свободной числовой полугруппы $G$ со счетной системой $P$ образующих элементов как правило будет числовой моноид с теми или иными свойствами.

В работе [13] Б. М. Бредихин рассматривал дзета-функцию полугруппы $G$:

$$\zeta_G(s) = \sum_{\alpha \in G} \frac{1}{N(\alpha)^s}, \quad s > 1,$$

где $N(\alpha) \geqslant 0$ — образ, "норма" элемента $\alpha \in G$. При таком определении дзета-функция полугруппы $G$ всегда имеет Эйлерово произведение:

$$\zeta_G(s) = \prod_{\omega \in P} \left(1 - \frac{1}{N(\omega)^s}\right)^{-1}, \quad s > 1.$$

Две другие функции, изучение которых было в центре внимания в этих работах Б. М. Бредихина, это

$$\nu_G(x) = \sum_{N(\alpha) \leqslant x} 1, \quad \pi_G(x) = \sum_{N(\omega) \leqslant x} 1.$$

При этом Б. М. Бредихин решал прямую задачу об определении асимптотики функции $\pi_G(x)$ по асимптотике функции $\nu_G(x)$ и обратную задачу об определении асимптотики функции $\nu_G(x)$ по асимптотике функции $\pi_G(x)$.

Совершенно другие истоки были у современной аналитической теории моноидов натуральных чисел. Известно что нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций из класса Коробова выражается либо через гиперболическую дзета-функцию сетки с весами, либо через гиперболическую дзета-функцию решетки, поэтому основные проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа непосредственно связаны с изучением гиперболической дзета-функции решеток и гиперболической дзета-функции сеток с весами. Это необходимо для построения эффективных алгоритмов вычисления оптимальных многомерных квадратурных и интерполяционных формул на основе теоретико-числовых свойств используемых сеток. Оба типа дзета-функций в правой полуплоскости задаются рядами Дирихле, а дзета-функции, соответствующие мультипликативно-замкнутым системам целых чисел, выражаются через L-функции Дирихле.

Гиперболическая дзета-функция решёток в правой полуплоскости абсолютной сходимости ряда Дирихле является непрерывной функцией на пространстве решёток и предел гиперболических дзета-функций по сходящейся последовательности решёток является гиперболической дзета-функцией предельной решётки. Следующий принципиальный вопрос связан с возможностью предельного перехода в левой полуплоскости. Как показали наши исследования существуют моноиды натуральных чисел, для которых дзета-функция не продолжается в левую полуплоскость и предельный переход в правой полуплоскости абсолютной сходимости нарушается для левой полуплоскости. Выяснение возможности такой ситуации на пространстве решёток, несомненно, актуальная задача.

Остановимся кратко на описании состояния современной аналитической теории моноидов натуральных чисел.

Пусть $M$ — произвольный мультипликативный моноид натуральных чисел. Будем через $P(M)$ обозначать множество его простых элементов. Понятно, что если через $\mathbb{P}$ мы обозначаем множество простых чисел, то $M \bigcap \mathbb{P} \subset P(M)$. Кроме простых чисел, попавших в $M$, множество простых элементов $P(M)$ состоит из псевдопростых чисел. Если любые два простых элемента из $P(M)$ взаимнопросты, то моноид $M$ имеет однозначное разложение на простые элементы. Это достаточное условие однозначности разложения на простые элементы, но оно не является необходимым.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида $M$ натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента $x$ из мультипликативного моноида $M$ натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа $x$, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида $M$ равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

В работе [18] дано следующее определение. Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 1. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого $\alpha$ в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [22] была сформулирована гипотеза о "заградительном ряде", а в [24] было доказано, что полуплоскость $\sigma > 0$ является областью голоморфности дзета-функции такого моноида, а мнимая ось целиком является особой линией.

В работах [18]–[27] дается достаточно многогранная современная аналитическая теория моноидов натуральных чисел. Мы остановимся на последней работе, которая близка к работам Б. М. Бредихина.

В работе [9] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности.Это понятие не работает в случае моноидов, образованных произвольной экспоненциальной последовательностью простых. Естественно дать новое определение.

Определение 1. *Последовательность $M$ натуральных чисел имеет $C$ логарифмическую $\theta$-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n \in M,\, n \leqslant x} 1,$$

*справедливо равенство*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

В работе [27] показано, что любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых $PE$ типа $q$ имеет $C$ логарифмическую $\theta$-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бредихин Б. М. О характеристиках числовых подгрупп с достаточно редкой базой // ДАН СССР, нов. серия, 1953, Т. 90, № 5. С. 707–710.

2. Бредихин Б. М. Характеристика числовых полугрупп с конечной и бесконечной достаточно редкой базой : Автореф. дисс. на соискание учён. степени канд. физ.-мат. наук. Саратов 1953.

3. Бредихин Б. М. О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп // ДАН СССР. 1954. Т. 94, № 4. С. 609–612.

4. Бредихин Б. М., Н.Г. Чудаков Теория характеров числовых полугрупп // Научный ежегодник Саратовск. ун-та. 1955. С. 5–8.

5. Бредихин Б. М. Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп // Труды 3$^{\text{го}}$ Всероссийского съезда. Т. 1. 1956. М. АН СССР. С. 3–4.

6. Бредихин Б. М. Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией // УМН. 1956. Т. 11, № 4(40). С. 119–122.

7. Бредихин Б. М., Н. Г. Чудаков. Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМН. 1956. Т. 8, № 4. С. 347–360.

8. Бредихин Б. М. Нормированные характеры коммутативных полугрупп // Учён. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та. 1958. Вып. 21. С. 269–279.

9. Бредихин Б. М. О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп // Изв. вузов. Сер. математика. 1958. Вып. 3. С. 24–30.

10. Бредихин Б. М. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Матем. сб. 1958. Т. 46(88), № 2. С. 143–158.

11. Бредихин Б. М. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // ДАН СССР 1958. Т. 118, № 6. С. 855–857.

12. Бредихин Б. М. Обращение некоторых теорем о степенных плотностях упорядоченных полугрупп // Уч. зап. Куйбышевского гос. ун-та. 1959. Вып. 29. С. 13–20.

13. Бредихин Б. М. Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп // Матем. сб. 1960. Т. 50, № 2. С. 221–232.

14. Бредихин Б. М. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ // Изв. вузов. Сер. матем. 1960. № 6(19). С. 40–49.

15. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, 211, 2014, 23–62.

16. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова, "О гиперболической дзета-функции Гурвица", Чебышевский сб., 17:3 (2016), 72–105.

17. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб., 18:4 (2017), 6–85.

18. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

19. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

20. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

21. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

22. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

23. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

24. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

25. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

26. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

27. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

УДК 514

# Локальные группы в множествах Делоне

**Н. Долбилин (Россия, г. Москва)**
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
dolbilin@mi-ras.ru

# Local Groups in Delone Sets[1]

**N. Dolbilin (Russia, Moscow)**
Steklov Mathematical Institute
dolbilin@mi-ras.ru

In the talk, we discuss local theory of quite arbitrary Delone sets $X$ in Euclidean space, mainly, in $3D$ space. This theory grew out from the local theory of regular systems, i.e. Delone sets with point-transitive symmetry groups. In these theories, so-named *local groups* are especially important. A *local group at point* $x \in X$ is the symmetry group of the neighborhood/cluster $C_x(2R)$ of $x$ with radius $2R$, where $R$ (according to Delone's theory of the 'empty sphere') is the radius of the largest 'empty' ball, that is, the largest ball free of points of $X$.

We give a brief description of concepts and some results of the local theory of regular systems and focus on recent results related to an arbitrary Delone sets in $\mathbb{R}^3$ ([9]). The main result (Theorem 4) seems to be the first rigorously proved statement on *absolutely generic* Delone sets which at the same time implies substantial statements for Delone sets with strong crystallographic restrictions. For instance, an important observation of Shtogrin on the boundedness of local groups in Delone sets with equivalent $2R$-clusters (Theorem 2.) immediately follows from Theorem 4.

We will suggest the 'crystalline kernel conjecture' (Conjecture 1) and its two weaker versions (Conjectures 2 and 3). According to Conjecture 1, in an arbitrary Delone set, points with locally crystallographic axes (of order 2,3,4, or 6) only *inevitably* constitute essential part of the set. These conjectures significantly generalize the famous statement of Crystallography on the impossibility of (global) 5-fold symmetry in a 3D lattice.

## 1. Basic definitions

This paper grew out of the local theory for regular systems, i.e for Delone sets with very strong requirements. On the other hand, here we consider an arbitrary Delone sets in $\mathbb{R}^3$ without any additional assumptions. For example, for a Delone set, we do not suppose a typical condition of the local theory such as the sameness of clusters of certain radius as we did it in numerous papers (see e.g., [2], [4], [6]). Another feature of the paper is as follows, for a Delone set, we consider local groups operated over clusters of radius, namely $2R$ (for definitions see below).

In [7], A.L. Mackay says: "In an infinite crystal there may be extra elements of symmetry which operate over a limited range. These may be seen by non-space-group extinctions in diffraction pattern. ... The local operations need not to be 'crystallographic'."Nevertheless, in this paper, we show that the last statement for regular systems (i.e. for sets with transitive groups) should be significantly revised. If we fix for a Delone sets in 3D space, of type $(r, R)$ the range of action of local groups as $2R$ (for details see below), then, it turns out, one can obtain interesting results on properties of such groups. To accurately formulate the results and open hypotheses we will need several definitions and notations.

Euclidean distance between points $x$ and $x'$ in euclidean space $\mathbb{R}^d$ is denoted by $|x, x'|$.

[1]This work was supported by the Russian Science Foundation under grant 20-11-20141 and performed in Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

Definition 1. *[Delone set] Given positive real numbers $r$ and $R$, a point subset $X$ of $\mathbb{R}^d$ is called a* Delone set of type $(r, R)$ *if the following two conditions hold:*
*(1) an open d-ball $B^o_z(r)$ of radius $r$ centered at any point $z$ of space contains at most one point of $X$;*
*(2) a closed d-ball $B_z(R)$ of radius $R$ centered at an arbitrary point $z$ of space contains at least one point of $X$.*

One can and should adopt the convention in designating the parameters $(r, R)$ to a Delone set $X$ as follows. For a given Delone set $X$, we choose as $r$ the largest possible value satisfying Condition (1) of Definition 1, and choose as $R$ the smallest value satisfying Condition (2). We will need also the following interpretations of the parameters $r$ and $R$:

$$\inf_{x,x'\in X} |x, x'| = 2r, \qquad \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \inf_{x\in X} d(z, X) = R. \tag{1}$$

In the local theory of Delone sets, the key concepts are that of a cluster.

Definition 2 ($\rho$-cluster). *Let $x$ be a point of a Delone set $X$ of type $(r, R)$, $\rho \geq 0$, we call a point set*

$$C_{\mathbf{x}}(\rho) := X \cap B_{\mathbf{x}}(\rho)$$

*the* cluster of radius $\rho$ *at point $x$ or simply the* $\rho$-cluster at $x$.

Definition 3 (equivalent clusters). *Two clusters $C_x(\rho)$ and $C_{x'}(\rho)$ of the same radius $\rho$ at points $x$ and $x'$ are said to be equivalent if there is an isometry $g \in Iso(\mathbb{R}^3)$ such that*

$$g(x) = x' \quad \text{and} \quad g(C_x(\rho)) = C_{x'}(\rho). \tag{2}$$

Definition 4 (cluster group). *Given $x \in X$ and its $\rho$-cluster $C_x(\rho)$, group $S_x(\rho)$ of isometries $s \in Iso(\mathbb{R}^d)$ which leave $x$ fixed and cluster $C_x(\rho)$ invariant is called a cluster group:*

$$S_x(\rho) := \{s \in Iso(\mathbb{R}^d) \,|\, s(x) = x,\, s(C_x(\rho)) = C_x(\rho)\}.$$

It is clear that as the radius $\rho$ increases, the cluster $C_x(\rho)$ expands but the cluster group $S_x(\rho)$ never increases and sometimes can contract only. It is clear that if $0 \leq \rho < 2r$ group $C_x(\rho) = O_x(3)$, i.e. the full point group of all isometries that leave point $x$ fixed. On the other hand, the $S_x(2R)$ is always finite ([6] )

Since the main result grew up ideologically from the local theory of regular systems, here, we briefly recall basic concepts of this theory. Modern in form, the following definitions of regular system and crystal are equivalent to those that go back to E.S. Fedorov.

Definition 5 (regular system, crystal). *A Delone set $X$ is called a regular system if it is an orbit of some point $x$ with respect to a certain space group $G \subset Iso(d)$, i.e.*

$$X = G \cdot x = \{g(x) \,|\, g \in G\};$$

*a Delone set $X$ is a crystal if $X$ is a union of several orbits: $X = \cup_{i=1}^m G \cdot x_i$.*

We emphasize that the notion of a regular system is an essential case of the crystal, i.e. a multi-regular system, and generalizes the lattice concept. In fact, a lattice is a a particular case of a regular system when $G$ is a group of translations generated by $d$ linearly independent translations. Moreover, due to a celebrated theorem by Schoenflies and Bieberbach, any regular system is the union of congruent and mutually parallel lattices.

## 2. Result and conjectures

The local theory of regular systems was motivated by the issue of whether **the identity of all clusters of a certain radius in a Delone set $X$ implies the set $X$ to be a regular system**. The theory began with the celebrated Local criterion in [2].

THEOREM 1 (Local Criterion, [2]). *A Delone set $X$ is a regular system if and only if there is some $\rho_0 > 0$ such that the following two conditions hold:*
*1) all $\rho_0 + 2R$-clusters are mutually equivalent;*
*2) $S_x(\rho_0) = S_x(\rho_0 + 2R)$ for $x \in X$.*

From now on, we restrict ourselves only to the 3D case. One of central problems of the local theory of regular systems is to search for an upper (and lower) bound for the regularity radius, i.e. a minimum value $\hat{\rho}_3 > 0$ such that equivalence of $\hat{\rho}_3$-clusters in a Delone set $X$ implies the regularity of the set $X \subset \mathbb{R}^3$. In [4],[6] is given a proof of the upper bound $\hat{\rho}_3 \leq 10R$. The long proof starts with selection of a special finite o of finite subgroups of $O(3)$. Groups of this list have a chance to occur in Delone sets with equivalent $2R$-clusters as local groups $S_x(2R)$. The list of selected groups is provided by Theorem 2 found by Shtogrin in the late 1970's but published only in 2010 ([8]).

THEOREM 2 ([8]). *If in a Delone set $X \in \mathbb{R}^3$ all $2R$-clusters are mutually equivalent, then the order of any rotational axis of $S_x(2R)$ does not exceed 6.*

Recently, in [5], it was realized that an important statement about groups in Delone sets **with significant requirements on equivalent clusters** may follow from a certain statement true for **pretty general** Delone sets.

Let the maximal order of rotational axis in group $S_x(2R)$ be denoted by $n_x$.

THEOREM 3. *In a Delone set $X \subset \mathbb{R}^3$ there is at least one point $x$ with $n_x \leq 6$.*

Theorem 3 implies Theorem 2 and admits the following enforcement.

THEOREM 4 (Main result). *Given a Delone set $X \subset \mathbb{R}^3$ of type $(r, R)$, let $X_6 \subseteq X$ be the subset of all points $x \in X$such that the maximal order $n_x$ of a rotation axes in $S_x(2R)$ does not exceed 6. Then $X_6$ is a Delone set of a certain type $(r', R')$, where $r \leq r' \leq R' = kR$ for some $k$ independent on $X$.*

Since $2R$-clusters all are full-dimensional, cluster groups $S_x(2R)$ are necessarily finite. We emphasize that the value of $2R$ is the smallest value of radius that guarantees the finiteness of the cluster group of radius $2R$ for any Delone set with parameter $R$.

By virtue of the above, we will single out group $S_x(2R)$ and call it a *local group at $x$*.

Now, among points of $X_6 \subseteq X$ we select points $x$ with the condition $n_x \neq 5$, i.e., all points of $X$ whose local groups contain axes of only 'crystallographic' orders 2, 3, 4, or 6. We call the subset of all such points in $X$ a *crystalline kernel* of $X$ and denote by $K$.

CONJECTURE 1 (Crystalline kernel conjecture). *The crystalline kernel $K$ of a Delone set $X$ is a Delone subset with some parameter $R' \leq kR$, where $k \geq 1$ does not depend on $X$.*

Let $Y$ denote the subset of all points $x \in X$ at which local groups $S_x(2R)$ do not contain the pentagonal axis. It is clear that $K \subseteq Y$ and if $K$ is a Delone set then $Y$ is a Delone set too. Therefore Conjecture 1, if proven, immediately implies Conjectures 2 and 3.

CONJECTURE 2 (5-gonal symmetry conjecture). *Given a Delone set $X \subset \mathbb{R}^3$, the subset $Y$ of points $x$, whose groups $S_x(2R)$ are free of 5-fold axes, is also a Delone set.*

Conjecture 2 enforces Conjecture 3 that seems to be much easier proved.

Conjecture 3 (Weak 5-gonal symmetry conjecture). *Given a Delone set $X \subset \mathbb{R}^3$ with mutually equivalent $2R$-clusters, the local group $S_x(2R)$ contains no 5-fold axis.*

These hypotheses relate to a famous crystallographic theorem on the impossibility of the global 5-fold symmetry in a three-dimensional lattice. Conjectures 1–3 significantly reinforce this classical statement on famous crystallographic restrictions in 3D lattices. Unlike in lattices, in regular systems in $3D$ space, the pentagonal symmetry can *locally* may manifest itself on clusters of a certain radius less than $2R$. So, for instance, there are regular systems such that even group $S_x(r_3)$ contains the 5-fold axis, but the local group $S_x(2R)$ does not. Here, in the systems, $r_3$ ($r_1 < r_2 < r_3 < 2R$) is the 3rd inter-point distance in $X$. But, it is still unknown whether there are regular systems with 5-fold symmetrical $2R$-clusters.

Note that since the regularity radius for dimension 3 is not less than $6R$ (see [1]), among Delone sets $X$ with mutually equivalent $2R$-clusters, there are non-regular and even non-crystallographic sets. Thus, Conjecture 1-3 concern a wide class of these non-regular sets.

In the conclusion, note that the 'main' result, in our opinion, is of a new type. Conjectures 1-3 should be interesting in context of the theory of quasicrystals. For example, in 2D Penrose patterns and in 3D structures of real Shechtman quasicrystals, along with centers of $2R$-clusters with local 5-fold symmetry, there are also Delone subsets of points having only local crystallographic axes. Conjecture 1 states that not only in in these structures but in any other possible Delone sets, points with local crystallographic axes **inevitably** constitute an essential part of the structure.

## REFERENCES


1. I. Baburin, M. Bouniaev, N. Dolbilin, N. Yu. Erokhovets, A. Garber, S. V. Krivovichev, and E. Schulte, On the Origin of Crystallinity: a Lower Bound for the Regularity Radius of Delone Sets, *Acta Crystallographica*, **A74**:6 (2018), 616–629.

2. B. N. Delone, N. P. Dolbilin, M. I. Shtogrin, R. V. Galiulin, A local criterion for regularity of a system of points, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **227**:1 (1976), 19–21.

3. N. Dolbilin, Delone Sets: Local Identity and Global Symmetry, *Discrete Geometry and Symmetry*, Springer Volume dedicated to the 60th anniversary of Professors Karoly Bezdek and Egon Schulte, Springer Proc. Math. Statiist., **234**, Springer, Cham, 2018, 109–125.

4. N. P. Dolbilin, Delone sets in $\mathbb{R}^3$ with $2R$-regularity conditions, *Topology and Physics*, Volume dedicated to the 80th anniversary of of academician. Sergey Petrovich Novikov, Proc. Steklov Inst. Math., **302** (2018), 161–185.

5. N. P. Dolbilin, From Local Identity to Global Order, *Materials* of the XIII Lupanov International Seminar, MSU, June 17-22, 2019, p.13-22.

6. N. Dolbilin, A. Garber, U. Leopold, E. Schulte, On the regularity radius of Delone sets in $\mathbb{R}^3$, 2019,(in print) arXiv:1909.05805.

7. A. L. Mackay, Generalized Crystallography, *Comp & Maths and Appls.*, Vol. 128, №№ 1/2 (1986), 21–37.

8. M. I. Shtogrin, On a bound of the order of a spider's axis in a locally regular Delone system (in Russian), *Abstracts* of the International Conference "Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications" dedicated to the 120-th anniversary of Boris Nikolaevich Delone (1890-1980), Moscow, August 16–20, 2010, 168–169. `http://delone120.mi.ras.ru/delone120abstracts.pdf`.

9. N. P. Dolbilin, Local groups in Delone sets (2020), (in print).

---

УДК 51.091

## Галилео Галилей и Томас Гарриот: задача о полете снаряда

**Е. А. Зайцев (Россия, Москва)**
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

## Galileo Galilei and Thomas Harriot: the problem of projectile flight

**E. A. Zaytsev (Russia, Moscow)**
S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
e-mail: e_zaitsev@mail.ru

1. Вывод о параболической форме траектории полета снаряда стал первым удачным примером применения математики в динамике движения. Ранее использование математики в механике ограничивалось областью статики, в которой движение, по определению, отсутствует, или кинематики, в которой силы не рассматриваются (математическая астрономия). Вывод о параболичности траектории существенно использовал ряд новых постулатов, которые затем будут обобщены И. Ньютоном, и в таком виде лягут в основу классической механики. Среди этих постулатов – закон инерции, закон квадратичной зависимости пути от времени при свободном падении под действием силы тяжести (предшественник второго закона Ньютона) и закон параллелограмма сил и движений, в соответствии с которым сложные силы и вызываемые ими движения могут быть представлены в виде векторной суммы независимых компонент.

2. Хотя интерес к задаче о брошенном теле возник еще в античности, вплоть до XVI в. вопрос о форме траектории не ставился. В доклассической механике основным был вопрос о причине, вызывающей продолжение движения после утраты телом контакта с исходным «двигателем» – рукой, бросившей камень, или тетивой лука, из которого выпущена стрела. Впервые вопрос о форме траектории был поставлен в XVI веке, когда началось применение артиллерийских орудий, особенно мортир и гаубиц, которые в отличие от пушек, стрелявших «в упор», вели навесную стрельбу при больших углах возвышения. Вопрос о траектории такой стрельбы имел известное практическое значение. Знание геометрической формы траектории позволяло, исходя из данных пробных стрельб, находить дальность и высоту полета при произвольном угле возвышения.

Вопрос о форме баллистической траектории был впервые рассмотрен Н. Тартальей (1537); свое окончательное решение он получил лишь спустя столетие в работах Э. Торричелли (1644). Ранее, в 1638 г. тезис о параболичности траектории был доказан Галилеем для частного случая горизонтальной стрельбы (при нулевом угле возвышения).

3. В доклассической механике считалось, что полет снаряда определяется совместным действием двух сил – импетуса, вложенного в него взрывом пороховой смеси и направленного по линии возвышения орудия, и тяжести, направленной вертикально вниз. Движение под действием импетуса рассматривалось как вынужденное или насильственное, а свободное падение вниз – как естественное. Поскольку в физике Аристотеля теория смешанного движения отсутствовала, авторы XVI в. бессознательно прибегали к аналогии с аристотелевской теорией «смеси» вещей.

Согласно Аристотелю, существуют несколько видов смеси. Первый вид – соединение разнородных частей, одна из которых значительно преобладает. В этом случае целое приобретает свойства преобладающей части. Типичный пример: «капля вина не смешивается с 10 тысячами мер воды, но теряет свою форму и изменяется целиком в воду». Второй вид – соединение, в котором компоненты с противоположными свойствами присутствуют с одинаковой интенсивностью; в этом случае они просто исчезают (теплое и холодное одинаковой интенсивности уничтожают друг друга). Третий вид – механическое соединение, при котором части, находясь в составе целого, полностью сохраняют свои свойства (смесь зерен ячменя и пшеницы). Это тот редкий случай аристотелевской физики, когда целое «равно» сумме своих частей; только этот вид смеси позволяет, в принципе, применять к ней количественные оценки. Четвертый, основной для Аристотеля вид смеси – соединение, в котором части «в какой-то мере равны по своей силе». В этом случае «каждая из них изменяет свою природу в направлении преобладающего, но становится не другим предметом, а чем-то средним и общим им обоим».

Смесь (исключение составляют механические соединения) предполагает качественное изменение частей при вхождении в состав целого. Находящиеся в составе целого части не являются независимыми, но изменяют (ослабляют или усиливают) действие друг друга. В теории смеси заключена квинтэссенция аристотелевского холизма – учения о примате целого над частью, согласно которому целое не сводимо к механической сумме своих частей. Количественная оценка смеси является, поэтому, невозможной.

4. Доклассические механики, исследовавшие полет снаряда, исходили из того, что частичные силы, приложенные к движущемуся телу, влияют друг на друга подобно тому, как влияют друг на друга компоненты смеси. Образец рассуждения был задан Никколо Тартальей в трактате «Новая наука»(1537). Согласно Тарталье, баллистическая кривая состоит из трех ветвей. Начальная ветвь соответствует вынужденному движению под действием импетуса; она представляет собой отрезок прямой, являющийся продолжением линии возвышения орудия. Вторая ветвь, соответствующая смешанному движению под действием импетуса и тяжести, представлена дугой окружности. Третья ветвь соответствует естественному движению под действием тяжести; она представлена вертикальным отрезком. В схеме движения Тартальи заметны следы влияния аристотелевской теории смеси. В ней разнонаправленные силы, действующие на летящий снаряд, «борются» друг с другом. На первом отрезке импетус полностью «побеждает» тяжесть, в результате чего снаряд движется по наклонной прямой. На третьем этапе, наоборот, тяжесть полностью нейтрализует импетус, в результате чего снаряд падает вертикально вниз. Это аналоги капли вина, полностью поглощаемой большим количеством воды. В промежутке силы примерно равны, что приводит к искривленной траектории.

5. Практически все трактаты по баллистике XVI – XVII вв. опирались на схему Тартальи. Изредка трехчленное деление траектории даже заменяли двучленным. Так, Д. Сантбек (1561) полагал, что траектория полета состоит из двух прямолинейных ветвей – наклонного отрезка, определяемого импетусом, и вертикального, соответствующего свободному падению под действием тяжести. Из модели Сантбека выпадала, таким образом, промежуточная дуга. Для обоснования трехчастной траектории некоторые авторы XVI в. (Леонардо да Винчи, Бернардино Бальди, Дж. Бенедетти) обращались к аналогии с вращением волчка, которое, в отличие от полета снаряда, можно непосредственно наблюдать. Волчок вначале вращается горизонтально под действием приданного ему кругового импетуса; в этой фазе импетус полностью «нейтрализует» действие тяжести. Затем начинается прецессия – отклонение оси вращения от вертикали; на этом этапе импетус и тяжесть «примерно равны» и «борются» друг с другом. Наконец, на последнем отрезке тяжесть полностью «побеждает» импетус, и волчок падает.

6. В классической механике вывод о параболичности траектории получается геометрически, исходя из разложения движения снаряда на две независимые компоненты – равномерного перемещения вдоль линии возвышения (по инерции) и свободного равноускоренного падения

по вертикали. Именно так рассуждал Торричелли, а до него Галилей (для частного случая горизонтальной стрельбы).

7. Несколько иначе действовал при решении этой задачи Томас Гарриот (1560-1621), которого историки науки называют «английским Галилеем» в силу того, что он независимо от Галилея и даже раньше последнего получил доказательства практически всех теорем новой динамики. Среди его результатов: закон инерции при движении в горизонтальном направлении, закон свободного падения, законы движения (скатывания и подъема) шарика по наклонной плоскости, теорема о параболичности траектории снаряда.

При доказательстве закона параболичности для случая горизонтальной стрельбы Гарриот исходил из соображений, аналогичных тем, на которые впоследствии опирался Галилей, а затем Торричелли. В соответствии с законами классической механики он раскладывал полет снаряда на два движения – инерциальное перемещение по (горизонтальной) линии стрельбы и свободное падение. На горизонтальной линии стрельбы он откладывал равные отрезки, соответствующие равным расстояниям, проходимым в этом направлении за равные промежутки времени. Из точек, являющихся концами этих отрезков, проводил вертикально вниз отрезки, соответствующие расстояниям, которые снаряд проходит в свободном падении. Соединив концы вертикальных отрезков, он получил в качестве траектории кривую, являющуюся полупараболой.

8. В решении задачи о стрельбе при ненулевом угле возвышения Гарриот допустил ошибку. Разложив полет снаряда в композицию двух движений – подъем по линии стрельбы и свободное падение по вертикали, он рассмотрел перемещение по линии стрельбы по аналогии с подъемом тяжелого шарика, запущенного вверх по наклонной плоскости. Исходя из того, что подъем шарика происходит с постоянным замедлением (из-за действия на него силы тяжести), Гарриот сделал вывод о том, что движение снаряда по линии стрельбы также является равнозамедленным.

С точки зрения классической механики ошибка Гарриота состояла в том, что он дважды учел действие на снаряд силы тяжести. С одной стороны, тяжесть замедляет перемещение последнего по линии стрельбы. Здесь она выступает в пассивном модусе как сила сопротивления. С другой стороны, выступая в активном модусе, она ускоряет падение снаряда вниз по вертикали. Полет снаряда складывается, таким образом, из равнозамедленного перемещения по линии стрельбы и равноускоренного падения по вертикали. Траекторией такого движения является парабола, но не симметричная, как в классической механике, а с наклонной осью.

Аналогичную ошибку – двойной учет силы тяжести – Гарриот совершает, решая задачу о стрельбе при отрицательном угле возвышения. В этом случае движение снаряда складывается из двух равноускоренных движений – по линии стрельбы (по аналогии с шариком, катящемся вниз по наклонной плоскости) и по вертикали. Траекторией полета и в этом случае является косая парабола.

9. Ошибка Гарриота является показательной. Дело в том, что к подобному выводу подходил в свое время сам Галилей. В его рукописи (Ms 72, fol. 175v) описан эксперимент по изучению полета тяжелого шарика. В качестве устройства, запускающего шарик, Галилей использовал наклонную плоскость, переходящую в вогнутую дугу наподобие трамплина для прыжков на лыжах. Скатываясь с вершины, шарик попадает на дугу, от которой затем отрывается и летит. При этом отрыв происходит в направлении, которое составляет положительный угол с горизонтом. На рисунке Галилей изобразил траекторию полета шарика. Промеры этой траектории, сделанные исследователями, показали, что она является косой параболой с осью, наклоненной в направлении полета. Сопоставление числовых данных, приводимых в рукописи, с рисунком привело исследователей к выводу, что Галилей в данном случае, по сути, следовал модели Гарриота: полет он представлял в виде равнозамедленного подъема по линии броска и равноускоренного падения вниз. Иными словами, он, как и Гарриот, при исследовании компоненты

движения по линии стрельбы исходил из аналогии с движением шарика по наклонной плоскости. Это – своего рода рецидив аристотелевской теории, которая не допускает разложения сложного движения на независимые компоненты.

10. Галилей, как отмечено выше, доказал теорему о параболичности траектории только для случая горизонтальной стрельбы. Тем не менее, сформулировал он ее в общем виде. В основе его уверенности в том, что в случае ненулевого угла возвышения траекторией полета будет симметричная парабола, лежали соображения симметрии, навеянные аналогией со статическим феноменом – провисанием тяжелой металлической цепочки, закрепленной с двух концов. С точки зрения Галилея, на летящий снаряд и на звено (элемент) цепочки действуют две силы, направленные в разные стороны. В обоих случаях действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Именно она искривляет и траекторию полета снаряда, и цепную линию. Вторая сила имеет разную природу. В случае снаряда, это – импетус, перемещающий его по линии стрельбы. В случае цепочки – это упругая сила, действующая на элемент цепочки в направлении ближайшей точки подвеса. Исходя из идентичности двух схем действия, Галилей (ошибочно) полагал, что в обоих случаях получается одна и та же кривая – симметричная парабола.

Аналогия между полетом снаряда и провисающей цепочкой зародилась в самом начале творческого пути Галилея. Как свидетельствуют его заметки, на протяжении жизни Галилей неоднократно возвращался к этой идее, пытаясь разработать ее в деталях. Несмотря на неудачи, он до последних дней верил в тождественность баллистической траектории и цепной линии. В конце «Бесед и математических доказательств» (1638) Галилей обещает, что в следующем расширенном издании своего трактата он даст исчерпывающее доказательство параболичности траектории, опирающееся на аналогию с провисающей цепочкой.

11. Ранняя история параболической траектории характеризуется, таким образом, не только серией замечательных открытий, но и чередой ошибок, источником которых служат рассуждения по аналогии, связывающие полет снаряда то с вращением волчка, то с движением по наклонной плоскости, то с провисающей цепочкой.

---

УДК 514.8,531.1,531.8

# О конфигурационных пространствах шарнирных механизмов

**М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)**
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, мехмат
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

# On the configuration spaces of linkages

**M. D. Kovalev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

## 1. Ответ на вопрос, поставленный на прошлогодней конференции

Мы рассматриваем плоские шарнирные механизмы в традиционном их понимании. На рисунках закреплённые в плоскости шарниры обозначены крестиками, незакреплённые (свободные) — кружочками. Класс $Q_1$ механизмов составляют механизмы, каждый свободный

шарнир которых движется по кривой. Интересно, что среди этих механизмов имеются механизмы с размерностью конфигурационного пространства большей единицы. Число степеней свободы такого механизма может быть переменным. Число степеней свободы механизма в его определённом положении мы отождествляем с локальной размерностью его конфигурационного пространства в точке, отвечающей этому положению. Поясним сказанное на примере.

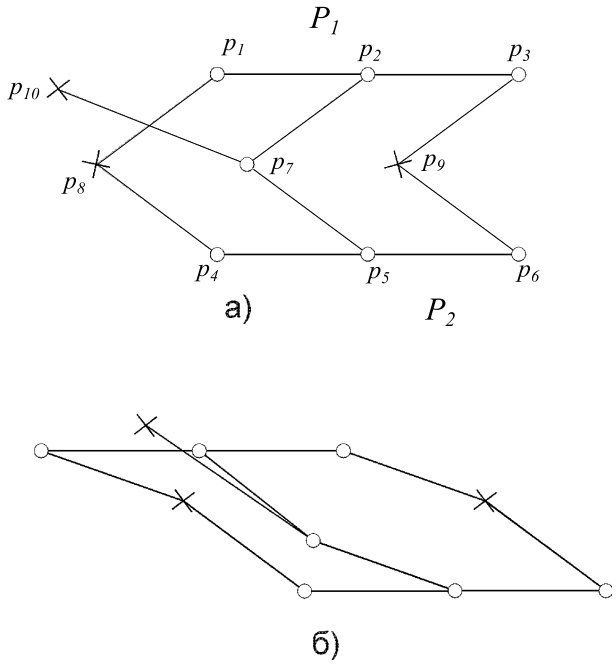



Рис. 1

ПРИМЕР 1. Шарнирного механизма с переменным числом степеней свободы. Этот механизм (Рис.1) содержит 13 рычагов, 7 свободных $p_1, \ldots, p_7$ и 3 закрепленных $p_8, p_9, p_{10}$ шарнира. Он построен из двух одинаковых шарнирных параллелограммов $P_1$: $p_8, p_1, p_3, p_9$ и $P_2$: $p_8, p_4, p_6, p_9$. Шарниры $p_2$ и $p_5$ лежат посередине рычагов $p_1p_3$ и $p_4p_6$ соответственно. Длины дополнительных рычагов $p_2p_7$ и $p_5p_7$ равны длинам боковых рычагов $p_1p_8$ и $p_4p_8$ параллелограммов. Длина рычага $p_{10}p_7$ подобрана так, что шарнир $p_7$ может оказаться посередине отрезка $p_8p_9$, как и показано на Рис. 1 а). Когда шарнир $p_7$ находится в указанном положении, параллелограммы $P_1$ и $P_2$ можно двигать независимо один от другого с одной степенью свободы каждый, и поэтому число степеней свободы всего механизма в этих положениях равно двум. Если же механизм привести в положение, когда рычаги $p_2p_7$ и $p_7p_5$ лягут на прямую $p_{10}p_7$, то шарнир $p_7$ можно будет сдвинуть со своего места. В положениях, когда шарнир $p_7$ не лежит посередине отрезка $p_8p_9$ (Рис.1 б)), число степеней свободы механизма равно единице.

Такое поведение нашего механизма связано с наличием замерающего (или останавливающегося) шарнира $p_7$. Следующий пример показывает, что возможны механизмы, в каждом положении которых имеется остановившийся шарнир.

ПРИМЕР 2. На рисунке 2 слева сплошной линией показана траектория середины среднего звена (далее это шарнир $p_3$) шарнирного ромба со стороной $a$, закреплённого в обозначенных крестиками точках. В точках соприкосновения окружностей происходит ветвление пути середины среднего звена. Добавим в середину среднего звена (Рис. 2 ) шарнирного ромба $p_7p_1p_2p_5$ шарнир $p_3$[1] , и соединим его с закреплённым шарниром $p_6$ двуповодковой группой $p_3p_4p_6$. Возьмём шарнир $p_6$, лежащим посередине между закреплёнными шарнирами $p_5$ и $p_7$, а дли-

[1]Этого можно достичь, закрепив его рычагами $p_1p_3$ и $p_2p_3$.

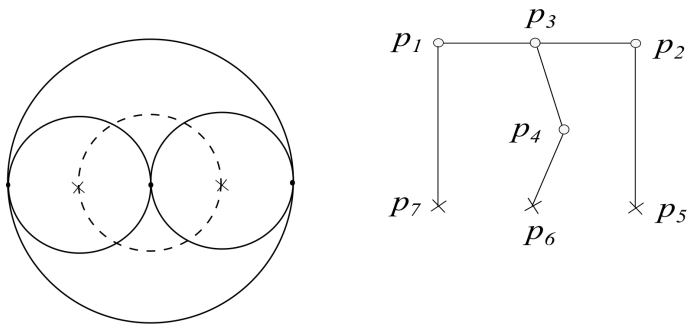



Рис. 2

ны рычагов $p_3p_4$ и $p_4p_6$ равными $\frac{a}{4}$. Полученной кинематической схеме отвечает шарнирный механизм, шарнир $p_3$ которого может двигаться лишь в пределах круга, ограниченного пунктирной окружностью. Эти движения отвечают либо остановившемуся в точке $p_7$ шарниру $p_2$, либо остановившемуся в точке $p_5$ шарниру $p_1$. То есть, в любом положении нашего механизма имеется его остановившийся шарнир.

На тульских конференциях прошлого года мною был поставлен следующий вопрос:

*Есть ли в классе $Q_1$ механизмы с постоянным и большим единицы числом степеней свободы?*

Ответ на этот вопрос оказался положительным. Его даёт механизм примера 4, построенный на основе механизма примера 3. Механизм примера 3 принадлежит классу $Q_1$ и имеет в каждом своём положении более одной степени свободы.

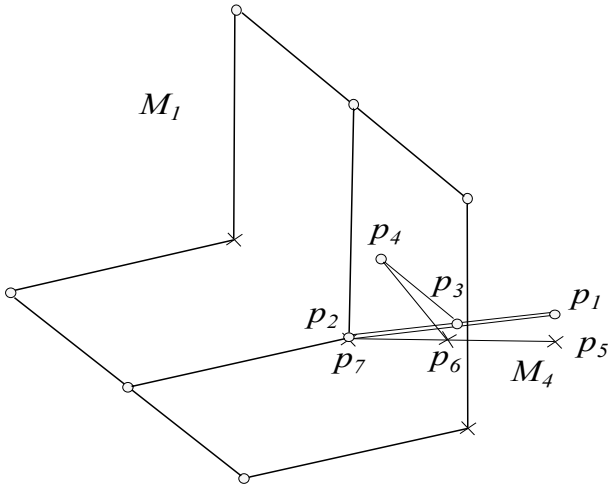



Рис. 3

ПРИМЕР 3. Построение такого механизма $M$ показано на рисунке 3. Механизм $M$ получается присоединением к механизму $M_4$ примера 2 двух механизмов $M_1$ и $M_2$, полученных из механизма примера 1 удалением рычага $p_{10}p_7$. Будем помечать их шарниры соответственно одним и двумя штрихами. Причём, шарнир $p_7'$ механизма $M_1$ совмещаем с шарниром $p_2$ механизма $M_4$. А положения закреплённых шарниров ($p_8'$ и $p_9'$) механизма $M_1$ выбираем так, чтобы шарнир $p_7$ механизма $M_4$ лежал посередине между ними. В этом случае при остановке шарнира $p_2$ механизма $M_4$ при его совмещении с закреплённым шарниром $p_7$, механизм $M_1$ может двигаться с двумя степенями свободы независимо от остальной части механизма $M$. То же самое можно сказать и про механизм $M_2$, шарнир $p_7''$ которого совмещаем с шарниром $p_1$ механизма $M_4$. А положения его закреплённых шарниров ($p_8''$ и $p_9''$) выбираем так,

чтобы шарнир $p_5$ механизма $M_4$ лежал посередине между ними. Когда шарнир $p_1$ механизма $M_4$ останавливается в точке $p_5$, механизм $M_2$ может двигаться с двумя степенями свободы независимо от остальной части механизма $M$. Таким образом, если шарнир $p_1$ механизма $M_4$ совпал с его шарниром $p_5$, а шарнир $p_2$ механизма $M_4$ совпал с его шарниром $p_7$, то механизм $M$ имеет 4 степени свободы. Во всех остальных положениях механизм $M$ обладает лищь тремя степенями свободы. Число степеней свободы построенного механизма переменно, и всюду больше единицы.

ПРИМЕР 4. Механизм $M'$ получается из механизма $M$ примера 7 отбрасыванием по одному параллелограмму из механизмов $M_1$ и $M_2$, входящих в состав $M$. При этом, получившиеся вместо $M_1$ и $M_2$ механизмы $M_1'$ и $M_2'$ движутся с одной степенью свободы в случае совпадения шарнира $p_2$ с шарниром $p_7$, и в случае совпадения шарнира $p_1$ с шарниром $p_5$ соответственно. Таким образом, механизм $M'$ имеет две степени свободы, когда шарнир $p_2$ совпадает с шарниром $p_7$, и одновременно шарнир $p_1$ совпадает с шарниром $p_5$. Также он имеет две степени свободы и тогда, когда шарнир $p_2$ совпадает с шарниром $p_7$, а шарнир $p_1$ не совпадает с шарниром $p_5$. Либо шарнир $p_1$ совпадает с шарниром $p_5$, а шарнир $p_2$ не совпадает с шарниром $p_7$. В двух последних случаях неподвижен лишь один из шарниров $p_2$ или $p_1$.

## 2. Один общий результат

В заключение приведу один общий результат кинематического характера.

Теорема 1. *Конфигурационное пространство $K$ плоского шарнирного механизма класса $Q_1$, не имеющего останавливающихся шарниров, одномерно. Такой механизм в каждом за исключением конечного числа своих положений осуществляет однозначную передачу движения от произвольного его свободного шарнира к произвольному другому свободному шарниру. В конечном числе положений, передача движения может происходить не единственным, но конечным числом способов.*

Отмечу, что моя формализация понятия шарнирного механизма отличается от принятой в работах [1, 2, 3, 4] позднейшей формализации, пренебрегающей кинематической подоплёкой этого понятия. С моей формализацией можно ознакомиться по тезисам прошлогодних тульских конференций и, например, работам [5, 6, 7].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kapovich M., Millson J.J.* Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. V.41, № 6, С. 1051 – 1107.

2. *King Henry C.* Planar Linkages and Algebraic Sets. arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 P.

3. *Demaine, Erik; O'Rourke, Joseph* Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.— Cambridge University Press, 2007.

4. *Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И.* Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 351 С.

5. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.

6. *Ковалёв М.Д.* Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение, 2001, №4, С. 33–51.

7. *Ковалёв М.Д.* Геометрические вопросы кинематики и статики. — М.: ЛЕНАНД, 2019, 256 С.

---

УДК 51

## О работах С. Б. Стечкина по теории чисел

**С. В. Конягин (Россия, г. Москва)**
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
konyagin23@gmail.com

## On the works of S. B. Stechkin on number theory

**S. V. Konyagin (Russia, Moscow)**
Steklov Mathematical Institute RAS
konyagin23@gmail.com

Первая работа С.Б. Стечкина по теории чисел опубликована в 1968 году. В ней было предложено упрощенное доказательство постулата Бертрана. Эта статья имела номер 46 из 98 в mathnet.ru среди публикаций Сергея Борисовича. Он занимался теорией чисел и публиковал статьи до конца своей жизни. Всего вышло не менее 11 его статей по теории чисел.

Ряд его работ связан с функцией $\zeta$ и распределением простых чисел.

Обозначим через $P_n\,(n \geqslant 2)$ класс четных тригонометрических полиномов

$$t_n(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\phi + \cdots + a_n \cos(n\phi),$$

удовлетворяющих условиям
1) $t_n(\varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi$;
2) $a_k \geqslant 0\,(k = 0, \ldots, n)$;
3) $a_0 < a_1$.

Полином

$$3 + 4\cos\phi + \cos(2\varphi) = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geqslant 0$$

показывает, что классы $P_n\,(n \geqslant 2)$ непусты.

Для полинома $t_n \in P_n$ положим

$$V(t_n) = \frac{t_n(0) - a_0}{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0})^2},$$

$$V_n = \inf_{t_n \in P_n} V(t_n), \quad V_\infty = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Валле–Пуссен (1896) указал важные применения полиномов класса $P_n$ к дзета–функции Римана и распределению простых чисел. Он доказал, что

$$R(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O(x \exp(-K\sqrt{\log x})),$$

где $K > 0$. Ландау (1908) установил, что в этом неравенстве мы можем взять любое $K < K^* = \sqrt{2/V_\infty}$.

С.Б. Стечкин в 1970 году опубликовал две статьи, связанные с величинами $V_n$. В первой он изучал $V_n$ и оценил снизу и сверху величину $V_\infty$. Далее эти оценки улучшались В.П.Кондратьевым, Резцовым, Арестовым и Кондратьевым (1990).

Оценки для $R(x)$ связаны с оценками области, свободной от нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Во второй статье 1970 года С.Б. Стечкин усилил неравенство, оценивающее эту область через $V_\infty$, и доказал, что $\zeta(\sigma+it)$ не имеет нулей в области $\sigma \geqslant 1-1/(9.65\log t)$, $t \geqslant 12$.

Важность оценивать области, свободные от нулей $L$-функций, с возможно лучшими константами продемонстрировал Хис-Браун (1992), доказавший существование в любой арифметической прогрессии
$a \mod q$, $(a,q)=1$, простого числа, не превосходящего $Cq^{5.5}$. В 2011 году Xylouris заменил 5.5 на 5.

Иногда улучшение явных оценок приводит к ярким результатам.

В 1937 году И.М. Виноградов доказал тернарную гипотезу Гольдбаха для всех больших нечетных чисел: всякое нечетное число, превосходящее некоторого числа $C$, есть сумма трех простых чисел. Бороздкин показал, что можно взять $C=\exp(\exp(\exp(41.96)))$, а затем в 1956 году он улучшил оценку до $C=\exp(\exp(16.038))$. М.-Ч. Лю и Т. Вонг (2002) получили $C=2\cdot 10^{1346}$.

В 2013 году Х.А. Хельфгот решил тернарную проблему Гольдбаха, доказав, что можно взять $C=10^{29}$, а затем численно проверил представимость в виде суммы трех простых всех меньших нечетных чисел.

В 1996 году вышла работа А.Ю. Попова и С.Б. Стечкина, в которой изучалось локальное поведение функции

$$R(x)=\psi(x)-x, \quad \psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

и соответствующих функций $R^+(x)=\max(0,R(x))$, $R^-(x)=-\min(0,R(x))$. В частности, показано, что при $x\geqslant 1$

$$\int_x^{Ax} R^{\pm}(u)du \geqslant x^{3/2},$$

где $A$– абсолютная константа.

С.Б. Стечкин уделял большое внимание оценкам тригонометрических сумм и, в частности, сумм Вейля.

Положим $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $e(y)=\exp(2\pi i y)$ ($y\in\mathbb{R}$ или $y\in\mathbb{T}$),

$$f(u)=f_n(u)=\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu u^\nu \quad (n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2,\ \alpha_\nu\in\mathbb{R},\ u\in\mathbb{R}),$$

$$S(x)=S_n(x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant X} e(f_n(k)) \quad (k\in\mathbb{N},\ X\in\mathbb{R},\ X\geqslant 1).$$

Поведение тригонометрических сумм и близких к ним сумм тесно связано с поведением средних значений модуля $S(X)$, т.е. интеграла

$$J=J_n(X,l)=\int_{\mathbb{T}^n}|S_n(x)|^{2l}d\alpha_1\dots d\alpha_l \quad (l\in\mathbb{R},\ l\geqslant 0).$$

Разработка и развитие метода тригонометрических сумм были связаны с оценками $J$ методом И.М. Виноградова, полученными Виноградовым и его последователями. Важное продвижение было сделано С.Б. Стечкиным (1975).

Теорема 1. *Пусть*

$$n,r\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2,\ l\in\mathbb{R},\ l\geqslant rn,\ X\in\mathbb{R},\ X\geqslant 1.$$

*Тогда*

$$J_n(X,l)\leqslant D(r,n)X^{2l-\frac{n(n+1)}{2}+(n^2/2)(1-1/n)^r},$$

*где*

$$D(r,n) = \exp\left(C_0 \min(r,n) n^2 \log n\right)$$

*и* $C_0$*– абсолютная константа.*

В дальнейшем появилось много работ, связанных с теоремой о среднем И.М. Виноградова (оценке $J_n(X,l)$). Bourgain, Demeter, Guth (2015) нашли правильный показатель степени от $X$, доказав, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$J_n(X,l) \leqslant C(n,l,\varepsilon) X^{\varepsilon + \max(l, 2l - \frac{n(n+1)}{2})}.$$

Однако, этот результат не является концом истории, так как из-за достаточно большого коэффициента $C(n,l,\varepsilon)$ он в некоторых приложениях не дает улучшения известных результатов.

С.Б. Стечкин проявлял большой интерес к оценке рациональных тригонометрических сумм. Пусть $f$– многочлен с целыми коэффициентами и $q$– натуральное число. Рассматриваются полные рациональные тригонометрические суммы

$$S(f,q) = \sum_{k=1}^{q} e(f(x)/q).$$

Изучение таких сумм легко сводится к случаю

$$(a_1, \ldots, a_n, q) = 1, \tag{1}$$

где

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Если $\deg f = n$ и выполнено условие (1), то будем писать, что $f \in K_n(q)$.

Рассмотрим величину

$$H_n(q) = \sup_{f \in K_n(q)} |S(f,q)|.$$

В.И. Нечаев (1953) доказал, что

$$H(n,q) \leqslant A(n) q^{1-1/n},$$

где $A(n) \leqslant \exp(2^n)$. В 1975 году он улучшил оценку на $A(n)$, установив, что $A(n) \leqslant \exp(5n^2/\log n)$ для $n \geqslant 3$. С.Б. Стечкин (1977) доказал, что можно взять

$$A(n) \leqslant \exp(n + O(n/\log n)).$$

Насколько нам известно, последняя оценка не улучшена.

В той же работе С.Б. Стечкин изучал величину $\rho(f,q)$– количество сравнения $f(x) \equiv 0 \bmod q$. Снова вопрос сводится к случаю $f \in K_n(q)$. Мне было предложено продолжить рассмотрение этой задачи. В статье 1979 года я определил величину

$$c_n = \sup_{q, f \in K_n(q)} |S(f,q)|/q^{1-1/n}$$

и показал, что $c_n = n/e + O(\log^2 n)$ при $n \geqslant 2$.

С.Б. Стечкин указал, что недостатком этой оценки является не выписанный остаточный член. В 1997 году вышла наша совместная работа, в которой показано, что $c_n \leqslant n$, то есть для любого многочлена $f \in K_n(q)$ справедливо неравенство

$$|S(f,q)| \leqslant n q^{1-1/n}.$$

Если многочлен $f$ является одночленом, то рациональные тригонометрические суммы являются суммами Гаусса

$$S_n(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e(ax^n/q).$$

Опять же они сводятся к случаю $(a,q)=1$. В 1975 году С.Б. Стечкин опубликовал статью, в которой изучал суммы Гаусса. Обозначим

$$A_n^* = \sup_{(a,q)=1} |S_n(a,q)|/q^{1-1/n}.$$

Харди и Литтлвуд (1925) доказали, что $A_n^* < \infty$, а И.М. Виноградов (1947) приводит оценку

$$A_n^* \leqslant n^{n^6}.$$

С.Б. Стечкин кардинально улучшил оценку на $A_n^*$, доказав, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C(n/\varphi(n))^2\right).$$

Отсюда и из известной границы функции $n/\varphi(n)$ вытекает, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C'(\log\log n)^2\right) \quad (n \geqslant 3).$$

В статье был поставлен вопрос: верно ли, что величина $A_n^*$ не превосходит абсолютной константы?

С.Б. Стечкин показал, что рассмотрение сумм Гаусса сводится к случаю, когда они берутся по простому модулю. Пусть $p$– простое число. Нетрудно показать, что если $d = (n, p-1)$, то $S_n(a,p) = S_d(a,p)$. Поэтому при исследовании сумм Гаусса по простому модулю можно считать, что $n$ делит $p-1$.

Харди и Литтлвуд (1925) доказали, что

$$|S_n(a,p)| \leqslant (n-1)\sqrt{p}.$$

Эта оценка становится хуже тривиальной, если $n > \sqrt{p}+1$. Для доказательства ограниченности $A_n^*$ при $n \to \infty$ следовало получить нетривиальные оценки на $|S_n(a,p)|$ при $p^{1/2-\delta} \leqslant n \leqslant p^{1/2+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$.

Ограниченность $A_n^*$ при $n \to \infty$ разными способами доказали И.Е. Шпарлинский и докладчик. Позже мы объединили наши усилия, рассмотрели ряд близких задач и написали книгу.

Тематика, связанная с оценками сумм Гаусса и их обобщениями, получила мощный импульс в нулевых годах нашего столетия после того, как ею заинтересовался Jean Bourgain.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Foucart, H. Rauhut *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing.*, New York, Springer–Birkhauser, 2013. – 634 P.

2. L. Fukshansky, D. Needell, B. Sudakov. *An algebraic perspective on integer sparse recovery* // Appl. Mathem. and Comp. – 2019. – V. 340. – P. 31–42.

3. С.В. Конягин. *О восстановлении целочисленного вектора по линейным измерениям* // Матем. заметки, – 2018. – Т. 104. – вып. 6. – С. 863–871.

4. K.S. Ryutin. *The algorithm for the recovery of integer vector via linear measurements* , – 2019. – препринт https://arxiv.org/abs/1905.02687

5. S.V. Konyagin, B. Sudakov. *An extremal problem for integer sparse recovery*, 2019. – препринт https://arxiv.org/abs/1904.08661.

6. К.С. Рютин. *Целочисленные матрицы измерения с малыми элементами, обеспечивающие восстановление векторов*, 2019. – подано в Матем. заметки

---

УДК УДК 512.55+512.545

## Выпуклые линейные подпространства интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами[1]

**А. В. Михалев (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
**Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

## Convex subspaces of interpolation linear spaces over partially ordered skew fields

**A. V. Mikhalev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
**E. E. Shirshova (Russia, Moscow)**
Moscow Pedagogical State University
Moscow center for fundamental and applied mathematics of MSU
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $F =< F, +, \cdot >$ – тело. Напомним, что $F$ называется *частично упорядоченным телом*, если $< F, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $< F, +, \leqslant >$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< F, +, \leqslant >$ является направленной, то $F$ называется *направленным телом*.

Будем далее считать, что $F$ – частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей. (Иначе порядок окажется тривиальным (см. [4]).)

Левое линейное пространство ${}_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant >$ над частично упорядоченным телом $F$ называется *частично упорядоченным линейным пространством*, если $< V, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из поля $F$.

Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ называют *направленным линейным пространством*, если группа $< V, +, \leqslant >$ является направленной группой.

[1]Работа выполнена при поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

Если группа $< V, +, \leqslant >$ является решеточно упорядоченной, а $F = \mathbb{R}$, то линейное пространство ${}_FV$ принято называть *векторной решеткой* (см. [1, 3]).

Изучение свойств частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами относится к направлению исследований, которое А. Г. Курош предлагал называть упорядоченной проективной алгеброй (см. [2]).

При исследовании свойств частично упорядоченных алгебраических систем важную роль играет понятие "выпуклость". Мы рассматриваем абелеву выпуклость, которая опирается на следующее определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Подгруппа $M$ частично упорядоченной группы $G$ называется *выпуклой*, если для всех $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует $g \in M$.

Линейное подпространство $M$ линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ называется *ab-выпуклым подпространством*, если группа $< M, +, \leqslant >$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной группы $< V, +, \leqslant >$.

Напомним, что частично упорядоченная группа $G$ называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Частично упорядоченное линейное пространство ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$ будем называть *интерполяционным линейным пространством*, если группа $< V, +, \leqslant >$ является интерполяционной группой.

Предметом обсуждения является множество всех $ab$-выпуклых направленных линейных подпространств интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом $F$.

Пусть ${}_FV =< V, +, \{\alpha |\ \alpha \in F\}, \leqslant_1 >$ и ${}_FU =< U, +, \{\alpha |\ \alpha \in F\}, \leqslant_2 >$ – частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом $F$.

Отображение $f : {}_FV \to {}_FU$ называется *o-гомоморфизмом линейных пространств*, если выполняются условия:

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in V$;

2) $f(\alpha a) = \alpha \cdot f(a)$ для всех $a \in V$ и $\alpha \in F$;

3) $f({}_FV^+) \subseteq {}_FU^+$.

При этом, $f$ называется *строгим o-гомоморфизмом линейных пространств*, если выполняется условие

4) $f({}_FV^+) = {}_FU^+ \cap Imf$.

Если для $o$-гомоморфизма линейных пространств $f$ существует $o$-гомоморфизм линейных пространств $f^{-1}$, то $f$ называется *o-изоморфизмом линейных пространств*.

(Здесь ${}_FV^+ = \{v \in V |\ 0 \leqslant v\}$.)

Основными результатами являются:

1) три теоремы об $o$-изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами;

2) утверждения, характеризующие свойства проективной геометрии в интерполяционном линейном пространстве ${}_FV$ над направленным телом $F$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984, 564 с.

2. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. – М.: ИЛ, 1955, 399 с.

3. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Направленные подпространства частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами.// XVI Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения и проблемы истории посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза (Тула, 13-18 мая 2019 г.). — Тула, 2019, с. 48-49.

4. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. – М.: Мир, 1965, 342 с.

---

УДК 511.6

## О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях

**В. П. Платонов (Россия, г. Москва)**
ФНЦ НИИСИ РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: platonov@mi-ras.ru
**Г. В. Федоров (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М. В. Ломоносова, ФНЦ НИИСИ РАН
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

## On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields

**V. P. Platonov (Russia, Moscow)**
SRISA RAS, Steklov Mathematical Institute
e-mail: platonov@mi-ras.ru
**G. V. Fedorov (Russia, Moscow)**
Moscow State University, SRISA RAS
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Пусть $K$ — поле характеристики отличной от 2. Проблема периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ имеет большую (200 лет) и глубокую историю, истоки которой — в классических работах Абеля и Чебышева. В классическом случае давно известна связь между свойством периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}$ в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$, наличием в гиперэллиптическом поле $\mathcal{L}$ фундаментальной единицы и наличием рациональной точки конечного порядка в якобиевом многообразии гиперэллиптической кривой $\mathcal{C} : y^2 = f(x)$ (см. [1]).

Пусть теперь $f \in K(x)$ — свободный от квадратов многочлен произвольной степени, $L = K(x)(\sqrt{f})$. В статьях [2]-[4] получил глубокое развитие теоретико-числовой подход к проблеме поиска и построения фундаментальных $S$-единиц гиперэллиптических полей, основанный на теории функциональных непрерывных дробей в поле формальных степенных рядов $K((x))$, при этом показано, что элементы вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, и их непрерывные дроби в $K((x))$ играют ключевую роль.

В статье [2] был поставлен вопрос о периодичности *ключевых элементов* вида $\sqrt{f}/x^s$ в гиперэллиптическом поле $L$. Для непрерывной дроби элемента $\alpha \in L$ свойства квазипериодичности и периодичности, а также длина квазипериода и длина периода (в случае, когда они соответственно конечны) инвариантны относительно замены элемента $\alpha = \alpha(x)$ на $a^2\alpha(bx)$

для некоторых $a, b \in K^*$. Такие замены мы будем называть *допустимыми*. С помощью допустимых замен элементы поля $L$ разбиваются на классы эквивалентности, поэтому ответ достаточно искать с точностью до указанного отношения эквивалентности. На основе объединения теоретико-числовых, алгебраических и геометрических методов в статье [2] была полностью решена проблема периодичности ключевых элементов для квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}(x)$, определяемых кубическими многочленами $f \in \mathbb{Q}[x]$, а для $s = 0$ с использованием параметризации эллиптических кривых и точек конечного порядка на них был получен особенно удивительный результат: за исключением тривиальных случаев вида $f = cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, с точностью до эквивалентности существует только три кубических многочлена над полем рациональных чисел, квадратный корень из которых разлагается в периодическую непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов $\mathbb{Q}((x))$.

Теорема 1. *С точностью до отношения эквивалентности, определенного допустимыми заменами многочлена $f(x)$ на $a^2 f(bx)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}^*$, множество свободных от квадратов многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg f = 3$, для которых разложение $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в поле $\mathbb{Q}((x))$ периодично, описывается тремя многочленами*

$$12x^3 - 8x^2 + 4x + 1, \quad 12x^3 - 5x^2 + 2x + 1, \quad -120x^3 + 25x^2 + 2x + 1,$$

*и одним семейством многочленов $cx^3 + 1$, где параметр $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ свободен от третьих степеней, отличных 1.*

Известны критерии (см. [5]), связывающие квадратичной иррациональности $\alpha \in L$ условие квазипериодичности непрерывной дроби в поле $K((x))$ с наличием в поле $L$ нетривиальных $S$-единиц специального вида, где $S = \{v_x^-, v_x^+\}$, с существованием решения определенного вида у норменного уравнения и кручением у класса дивизора $v_x^- - v_x^+$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ поля $L$. Из последнего условия следует наличие точки конечного порядка в якобиане гиперэллиптической кривой, соответствующей гиперэллиптическому полю $L$. В случае квазипериодичности непрерывной дроби элемента вида $\sqrt{f}/x^s$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$, эта непрерывная дробь обязательно является периодической. Однако, перечисленные выше результаты не дают явного описания свободных от квадратов многочленов $f$, для которых непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ периодична. Основная сложность для кубических эллиптических полей над полем рациональных чисел, заключалась в описании многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg f = 3$, для которых разложение $\sqrt{f}$ или $\sqrt{f}/x^3$ в непрерывную дробь периодично. Важную роль при этом сыграла теорема 2 [2], в которой по данному элементу $\alpha \in L$ с квазипериодическим разложением в непрерывную дробь найден промежуток значений $s$ таких, что элемент $\alpha \cdot x^s$ имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь. Для случая многочлена $f$ нечетной степени доказано, что этот промежуток точный, а случай четной степени многочлена $f$ оказался более сложным: в некоторых случаях могут существовать значения $s$ не из найденного промежутка такие, что непрерывная дробь элемента $\alpha \cdot x^s$ квазипериодическая. В статье [6] полностью решен этот вопрос для элементов вида $\alpha = \sqrt{f}/x^{g+1}$ над полем рациональных чисел, а именно, для свободного от квадратов многочлена $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg f = 2g + 2$, с периодическим разложением $\sqrt{f}/x^{g+1}$ в непрерывную дробь найден точный промежуток значений $s$ таких, что элемент $\sqrt{f}/x^s$ также имеет периодическое разложение в непрерывную дробь. С помощью этого результата мы получаем основное утверждение статьи.

В статье [7] найдено решение проблемы периодичности ключевых элементов для квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}(x)$, определяемых многочленами $f \in \mathbb{Q}[x]$ степени 4, что завершает решение проблемы периодичности для эллиптических полей над полем рациональных чисел.

Теорема 2. *С точностью до отношения эквивалентности, определенного допустимыми заменами многочлена $f(x)$ на $a^2 f(bx)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}^*$, множество свободных от*

*квадратов многочленов* $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg f = 4$, *для которых разложение* $\sqrt{f}$ *в непрерывную дробь в поле* $\mathbb{Q}((x))$ *периодично, описывается семью многочленами*

$$(1-2x)(1+6x+32x^3), \quad (1-2x)(1+6x+96x^3), \quad (1-2x)(1+6x+32x^3/3),$$
$$1-2x-2x^2-3x^3-3x^4/4, \quad (1+10x)(1-6x+32x^2-128x^3),$$
$$(27+144x+320x^2)(9-72x+400x^2)/243, \quad (1-10x)(1+14x+224x^2+5600x^3),$$

*и четырьмя семействами многочленов:*

$$c_1x^4+1, \quad -c_2^2x^4+2c_2x^2+1, \quad (-c_3x^2+1)(3c_3x^2+1), \quad -c_4^2x^4/3+2c_4x^2+1,$$

*где параметр* $c_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *свободен от четвертых степеней, отличных 1, параметры* $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *свободны от квадратов, отличных 1.*

В случае $s < 0$ или $s > 4$ не существует многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg f = 4$, для которых разложение $\sqrt{f}/x^s$ в непрерывную дробь периодично. Для стандартного случая $s = 2$ известно, что длина периода непрерывной дроби не превосходит 22. Рассмотренная нами проблема имеет значительно более глубокую природу, что подчеркивается найденным в теореме многочленом $1-2x-2x^2-3x^3-3x^4/4$, квадратный корень из которого имеет аномально большую длину периода непрерывной дроби, равную 38 (подробнее см. в [6]). В общем случае оценка сверху на возможную длину периода доказана в статье [8].

Над квадратичными расширениями поля $\mathbb{Q}$ к настоящему моменту проблема периодичнсоти ключевых элементов решена только в случае $\deg f = 3$ (см. [9]). Отметим, что ранее в статье [10] были доказаны приведенные гипотезы для кубических эллиптических полей над полями $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$. Для этих полей описание многочленов $f$ с периодическим разложением $\sqrt{f}/x$ в непрерывную дробь в поле $K((x))$ отлично от соответствующего описания над полем рациональных чисел, но для них нет новых примеров многочленов $f$ с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в поле $K((x))$. Однако для поля констант $K = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$ в статье [10] найден новый пример многочлена $f \in K[x]$, $\deg f = 3$, с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в поле $K((x))$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.

2. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.

3. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №3. С. 283-298.

4. Федоров Г. В. Об S-единицах для нормирований второй степени в гиперэллиптических полях // Известия РАН. 2020. Т. 84, №2. С. 197-242.

5. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №5. С. 540-544.

6. Платонов В. П., Федоров Г. В. Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №1. С. 246-258.

7. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // УМН. 2020. Т. 75, № 4(454). С. 211-212.

8. Федоров Г. В. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №4. С. 321-334.

9. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями // ДАН. 2020. Т. 493. С. 32-37.

10. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях над квадратичным полем констант // ДАН. 2018. Т. 482, №2. С. 137-141.

---

УДК 511.32

## Шашки Фейнмана: теория чисел в квантовой электродинамике[1]

**М. Б. Скопенков (Россия, г. Москва)**
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики & ИППИ РАН
e-mail: mikhail.skopenkov@gmail·com
**А. В. Устинов (Россия, г. Хабаровск)**
Тихоокеанский государственный университет
e-mail: ustinov.alexey@gmail·com

## Feynman Checkers: Number Theory in Quantum Electrodynamics

**M. B. Skopenkov (Russia, Moscow)**
National Research University Higher School of Economics & Institute for Information Transmission Problems RAS
e-mail: mikhail.skopenkov@gmail·com
**A. V. Ustinov (Russia, Khabarovsk)**
Pacific national university
e-mail: ustinov.alexey@gmail·com

В 40-х годах Р. Фейнман разработал простейшую модель движения электронов, известную сейчас как *шашки Фейнмана*. В этой игре шашка передвигается по шахматной доске по простым правилам и в результате описывает квантово-механическое поведение электрона. Это модель также известна как *одномерное квантовое блуждание* или *модель Изинга при мнимой температуре*. В докладе будет представлено математическое решение гипотезы Р. Фейнмана от 1965 г., в которой предполагалось, что модель воспроизводит известное в физике квантово-механическое ядро, описывающее движение свободных частиц при большом времени, малой средней скорости и малом шаге решетки. Основными инструментами являются преобразование Фурье и метод стационарной фазы.

Более подробное изложение модели и известных результатов может быть найдено в [1].

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-41-05001)

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skopenkov M. & Ustinov A. Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory. (2020) https://arxiv.org/abs/2007.12879

---

УДК 512.74

# Минимальные системы образующих коммутатора силовских 2-подгрупп знакопеременной группы, ширина по коммутанту сплетения групп

**Р. В. Скуратовский (Украина, г. Киев)**
Киевский политехнический институт им. И. Сикорского, Национальный технический университет Ураины.
e-mail: r.skuratovskii@kpi.ua, ruslan@imath.kiev.ua

# Minimal generating sets of the commutator of Sylow 2-subgroups of alternating groups, commutator width in a wreath product of groups

**R. V. Skuratovskii (Ukraine, Kiev)**
Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute, National Technical University of Ukraine.
e-mail: r.skuratovskii@kpi.ua

The Sylow 2-subgroups of symmetric groups were described by Leo Kaluzhnin, V. Sushchanskii, and Yu. Dmytruk, They presented the elements of these groups as tables, i.e. the ordered sets of polynomials of a certain form. In this paper, the derived subgroups of Sylow 2-subgroups of alternating groups are characterized. Sylow 2-subgroups of an alternating group have been investigated by the author earlier [5]. In the present investigation, we continue our research [3] about the commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating groups.

We consider the commutator of Sylow subgroups of an alternating group and research its minimal generating sets. The commutator width of a group $G$, denoted by $cw(G)$ [1], is the maximum of commutator lengths of elements of its derived subgroup $[G, G]$. The size of minimal generating sets of the Sylow 2-subgroup $Syl_2A_{2^k}$ of $A_{2^k}$ are found. The size of a minimal generating set for the commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group is found. The structure of the commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of the alternating group $A_{2^k}$ is investigated. This work continues previous investigations [2, 3, 4, 5], where minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups were found. Let $B$ be any group and $C_n$ denotes a cyclic group of order $n$. We prove that the commutator width [1] of a permutational wreath product of form $cw(B \wr C_n) \leq \max(1, cw(B))$ is 1.

## A commutator width of Sylow 2-subgroups of alternating groups

We define $G_k$ and $B_k$ recursively, i.e.

$$B_1 = C_2,\ B_k = B_{k-1} \wr C_2 \text{ for } k > 1,$$
$$G_1 = \langle e \rangle,\ G_k = \{(g_1, g_2)\pi \in B_k \mid g_1 g_2 \in G_{k-1}\} \text{ for } k > 1.$$

Theorem 1. *For any $k \geq 1$, we have $G_k \simeq Syl_2A_{2^k}$.*

Proposition **1.** *In ${G_k}'$, the following $k$ equalities are true:*

$$\prod_{l=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}) = e, \quad 0 \leqslant l < k-1. \tag{1}$$

*For the case $i = k-1$, the following condition holds:*

$$\prod_{j=1}^{2^{k-2}} \varphi(g_{k-1j}) = \prod_{j=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1j}) = e. \tag{2}$$

*Thus, ${G'}_k$ has $k$ new conditions on a combination of level subgroup elements, except for the condition of last level parity from the original group.*

Theorem 2. *A commutator of $G_k$ has form ${G'}_k = G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, where the subdirect product is defined by relations (1) and (2). The order of ${G'}_k$ is $2^{2^k-k-2}$.*

Proposition **2.** *If $k \neq 2^m$ then $Syl'_2A_{4k} = Syl'_2S_{2^{l_1}} \times Syl'_2S_{2^{l_2}} \times \ \ldots \ \times Syl'_2S_{2^{l_m}}$ and $|Syl_2S_{4k} : Syl_2A_{4k}| = 2$. Also $|Syl_2S_{2^k} : Syl_2A_{2^k}| = 2$.*

Proposition **3.** *If $k \neq 2^m$, $4k = \sum\limits_{j=1}^{m} 2^{i_j}$ then the order of ${Syl_2}'A_{4k}$ is*

$$\left|Syl'_2A_{4k}\right| = 2^{2^{l_1}+2^{l_2}+\ldots+2^{l_m}-m-i_1-i_2-\ldots-i_m}.$$

The proof follows immediately from the decomposition of ${Syl_2}'A_{4k}$ in a direct product of commutator subgroup of $Syl_2S_{2^{l_i}}$ by Proposition 2.

Example **1.** *The commutator subgroup of $Syl_2A_{12}$ has size 32, also the correspondent decomposition in direct product has the order $|Syl'_2S_8| \times |Syl'_2S_4| = 16 \cdot 2 = 32$.*

Theorem 3. *A commutator of $G_k$ has form ${G'}_k = G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, where the subdirect product is defined by relations (1) and (2). The order of ${G'}_k$ is $2^{2^k-k-2}$.*

Example **2.** *$Syl_2A_7 \simeq Syl_2A_6 \simeq D_4$, $Syl_2A_{10} \simeq Syl_2A_{11} \simeq Syl_2S_8 \simeq (D_4 \times D_4) \rtimes C_2$. $Syl_2A_{12} \simeq Syl_2S_8 \boxtimes Syl_2S_4$ and by the same reasons commutator subgroup of $Syl_2A_{12}$ is decomposed as $(Syl_2A_{12})' \simeq (Syl_2S_8)' \times (Syl_2S_4)'$.*

Corollary **1.** *For prime $p$ and $k \geq 2$, the commutator width is $cw(Syl_p(S_{p^k})) = 1$. While for prime $p > 2$ and $k \geq 2$ we have $cw(Syl_pA_{p^k}) = 1$. If $p = 2$, $k > 2$, then $cw(Syl_2A_{2^k}) = 1$. The commutator width of $Syl_2A_{2^2}$ is equal to 0.*

Corollary **2.** *The direct limit $\varinjlim \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathcal{C}_{p_i}$ of the direct system $\left\langle f_{k,j}, \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathcal{C}_{p_i} \right\rangle$ has commutator width equal to 1.*

## Minimal generating sets of the commutator of Sylow 2-subgroups of alternating groups

To obtain a size of irreducible sets of generators we will apply the Theorem about Frattiny factor of $p$-group. For this, we find the order of the commutator subgroup and order of the correspondent Frattiny factor group.

Lemma 1. *If an element $g = (g_1, g_2) \in G'_k$ then $g_1, g_2 \in Syl_2A_{2^{k-1}}$ and $g_1g_2 \in Syl_2S_{2^{k-1}}$.*

Proposition **4.** *The order of* $G''_k$ *is equal to* $2^{2^k-3k+1}$.

Lemma 2. *The index of the third commutator subgroup* $Syl_2^{(3)}A_{2^k}$ *in* $Syl_2A_{2^k}$ *(* $G_k$*) is equal to* $2^{7k-14}$.

Example **3.** *The order of the third commutator subgroup for* $k = 64$ *is the following* $\left|G_{64}^{(3)}\right| = 2^{64-42+12} = 2^{38}$.

Proposition 1. *Any minimal generating set of* $Syl'_2A_{2^k}$, $k > 2$ *consists of* $2k-3$ *elements.*

Theorem 4. *A total number of minimal generating sets of* $(Syl_2A_{2^k})'$ *is*

$$\left(2^{2k-3}-1\right)\left(2^{2k-3}-2^1\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(2^{2k-3}-2^{2k-4}\right):(2k-3)!$$

Example **4.** *The minimal generating set of* $Syl'_2(A_{16})$ *consists of 5 (* $5 = 2\cdot 4-3$*) generators, namely:* $(1,4,2,3)(5,6)(9,12)(10,11), (1,4)(2,3)(5,8)(6,7), (1,2)(5,6), (1,7,3,5)\times$ $\times(2,8,4,6)(9,14,12,16)(10,13,11,15), (1,7)(2,8)(3,6)(4,5)(9,16,10,15)(11,14,12,13)$.

## REFERENCES


1. Muranov A. Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. // Inter. J. Algebra Comput. 2007. Vol 17, P. 607–659.

2. Skuratovskii R. V. Generating set of wreath product non faithful action. // International Journal of Analysis and Applications Volume. 2020 18, № 1, P. 104–116.

3. Skuratovskii R. V., Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups [Source: Arxiv.org], access mode: `http://arxiv.org/abs/1702.05784v2`.

4. Skuratovskii R. V., The commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group, commutator width of wreath product [Source: Arxiv.org], access mode: `https://arxiv.org/pdf/1903.08765.pdf`.

5. Skuratovskii R. V. Involutive irreducible generating sets and structure of sylow 2-subgroups of alternating groups. // ROMAI J. 2017. Vol 13, № 1 (13). P. 117–139.


---

УДК 511.36

# Арифметические свойства некоторых гипергеометрических рядов с параметром — лиувиллевым полиадическим числом

**В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)**
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

# Arithmetic properties of certain hypergeometric series with a liouvillean polyadic parameter

**V. G. Chirskii (Russia, Moscow)**
Moscow Lomonosov State University Mechanical-mathematical Department
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

В теории трансцендентных чисел рассматриваются обобщённые гипергеометрические ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_r)_n} z^n \tag{1}$$

Если параметры ряда (1) являются рациональными числами, то при $r < s$ этот ряд заменой переменной сводится к $E$–функции Зигеля, при $r = s$ этот ряд представляет собой $G$–функцию Зигеля, а при $r > s$ получаем $F$–ряд. В этом случае для исследования арифметической природы значений рассматриваемого ряда (1) применяются метод Зигеля – Шидловского и его обобщение [1]-[4].

Если среди параметров ряда (1) есть алгебраические иррациональные числа, то основным подходом к исследованию арифметической природы значений этого ряда являются приближения Эрмита – Паде ( см. [5]-[7]).

В докладе рассматриваются значения при $z = 1$ рядов

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n z^n, \tag{2}$$

с трансцендентным полиадическим параметром $\lambda$. Напомним, что значения этих рядов рассматриваются в полях $p$–адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть $\lambda_0$ – произвольное натуральное число. Обозначим $s_0 = e^{\lambda_0}$. Пусть $\mu_0$– натуральное число такое, что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющих неравенству $p \leqslant s_0 + \lambda_0$, выполняется условие

$$ord_p \mu_0 \leqslant 2 s_0 \ln s_0.$$

Полагаем $\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0$. Продолжаем этот процесс. На шаге с номером $k$ обозначаем $s_k = e^{\lambda_k}$. Пусть $\mu_k$– натуральное число такое, что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющих неравенству $p \leqslant s_k + \lambda_k$, выполняется условие

$$ord_p \mu_k \leqslant 2 s_k \ln s_k.. \tag{3}$$

Полагаем $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k,\ k = 1, 2, \dots$ и

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k. \tag{4}$$

Ряд $\lambda$ представляет собой полиадическое лиувиллево число, т.е. для любых чисел $n$ и $P$ существует натуральное число $A$ такое, что для всех простых чисел $p \leqslant P$ выполнено неравенство $|\lambda - A|_p < A^{-n}$. Из этого сразу следует трансцендентность суммы ряда (4) в любом поле $p$–адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1. *Для любой линейной формы $h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$ с целыми коэффициентами $h_0, h_1$, не обращающимися в ноль одновременно, существует бесконечное множество простых чисел $p$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство*

$$h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1) \neq 0$$

*Иными словами, ряды $f_0(1), f_1(1)$ бесконечно линейно независимы.*

Доказательство теоремы существенно использует конструкцию аппроксимаций Эрмита – Паде из работы [7].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука. 1987.-448с.
2. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. Т. 26, №3, С. 286-305.
3. Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J., Effective Estimates for Global Relations on Euler-Type Series // Ann. Fac. Sci. Toulouse.-2004.V. 13. №2.P. 241-260 .
4. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series Russian Journal of Mathematical Physics. 2020.V. 27, №2, P. 175-184.
5. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. мат. жур.1993.Т. 34.№1.С.53-62.
6. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014.Т. 78, №6, С. 193-210.
7. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита – Паде обобщённых гипергеометрических функций // Мат.сборник.1994.Т.185.№3.С.39-72.

# Секция 1. Группы

УДК 511.32

## О когерентности и проблеме вхождения в группах Артина с древесной структурой[1]

**В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
**Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

## On coherence and problem of occurrence in Artin groups with three-structure

**V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)**
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
**N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Moscow)**
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ – конечное множество, и $M = \{m_{ij}\}$, $i, j \in \overline{1,n}$ - симметрическая матрица Кокстера, такая что $m_{ii} = 1$, $i \in \overline{1,n}$, $m_{ij} = m_{ji}$ при $i \neq j$, $i, j \in \overline{1,n}$, $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Свяжем с матрицей Кокстера конечный граф $\Gamma$, между вершинами которого и множеством $\sigma$ установим взаимно-однозначное соответствие. Каждой вершине $v_i \in \Gamma$ поставим в соответствие $\sigma_i$, а каждому ребру, соединяющему вершины $v_i$, $v_j$ - число $m_{ij} \in M, m_{ij} \neq \infty$. Если вершины $v_i$, $v_j$ не соединены ребром, то паре $(v_i, v_j)$ поставим в соответствие $m_{ij} = \infty$.

Построенный граф $\Gamma$ называется графом Кокстера. С графом Кокстера связана группа Артина $G_\Gamma$, множество образующих которой есть множество $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, а множество определяющих соотношений есть множество

$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}$ при $i \neq j$, $m_{ij} \neq \infty$, где $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j \ldots$ , слово из чередующихся образующих $\sigma_i, \sigma_j$, длины $m_{ij}$.

Группа Артина $G_\Gamma$ будет иметь копредставление:

$$G_\Gamma = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \ i, j \in \overline{1,n} \right\rangle$$

Группа Артина $G$ называется группой Артина с древесной структурой, если соответствующий граф Кокстера $\Gamma$ является дерево-графом.

Теорема 1. *[1] В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-41-710002 р-а.

Основной целью нашей работы является доказательство разрешимости проблемы вхождения в группах Артина с древесной структурой. При этом используется понятие специального множества, являющееся обобщением нильсеновского множества для групп, являющихся свободным произведением групп с объединением и HNN – расширением групп.

Затем, используя строение конечнопорожденных подгрупп, образующие которых приведены к специальным образующим, показываем их когерентность.

Известно, что группы Артина, граф Кокстера которых является четырехугольником, не являются когерентными.[2]

Определение 1. *Группа $G$ обладает свойством когерентности, если каждая ее конечнопорожденная подгруппа имеет конечное копредставление.*

Определение 2. *Будем говорить, что в группе $B$ разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для каждого $w \in B$ и любой конечнопорожденной подгруппы $H < B$ установить принадлежит ли $w$ подгруппе $H$.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе $B$ разрешима проблема пересечения подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп $H_1,\ H_2$ из $B$ выписать образующие их пересечения.*

Определение 4. *Будем говорить, что в группе $B$ разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп $H_1,\ H_2$ принадлежащих $B$ и любого $w \in B$ установить пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Группа Артина с древесной структурой является древесным произведением двупорожденных групп Артина объединенных по циклическим подгруппам, порожденными образующими объединяемых подгрупп.

Теорема 2. *В группе Артина $G_{ab} = \langle a,\ b;\ \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$, где $m_{ab} \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ \infty\}$ разрешимы проблемы:*

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle$, $w \in G_{ab}$;*
3. *проблема пересечения смежных классов любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle$, $w \in G_{ab}$.*

При доказательстве используется следующие теоремы.

Теорема 3. *[3] Группа*

$$G_{ab} = \langle a,\ b;\ \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$$

*при $m_{ab} = 2k+1$ изоморфна группе $\left\langle x, y;\ x^{2k+1} = y^2\right\rangle$*
*при $m_{ab} = 2k$ изоморфна группе $\left\langle x, t;\ x^k = t^{-1}x^k t\right\rangle$*

Теорема 4. *[4] В группе $G = \langle F_m * F_n; w = v\rangle$ являющейся свободным произведением свободных групп $F_m$, $F_n$ рангов $m$, $n$ соответственно, объединенных по циклическим подгруппам: $\langle w\rangle$, $\langle v\rangle$, где $w \in F_m$, $v \in F_n$ - разрешима проблема вхождения.*

Теорема 5. *[5] [6] Пусть $G = G_1 * G_2$ свободное произведение групп $G_1$, $G_2$ в каждой из которых пересечение конечнопорожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа. Тогда если*

1. *существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп $H_1,\ H_2$ принадлежащих $G_i$ выписать образующие их пересечения.*

2. *существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп $H_1,\ H_2$ принадлежащих $G_i$ и любого $w \in G_i,\ i{=}\overline{1,2}$ установить пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$,*

*тогда в группе разрешима проблема пересечения подгрупп и разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп.*

Теорема 6. *[7] [8] [9] Пусть группа*

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} {*}G_s; relG_1,\ \ldots, relG_n,\ \sigma_{ji}\left(U_{ij}\right) = U_{ji},\ i \in I_1, j \in I_2 \right\rangle$$

*есть древесное произведение групп $G_s, s = \overline{1,n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < G_i,\ U_{ji} < G_j$ с помощью конструктивного изоморфизма*

$$\sigma_{ji} : \sigma_{ji}\left(U_{ij}\right) = U_{ji},\ i \in I_1, j \in I_2,\ |I_1| < \infty, |I_2| < \infty,$$

*Тогда, если объединяемые подгруппы $U_{ij}, U_{ji}$ обладают свойством максимальности в соответствующих группах $G_i,\ G_j$, кроме того в сомножителях разрешимы:*

1. *проблема вхождения;*

2. *проблема пересечения любой конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij}$;*

3. *проблема пересечения класса смежности конечнопорожденной подгруппы $H < G_i$ с объединяемой подгруппой $U_{ij} < G_i$,*

*то в группе $G$ разрешима проблема вхождения, и любое конечное множество слов $W \subset G$ можно эффективно преобразовать в специальное, порождающее подгруппу $\langle W \rangle$.*

Теорема 7. *В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов $W$ в специальное, порождающее подгруппу $\langle W \rangle$.*

Теорема 8. *Группы Артина $G_\Gamma$ с древесной структурой когерентны.*

Известно, что всякая двупорожденная группа Артина является когерентной. Группа Артина с древесной структурой является древесным произведением двупорожденных групп Артина с циклическим объединением. Используя структуру любой конечнопорожденной подгруппы, множество образующих которой есть специальное множество, можно показать, данная подгруппа конечно определена.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006, Т.12, Вып.1,С. 67-82.

2. Hermiller S.M. and Meier J. Artin groups, rewriting system and three-manifolds // J. Pure Appl. Algebra, 136 (1999), 141-156.

3. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа. // Сиб. Мат. журнал, Т. XXVI №5, 1985, С. 27-42.

4. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. Тульский гос. пед. ин-т, 1972, С. 3-86.

5. Безверхний В. Н., Роллов Э.В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра, №1, 1974, С. 16-31.

6. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритм. Проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1981, С. 102-116.

7. В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. Алгоритм. Проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1981, С. 20-62..

8. В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритм. Проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1986, С. 3-21.

9. В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в группах с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром // Деп. Сиб. Мат. журнал, Т. XXVI №2, 1985, С. 219-220.

---

УДК 511.32

## О централизаторе конечно порожденных подгрупп свободного произведения свободных групп с циклическим объединением[1]

**В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)**
Российская таможенная академия
e-mail:vnbezv@rambler.ru
**Е. С. Логачева (Россия, г. Тула)**
МБОУ ЦО №38. „Химический лицей“
e-mail:Logacheva-es@mail.ru

## On the centralizer of finitely generated subgroups of a free product of free groups with cyclic amalgamation

**V. N. Bezverkhniy (Russia, г. Moscow)**
Russian Customs Academy
e-mail:vnbezv@rambler.ru
**E. S. Logacheva (Russia, г. Tula)**
Education center № 38. Chemical Lyceum
e-mail:Logacheva-es@mail.ru

Целью данной работы является решение проблемы обобщенной сопряженности слов и изучение централизаторов конечно порожденных подгрупп в свободном произведении двух свободных групп с циклическим объединением.

Пусть $F_m = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle, F_n = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ - свободные группы рангов $m$ и $n$ соответственно. Рассмотрим свободные произведения $F_m, F_n$, объединенных по циклическим подгруппам.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-41-710002 р-а.

Пусть $C_1 = \langle u^p(a_\nu)\rangle < F_m$ , $C_2 = \langle v^q(a_\mu)\rangle < F_n$ изоморфные циклические подгруппы, где $u(a_\nu)$ и $v(b_\mu)$ не являются истинными степенями в соответствующих свободных группах. Тогда группа $G = F_m *_{C_1=C_2} F_n$ имеет копредставление

$$G = \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n; u^p(a_\nu) = v^q(a_\mu)\rangle. \tag{1}$$

Группы $F_m, F_n$ будем называть сомножителями группы $G$. Обозначим через C подгруппы $C_1$ и $C_2$. Тогда свободное произведение (1) будем записывать следующим образом $G = F_m *_C F_n$, где $u(a_\nu) = u(a_1, \ldots, a_m)$ , $v(b_\mu) = v(b_1, \ldots, b_n)$ .

В группах $G$ разрешима проблема сопряженности слов [8].

Определение 1. *Будем говорить, что в группе $B$ разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств слов $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$, принадлежащих $B$ определить, существует ли $z \in B$ такое, что*

$$z^{-1}w_1z = v_1, z^{-1}w_2z = v_2, ..., z^{-1}w_nz = v_n. \tag{2}$$

Теорема 1. [6] *В свободной группе разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Для любого $w \in F_m *_C F_n$ имеет место следующее представление $w = g_1g_2 \ldots g_s$, где для любых $i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $g_i$ принадлежит $F_m$ либо $F_n$, $g_i$ не содержится в объединяемой подгруппе и любые два соседних $g_i$ , $g_{i+1}$ принадлежат разным сомножителям, которое называется нормальным представлением $w$, число $s$ будем называть слоговой длиной $w$ и обозначать $\|w\| = s$. Слово $w = g_1g_2 \ldots g_s$, называется циклически несократимым, если $g_1$ и $g_s$ принадлежат разным сомножителям группы $G$.

Теорема 2. [4, 5] *В свободном произведении двух свободных групп с циклическим объединением разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Из теоремы 2 получаем необходимое условие обобщенной сопряженности слов в рассматриваемом классе групп.

Следствие 1. *Пусть $\{u_i|i = \overline{1,n}\}, \{v_i|i = \overline{1,n}\}$ два множества слов, принадлежащих группе $G = \langle F_m * F_n|u^p(a_\mu) = v^q(b_\mu)\rangle$. Если данные множества являются обобщенно сопряженными, то подгруппы $H_1 = \langle u_i, i = \overline{1,n}\rangle$, $H_2 = \langle v_i, i = \overline{1,n}\rangle$ сопряжены в группе $G$.*

Очевидно, что обратное утверждение не справедливо.

Теорема 3. *В свободной группе централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм построения образующих централизатора.*

Лемма 1. [2, 6] *Пусть $G = F_m *_C F_n$ и в $G$ имеет место равенство*

$$z^{-1}h_1z = h_2,$$

*где $h_1, h_2 \in C$. Тогда $h_1 = h_2$ и $z \in \langle u(a_\mu), v(b_\mu)\rangle$.*

Теорема 4. *Пусть $w = g_1g_2...g_k$ - циклически несократимое слово группы $G = F_m *_C F_n$, где для любого $i$ $g_i \neq 1$, $g_i \in F_m$ либо $g_i \in F_n$, $g_i, g_{i+1}$ принадлежат разным сомножителям, $k > 1$. Пусть также $w$ не является истинной степенью. Тогда $C_G(w)$ есть либо циклическая подгруппа порожденная $w$, либо абелева: $C_G(w) = \langle w\rangle \times \langle u^p(a_\mu)\rangle$ либо $C_G(w) = \langle w\rangle \times \langle v^q(b_\mu)\rangle$, где $w \in \langle u^p(a_\mu); v^q(b_\mu)\rangle$.*

Лемма 2. [1] *Пусть* $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, *два множества слов из группы* $G = F_m *_C F_n$, *сопряженные в* $G$, *то есть существует* $z \in G$ *такое, что* $\Lambda_{i=1}^{k}(z^{-1}w_i z = v_i)$. *Тогда*

*1. Если каждое из* $\{w_i\}, \{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, *сопряжены в* $G$ *соответственно с* $h_i, h_i'$, *принадлежащих объединяемой подгруппе,* $w_i = s_i^{-1}h_i s_i$, $v_i = t_i^{-1}h_i' t_i$, *тогда* $h_i = h_i'$.

*2. Если для всех* $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $w_i \in F_m$, $v_i \in F_m$ *(либо одновременно принадлежат* $F_n$*) и не сопряжены с элементами из объединяемой подгруппы, то множества сопряжены в* $F_m$ *(*$F_n$*).*

*3. Если для всех* $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $w_i = s_i^{-1}w_{i_0}s_i$, $v_i = t_i^{-1}v_{i_0}t_i$, *где* $\|w_{i_0}\| = \|v_{i_0}\| > 1$, $w_{i_0}$, $v_{i_0}$ *циклически несократимы, тогда для всех* $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ *существует* $w_{i_0}^*$ *циклическая перестановка* $w_{i_0}$ *такая, что* $\Lambda_{i=1}^{k}(h^{-1}w_{i_0}^* h = v_{i_0})$.

Данная лемма является обобщением теоремы Магнуса [6] для групп $F_m *_C F_n$.

Теорема 5. *В группе* $G = F_m *_C F_n$ *разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Рассмотрим множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Пусть подгруппы $H_1 = \langle\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}\rangle$ и $H_2 = \langle\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}\rangle$ сопряжены в группе $G$. Выясним: будут ли данные множества слов обобщенно сопряженными.

Пусть $\forall i$, $w_i = s_i^{-1}w_{i0}s_i$, где $w_{i0}$ - циклически несократимые слова и $v_i = t_i^{-1}v_{i0}t_i$, где $v_{i0}$ - циклически несократимы. Для каждого $i$ выясним:

$$\forall i, \exists z_i : z_i^{-1}w_i z_i = v_i. \tag{3}$$

Из теоремы Магнуса [6] о сопряженности слов в свободном произведении групп с объединением следует, что соотношение (3) выполнено, если существует циклическая перестановка $w_{i0}^*$ элемента $w_{i0}$ и $h_i \in C$ такие, что

$$h_i^{-1}w_{i0}^* h_i = v_{i0}. \tag{4}$$

Пусть $\exists z \in G$ такое, что

$$z^{-1}w_1 z = v_1, z^{-1}w_2 z = v_2, ..., z^{-1}w_n z = v_n. \tag{5}$$

Будем предполагать, что $w_1, v_1$ - циклически несократимы. Тогда система равенств (5) будет соответствовать:

$$z^{-1}w_1 z = v_1, z^{-1}s_2^{-1}w_{20}s_2 z = t_2^{-1}v_{20}t_2, ..., z^{-1}s_n^{-1}w_{n0}s_n z = t_n^{-1}v_{n0}t_n.$$

Учитывая Лемму 2 и условие $z^{-1}w_1 z = v_1$, имеем $w_1 = v_1$. Преобразуем систему равенств следующим образом:

$$z^{-1}v_1 z = v_1, t_2 z^{-1}s_2^{-1}h_2 v_{20}h_2^{-1}s_2 z t_2^{-1} = v_{20}, ..., t_n z^{-1}s_n^{-1}h_n v_{n0}h_n^{-1}s_2 z t_n^{-1} = v_{n0}.$$

Отсюда следует, что:

$$z^{-1} = v_1^{m_1}, t_2 z^{-1}s_2^{-1}h_2 = v_2^{m_2}, ..., t_n z^{-1}s_n^{-1}h_n = v_n^{m_n}.$$

В результате получим:

$$z^{-1} = v_1^{m_1}, z^{-1} = t_2^{-1}v_2^{m_2}h_2^{-1}s_2,$$

$$z^{-1} = t_3^{-1}v_3^{m_3}h_3^{-1}s_3, \tag{6}$$

$$...,$$
$$z^{-1} = t_n^{-1} v_n^{m_n} h_n^{-1} s_n.$$

Заметим, что в слове $t_i^{-1} v_i^{m_i}$ нет сокращений.

Пусть
$$t_2 = v_1^{\alpha_1} v_{1\Lambda}^{(1)}, t_3 = v_1^{\alpha_2} v_{1\Lambda}^{(2)}, ..., t_n = v_1^{\alpha_n} v_{1\Lambda}^{(n)},$$
где $v_1 = v_{1\Lambda}^{(1)} v_{1\Pi}^{(1)} = ... = v_{1\Lambda}^{(n)} v_{1\Pi}^{(n)}$. Обозначим через $t_0$ слово $t_i$ наибольшей длины:
$$|t_0| = max\{|t_i|, i = \overline{1,n}\}.$$

Кроме того в каждом слове $v_{i0}^{m_{i0}} h_i^{-1} s_i^{-1}$ проведем свободные сокращения, получим слова $v_{i0}^{m_{i0}} y_i$, несократимые в свободной группе. Аналогично тому, как мы поступали для $t_i$, выделим среди $y_i$ - подслово $y_0$ максимальной длины. Для $t_0$ и $y_0$ существуют $\alpha_0$ и $\beta_0$, что
$$v_1^{\alpha_0} = t_0 v_{1\Pi}^{(0)}, v_1^{\beta_0} = v_{1\Lambda}^{(0)} y_0.$$

В результате $v_1^{m_1} = v_1^{\alpha_0} v_1^{m_0} v_1^{\beta_0}$.

Из системы (6) получаем:
$$v_1^{\alpha_0} v_1^{m_0} v_1^{\beta_0} = v_1^{\alpha_0} v_{2\Pi}^{(2)} v_2^{m_2} v_{2\Lambda}^{(2)} v_1^{\beta_0} = v_1^{\alpha_0} v_{3\Pi}^{(3)} v_3^{m_3} v_{3\Lambda}^{(3)} v_1^{\beta_0} = v_1^{\alpha_0} v_{n\Pi}^{(n)} v_n^{m_n} v_{n\Lambda}^{(n)} v_1^{\beta_0}. \quad (7)$$

Переписав данные равенства и сократив каждое на $v_1^{\alpha_0}$ и $v_1^{\beta_0}$ получаем систему равенств $v_1^{m_0} = T_2 (v_2^*)^{m_2} = T_3 (v_3^*)^{m_3} = ... = T_n (v_n^*)^{m_n}$. Можно считать, что длина каждого $|T_i| < |v_1|$.

Перепишем соотношение (7) следующим образом:
$$\begin{gathered} z^{-1} = g(1)g(2)g(3)...g(i)...g(j)...g(n) \\ v_1^{m_1} = g^{(1)}(1)g^{(1)}(2)g^{(1)}(3)...g^{(1)}(i)...g^{(1)}(j)...g^{(1)}(n) \\ (v_2^*)^{m_2} T_1 = g^{(2)}(1)g^{(2)}(2)g^{(2)}(3)...g^{(2)}(i)...g^{(2)}(j)...g^{(2)}(n) T_1 \\ (v_3^*)^{m_3} T_2 = g^{(3)}(1)g^{(3)}(2)g^{(3)}(3)...g^{(3)}(i)...g^{(3)}(j)...g^{(3)}(n) T_2 \\ ..., \\ (v_n^*)^{m_n} T_n = g^{(n)}(1)g^{(n)}(2)g^{(n)}(3)...g^{(n)}(i)...g^{(n)}(j)...g^{(n)}(n) T_n \end{gathered} \quad (8)$$

Переписав соотношение (8), определим соотношение
$$\Psi(1,2,3,...,r) \to \Big( (\mathbf{Z}^+; \mathbf{R_1}) \times (\mathbf{Z}^+; \mathbf{R_2}) \times ... \times (\mathbf{Z}^+; \mathbf{R_n}) \Big)$$
следующим образом:
$$\Psi_{\mathbf{Z}^+}(i) = \Big( (r_1(i), p_1(i), (r_2(i), p_2(i), ..., (r_n(i), p_n(i)) \Big),$$
где $r_1(i)$ есть $(v_1^*)^{\varepsilon_1}$, $p_1(i)$ - $i$-ый слог $(v_1^*)^{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$,...,$r_n(i) = (v_n^*)^{\varepsilon_n}$, $p_n(i)$ - $i$-ый слог в слове $r_n(i)$, $\varepsilon_n = \pm 1$, $R_s = \{\{v_s^*\} \cup \{(v_s^*)^{-1}\}\}$.

Заметим, что каждый слог $g(i) = h_s g^s(i) h_s'$, где $g^s(i)$ - $i$-ый слог в слове $v_s^*$, $h_s, h_s' \in C$, $C : u^p(a_\nu) = v^q(b_\mu)$.

Назовем $\Psi_w(i)$ типом слога $g(i)$. Мощность множества всех типов не превосходит
$$A = \Big( 2 \sum (l(v_1^*) + 1)^2 \Big) \cdot ... \cdot \Big( 2 \sum (l(v_n^*) + 1)^2 \Big),$$

где в каждом сомножителе $\left(2\sum(l(v_s^*)+1)^2\right)$ - производится суммирование по всем циклическим перестановкам слова $v_s^{\varepsilon_s} \in R_s$, $l(v) = \|v\|$.

Так как число типов конечно для каждого слова $w$, то существуют $i$ и $j$ такие, что $\Psi_w(i) = \Psi_w(j)$. То есть

$$\Psi_w(i) = g(i) = g_1^{(1)}(i) = h_2 g^{(2)}(i) h_2' = ... = h_n g^{(n)}(i) h_n';$$

$$\Psi_w(j) = g(j) = g_1^{(1)}(i) = \overline{h}_2 g^{(2)}(i) \overline{h}_2' = ... = \overline{h}_n g^{(n)}(i) \overline{h}_n'.$$

Из равенства типов $\Psi_w(i) = \Psi_w(j)$ следует: $g(i) = g_p^1(i) = h_p g^{(p)}(i) h_p' = \overline{h}_p g^{(p)}(i) \overline{h}_p'$, $p = \overline{1,n}$.

Из равенства $h_p g^{(p)}(i) h_p' = \overline{h}_p g^{(p)}(i) \overline{h}_p'$, $p = \overline{1,n}$ следует, что $h_p = \overline{h}_p$ , $h_p' = \overline{h}_p'$, в противном случае $g^{(p)}(i)$ принадлежит подгруппе $\langle u(a_\nu), v(a_\mu)\rangle$. В этом случае $h_i g^{(p)}(i) = g^{(p)}(i) h_i$.

Lemma 1. *Пусть $z \in \langle v_1\rangle$ и удовлетворяет системе* (7), *причем $l(z) > A$. Тогда существует слово $z' \in \langle v_1\rangle$, для которого система соотношений* (7) *выполнена и $\|z\| > \|z'\|$.*

Необходимо выбрать общую часть в системе (7), заключенную между $i$ и $j$. Полученное слово принадлежит $z \in \langle v_1\rangle$ и удовлетворяет системе (7).

Теорема 6. *В группе $G = \langle F_m *_C F_n; u^p(a_\nu) = v^p a_\mu\rangle$ алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 7. *Централизатор любой конечно порожденной подгруппы $H$ группы*

$$G = \langle F_m *_C F_n; u^p(a_\nu) = v^p a_\mu\rangle$$

*конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

Используя метод доказательства теоремы 5 и метод математической индукции можно построить систему образующих централизатора конечно порожденной подгруппы данной группы.

Из теоремы 7 непосредственно следует справедливость теоремы 3.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Дискретная математика. 2016, Том 28, №1. С. 3-18

2. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2019, Том 22, №4. С. 29-37

3. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп I// Современная Алгебра. 1977. Выпуск 6. С 16-23

4. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп I// Современная Алгебра. 1977. Выпуск 6. С 24-32

5. Безверхний В.Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998, Том 4, №1. С. 199-222

6. Magnus V., Karras A., Solitar D. Combinatorial group theory. — Moscow:Since, 1974. 456 с.

7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — Москва:Мир, 1980. 450С.

8. S. Lipschuts. The generalisation Dehn's result on the conjugacy problem. // Prog. Amer. Math. Sjc. Том 150, 1966. P. s 759-762

---

УДК 514.9

## О сопряженности подгрупп в группах Артина[1]

**В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)**
Российская таможенная академия
e-mail: vnbezv@rambler.ru
**А. С. Угаров (Россия, г. Тула)**
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

## On the conjugacy of subgroups in Artin groups

**V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)**
Russian Customs Academy
e-mail: vnbezv@rambler.ru
**A. S. Ugarov (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Группа Артина определяется системой образующих $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ и системой образующих $\langle \sigma_i \sigma j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma i \rangle^{m_{ji}}$, где $\langle \sigma_i \sigma j \rangle^{m_{ij}} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots$ - слово из чередующихся образующих $\sigma_i, \sigma_j$ длины $m_{ij}$, $m_{ij}$ - элемент симметрической матрицы Кокстера $M = (m_{ij}), i, j = \overline{1, n}, m_{ii} = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$, при $i \neq j, m_{ij} \in 2, 3, \cdots, n, \cdots, \infty, m_{ij} = \infty$ означает, что соотношение с образующими $\sigma_i, \sigma_j$ - отсутствует.

Копредставление группы Артина имеет вид:

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n} \rangle \tag{1}$$

Каждой конечнопорожденной группе Артина можно поставить в соответствие конечный граф $\Gamma$, каждой вершине которого $v_i$ ставится в соответствие образующий $\sigma_i$ группы $G$, а ребру, соединяющему вершины $v_i, v_j$ - элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины $v_i, v_j$ не соединены ребром, то паре $v_i, v_j$ соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Кокстера, а группа Артина ему соответсвующая имеет копредставление (1). Будем обозначать данную группу Артина $G_\Gamma$.

С каждой группой Артина связана группа Коксетера:

$$\overline{G_\Gamma} \langle \sigma_1, \cdots \sigma_n; \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{m_{ij}} = \langle \sigma_j \sigma_i \rangle^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i = \overline{1, n} \rangle \tag{2}$$

Если группа $\overline{G_\Gamma}$ конечна, то группа $G$ называется группой Артина конечного типа. К данному классу принадлежат группы кос $B_{n+1}$, в которых Ф. А. Гарсайд в 1969 году решил проблему сопряженности слов [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИИ 19-41-710002 р_а

Э. Брискорном и К. Сайто были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа. [2].

П. Шупп и К. Аппель определели классы групп большого типа ($m_i \geq 3$) и экстрабольшого типа ($m_i > 3$) [3]. В группах Артина экстрабольшого типа были решены проблемы равенства и сопряженности слов; в работах [4], [5] авторами были независимо решены проблемы равенства и сопряженности слов в групппа Артина большого типа. Кроме того, в [6] была решена обобщенная проблема сопряженности слов в группах Артина большого и экстрабольшого типа и доказана конечнопорожденность изолятора конечнопорожденной подгруппы и указан алгоритм, выписывающий его образующие.

В [7] были определены группы Артина и Кокстера с древесной структурой, то есть граф Кокстера которых есть дерево-граф и решены основные алгоритмические проблемы в этих классах групп. Отметим, что числа Кокстера $m_{ij}$ принимают значения: $m_{ij} \in \{2, 3, \cdots, \infty\}$.

В работе [8] авторами были определены группы Артина с $m$-угольной структурой. Это группы, граф Кокстера которых состоит из $m$-угольников, элементы матрицы Кокстера $m_{ij} \in \{2, 3, \cdots, \infty\}$. Для групп с $m$-угольной структурой с $m > 3$ решены проблемы равенства и сопряженности слов.

Основной целью нашей работы является решение проблемы сопряженности подгрупп в группах Артина с древесной структурой с тремя образующими:

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle^{m_{12}} = \langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle^{m_{21}}, \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle^{m_{23}} = \langle \sigma_3, \sigma_2 \rangle^{m_{32}} \rangle \tag{3}$$

Данные группы являются свободным произведением двух групп Артина с двумя образующими, объединенных по циклической подгруппе, а именно групп

$$G_{\sigma_1, \sigma_2} = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle^{m_{12}} = \langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle^{m_{21}} \rangle \tag{4}$$

$$G_{\sigma_2', \sigma_3} = \langle \sigma_2', \sigma_3 | \langle \sigma_2', \sigma_3 \rangle^{m_{23}} = \langle \sigma_3, \sigma_2' \rangle^{m_{32}} \rangle \tag{5}$$

объединенных по бесконечным циклическим подгруппам $\langle \sigma_2 \rangle, \langle \sigma_2' \rangle$ :

$$G = \langle G_1 * G_2; relG_1, relG_2, \sigma_2 = \sigma_2' \rangle \tag{6}$$

Определим основные понятия, используемые при решении основной проблемы.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе $A$ разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < A$ и любого элемента $w \in A$ установить принадлежит ли $w$ подгруппе $H$.*

Определение 2. *Будем говорить, что в группе $A$ разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любых двух конечнопорожденных подгрупп $H_1, H_2$ из $A$.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе $A$ разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп $H_1, H_2$ из $A$ и любого $w \in A$ установить пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$ или нет.*

Теорема 1. *В группах Артина с двумя образующими алгоритмически разрешимы проблемы*

1. *Проблема вхождения;*

2. *Проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп;*

*3. Проблема пересечения смежных классов.*

Доказательство непосредственно следует из следующих утверждений:

Лемма. [9] Пусть $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$ группа Артина. Если $m_{ab} = 2k+1$, то группа $G_{ab}$ изоморфна группе $G = \langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$; если $m_{ab} = 2k$, то группа $G_{ab}$ изоморфна группе $G = \langle x, t; t^{-1}x^k t = x^k\rangle$.

Теорема 2. *[10], [11] Пусть $G = G_1 * G_2$ - свободное произведение групп $G_1, G_2$ и в каждой из которых пересечение конечнопорожденных подгрупп есть конечнопорожденная подгруппа. Тогда, если*

1. *существует алгоритм, выписывающий для любых конечнопорожденных подгрупп $H_1$, $H_2$ из $G_i, i \in \overline{1,2}$ образующие их пересечения;*
2. *существует алгоритм, определяющий в каждом сомножителе $G_i, i = \overline{1,2}$ пусто или непусто пересечение смежных классов конечнопорожденных подгрупп, то в группе $G$ разрешимы проблемы (1), (2).*

Определение 4. *В группе $A$ разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечнопорожденных подгрупп $H_1, H_2 < A$ установить, существует ли $z \in A$ такое, что $z^{-1}H_1z = H_2$*

Теорема 3. *В группе Артина $G_{ab}$ разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Данный результат непосредственно следует при $m_{ab} = 2k+1$ из [12], а при $m = 2k$ следует из [13].

Теорема 4. *(Основная теорема) В группе Артина с двумя образующими с древесной структурой с тремя образующими разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

При доказательстве данной теоремы непосредственно используется понятие специального множества в свободном произведении двух групп с объединением [14]-[16].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Garsid F. A. The braid group and other groups // Quant. Math. Oxford. ser. (2), 1969, V. 20, p. 235-254.
2. Брискон Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика, 1974 г., Т. 18, № 6, с. 56-79.
3. Appel K. I., Schupp P. E. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math., 1984, p. 50-78.
4. Appel K. I. In Artins groups and Coxeter groups of large type // Contempor. Math. 1984, V. 33, p. 50-78
5. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа // Алгоритмические проблемы. Теория групп и полгрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула. 1986 г. с. 26 - 61.
6. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа //Фундаментальная и прикладная математика, 5:1 (1999), с. 1 - 38.

7. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера см древесной структурой // V Международная конференция „КАлгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения". Тезисы докладов. Тула, 2003 г., с. 33 - 34.

8. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина // Фундаментальная и прикладная математика, 22 (2019), 29-37.

9. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. мат. жур. т. XXVI, № 5, 1985, с. 27 - 42.

10. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974, т. 1, с. 16-31.

11. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. научных тр., Тула, 1981 г., с. 102-116.

12. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп// Современная алгебра, Л., 1977, вып. 9, с. 16-23, 24-34.

13. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия ТулГУ, серия Матет., Мех., 2006, Т. 12, вып. 1, стр 83-101.

14. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп полугрупп. Тула, Тульск. гос. пед. инс-т, 1972 г., с. 3 - 86.

15. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Сбор. науч. тр. Межвузовский. Тула, 1981, с. 20-62.

16. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторые классы групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблмы теории групп и полугрупп. Межвузовский сб. науч. тр. Тула. 1986, с. 3 - 21.

---

УДК 511.32

## О гиперболичности некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением[1]

**Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

## On the hyperbolicity of some two-generated groups with one defining relation

**N. B. Bezverkhnyaya (Russia, Moscow)**
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ №19-41-710002_р_а

Пусть $G = \langle A; R\rangle$ - конечноопределенная группа со множеством образующих $A$ и множеством определяющих соотношений $R$. Слово $w \in F(A), F(A)$ - свободная группа, равно единице в $G$, тогда и только тогда, когда

$$w = \prod_{i=1}^{n} S_i^{\epsilon_i} R_i^{\epsilon} S_i^{-\epsilon_i} \tag{1}$$

в свободной группе $F(A)$, где $S_i \in F(A), \epsilon_i, \epsilon = \pm 1, R_i \in R, i = \overline{1,n}$.

Через $L(w)$ обозначим наименьшее целое n, для которого слово w представимо в виде (1).

Конечноопределенную группу $G$ назовем словарно гиперболической, если $L(w)$ ограничена сверху линейной функцией $c|w|$, зависящей от длины $|w|$ слова $w$ и константы $c$.

Вопрос об определении класса гиперболических групп среди всех групп с одним определяющим соотношение является весьма важным, так как гиперболические группы обладают рядом ценных алгоритмических и комбинаторных свойств, которые несправедливы в классе конечно представленных групп в общем. Например, в гиперболических группах разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. Геометрическое доказательство этих факторов дал М. Громов [1], а алгебраические И.Г. Лысенок [2]. В классе гиперболических групп без кручения З. Селом решена проблема изоморфизма [3]. Р.И. Григорчук и Г. Ф. Курчанов дали описание решений квадратичных уравнений в гиперболических группах [4]. А.Ю. Ольшанский доказал, что все неэлементарные гиперболические группы являются SQ-универсальными [5].

В [6] И. Капович доказал гиперболичность группы

$$G = \langle a, t; t^2 a t^{-1} a t a^2 t^{-2} a^{-1} = 1\rangle$$

В [7] дано полное описание всех гиперболических и негиперболических групп в классе всех групп вида:

$$G^* = \langle a, b, t; t^{-1} a t = b, t^{-1} b t = w(a, b)\rangle, w \notin \langle b\rangle$$

В [8] дано описание всех гиперболических групп вида

$$G = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n, p, q; A(a_1, a_2, \cdots, a_n, p) = B(a_1, a_2, \cdots, a_n, q)\rangle,$$

где слово $A(a_1, a_2, \cdots, a_n, p)$ содержит $p$ и не содержит $q$, а $B(a_1, a_2, \cdots, a_n, q)$ содержит $q$ и не содержит $p$.

В [9], [10], [11] дано полное описание всех гиперболических и негиперболических групп в классе всех групп вида:

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, t; t^{-1} a_0 t = a_1, t^{-1} a_1 t = a_2, \cdots, t^{-1} a_{n-1} t = a_n, t^{-1} a_n t = w\rangle,$$

где $w = a_0^{\epsilon} w_0 a_0^{\delta}, \epsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Доказательство основного результата опирается на комбинаторную теорему Бествины [12], [13].

Пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1} \alpha_{-1}(c) t = \alpha_1(c), c \in C\rangle \tag{2}$$

$HNN$-расширение группы $G$, соответствующее мономорфизмам $\alpha_{-1}, \alpha_1 : C \to G$ для некоторой группы $C$.

Определение 1. *[9] Аннулятором длины $2M+1$ в (2) будем называть пару $\Sigma = (\overline{p}, \overline{c}$, где*

$$\overline{p} = (\ t^{\epsilon-M}, h_{-M}, t^{\epsilon-M+1}, \cdots, t^{\epsilon_0}, h_0, t^{\epsilon_1}, \cdots, h_{M-1}, t^{\epsilon_M},$$

*где все $h_0$ для $i \in \{M, \cdots, M-1\}$ все $c_i \in C$, причем пара $\Sigma = (\overline{p}, \overline{c}$ должна удовлетворять следующему условию: для любого $i \in \{M, \cdots, M-1\}, h_i^{-1} \alpha_{\epsilon_i} h_i = \alpha_{-\epsilon_{i+1}}(c_{i+1})$, то есть $p^{-1} \alpha_{-\epsilon_{-M}}(c_{-M}) p = \alpha_{\epsilon_M}(c_M)$, где $p = t^{\epsilon_M} h_M t^{\epsilon_{M-1}} \cdots t^{\epsilon_0} h_0 t^{\epsilon_1} \cdots h_{M-1} t^{\epsilon_M}$.*

Аннулятор $\Sigma = (\overline{p}, \overline{c}$ называется существенным, если не содержит подпоследовательности вида $t^{-1}, \alpha_{-1}(c), t$ или $t, \alpha_1(c), t^{-1}$.

Определение 2. *[9] Пусть $G^*$ имеет копредставление (2). $G$ и $C$ - конечнопорожденные группы. Обозначим через $l_C, l_G, l_{G^*}$ - функции длины соответственно в группах $C$, $G$, $G^*$.*

*Пусть $\Sigma = (\overline{p}, \overline{c})$ - аннулятор длины $2M+1$, тогда $l_c(c_0)$ будем называть обхватом аннулятора, а $max(l_G(h_i))$ - его шириной.*

*Если существует действительное число $\lambda > 1$, такое, что $\lambda l_c(c_0) < max\{l_c(c_{-M}), l_c(c_M)\}$, то аннулятор называется $\lambda$-гиперболическим.*

Комбинаторная теорема Бествины [12], [13]. Пусть $G$ – гиперболическая конечнопорожденная группа, и пусть $\alpha_{-1}, \alpha_1 : C \to G$ - мономорфизмы, такие, что подгруппы $\alpha_{-1}(C), \alpha_1(C)$ квазивыпуклы в $G$. $G^*$ - есть $NHH$-расширение $G$.

Если существует действительное число $\lambda > 1$ и целое $M > 0$, такие, что для произвольного $p > 0$ существует $H(p)$, такие, что всякий существенный аннулятор длины $2M+1$ с шириной не более $p$ и обхватом не менее $H(p)$ является $\lambda$-гиперболическим, тогда $G^*$-гиперболическая группа.

Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, t; t^{-1}a_0t = a_1, t^{-1}a_1t = a_2, \cdots, t^{-1}a_{n-1}t = a_n, t^{-1}a_nt = w\rangle \qquad (3)$$

где $w = a_k\overline{k}a_l$, где $a_k, a_l$ принадлежит множеству $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Пусть $F = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$, тогда $G^*$ является $HNN$-расширением группы $F$. Пусть $f$ произвольный элемент из группы $F$. Очевидно, что $|t^{-1}ft| = |f|$, если $f$ не содержит $a_n$. Длина элемента $t^{-1}ft$ может быть меньше длины $f$, если $f$ содержит подслова вида:

$$a_{k-1}^{-1}a_n,\ a_n^{-1}a_{k-1},\ a_{l-1}a_n^{-1},\ a_na_{l-1}^{-1} \qquad (4)$$

Назовем слово $f$ 1-сокращаемым, если оно содержит хотя бы одно подслово вида (4). Аналогичным образом можно определить $i$-сокращаемое слово.

Слово $f$ называется $i$-сокращаемым, если оно содержит хотя бы одно подслово вида:

$$a_{k-i}^{-1}a_{n-(i-1)},\ \ a_{n-(i-1)}^{-1}a_{k-i},\ \ a_{l-i}a_{n-(i-1)}^{-1},\ \ a_{n-(i-1)}a_{l-i}^{-1}$$

Пусть $G^*$ имеет копредставление (3), причем либо $k \neq 0$, либо $l \neq 0$, тогда группа $G^*$ является гиперболической, если слово $w$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $w$ не является истинной степенью;
2. не существует $v \in \langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$ такого, что $w \cdot v$ истинная степень;
3. $w$ не начинается и не заканчивается на образующий $a_n^{\pm 1}$;
4. $w$ не является $i$-сокращаемым.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gromov. Hyperbolic groups//Essays in groups theory ed. S.M. Gersten M.S.P.I. Publ. 8. Springer. 1987. P. 75-263
2. И.Г. Лысенок. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп//Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1989. Т.27. №6. С.128-139.

3. Z. Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups//I. Ann. Math. 141(2). 1995. P. 217-283.

4. Р.И. Григорчук, П.Ф. Курчанов. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией//Итоги научн. и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. 1990. Т. 58. С. 191-256.

5. А.Ю. Ольшанский. SQ-универсальность гиперболических групп//Мат. сборник. 1995. Т.186. № 8. С.119-132.

6. I. Kapovich. Quasiconvex subgroups of one-relator with torsion//PhD Thesis CHNV 1996.

7. Н.Б. Безверхняя. Гипеполичность некоторых 2-порожденных подгрупп с одним определяющим соотношением//Диск. мат-ка. 2002 Т.14 №3. С. 54-70.

8. В.Н. Безверхний, Н.Б. Безверхняя. О гиперболичности некоторых групп с одним определяющим соотношением//Чебышевский сб. Т.2 (2001). Труды IV межд. конф. «Совр. пробл. теории чисел и ее приложения». С. 5-18.

9. Н.Б. Безверхняя. Описание гиперболических и негиперболических групп, являющихся некоторыми HNN-расширениями свободных групп// Чебышевский сб. Т.3 вып. 1(3). 2002. С. 17-32.

10. Н.Б. Безверхняя. Гиперболичность некоторых HNN-расширений свободных групп// Чебышевский сб. Т.4 вып. 1(5). 2003. С. 34-51.

11. Н.Б. Безверхняя. О свойстве Хаусона и гиперболичности некоторых двупорожденных подгрупп с одним определяющим соотношением// Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вуз. сб. Тула 2001 С. 17-25.

12. M. Bestvina and M. Feighn. The Combination Theorem for Negatively Curved Groups// J. of Diff.Geom.35.1992. P. 85-101/

13. M. Bestvina and M. Feighn. Addendum and correction to: A combination theorem for negatively curved groups// J. of Diff. Geom. 43.1996. N 4.P. 85-101

14. Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. М. Мир. 1980.

---

УДК 512.542

## Распознавание конечных групп по свойствам максимальных подгрупп

**А. Ф. Васильев (Беларусь, г. Гомель)**
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: formation56@mail.ru
**А. К. Фурс (Беларусь, г. Гомель)**
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: andreyfurss@gmail.com

# Recognition of finite groups by the properties of maximal subgroups

**A. F. Vasil'ev (Republic of Belarus, Gomel)**
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: formation56@mail.ru
**A. K. Furs (Republic of Belarus, Gomel)**
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: andreyfurss@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Знание свойств максимальных подгрупп группы позволяет во многих случаях получить существенную информацию о самой группе. Например, согласно теореме В.А. Белоногова [1] группа $G$ нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. Данный результат стал отправной точкой рассмотрения общей проблемы распознавания принадлежности группы $G$ заданному классу $\mathfrak{F}$ в зависимости от насыщенности ее попарно несопряженными максимальными подгруппами, принадлежащими $\mathfrak{F}$. В работе [2] было введено понятие $\Omega_t$-различимой формации. С помощью этого понятия, развивая отмеченный выше результат В.А.Белоногова в классе конечных разрешимых групп, в [2] было установлено, если группа $G$ имеет $n+2$ попарно несопряженные максимальные подгруппы, нильпотентная длина которых $\leq n$, то $G$ имеет нильпотентную длину $\leq n$. Аналогичный результат независимо получил Хёфлинг в [3]. Он также показал, что класс всех сверхразрешимых групп не является $\Omega_t$-различимым для разрешимых групп для любого натурального $t$. С другой стороны, в [2] было доказано, что разрешимая группа, имеющая три попарно несопряженные абнормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы, является сверхразрешимой. Отмеченные выше результаты приводят к следующему определению.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, $n$ и $k$ — неотрицательные целые числа, причем $n+k \geq 1$. Класс $\mathfrak{F}$ называется $\Omega_{n,k}$-различимым в классе $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G$, имеющую $n+k$ попарно несопряженных максимальных подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{F}$, из которых $n$ подгрупп нормальны, а $k$ подгрупп абнормальны в $G$.*

По определению пустой класс групп является $\Omega_{n,k}$-различимым для любых $n$ и $k$ в любом классе $\mathfrak{X}$.

Отметим, что семейство всех $\Omega_t$-различимых формаций совпадает с семейством

$\Omega_{t,0} \bigwedge \Omega_{t-1,1} \bigwedge \ldots \bigwedge \Omega_{0,t}$-различимых формаций, т.е. совпадает с пересечением семейств всех $\Omega_{n,k}$-различимых формаций, где $n$ и $k$ пробегают все неотрицательные целые числа такие, что $n+k=t$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть $g$ и $f$ — локальные экраны формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ такие, что $f(p) \subseteq g(p)$ для любого простого числа $p$. Если $f(p)$ является $\Omega_{n,k}$-различимой формацией в $g(p)$ для любого простого числа $p$, то $\mathfrak{F}$ — $\Omega_{n,k}$-различимая формация в $\mathfrak{X}$, для $n \geq 2$, $k=0$ и $\mathfrak{F}$ — $\Omega_{n,k+2}$-различимая формация в $\mathfrak{X}$, для $k \geq 1$.*

(2) *Пусть $X$ and $F$ — максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Если $F(p)$ является $\Omega_{n,k}$-различимой формацией в $X(p)$ для любого простого числа $p$, то $\mathfrak{F}$ — $\Omega_{n,k}$-различимая формация в $\mathfrak{X}$, при $n \geq 2$, $k=0$ и $\mathfrak{F}$ — $\Omega_{n,k+1}$-различимая формация в $\mathfrak{X}$, при $k \geq 1$.*

Данная теорема позволяет устанавливать $\Omega_{n,k}$-различимость конкретных формаций в классах разрешимых групп.

Следствие 1. *Формация всех сверхразрешимых групп является $\Omega_{2,2}$-различимой, но не является $\Omega_{1,2}$- и $\Omega_{2,1}$-различимой.*

Напомним [4], что подгруппа $H$ группы $G$ называется *субмодулярной* в $G$, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что $H_{i-1}$ — модулярная подгруппа в $H_i$ для $i = 1, \ldots, s$. Сверхразрешимая группа называется *сильно сверхразрешимой* [5] , если в ней любая силовская подгруппа субмодулярна.

В работе [5] показано, что класс всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией.

Следствие 2. *Формация всех сильно сверхразрешимых групп является $\Omega_{0,3}$- и $\Omega_{2,2}$-различимой, но не является $\Omega_{0,2}$-, $\Omega_{1,2}$- и $\Omega_{2,1}$-различимой.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоногов В. А. Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп // Докл. Акад. наук СССР. 1965. Т. 161, № 6. С. 1255–1256.

2. Васильев А. Ф. О некоторых свойствах локальных формаций // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1985. Вып. 1. С. 4–9.

3. Höfling B. On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group // Arch. Math. 1999. V. 72. P 1–8.

4. Zimmermann I. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. V. 202. P. 545–557.

5. Васильев В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.

---

УДК 512.542

# О канонических подгруппах конечных групп

**Т. И. Васильева (Беларусь, г. Гомель)**
Белорусский государственный университете транспорта
e-mail: tivasilyeva@mail.ru

# On canonical subgroups of finite groups

**T. I. Vasil'eva (Belarus, Gomel)**
Belarusian State University of Transport
e-mail: tivasilyeva@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Опорные подгруппы группы, такие как силовские, холловы и их обобщения, относятся к каноническим подгруппам. Ввиду фундаментальной теоремы Силова для любого простого делителя $p$ порядка группы $G$ силовские $p$-подгруппы (или максимальных $p$-подгруппы группы) существуют в $G$, любые две такие подгруппы сопряжены в $G$ и всякая $p$-подгруппа из $G$ содержится в некоторой силовской $p$-подгруппе из $G$. Во многих случаях знание свойств вложения силовских подгрупп в группу позволяет найти строение самой группы. Например, группа нильпотентна всякий раз, как

любая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. Подгруппа $H$ конечной группы $G$ называется $\mathbb{P}$-субнормальной в $G$ [1], если либо $H$ совпадает с группой $G$, либо $H$ можно соединить с группой $G$ цепью подгрупп с простыми индексами. В [1] было доказано, что группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и в $G$ любая силовская подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной.

В работе [2] В.С. Монаховым и В.Н. Княгиной было установено, что для сверхразрешимости группы $G$ необходимо и достаточно, чтобы в $G$ нормализаторы всех ее силовских подгрупп были $\mathbb{P}$-субнормальны.

В [3] было доказано, что если в группе $G$ нормализатор любой силовской подгруппы субмодулярен, то $G$ — сверхразрешимая группа, в которой все силовские подгруппы субмодулярны. При этом под субмодулярной подгруппой понимается подгруппа $H$, для которой существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что $H_{i-1}$ — модулярная подгруппа в $H_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

В 1979 году З.И. Боревич ввел следующее

Определение 1. *[4] Веером подгруппы $D$ группы $G$ называется система подгрупп $\mathfrak{M} = \{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ($I$ — некоторое множество индексов) промежуточных подгрупп $G_\alpha$ и их нормализаторов $N_\alpha$ в $G$ такая, что для каждой промежуточной подгруппы $H$ существует единственный индекс $\alpha \in I$, для которого $G_\alpha \leq H \leq N_\alpha$. Подгруппы $G_\alpha$ называются базисными подгруппами веера $\mathfrak{M}$.*

Согласно [4] для любой силовской подгруппы $D$ группы $G$ существует веер, причем только один. При этом всякая его базисная подгруппа $G_\alpha$ порождается насыщенным множеством $\alpha$ сопряженных с $D$ подгрупп, а именно: $\alpha = \{D^x | x \in X \subseteq G\}$, $D \in \alpha$ и $G_\alpha$ не содержит сопряженных с $D$ подгрупп, которые не входят в $\alpha$ (здесь имеется биективное соответствие между множеством индексов $I$ и множеством всех насыщенных множеств $\alpha$).

В настоящем сообщении для таких канонических подгрупп группы, как силовские подгруппы, исследуется связь способа вложения базисных подгрупп их вееров со свойствами группы. В частности, получена

Теорема 1. *Группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая базисная подгруппа веера каждой силовской подгруппы является $\mathbb{P}$-субнормальной в $G$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

2. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Internat. J. of Group Theory. 2013. Vol.2, № 4. P. 21–29.

3. Васильев В. А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. 2016. № 2(91). С. 17–21.

4. Боревич З. И. О расположении подгруп // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 94. С. 5–12.

УДК 512.542

# Конечные группы с $F(G)_S$-квазинормальными $n$-максимальными подгруппами

**Ю. В. Горбатова (Россия, г. Брянск)**
Брянский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при президенте РФ
e-mail: g.julia32@yandex.ru

# Finite groups with $F(G)_S$-quasinormal $n$-maximal subgroups

**Ju. V. Gorbatova (Russia, Bryansk)**
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: g.julia32@yandex.ru

Все группы в данной работе конечны. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется 2-максимальной подгруппой группы $G$, если $H$ является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе $M$ группы $G$. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы и далее. В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. В частности, один из подходов к изучению групп с заданными 2-максимальными подгруппами был разработан в работах [1] и [2], где было доказано, что группа $G$ является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы $G$-перестановочны в $G$ (напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется $X$-перестановочной в $G$ [1], где $X$ – непустое подмножество группы $G$, если для любой подгруппы $T$ из $G$ найдется такой элемент $x$ из $X$, что $HT^x = T^xH$).

Следуя работе [3], будем называть конечную ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую исключительно нильпотентные 2-максимальные подгруппы, **группой Белоногова**.

Подгруппу $H$ группы $G$ будем называть **$F(G)_S$-квазинормальной** в $G$, если $H$ является $F(G)$-перестановочной с каждой силовской подгруппой группы $G$.

Ранее автором в статье [4] было получено полное описание групп Шмидта с $F(G)_S$-квазинормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами. Целью данной работы является изучение неильпотентных групп с $X$-перестановочными $n$-максимальными подгруппами, где $X$ – подгруппа Фиттинга основной группы, для $n = 2, 3$. В частности, получено точное описание примитивных групп Белоногова, в которых каждая $n$-максимальная подгруппа является $F(G)_S$-квазинормальной для $n = 2, 3$.

Вспомогательными результатами данной работы являются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $H$ и $R$ — подгруппы группы $G$ и $H$ является $F(G)_S$-квазинормальной в $G$. Если $H \leq R$ и $F(G) \leq R$, то $H$ является $F(G)_S$-квазинормальной в $R$.*

Лемма 2. *Пусть $K, H$ — подгруппы группы $G$, $X$ — непустое подмножество в $G$ и $H$ нормальна в $G$. Тогда $K/H$ является $(XH/H)_S$-квазинормальной в $G/H$ тогда и только тогда, когда $K$ $X_S$-квазинормальна в $G$.*

Лемма 3. *Пусть $G$ — группа. В том и только в том случае каждая максимальная подгруппа группы $G$ является $F(G)_S$-квазинормальной в $G$, когда группа $G/F(G)$ нильпотентна.*

В следующих теоремах показана разрешимость групп с $F(G)_S$-квазинормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами, а также получена оценка $p$-длин этих групп.

Теорема 1. *Пусть $G$ — ненильпотентная группа и $X = F(G)$. Если каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ является $X_S$-квазинормальной в $G$, то $G$ разрешима и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p$.*

Теорема 2. *Пусть $G$ — ненильпотентная группа и $X = F(G)$. Если каждая 3-максимальная подгруппа группы $G$ является $X_S$-квазинормальной в $G$, то $G$ разрешима и $l_p(G) \leq 2$ для всех простых $p$.*

Следующие теоремы описывают точное строение примитивных групп Белоногова с $F(G)_S$-квазинормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами и являются основным результатом данной работы.

Теорема 3. *Пусть $G$ — примитивная группа Белоногова и $M$ — ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда в том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ является $F(G)_S$-квазинормальной, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta$, где $p, q$ — простые (необязательно различные) и $\alpha + \beta \leq 2$, либо $G = [P]M$, где $P$ — минимальная нормальная $p$-подгруппа в $G$ и $M$ — нильпотентная подгруппа одного из порядков $qr$ или $q^2$ $(r \neq p \neq q)$.*

Теорема 4. *Пусть $G$ — примитивная группа Белоногова и $M$ — ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда в том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы $G$ является $F(G)_S$-квазинормальной, когда $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $p, q, r$ — простые (необязательно различные) и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Skiba A. N. $H$-permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. 2003. № 4(19). С. 37-39.

2. Skiba A. N., Shum K. P. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // SEAMS Bull Math. 2005. № 59(2). P. 792-810.

3. Белоногов В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Математические заметки. 1968. Т. 3. № 1. С. 21-32.

4. Луценко (Горбатова) Ю. В, Скиба А. Н. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или $S$-квазинормальными $n$-максимальными подгруппами // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. 2009. № 1(52). С. 134-138.


---

УДК 511.32

# О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина[1]

**И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
**А. С. Угаров (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-41-710002 р-а.

# On the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups

**I. V. Dobrynina (Russia, г. Moscow)**
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
**A. S. Ugarov (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Пусть $G$ — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, l}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины $m_{ij}$, состоящее из $m_{ij}$ чередующихся букв $a_i$ и $a_j, i \neq j$, $m_{ij}$ — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для всякой группы Артина $G$ можно построить граф $\Gamma$ так, что образующим $a_i$ соответствуют вершины графа $\Gamma$, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}$, $m_{ji} \neq \infty$, — ребро, соединяющее вершины, соответствующие $a_i$ и $a_j$, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф, то группа Артина $G$ называется группой Артина с древесной структурой.

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [2].

Группа Артина $G$ с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа $\Gamma$ группы Артина $G$ перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие $G_{ij}$ и $G_{jk}$ — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$ [3].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина $G_s$, где $G_s$ либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина $G_i$ и $G_j$ ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle, \langle a_{j_k} \rangle$, где $a_{i_m}$ — некоторый образующий группы $G_i$, $a_{j_k}$ — некоторый образующий группы $G_j$. Такую группу Артина $G$ будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина [4] и далее под $G$ будем понимать такую группу.

Обобщенные древесные структуры групп Артина относятся к классу почти больших групп Артина [5].

Известно, что в обобщенной древесной структуре групп Артина разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов [4] и построения централизатора произвольного элемента [6].

Обобщением проблемы сопряженности слов является проблема обобщенной сопряженности слов.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе $G$ разрешим проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{v_i\}_{i=1\overline{1,n}}$ из $G$ установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$.*

Лемма 1. *Пусть $M$ — связная приведенная минимальная $R$ - диаграмма [7] над группой Артина $G$ с граничными циклами $\sigma$, $\tau$; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ минимальной слоговой длины. Тогда если $\varphi(\sigma) = x^r$, то $\varphi(\tau) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ — множество образующих группы $G$.*

Определение 2. *Приведенную связную кольцевую $R$-диаграмму $M$ с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если 1) $M$ состоит из областей $D_1, D_2, \cdots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j$, $j = \overline{1, m-1}, D_j \cap \sigma \neq \emptyset, D_j \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m}, e_j$ - ребро, или 2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p-1} \gamma_j$, $N_i$ — поддиаграммы (диски) в $M$ с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau, \sigma_i \cap \tau = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1, p}, \gamma_i$ - простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой пусть $\gamma_1$ имеет начало $B_p$, а конец — $A_1$, где каждое $N_i$ состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \cdots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cup D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}, e_{i_j}$ — ребро.*

Область $D$ с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра $e$, в которой склеенные ребра $e$ и $e^{-1}$ пересекают граничный цикл $D$, называется $(s-i)$-областью.

Лемма 2. *[4] Пусть $M$ — приведенная связная кольцевая $R$-диаграмма сопряженности слов $\phi(\sigma), \phi(\tau) \in G$ над группой Артина $G$, не содержащая $(s-i)$-областей; $\sigma, \tau$ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы $M$, слова $\phi(\sigma), \phi(\tau)$ минимальной слоговой длины. Тогда $M$ является однослойной.*

Диаграммы сопряженности слов, не являющиеся степенями образующих, над группой $G$ представляют собой последовательность поддиаграмм, каждая из которых является диаграммой над одним из сомножителей $G$, объединенных между собой по ребру с меткой из объединяемой подруппы, либо вершиной.

Лемма 3. *[8] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_ia_j >^{m_{ij}} = < a_ja_i >^{m_{ji}} \rangle, w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в $G_{ij}$. Тогда оно имеет вид*

- *при $m_{ij} = 2t+1$ : $a_i^m a_j a_i \cdots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} \cdots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \cdot a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} \cdots a_j^{-m}$, либо им обратные,*
- *при $m_{ij} = 2t, t > 1$ : $a_i^m a_j a_i \cdots a_j a_i^{-m} a_i^{-1} \cdots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \cdot a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} \cdots a_j^{-m}$, либо им обратные,*
- *при $m_{ij} = 2t, t = 1$ : $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*

Показатели степеней можно ограничить (по модулю) числом $p$, называемым параметром диаграммы: $p = |w| + |v|$.

Остановимся на обобщенной сопряженности слов.

Пусть даны множества слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ из $G$. Необходимо установить: $\exists z$, $z \in G$, $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$.

Пусть $w_1 = w_{10}$, $v_1 = v_{10}$ имеют минимальную слоговую длину. Пусть $w_i = a_i w_{i0} a_i^{-1}$, $v_i = b_i v_{i0} b_i^{-1}$, $i = \overline{2, n}$, где $w_{i0}$, $v_{i0}$ являются тупиковыми. Пусть $|a| = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $|b| = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|\}$, где $|a_1| = |b_1| = 0$. Обозначим через $T = \{a^i | a \in \{a_j^{\pm 1}\}_{j=\overline{1,l}}, 1 \leq i$

$\leq p\}$ множество всевозможных кусков диаграммы [7], представляющих собой степени образующих $\{a_j\}_{j=\overline{1,l}}$ группы $G$, через $S_{wi}$ множество всех слов длины $d_i$, где $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant |w_{i0}|+|v_{i0}|+2(|a|+|b|+p+m_0)$, где $m_0 = \max\{m_{ij} < \infty\}$.

Рассмотрим следующую последовательность:

$$w_1^{(0)}, \cdots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \cdots, w_n^{(1)}, H_2, \cdots, H_k, w_1^{(k)}, \cdots, w_n^{(k)}, \tag{1}$$

где $\forall i, 1 \leq i \leq k, H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \cdots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in T, w_j^{(s)} \in S_{wj}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq s \leq k$. Данная последовательность называется базисной [7], [8].

Если в базисной последовательности $w_1^{(k)} = v_1, \ldots, w_n^{(k)} = v_n$, то слова $w_1, \ldots, w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1, \ldots, v_n$.

Определение 3. *[7], [9] Базисную последовательность назовем фундаментальной, если для $\forall j, s, 0 \leq j < s < k$, наборы $(w_1^j, \cdots, w_n^j), (w_1^s, \cdots, w_n^s)$ различны и существует целое $v, 0 \leq v < t$, такое что $w_1^v = w_1^k, \cdots, w_n^v = w_n^k$.*

Лемма 4. *Если базисная последовательность является фундаментальной, то слово $H_1 H_2 \cdots H_k H_v^{-1} \cdots H_1^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы $H$.*

Слово $H_1 H_2 \cdots H_k H_v^{-1} \cdots H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной базисной последовательностью, будем называть базисным словом.

Лемма 5. *Если базисная последовательность фундаментальная, то $k$ ограничено.*

Лемма 6. *Число фундаментальных базисных последовательностей конечно.*

Лемма 7. *Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H), C_G(H)$ — централизатор $H$ в $G$. Тогда существует разбиение $F$ в произведение кусков $F = H_1 H_2 \cdots H_m, H_i \in T, i = \overline{1,m}$, и базисная последовательность, связанная с данным разбиением $F$, то есть*

$$w_1^{(0)}, \cdots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \cdots, w_n^{(1)}, H_2, \cdots, H_m, w_1^{(m)}, \cdots, w_n^{(m)}.$$

Лемма 8. *Множество всех базисных слов порождает централизатор подгруппы $H$.*

Теорема 1. *В обобщенной древесной структуре групп Артина $G$ централизатор конечно порожденной подгруппы $H$ конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.*

Определение 4. *[8] Базисная последовательность называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, то есть все $H_i = 1$. Слово $H_1 H_2 \ldots H_k$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.*

Лемма 9. *Если последовательность (1) является особой базисной последовательностью, то $k \leq |S| = |S_{w1}| \cdot |S_{w2}| \cdots |S_{wn}|$.*

Лемма 10. *Число особых базисных последовательностей конечно.*

Лемма 11. *Пусть $F$ – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n (z^{-1} w_i z = v_i)$, тогда существует разбиение $F$ в произведение кусков $H_1 H_2 \ldots H_m$ и базисная последовательность, связанная с данным разбиением $F$:*

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}, \tag{2}$$

*где $w_1^{(m)} = v_1, \ldots, w_n^{(m)} = v_n$.*

Лемма 12. *Пусть $F$ – какое-то решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$ и (2) – базисная последовательность, соответвующая данному разбиению $F$. Тогда из последовательности (2) можно выделить особую подпоследовательность, такую, что соответствующее ей базисное слово $F$ является решением системы.*

Теорема 2. *В обобщенной древесной структуре групп Артина разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

В доказательстве применялись метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном, усовершенствованный В. Н. Безверхним и подход Г. С. Маканина, используемый им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Appel K.,Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов. — Тула, 2003. С. 33-34.

3. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. О кручении в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 6-17.

4. Добрынина И. В., Угаров А. С. О проблеме сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механиком-математического факультета МГУ: тезисы докладов. — МГУ, 2019. С. 28-29.

5. Huang, J. and Osajda, D. Large type Artin groups are systolic // Proc. London Math. Soc. 2020. Vol. 120. P. 95-123

6. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщенных древесных структурах групп Артина // XVII Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко: тезисы докладов. Тула, 2019. С. 42-44.

7. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980. 447 с.

8. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Том 5, №1. С. 1-38.

9. Маканин Г. С. О нормализаторах группы кос // Математический сборник. 1971. Том 86, № 2. С. 171-179.


---

УДК 512.5

# Об условиях замкнутости элементарной сети

**А. К. Гутнова (Россия, г. Владикавказ)**
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: gutnovaalina@gmail.com
**В. А. Койбаев (Россия, г. Владикавказ)**
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Южный математический институт ВНЦ РАН
e-mail: koibaev-k1@yandex.ru

# On sufficient conditions for the closure of an elementary net

**A. K. Gutnova (Russia, Vladikavkaz)**
North Ossetian State University
e-mail: gutnovaalina@gmail.com
**V. A. Koibaev (Russia, Vladikavkaz)**
North-Ossetian State University, SMI VSC RAS
e-mail: koibaev-k1@yandex.ru

Ключевые слова: сети, ковры, элементарная сеть, замкнутая сеть, дополняемая сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}$ поля (или коммутативного кольца) $k$ называется *сетью (ковром)* [1, 2] над полем $k$ порядка $n$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов $i, r, j$. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью (элементарным ковром)* ([1], [2], [4], вопрос 15.46). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется замкнутой, если элементарная сетевая группа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций ([2, 3, 4], вопрос 15.46). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется дополняемой [3], если для некоторых аддитивных подгрупп $\sigma_{ii}$ поля $k$ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, является (полной) сетью. Известно, что дополняемые элементарные сети являются замкнутыми. Необходимым и достаточным условием дополняемости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ является выполнение включений $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ (для любых $i \neq j$). В этой связи представляет интерес вопрос Я.Н.Нужина [4] (Коуровская тетрадь, вопрос 19.63, см.также [5]): верно ли, что для замкнутости элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ достаточно выполнение включений $\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$ (здесь через $\sigma_{ij}^2$ обозначается аддитивная подгруппа поля $k$, порожденная квадратами из $\sigma_{ij}$)? Элементарные сети, для которых выполнены последние включения, мы называем слабо дополняемыми элементарными сетями. Понятия дополняемой и слабо дополняемой элементарной сети совпадают для полей нечетной характеристики. Таким образом, упомянутый вопрос достаточности слабой дополняемости для замкнутости элементарной сети актуален для полей характеристики 0 и 2. Всякая дополняемая элементарная сеть является слабо дополняемой. Поэтому мы имеем включение

$$\textit{дополняемые эл.сети} \subset \textit{слабо дополняемые эл.сети}. \tag{1}$$

Рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{Z}[x, y, z]$ от трех переменных с целыми коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Далее, для ненулевого многочлена $f = f(x, y, z) \in R$ через $\nu(f)$ обозначим минимальную из полных степеней одночленов (с ненулевыми коэффициентами), входящих в $f \in R$. Положим $R_4 = \{f \in R : \ \nu(f) \geq 4\} \cup \{0\}$. Рассмотрим аддитивную подгруппу

$$\begin{gathered} B = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}xy^2 + \mathbb{Z}xz^2 + \mathbb{Z}yx^2 + \mathbb{Z}yz^2 + \mathbb{Z}zx^2 + \mathbb{Z}zy^2 + \\ + \mathbb{Z}x^3 + \mathbb{Z}y^3 + \mathbb{Z}z^3 + 2\mathbb{Z}xyz + R_4 \end{gathered} \tag{2}$$

и таблицу (порядка $n$) $\sigma = (\sigma_{ij})$: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B$ и $\sigma_{ij} = R_4$ для остальных $i \neq j$.

Предложение 1. *Таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$ является слабо дополняемой и не является дополняемой элементарной сетью. Таким образом, для поля нулевой характеристики включение (1) является строгим. Аналогичная элементарная сеть и утверждение строится для поля характеристики 2.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Боревич З.И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Записки научных семинаров ПОМИ. 1978. Т.75. С.22–31.

2. Левчук В. М. Замечание к теореме Л.Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т.22, N 4. 421–434.

3. Койбаев В.А. Замкнутые сети в линейных группах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Сер.1. N 1. С.26–34.

4. The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory. Russian academy of sciences, Siberian div., Institute of mathematics; [ed. V. D.Mazurov, E. I. Khukhro]. – Novosibirsk. 2018. No. 19.

5. Нужин Я.Н. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, N 3. С.195-200.


---

УДК 512.54

# О бесконечности ширины вербальных подгрупп для одного типа нисходящих HNN-расширений

**Д. З. Каган (Россия, Москва)**
ФГОБУ ВО Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, ФГБУ «НЦКТП Минтранса России»
e-mail: dmikagan@gmail.com

# On the infinity of the width of verbal subgroups for one type of descending HNN-extensions

**D. Z. Kagan (Russia, Moscow)**
Financial University under the Government of the Russian Federation, FGBU «NTSKTP Ministry of Transport of Russia»
e-mail: dmikagan@gmail.com

Определение 1. *Шириной вербальной подгруппы [1] $V(G)$ относительно множества слов $V$ называется наименьшее число $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем $m$ значений слов $V^{\pm 1}$.*

Как правило, ширина вербальных подгрупп рассматривается для конечных собственных множеств слов $V$, так как в противном случае ширина $V(G)$ всегда будет конечна.

Множество слов $V$ называется собственным, а соответствующая подгруппу $V(G)-$ собственной, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$.

Результаты об условиях бесконечности ширины вербальных подгрупп для раздичных групповых конструкций, включая HNN-расширения и свободные группы с объединением, были получены А.Х. Ремтуллой, В.М. Безверхним и И.В. Добрыниной [2], В.Г. Бардаковым [3], Р.И. Григорчуком [4], В. А. Файзиевым [5], автором [6]. Подробный обзор полученных результатов приводится в статье [7].

В данной работе рассматривается ширина коммутантных вербальных подгрупп.

Определение 2. *Слово $v$ свободной группы $F_n$, принадлежащее коммутанту $F_n'$, называется коммутаторным. Множество слов $V$ называется коммутаторным, определяемая множеством $V$ вербальная подгруппа $V(G)-$ коммутантной, если $V$ содержит только коммутаторные слова.*

Р.И. Григорчуком [4] доказана бесконечность ширины всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы в HNN-расширении $G =< t, H|tAt^{-1} = B >$, если A и B являются собственными подгруппами в базе $H$. В.Г. Бардаковым [3] доказана бесконечность любой собственной вербальной подгруппы при этих условиях. Определенные типы HNN-расширений рассмотрены в работах И.В. Добрыниной и В.М. Безверхнего.

Нерешенным остается вопрос о ширине вербальных подгрупп на нисходящих HNN-расширениях $G =< t, H|tHt^{-1} = B >$ . Рассмотрим HNN-расширения, в которых базой является свободная группа ранга $n > 1 : F_n = < a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} >$ . С точки зрения вопросов, поставленных Р.И. Григорчуком в работе [4] имеет смысл рассматривать HNN-расширения, в которых изоморфизм между подгруппами определяется следующим отображением порождающих: $a_0 \to a_1, \ldots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to U_0(a_i)$. Тогда само HNN-расширение имеет вид:

$$G \ = < t, a_0, \ldots, a_{n-1}|ta_it^{-1} = a_{i+1}, i = 0, \ldots, n-2, ta_{n-1}t^{-1} = U_0(a_i) > \qquad (1)$$

В данной работе представлены некоторые условия бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп для HNN-расширений, определенных подобными копредставлениями при определенном виде элемента $U_0$.

Теорема 1. *[8] Пусть группа $G$ является HNN-расширением*

$$G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}|ta_0t^{-1} = a_1, \ldots, ta_{n-2}t^{-1} = a_{n-1}, ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^RW^{-1} >,$$

*где $R-$ произвольное положительное число и слово $W(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ - непустое слово в порождающих $a_j$, которое начинается с $a_0^{\pm 1}$. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$, определенной конечным множеством слов $V$, бесконечна.*

При доказательстве теорем используется система целочисленных функций $tr_t$ и функций на свободной группе $f_t$ и $\varphi_t$, связанной с каждым целым числом $t$. При этом, в зависимости от числа $R$, входящего в соотношение $ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^RW^{-1}$, выбираются соответствующие числа $t$, с которыми связывается система функций и сам способ определения функций.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

2. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №2. С. 95 — 102.

3. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494 — 517.

4. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 546 — 550.

5. Faiziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105 — 115.

6. Каган Д. З. Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром // Математический сборник. 2017. Т.208, №1. С. 80 — 96.

7. Добрынина И.В., Каган Д.З. О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №4, С. 150 — 163.

8. Kagan D.Z. Invariant functions on free groups and special hnn-extensions // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. № 1 (61). С. 109-122.

---

УДК 512.542

## Конечные группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами

**М. Н. Коновалова (Россия, г. Брянск)**
Брянский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Брянск
e-mail: msafe83@mail.ru

## Finite groups with formation subnormal strongly 2-maximal subgroups

**M. N. Konovalova (Russia, Bryansk)**
Bryansk Branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Bryansk
e-mail: msafe83@mail.ru

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1]–[2]. Запись $M < G$ ($M \lessdot G$) означает, что $M$ — собственная (максимальная) подгруппа группы $G$.

Формационным обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $G$ — группа. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в $G$, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_{n-1} \lessdot H_n = G, \tag{1}$$

такая, что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех $i$. Здесь $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ — ядро подгруппы $Y$ в группе $X$. В случае, когда $H$ — максимальная подгруппа и $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$, то говорят, что $H$ $\mathfrak{F}$-нормальна в $G$.

Для произвольных разрешимых наследственных формаций $\mathfrak{F}$ группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными 2-максимальными подгруппами изучались в статье [3].

В данном сообщении условие $\mathfrak{F}$-субнормальности накладывается не на все 2-максимальные подгруппы, а только на строго 2-максимальные. Подгруппу $U$ группы $G$ называют строго 2-максимальной подгруппой в $G$, если $U$ является 2-максимальной подгруппой в $G$ и $U$ не является 2-максимальной подгруппой ни в какой собственной подгруппе группы $G$. Другими словами, строго 2-максимальная подгруппа эта такая подгруппа группы $G$, которая является 2-максимальной в любой цепочке подгрупп группы $G$.

Для произвольной наследственной формации $\mathfrak{F}$ в теореме 1 устанавливается, что в группе $G$ с $\mathfrak{F}$-субнормальными строго 2-максимальными подгруппами все собственные подгруппы имеют нильпотентные $\mathfrak{F}$-корадикалы. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$ при $\mathfrak{F} = \mathcal{A}$ и $|\pi(G)| > 2$, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, $\mathcal{A}$ — формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами, следствие 1.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и в группе $G$ все строго 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$M/\Phi(M) \in \mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы $M$ группы $G$; в частности, группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ или $G$ является минимальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-группой;*

(2) *если $\mathfrak{F}$ насыщенная, то все собственные подгруппы группы $G$ принадлежат $\mathfrak{F}$ и каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G$.*

Следствие 1. *Пусть в группе $G$ все строго 2-максимальные подгруппы $\mathcal{A}$-субнормальны. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$ или группа $G$ обладает следующими свойствами:*

(1) *$G = P \leftthreetimes Q$;*

(2) *$P = G^{\mathfrak{N}\mathcal{A}}$ — силовская $p$-подгруппа;*

(3) *$Q$ — силовская $q$-подгруппа и $1 \neq Q' \leq C_G(\Phi(P))$;*

(4) *$Q_G$ — силовская $q$-подгруппа в $\Phi(G)$ и $Q/Q_G$ — минимальная неабелева группа.*

*В частности, если $|\pi(G)| > 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006. — 207 с.

2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

3. Monakhov V. S. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, № 2. — С. 269–277.

---

УДК 511.32

# Зависимость строения конечной группы от свойств ее силовских нормализаторов

**А. Г. Коранчук (Беларусь, г. Гомель)**
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

# The dependence of the structure of a finite group from the properties of its Sylow normalizers

**A. G. Koranchuk (Belarus, Gomel)**
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: melchenkonastya@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{F}$ обозначает непустую формацию. В рамках теории формаций широко известны следующие обобщения субнормальности — понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп [1, 2]. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в $G$, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа $H$ группы $G$ называется K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в $G$, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В последние годы важное место занимает решение следующей задачи, рассмотрение которой впервые было начато в работе [3].

Задача 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Необходимо найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы и содержащие их подгруппы группы $G$, чтобы группа $G$ принадлежала $\mathfrak{F}$.*

Данная задача изучалась в различных работах. Например, в статьях [4, 5, 6] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ получены свойства класса групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными). В работах [7, 8, 9, 10] были найдены приложения полученных классов для решения различных конкретных задач теории групп и их формаций.

На строение конечной группы, помимо силовских подгрупп, также значительно влияют свойства вложения силовских нормализаторов (нормализаторов силовских подгрупп) в группу. В [11] изучались системы подгрупп конечной группы, $\mathbb{P}$-субнормальность ($\mathfrak{U}$-субнормальность) которых гарантирует сверхразрешимость всей группы. В частности, доказано, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда ее силовские нормализаторы $\mathbb{P}$-субнормальны ($\mathfrak{U}$-субнормальны) в $G$. В [12] доказано, что если в группе $G$ любой ее силовский нормализатор субмодулярен, то $G$ является сильно сверхразрешимой группой, т.е. сверхразрешимой группой, у которой все силовские подгруппы субмодулярны. В [13, 14] исследовались группы, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, где $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. В частности, были найдены новые примеры формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими нормализаторами.

Несмотря на полученные результаты, отмеченная выше задача остается актуальной, поскольку имеются примеры наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ и групп им не принадлежащих, у которых любая силовская подгруппа (любой силовский нормализатор) являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.

Пример 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ — формация всех разрешимых групп, чья нильпотентная длина не превосходит 3. Обозначим $M = S_4$, где $S_4$ — симметрическая группа степени 4. Известно, что существует точный неприводимый $M$-модуль $U$ над полем $\mathrm{F}_3$ из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина $G$ равна 4 и $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как подгруппа $S$ является минимальной не $\mathfrak{N}^2$-группой, то $G$ — минимальная не $\mathfrak{N}^3$-группа. Нетрудно видеть, что нормализаторы ее силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами в $G$, но сама группа $G$ не принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В связи с этим в [15] было введено следующее

Определение 1. *Подгруппа $H$ группы $G$ называется абсолютно $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной (абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной) в $G$, если любая содержащая ее подгруппа является $K$-$\mathfrak{F}$-субнормальной (соответственно, $\mathfrak{F}$-субнормальной) в $G$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ -– наследственная формация и $G$ — группа. Тогда подгруппы $G$, содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал, являются абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными (K-$\mathfrak{F}$-субнормальными) в $G$, однако, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством.

В работе [15] для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ были исследованы группы, у которых все силовские подгруппы являются абсолютно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными.

В настоящем сообщении мы решаем поставленную выше задачу для случая силовских нормализаторов.

Границей класса групп $\mathfrak{H}$ [1] называется класс групп $b(\mathfrak{H}) = (G \mid G \notin \mathfrak{H}$ и $G/N \in \mathfrak{H}$ всех $1 \neq N \trianglelefteq G)$. Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Группа $G$ является $\mathfrak{N}$-скованной, если $C_G(F) \subseteq F$. Скажем, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), если для каждой группы $G \in b(\mathfrak{F})$ такой, что $Soc(G)$ – $p$-группа для некоторого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ выполняется, что $G/Soc(G)$ является $\mathfrak{N}$-скованной группой.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, удовлетворяющая условию (*) и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны:*

*(1) Группа $G$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

*(2) Каждый силовский нормализатор группы $G$ является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в $G$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

*(3) Любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы $G$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в $G$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Теорема позволяет строить примеры не обязательно разрешимых наследственных насыщенных формаций с отмеченным выше свойством. Например, из теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если ее граница $b(\mathfrak{F})$ состоит только из примитивных групп типа 2, то следующие утверждения попарно эквивалентны.*

*(1) Группа $G$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

*(2) Каждый силовский нормализатор группы $G$ является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в $G$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

*(3) Любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы $G$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в $G$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. Springer, 2006. 385 p.

2. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003. 254 с.

3. Васильев А. Ф. О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. № 8. С. 31–39.

4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 9(4). С. 86—91.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.

6. Васильева Т. И., Прокопенко А. И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 3, С. 25-30.

7. Семенчук В. Н., Шевчук С. Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Мат. заметки. 2011. № 1(89). С. 104-–108.

8. Монахов В. С., Сохор И. Л. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 851–863.

9. Murashka V. I. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // Asian-European J. of Math. doi.org/10.1142/S1793557120500734.

10. Ballester-Bolinches A., Fakieh W. M., Pedraza-Aguilera M. C. On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups. [Mediterr. J. Math.], Режим доступа: `https://doi.org/10.1007/s00009-019-1323-0`.

11. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Internat. J. of Group Theory. 2013. № 4(2). P. 21-–29.

12. Васильев В. А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. 2016. № 2(91). С. 17–21.

13. Васильев А. Ф. Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 66–71.

14. Vasilyeva T. I., Koranchuk A. G. On one operation on the formations of finite groups // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 2(43). С. 58–63.

15. Васильев А. Ф., Мельченко (Коранчук) А. Г. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4(41). С. 44-50.

---

УДК 512.542

## О прямо разложимых $\omega$-веерных формациях конечных групп

**С. П. Максаков (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: msp222@mail.ru
**М. М. Сорокина (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

## On directly decomposable $\omega$-fibered formations of finite groups

**S. P. Maksakov (Russia, Bryansk)**
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky
e-mail: msp222@mail.ru
**M. M. Sorokina (Russia, Bryansk)**
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В монографии [1] А.Н. Скиба ввел в рассмотрение следующую конструкцию для классов групп. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая совокупность непустых подклассов класса $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$ [1]; в этом случае говорят, что класс $\mathfrak{F}$ является *прямо разложимым*. В теоремах 1 и 2 для $\omega$-веерной формации $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ с направлением $\delta$ установлены свойства решетки $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ всех $\omega$-веерных подформаций из $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$.

Используются стандартные определения и обозначения для групп, классов групп, решеток (см., например, [1], [2]). Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный совокупностью групп $\mathfrak{X}$, в частности, $(1)$ – класс всех единичных групп; $\omega$ – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная $\omega$-подгруппа группы $G$; $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $h : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$, $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ – функции, называемые соответственно $\omega F$-функцией, $\mathbb{P}F$-функцией и $\mathbb{P}FR$-функцией; для $p \in \mathbb{P}$ через $G_{\delta(p)}$ обозначается $\delta(p)$-радикал группы $G$. Формация $\mathfrak{F} = (G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется *$\omega$-веерной* формацией с направлением $\delta$; формация $\mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\delta(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется *веерной* формацией с направлением $\delta$ [3]. Направление $\delta$ $\omega$-веерной формации называется *$bp$-направлением*, если $\delta$ является $b$-направлением, т.е. $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и $\delta$ является $p$-направлением, т.е. $\mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [4], где $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ – классы всех $p$-групп и всех $p'$-групп соответственно.

В соответствии с [2], *решетка* – частично упорядоченное множество $\Theta$, в котором любые два элемента $x$ и $y$ имеют точную нижнюю грань $x \wedge_\Theta y$ и точную верхнюю грань $x \vee_\Theta y$. Решетка $\Theta$ называется *дистрибутивной*, если для любых $x, y, z \in \Theta$ справедливо $x \wedge_\Theta (y \vee_\Theta z) = (x \wedge_\Theta y) \vee_\Theta (x \wedge_\Theta z)$. Пусть $\Theta$ – решетка с нулем $o$. Элемент $a \in \Theta$ называется *атомом* решетки $\Theta$, если $a \neq o$ и не существует такого элемента $x \in \Theta$, что $o < x < a$. Решетка $\Theta$ с нулем $o$ и единицей $e$ называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in \Theta$ существует такой элемент $y \in \Theta$, что $x \wedge_\Theta y = o$ и $x \vee_\Theta y = e$. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой* решеткой.

Пусть $\delta$ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Через $\Theta_{\omega\delta}$ обозначим множество всех $\omega$-веерных формаций с направлением $\delta$; для формации $\mathfrak{F}$ полагаем $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \in \Theta_{\omega\delta}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\}$. Если $\delta$ – $p$-направление и $\mathfrak{F}$ – неединичная $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$, то $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ является решеткой с нулем $(1)$ и единицей $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\delta$ – $bp$-направление, $(1) \neq \mathfrak{F} \in \Theta_{\omega\delta}$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех атомов решетки $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$. Тогда $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями.*

Теорема 2. *Пусть $\delta$ – $bp$-направление, $(1) \neq \mathfrak{F} \in \Theta_{\omega\delta}$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех атомов решетки $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ является дистрибутивной решеткой.*

Следствие 1. *Пусть $\delta$ – $bp$-направление, $(1) \neq \mathfrak{F} \in \Theta_{\omega\delta}$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех атомов решетки $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, то $\Theta_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.*

Поскольку направление $\omega$-локальной ($\omega$-специальной, $\omega$-центральной) формации является $bp$-направлением, то из полученных теорем вытекают соответствующие результаты для $\omega$-локальных, $\omega$-специальных и $\omega$-центральных формаций. В [3] установлено, что непустая неединичная формация $\mathfrak{F}$, при условии $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, является $\omega$-веерной тогда и только тогда, когда она является веерной. В этой связи справедливы соответствующие свойства для веерных формаций конечных групп, в частности, для локальных, специальных и центральных формаций.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Скиба А. Н. Алгебра формаций. — Минск: Изд-во Беларуская навука, 1997. 240 с.
2. Биркгоф Г. Теория решеток. — Москва: Изд-во Наука, 1984. 568 с.
3. Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\omega$-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Том 71, № 1. С. 43-60.
4. Ведерников В. А. О новых типах $\omega$-веерных формаций конечных групп // Український математический конгресс – 2001. Секція 1. 2002. С. 36-45.


---

УДК 512.542

# Обобщенный гиперцентр конечных групп

**В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)**
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

# The generalized hypercenter of finite groups

**V. I. Murashka (Belarus, Gomel)**
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

All groups considered here will be finite.

Let $G$ be a group and $\mathfrak{X}$ be a class of groups. Recall that a chief factor $H/K$ of $G$ is called $\mathfrak{X}$-*central* in $G$ provided $(H/K) \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$ (see [1, p. 127–128]). A normal subgroup $N$ of $G$ is said to be $\mathfrak{X}$-*hypercentral* in $G$ if $N = 1$ or $N \neq 1$ and every chief factor of $G$ below $N$ is $\mathfrak{X}$-central. The symbol $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ denotes the $\mathfrak{X}$-*hypercenter* of $G$, that is, the largest normal $\mathfrak{X}$-hypercentral subgroup of $G$ (see [1, Lemma 14.1]). If $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups, then $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G)$ is the hypercenter of $G$.

Let $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ be a *partition* of the set of all primes $\mathbb{P}$, i.e. $\cup_{i\in I}\pi_i = \mathbb{P}$ and $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ for $i \neq j$. The class of groups all whose Hall $\pi_i$-subgroups are normal for all $i \in I$ is a hereditary formation. Groups from this class are called $\sigma$-*nilpotent* [2]. If $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, then $\sigma$-nilpotent group is nilpotent. In this paper we will give the new characterization for the $\sigma$-nilpotent hypercenter.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation. A subgroup $H$ of $G$ is called $K$-$\mathfrak{F}$-subnormal in $G$ if there is a chain $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ with $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ or $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ for all $i = 1, \dots, n$. If $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, then we obtain the notion of subnormal subgroup.

Let $H$ be a subgroup of a group $G$. According to [3, p. 50] a subgroup $T$ of $G$ is called *a subnormalizer* of $H$ in $G$ if $H$ is subnormal in $T$ and if $H$ is subnormal in $M \leq G$ then $M \leq T$. A subnormalizer, if it exists, is unique. A subgroup $T$ of $G$ is called *a weak subnormalizer* of $H$ in $G$ [4] if $H$ is subnormal in $T$ and if $H$ is subnormal in $M \leq G$ and $T \leq M$ then $T = M$. A weak subnormalizer always exists but may be not unique.

We introduce the following generalization of the previous concept.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation. We shall call a subgroup $T$ of $G$ *a weak $K$-$\mathfrak{F}$-subnormalizer* of $H$ in $G$ if $H$ is $K$-$\mathfrak{F}$-subnormal in $T$ and if $H$ is $K$-$\mathfrak{F}$-subnormal in $M \leq G$ and $T \leq M$, then $T = M$.

The main result of this paper is

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary formation. The following statements are equivalent:*

(1) *The intersection of all weak $K$-$\mathfrak{F}$-subnormalizers of all Sylow subgroups is the $\mathfrak{F}$-hypercenter.*

(2) *The intersection of all weak $K$-$\mathfrak{F}$-subnormalizers of all cyclic primary subgroups is the $\mathfrak{F}$-hypercenter.*

(3) *There is a partition $\sigma$ of $\mathbb{P}$ such that $\mathfrak{F}$ is the class of all $\sigma$-nilpotent groups.*

From this theorem follows well known result of P. Hall [5] that states that the intersection of all normalizers of Sylow subgroups is the hypercenter.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. Formations of algebraic systems. — Moscow: Nauka, 1989. 256 p. (In Russian)

2. Skiba A. N. On $\sigma$-subnormal and $\sigma$-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. No. 436. P. 1–16.

3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

4. Mann A. System normalizers and subnormalizers // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 20, No. 1. P. 123–143.

5. Hall P. On the System Normalizers of a Soluble Group // Proc. London Math. Soc. 1938. Vol. 43, No. 1. P. 507–528.

---

УДК 512.542

# О нормализаторах силовских 2-подгрупп в конечных группах

**Д. Г. Новикова (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: dyasha,19@ya.ru
**С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

# On normalizers of Sylow 2-subgroups of finite groups

**D. G. Novikova (Russia, Bryansk)**
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky
e-mail: dyasha,19@ya.ru
**S. V. Putilov (Russia, Bryansk)**
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы.

В [1] завершено описание нормализаторов силовских 2-подгрупп в простых неабелевых группах. В [2], [3] исследовались конечные группы с арифметическими свойствами определенных подгрупп. Простое число, на которое делится целое число, считается простым делителем этого числа. Группа без секций изоморфных знакопеременной группе $A_5$ называется $A_5$-свободной группой.

Лемма 1. *Если число силовских 2-подгрупп в простой неабелевой группе равно степени простого делителя её порядка, то группа изоморфна знакопеременной группе $A_5$.*

Теорема 1. *Если число силовских 2-подгрупп в $A_5$-свободной группе равно степени простого делителя её порядка, то группа разрешима.*

Следствие 1. *Если в группе нормализатор силовской 2-подгруппы 2-нильпотентен и имеет примарный индекс, то группа разрешима.*

Следствие 2. *Пусть в группе нормализатор силовской 2-подгруппы 2-нильпотентен и его индекс – простое число. Если указанный нормализатор имеет циклическое ядро, то группа сверхразрешима.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Кондратьев А. С. Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Математические заметки. 2005. Том 78, № 3. С. 368-376.

2. Кондратьев А. С., Го В. Конечные группы, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы // Сибирский математический журнал. 2009. Том 50, № 2. С. 344-349.

3. Guralnik R. M. Subgroups of prime index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, № 2. P. 304-311.


---

УДК 512.542

# Об одном расширении $E_{\mathfrak{U}}$-групп

**И. Л. Сохор (Беларусь, г. Брест)**
Брестский государственный университет имени А. С.Пушкина
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

# On one generalization of $E_{\mathfrak{U}}$-group

**I. L. Sokhor (Belarus, Brest)**
Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $G$ — группа. Подгруппа $H$ называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если $G = H$ или существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 <\lessdot \ldots <\lessdot H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех $i$, что равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$. Здесь $A_B = \bigcap_{b\in B} A^b$ — ядро подгруппы $A$ в группе $B$, запись $H_{i-1} <\lessdot H_i$ означает, что $H_{i-1}$ — максимальная подгруппа группы $H_i$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $L/K_L \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп $K$ и $L$ таких, что $H \leqslant K <\cdot L \leqslant G$.

Понятно, что в произвольной группе любая собственная подгруппа не может быть одновременно $\mathfrak{F}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной, т. е. эти понятия альтернативные. Кроме того, если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то каждая $\mathfrak{X}$-субнормальная подгруппа будет $\mathfrak{F}$-субнормальна, а каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа будет $\mathfrak{X}$-абнормальна. В частности, каждая $\mathfrak{U}$-абнормальная подгруппа $\mathfrak{N}$-абнормальна. Здесь $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Группа $G$ называется $E_{\mathfrak{F}}$-группой, если $G \notin \mathfrak{F}$ и каждая ее нетривиальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна. Строение $E_{\mathfrak{N}}$-групп установили Эберт и Бауман [2]. Строение $E_{\mathfrak{U}}$-групп получили В.Н. Семенчук и А.Н. Скиба [3]. Новые аспекты и открытые проблемы, относящиеся к проблематике $E_{\mathfrak{F}}$-групп, рассмотрены в работе А. Н. Скибы [4].

Подгруппа $H$ группы $G$ называется абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. В разрешимой группе каждая $\mathfrak{N}$-абнормальная подгруппа будет абнормальна. В симметрической группе $S_4$ степени 4 силовская 2-подгруппа абнормальна и $\mathfrak{U}$-субнормальна, но не $\mathfrak{U}$-абнормальна.

Теорема 1. *В группе $G$ каждая подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или абнормальна тогда и только тогда, когда в $G$ каждая силовская подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна либо $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes P$, где $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ для некоторого $p \in \pi(G)$, являющаяся подгруппой Картера группы $G$, и $G^{\mathfrak{N}} \rtimes A$ сверхразрешима для всех $A < P$.*

Замечание 1. *Свойства групп, которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна, известны, см., например, [5, 6].*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. — Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

2. Ebert G., Bauman S. A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. 1975. Vol. 36, № 2. P. 287–293.

3. Semenchuk V. N., Skiba A. N. On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups // J. Algebra Appl. 2016. Vol. 15, № 4. — P. 1650063-1–1650063-11.

4. Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, № 3. P. 281–309.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

6. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.


---

УДК 512.542

# О группе, факторизуемой формационными tcc-подгруппами[1]

**А. А. Трофимук (Беларусь, г. Гомель)**
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф19РМ-071).

# On a group factorized by two formational tcc-subgroups

**A. A. Trofimuk (Belarus, Gomel)**
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].

Напомним, что подгруппы $A$ и $B$ группы $G$ называются *тотально перестановочными*, если $UV = VU$ для всех $U \leqslant A$ и $V \leqslant B$.

Асаад и Шаалан [2] доказали сверхразрешимость группы $G = AB$, у которой подгруппы $A$ и $B$ тотально перестановочны и сверхразрешимы, см. [2, теорема 3.1]. Такую факторизацию Майер [3] предложил в дальнейшем называть *тотально перестановочным произведением* подгрупп $A$ и $B$. В этой же работе Майер показал, что данное утверждение справедливо и для насыщенных формаций, содержащих формацию всех сверхразрешимых групп.

Теорема 1. ([3, Теорема]) *Пусть $G = HK$ — тотально перестановочное произведение подгрупп $H$ и $K$. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация такая, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $H, K \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Здесь $\mathfrak{L}$ — класс групп с циклическими силовскими подгруппами.*

Майер в [3] также поставил вопрос: «Распространяется ли приведенный выше результат теоремы 1 на ненасыщенные формации, содержащие формацию всех сверхразрешимых групп?»

Положительный ответ на данный вопрос дали Баллестер-Болинше и Перес-Рамос в работе [4].

Теорема 2. ([4, Теорема]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая формацию $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Предположим, что $G = HK$ — тотально перестановочное произведение подгрупп $H$ и $K$. Если $H, K \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Развитие результата Майера на произвольное конечное число попарно тотально перестановочных факторов отражено в работах [5], [6].

В работе [7] рассмотрено следующее обобщение понятия тотально перестановочного произведения: произведение $G = AB$ называется *tcc-перестановочным*, если для любых $X \leqslant A$ и $Y \leqslant B$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. Сами подгруппы $A$ и $B$ в этом произведении называются *tcc-перестановочными*.

Один из основных результатов работы [7] для двух *tcc*-перестановочных факторов формулируется следующим образом.

Теорема 3. ([7, Теорема 5]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая формацию $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Предположим, что $G = HK$ — tcc-перестановочное произведение подгрупп $H$ и $K$. Если $H, K \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Кроме того в [7] приведен пример, показывающий, что условие «насыщенности» формации $\mathfrak{F}$ в теореме 3 убрать нельзя.

Введем следующее

Определение 1. *Подгруппа $A$ группы $G$ называется tcc-подгруппой в $G$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в $G$ существует подгруппа $T$ такая, что $G = AT$;*

2) *для любых $X \leqslant A$ и $Y \leqslant T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$.*

Как видно из условия 2 определения 1, $G = AT$ — tcc-перестановочное произведение подгрупп $A$ и $T$. Подгруппу $T$ в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе $A$ в группе $G$.

Если $G = AB$ — tcc-перестановочное произведение подгрупп $A$ и $B$, то $A$ и $B$ будут tcc-подгруппами в группе $G$. Обратное неверно.

Пример 1. Пусть $Z_n$ — циклическая группа порядка $n$. Диэдральная группа

$$G = [< a >] < c > \simeq D_{24}, |a| = 12, |c| = 2$$

([8], IdGroup=[24,6]) является произведением tcc-подгрупп

$$A =< a^3c > \simeq Z_2 \text{ и } B = [< a^{10} >] < c > \simeq D_{12}.$$

Однако $A$ и $B$ не tcc-перестановочны. Действительно, существуют в $A$ и в $B$ подгруппы $X = A$ и $Y =< c >$ соответственно, такие, что не существует элемента

$$u \in \langle X, Y \rangle = [< a^3 >] < c > \simeq D_8$$

такого, что $XY^u \leq G$.

В работе [9] получен следующий признак сверхразрешимости.

Теорема 4. ([9, Теорема 4.1]) *Пусть $A$ и $B$ — tcc-подгруппы группы $G$ и $G = AB$. Если $A$ и $B$ сверхразрешимы, то $G$ сверхразрешима.*

Развитием теорем 3 и 4 является следующая

Теорема A. *Пусть $G = AB$, где $A$ и $B$ — tcc-подгруппы группы $G$. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $A$ и $B$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.
3. Maier R. A completeness property of certain formations // Bull. Lond. Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 540-544.
4. Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D. A question of R. Maier concerning formations // J. Algebra. 1996. Vol. 182. P. 738-747.
5. Carocca A. A note on the product of F-subgroups in a finite group // Proc. Edinb. Math. Soc. 1996. Vol. 39. P. 37-42.
6. Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C., Pérez-Ramos M. D. Finite groups which are products of pairwise totally permutable subgroups // Proc. Edinb. Math. Soc. 1998. Vol. 41. P. 567-572.
7. Arroyo-Jordá M., Arroyo-Jordá P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. On conditional permutability and factorized groups // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2014. Vol. 193. P. 1123-1138.
8. GAP (2019) Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2. www.gap-system.org.
9. Trofimuk A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. 2150020 (18 pages).

# Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 511.32

## Полукольцо непрерывных соответствий на топологических пространствах[1]

**Е. М. Вечтомов (Россия, г. Киров)**
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru

## Semiring of continuous relations on topological spaces

**E. M. Vechtomov (Russia, Kirov)**
Vyatka State University
e-mail: vecht@mail.ru

Работа является продолжением статей автора [1], [2]. Проблеме определяемости топологических пространств различными алгебраическими системами непрерывных функций на них посвящена обзорная статья [3].

*Соответствием* (или бинарным отношением) между множествами $X$ и $Y$ называется произвольное подмножество $\rho$ прямого произведения множеств $X$ и $Y$. Запись $x\rho y$ означает, что элементы $x \in X$ и $y \in Y$ находятся в отношении $\rho$, то есть $(x, y) \in \rho$.

Пусть заданы соответствия $\rho$ между множествами $X$ и $Y$ и $\sigma$ между множествами $Y$ и $Z$. Соответствие $\rho\sigma = \rho \cdot \sigma = \{(x, y) : \exists z \in Y(x\rho z \wedge z\sigma y)\}$ между множествами $X$ и $Z$ называется *композицией*, или *произведением*, соответствий $\rho$ и $\sigma$, а соответствие $\rho^{-1} = \{(y, x) : x\rho y\}$ между множествами $Y$ и $X$ — *обратным* к соответствию $\rho$. Если $X = Y$, то соответствие $\rho$ называется *соответствием на множестве* $X$.

Рассматривается множество $R(X)$ всевозможных соответствий на произвольном непустом множестве $X$. Соответствие равенства на множестве $X$ обозначается $1_X$. Пустое соответствие будем обозначать $\emptyset$ (как пустое множество). Над соответствиями можно выполнять теоретико-множественные операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, разности $\setminus$. На множестве $R(X)$ определено и порядковое отношение включения $\subseteq$, превращающее $R(X)$ в булеан множества $X \times X$.

Напомним, что алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ называется полукольцом, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ -– полугруппа, операция умножения $\cdot$ дистрибутивна относительно операции сложения $+$ с обеих сторон: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ для всех $a, b, c \in S$ [4] (глава 1).

Относительно операции композиции соответствий множество $R(X)$ становится полугруппой с единицей $1_X$ и нулем $\emptyset$. Алгебраическая структура $\langle R(X), \cup, \cdot\rangle$ будет *решеточно упорядоченным аддитивно идемпотентным полукольцом с единицей и нулем* [2].

*Образом подмножества* $A$ множества $X$ при соответствии $\rho$ называется множество $\rho(X) = \{y \in X : \exists x \in A \;\; x\rho y\}$. *Областью определения соответствия* $\rho$ называется множество $D(\rho) = \rho^{-1}(X)$. *Образом соответствия* $\rho$ будет множество $\rho(X) = D(\rho^{-1})$.

Соответствие $\rho \in R(X)$ назовем *полным*, если $\rho = D(\rho) \times \rho(X)$. Полными соответствиями на множестве $X$ служат константные отображения $\pi_x : X \to \{x\}, x \in X$.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ "Полукольца и их связи". Проект № 1.5879. 2017/8.9

Пусть теперь $X$, $Y$ – топологические пространства. Соответствие $\rho$ между $X$ и $Y$ назовем *непрерывным*, как в случае отображений, (*относительно непрерывным*), если прообраз $\rho^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subseteq Y$ есть открытое множество в пространстве $X$ (в подпространстве $D(\rho)$, соответственно). Композиция непрерывных (относительно непрерывных) соответствий непрерывна (относительно непрерывна).

Множество $CR(X)$ всех непрерывных соответствий на топологическом пространстве $X$ является подполукольцом полукольца $R(X)$, а множество $C^*R(X)$ всех относительно непрерывных соответствий будет подполугруппой полугруппы $R(X)$. Имеем $CR(X) \subseteq C^*R(X)$. Каждое из равенств $CR(X) = C^*R(X)$ и $CR(X) = R(X)$ эквивалентно дискретности пространства $X$. Отметим, что полные всюду определенные соответствия на множестве $X$ непрерывны, в частности непрерывными будут константные отображения $\pi_x$, $x \in X$.

Пусть даны топологические пространства $X, Y$ и непрерывное соответствие $\varphi$ между ними, для которого обратное соответствие $\varphi^{-1}$ также непрерывно. Отображение $\alpha_\varphi : CR(X) \to CR(Y)$, определенное формулой

$$\alpha_\varphi(\rho) = \varphi^{-1}\rho\varphi \quad \forall \rho \in CR(X),$$

назовем *индуцированным посредством соответствия* $\varphi$.

Теорема 1. *Каждый изоморфизм $\alpha$ полукольца $CR(X)$ на полукольцо $CR(Y)$ над произвольными топологическими пространствами $X$ и $Y$ индуцирован посредством однозначно определенного гомеоморфизма $\varphi$ пространства $X$ на пространство $Y$, то есть $\alpha = \alpha_\varphi$.*

Следствие 1. *Каждое топологическое пространство $X$ однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется полукольцом $CR(X)$ всех своих непрерывных соответствий.*

Замечание 1. *Равенство $C^*R(X) = R(X)$ выполняется тогда и только тогда, когда топологическое пространство $X$ тривиально, то есть оно дискретно или антидискретно. Поэтому если неодноэлементное множество рассмотреть как с дискретной топологией, так и с антидискретной топологией, то получим негомеоморфные топологические пространства с изоморфными полукольцами относительно непрерывных соответствий на них.*

Теорема 2. *Любой изоморфизм полугрупп $C^*R(X)$ и $C^*R(Y)$ над топологическими пространствами $X$ и $Y$ индуцирован либо однозначно определенным гомеоморфизмом пространства $X$ на пространство $Y$ в случае нетривиальности $X$, либо однозначно определенной биекцией дискретного (антидискретного) пространства $X$ на антидискретное (дискретное) пространство $Y$.*

Следствие 2. *Всякое нетривиальное топологическое пространство $X$ однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется полугруппой $C^*R(X)$ всех своих относительно непрерывных соответствий.*

Замечание 2. *При доказательстве теорем 1 и 2 существенно используются такие факты, что константные отображения $\pi_x$ $(x \in X)$ определяются в терминах полукольца $CR(X)$ и полугруппы $C^*R(X)$.*

Замечание 3. *Замкнутые соответствия на топологическом пространстве $X$, то есть соответствия, являющиеся замкнутыми подмножествами тихоновского произведения $X \times X$, изучал K. Maggil [5]. Он назвал $T_1$-пространство $X$ $\sigma$-пространством в случае, когда композиция любых двух замкнутых соответствий на $X$ также будет замкнутым соответствием, и обозначил через $\sigma[X]$ полугруппу всех замкнутых соответствий на $\sigma$-пространстве $X$ с операцией композиции соответствий. Maggil доказал, что все изоморфизмы полугрупп $\sigma[X]$ и $\sigma[Y]$ индуцированы соответствующими гомеоморфизмами $\sigma$-пространств $X$ и $Y$ [5] (Theorem 3.3), следствием чего является справедливость теоремы 1 для дискретных пространств.*

Отметим также, что обзорная статья [6] посвящена теме определяемости топологических пространств $X$ из различных классов пространств полугруппами $S(X)$ всех непрерывных отображений пространств $X$ в себя.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Вечтомов Е. М. О непрерывных соответствиях между топологическими пространствами // Advanced science. 2019. № 3. С. 4–9.

2. Вечтомов Е. М. О полукольце всех соответствий на множестве // Advanced science. 2019. № 4. С. 4–8.

3. Вечтомов Е. М. О Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Том 28. С. 3–46.

4. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В. Элементы теории полуколец: монография. — Киров: Изд-во ООО "Радуга-ПРЕСС". 2012. 228 с.

5. Maggil K. D. Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral Math. Soc. 1969. Vol. 10. Pp. 185–193.

6. Maggil K. D. A survey of semigroups of continuous self-maps // Semigroup Forum. 1976. Vol. 11. № 3. Pp. 189–282.


---

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03

# О “простых” алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы

**В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
**О. В. Зеткина (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
**А. И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

# On “simple” algorithmically undecidable fragments of elementary theory of an infinitely generated free semigroup

**V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl’)**
P. G. Demidov Yaroslavl’ State University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
**O. V. Zetkina (Russia, Yaroslavl’)**
P. G. Demidov Yaroslavl’ State University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

**A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl')**
P. G. Demidov Yaroslavl' State University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через $S_\omega$ – свободную полугруппу счетного ранга со свободными образующими $a_1$, ..., $a_m$, ..., а через $S_m$ – свободную полугруппу ранга $m$ со свободными образующими $a_1$, ..., $a_m$. При $m = 2$ вместо $a_1$ и $a_2$ будем писать $a$ и $b$ соответственно, а при $m = 3$ вместо $a_1$, $a_2$ и $a_3$ – соответственно $a$, $b$ и $c$. Заметим, что $S_1$ – циклическая полугруппа.

*Элементарная теория* свободной полугруппы $S_\alpha$ ($\alpha \in \{1, 2, \ldots, m, \ldots\} \cup \{\omega\}$) – это множество всех *замкнутых* формул $\Phi$ вида

$$(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\ldots(Q_n\, x_n)\,\Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}\Big(\big(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}\big)\,\&\,\big(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it}\big)\Big),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} \text{ – слова в алфавите } \{x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\},$$

$$A_i \text{ и } B_i \text{ – множества (возможно пустые), а } Q_1, \ldots, Q_n \text{ – кванторы } \forall \text{ или } \exists,$$

*истинных* на свободной полугруппе $S_\alpha$. При этом $(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\ldots(Q_n\, x_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы $\Phi$, $Q_1\, Q_2\, \ldots\, Q_n$ – *типом кванторной приставки*, а $\Psi$ – *бескванторной частью* формулы $\Phi$.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы.* Заметим, что элементарная теория циклической полугруппы $S_1$ – это *арифметика Пресбургера*, которая, как хорошо известно, *является алгоритмически разрешимой.* Естественна постановка вопроса о возможности упрощения бескванторной части и кванторной приставки рассматриваемых формул с *сохранением алгоритмической неразрешимости.* В бескванторную часть рассматриваемых формул входят логические связки $\neg$ – *отрицание*, $\&$ – *конъюнкция* и $\vee$ – *дизъюнкция* и константы $a_1$, ..., $a_m$.

Начнем процесс упрощения с удаления отрицания $\neg$. Формула $\Phi$ называется *позитивной*, если ее бескванторная часть $\Psi$ не содержит отрицаний $\neg$, т.е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k}\big(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}\big).$$

*Позитивной теорией* свободной полугруппы $S_\alpha$ называется множество всех *замкнутых позитивных* формул $\Phi$ *истинных* на свободной полугруппе $S_\alpha$.

В работе [2] замечено, что для любых двух элементов $U$ и $V$ полугруппы $S_m$ ($m$ – произвольное натуральное число) справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)\Big(\bigvee_{i=1}^{m}(U = Va_ix \vee V = Ua_ix) \vee \big(\bigvee_{i,j=1,\, i\neq j}^{m} U = xa_iy \,\&\, V = xa_jz\big)\Big),$$

поэтому из результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы.*

В работах [3], [4] и [5] результат В. Куайна для конечно порожденных нециклических свободных полугрупп был существенно усилен – последовательно доказано, что

*можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi(x)$ с параметром $x$ вида*

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,\Big(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b) = u_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b)\Big),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову $A$, элементу свободной полугруппы $S_2$, определить, истинна ли на свободной полугруппе $S_3$ позитивная формула $\Phi(A)$.*

В работе [4] С.С. Марченкова *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \,=\, u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу* $k$ *определить, истинна ли на свободной полугруппе* $S_2$ *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

В работе [5] получено дальнейшее усиление результатов работ [3] и [4] – *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b) \,=\, u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b)),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу* $k$ *определить, истинна ли на свободной полугруппе* $S_2$ *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Естественным является вопрос о возможности дальнейшего упрощения бескванторной части. В работе Н.К. Косовского [6] построена формула $DK(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов $A$, $B$, $C$ и $D$ свободной полугруппы $S_m$ справедлива эквивалентность

$$A \,=\, B \vee C \,=\, D \iff S_m \models DK(A,B,C,D).$$

Это позволяет исключить знак дизъюнкции $\vee$ из бескванторной части рассматриваемых формул, однако приводит к значительному усложнению кванторной приставки.

В работе [5] был несколько усилен результат Н.К. Косовского – построена формула $DD(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов $A$, $B$, $C$ и $D$ свободной полугруппы $S_m$ справедлива эквивалентность

$$A \,=\, B \vee C \,=\, D \iff S_m \models DD(A,B,C,D).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул, но кванторная приставка, конечно, усложняется. В работе [7] была построена формула $DKMP_n(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов $A_1$, $B_1$, ... , $A_n$ и $B_n$ свободной полугруппы $S_m$ справедлива эквивалентность

$$A_1 \,=\, B_1 \vee A_2 \,=\, B_2 \vee \ldots \vee A_n \,=\, B_n \iff S_m \models DKMP_n(A_1,B_1,\ldots,A_n,B_n).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул за счет незначительного усложнения кванторной приставки. Получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* $x$ *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\,w(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) \,=\, u(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу* $k$ *определить, истинна ли на свободной полугруппе* $S_2$ *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Заметим, что в работах [5] и [7] построение формул ведется по методу Н.К. Косовского [6] с некоторыми усовершенствованиями.

В работе [2] показано, что *невозможно построить такие слова* $w(x,y,z,v,a,b)$ *и* $u(x,y,z,v,a,b)$, *чтобы для произвольных элементов* $A$, $B$, $C$ *и* $D$ *свободной полугруппы* $S_m$ *была справедлива эквивалентность*

$$A = B \vee C = D \iff S_m \models w(A,B,C,D,a,b) = u(A,B,C,D,a,b).$$

Поэтому представляет интерес следующий вопрос: *можно ли построить формулу* $D(x,y,z,v)$ *вида*

$$(\exists x_1)\, w(x,y,z,v,x_1,a,b) = u(x,y,z,v,x_1,a,b)$$

*такую, чтобы для произвольных элементов* $A$, $B$, $C$ *и* $D$ *свободной полугруппы* $S_m$ *была справедлива эквивалентность*

$$A = B \vee C = D \iff S_m \models D(A,B,C,D)\,?$$

В 1976 году Г. С. Маканин [8] получил ***фундаментальный результат в теории уравнений в свободных полугруппах (уравнений в словах)*** – *он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) = u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$$

*определить, имеет ли она решение в свободной полугруппе* $S_m$. Из этого фундаментального результата Г.С. Маканина сразу следует *существование алгоритма, позволяющего по произвольной замкнутой формуле* $\Phi$ *с кванторной приставкой типа* $\exists^n$ *или типа* $\forall^n$ *определить, истинна ли она на свободной полугруппе* $S_m$.

В работе [2] показано, что *по произвольной замкнутой позитивной формуле* $\Phi$ *с кванторной приставкой типа* $Q_1Q_2\ldots Q_n\forall$ *можно построить замкнутую позитивную формулу* $\Phi^*$ *с кванторной приставкой типа* $Q_1Q_2\ldots Q_n$ *такую, что формула* $\Phi$ *истинна на свободной полугруппе* $S_m$ *тогда и только тогда, когда на этой полугруппе истинна формула* $\Phi^*$. Поэтому *вопрос об истинности на свободной полугруппе* $S_m$ *позитивных формул с кванторными приставками вида* $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)$ *алгоритмически разрешим.* Представляет интерес *вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе* $S_2$ *для позитивных формул с кванторными приставками вида* $\exists\forall\exists\exists$ и $\exists\exists\forall\exists$.

Выше рассматривались *конечно порожденные свободные полугруппы.* Для *счетно порожденных свободных полугрупп* ситуация несколько иная. В работе [2] отмечается, что *позитивная теория свободной полугруппы* $S_\omega$ *является рекурсивно перечислимой* и *формулируется вопрос о ее рекурсивности (алгоритмической разрешимости).* Для установления рекурсивной перечислимости позитивной теории свободной полугруппы $S_\omega$ счетного ранга можно воспользоваться конструкцией Ю.И. Мерзлякова из работы [9], примененной им к свободным группам. Ю.М. Важенин и Б.В. Розенблат в работе [10] *используя конструкцию Ю.И. Мерзлякова на базе алгоритма Г.С. Маканина построили алгоритм, позволяющий по произвольной замкнутой позитивной формуле (с константами) определить, истинна ли она на свободной полугруппе счетного ранга.*

Для установления алгоритмической неразрешимости “простых” фрагментов элементарной теории счетно порожденной свободной полугруппы $S_\omega$ по произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle\, a,b \,|\, A_1 = B_1,\ldots,A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cXcx \neq ycaz \,\&\, cXcx \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1 \leq j \leq n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Лемма 1. *Для произвольных непустых слов $A$ и $B$ в алфавите образующих полугруппы $S$ справедлива эквивалентность*

*слова $A$ и $B$ задают один и тот же элемент полугруппы $S$*
$\iff$ *на полугруппе $S_\omega$ истинна формула $\Phi_S(A,B)$.*

Взяв в качестве полугруппы $S$ полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову $B$, получим

Теорема 2. *Элементарная $\exists\forall^2\exists^3$-теория свободной полугруппы $S_\omega$ счетного ранга алгоритмически неразрешима.*

Формулу $\Phi_S(A,B)$ можно привести к виду

$$(\exists x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall y_3)(\forall y_4)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(u_1 \neq u_2 \vee w_1 = w_2).$$

Так как $\exists\forall^2\exists^3$-теория свободной полугруппы счетного ранга алгоритмически неразрешима, то, на наш взгляд, представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости $\exists\forall\exists^3$-теории и $\forall^2\exists^3$-теории свободной полугруппы счетного ранга.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.
2. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // В сб.: Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: Тульск. гос. пед. ин-т. имени Л.Н. Толстого. 1972. С. 122-172.
3. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.
4. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23, № 1. С. 196-198.
5. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36, № 5. С. 1067-1080.
6. Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Ленинград: Изд-во. ЛГУ, 1981. 192 с.
7. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables // Bull. Belg. Math. Soc. 2001. Vol. 8, № 2. P. 293-303.
8. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе / Математический сборник. 1977. Том 103(145), № (6). С. 147-236.
9. Мерзляков Ю.И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Том 5, вып. 4. С. 25-42.

10. Важенин Ю.М., Розенблат Б.В. Разрешимость позитивной теории счетнопорожденной полугруппы // Матем. сборник. 1981. Том 116(158), № 1(9). С. 120-127.

---

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03

# О позитивных формулах с ограниченными кванторами на бесконечно порожденной свободной полугруппе

**В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
**О.В. Зеткина (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
**А.И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)**
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

# On positive formulas with restriction quantifiers on an infinitely generated free semigroup

**V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl')**
P.G. Demidov Yaroslavl' State University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
**O. V. Zetkina (Russia, Yaroslavl')**
P.G. Demidov Yaroslavl' State University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
**A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl')**
P.G. Demidov Yaroslavl' State University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через $S_\omega$ – свободную полугруппу счетного ранга со свободными образующими $a_1$, ..., $a_m$, ..., а через $S_m$ – свободную полугруппу ранга $m$ со свободными образующими $a_1$, ..., $a_m$.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы.* В работах [2], [3] и [4] этот результат В. Куайна усиливался. В работе [5] получено дальнейшее усиление этих результатов – *построено такое однопараметрическое семейство формул $\Phi(x)$ с параметром $x$ вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\, w(x, y, x_1, x_2, x_3, a, b) \;=\; u(x, y, x_1, x_2, x_3, a, b),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу $k$ определить, истинна ли на свободной полугруппе $S_2$ позитивная формула $\Phi(a^k)$.*

В ряде работ на полугруппе $S_m$ рассматриваются два отношения частичного порядка $\leq$ и $\subseteq$, определяемые естественным образом

для произвольных элементов $X$ и $Y$ полугруппы $S_m$:

$X \leq Y \iff$ существует такой элемент $Z$ полугруппы $S_m$, что $Y = XZ$;

$X \subseteq Y \iff$ существуют такие элементы $U$ и $Z$ полугруппы $S_m$, что $Y = UXZ$.

Это позволяет рассматривать формулы с ограниченными кванторами вида $(Qz)_{z\leq t}$ и $(Qz)_{z\subseteq t}$, где $Q$ – это $\forall$ или $\exists$, а $t$ – слово от переменных и образующих полугруппы $S_m$, не содержащее переменной $z$.

В работе [6] доказана следующая теорема

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi(X)$ с параметром $X$ вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leq t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) \;=\; u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову $A$, элементу свободной полугруппы $S_2$, определить, истинна ли на свободной полугруппе $S_3$ позитивная формула $\Phi(A)$.*

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе $S_m$ формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

Выше рассматривались *конечно порожденные свободные полугруппы.* Для *счетно порожденных свободных полугрупп* ситуация несколько иная.

Ю.М. Важенин и Б.В. Розенблат в работе [7] *на базе алгоритма Г.С. Маканина [8] построили алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений с ограничениями на решения указанного вида в свободной полугруппе определить, имеет ли она решение* и доказали *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной полугруппы счетного ранга.*

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S \;=\; \langle\, a,b \,|\, A_1 = B_1,\ldots,A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу ${\Phi'_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\leq cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}$$
$$(\bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc \;=\; zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1\leq j\leq n$: $A_{n+j}=B_j$ и $B_{n+j}=A_j$.

Лемма 1. *Для произвольных непустых слов $A$ и $B$ в алфавите образующих полугруппы $S$ справедлива эквивалентность*

*слова $A$ и $B$ задают один и тот же элемент полугруппы $S$*
$$\iff \quad \text{на полугруппе } S_\omega \text{ истинна формула } {\Phi'_S}^{\omega}(A,B).$$

Удалив по той же схеме что и в работе [6] знак дизъюнкции $\vee$, получим формулу ${\Phi_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\leq t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w \;=\; v,$$
$$\text{где } t \;=\; cXcx,\; t_1 \;=\; cXcxcYc,\; t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов $A$ и $B$ в алфавите образующих полугруппы $S$ справедлива эквивалентность

*слова $A$ и $B$ задают один и тот же элемент полугруппы $S$*

$$\iff \quad \text{на полугруппе } S_\omega \text{ истинна формула } {\Phi_S}^\omega(A,B).$$

Взяв в качестве полугруппы $S$ полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову $B$, а в качестве формулы ${\Phi_S}^\omega(X)$ – формулу ${\Phi_S}^\omega(X,B)$, получим

Теорема 2. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул ${\Phi_S}^\omega(X)$ с параметром $X$ вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\leq t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) \;=\; u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

*что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову $A$, элементу свободной полугруппы $S_2$, определить, истинна ли на свободной полугруппе $S_\omega$ позитивная формула ${\Phi_S}^\omega(A)$.*

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе $S_m$ формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.

2. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.

3. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23, № 1. С. 196-198.

4. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36 № 5. С. 1067-1080.

5. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об ограниченных фрагментах позитивной теории свободной полугруппы // Материалы XVI Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории”, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т. им. Л.Н. Толстого, 2019 г. С. 99-103.

6. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. О позитивных формулах с ограниченными кванторами на свободных полугруппах // XVII Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвященная 100-летию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко. Тула, 23-28 сентября 2019 г. С. 59-60.

7. Важенин Ю.М., Розенблат Б.В. Разрешимость позитивной теории счетнопорожденной полугруппы // Матем. сборник. 1981. Том 116(158), № 1(9). С. 120-127.

8. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Математический сборник. 1977. Том 103(145), № (6). С. 147-236.

---

УДК 512.57

## Представление алгебр мультиопераций пространственными матрицами

**Н. А. Перязев (Россия, г. Санкт-Петербург)**
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

## Representation of multioperation algebras by spatial matrices

**N. A. Peryazev (Russia, Saint-Petersburg)**
The First Electrotechnical University
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Пусть $A$ — конечное множество, $2^A$ — множество всех подмножеств $A$, $n$ — натуральное число. Напомним определения следующих понятий (смотри в [1]):

- $f : A^n \to 2^A$ — $n$-местная мультиоперация на $A$.
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество $n$-местных мультиопераций на $A$.
- $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

  $$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

  получаемых из $f$ при кодировке

  $$a_i \to 2^i; \;\; \varnothing \to 0; \;\; \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

  Говорим, что $f$ мультиоперация размерности $n$, ранга $k$.
  В случае $n = 1$ говорим унарная мультиоперация.
- $\mathcal{M}_k^{(n)}$ — множество мультиопераций размерности $n$, ранга $k$.

Введем некоторые мультиоперации и метаоперации, а так же их обозначения:

- проекция по $i$ аргументу
  $e_i(a_1, ...a_n) = \{a_i\}$;
- пустая мультиоперация
  $o(a_1, ...a_n) = \varnothing$;
- $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

- унарная метаоперация разрешимости $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, ..., a_n) = \{b \mid a_1 \in f(b, a_2, ..., a_n)\}.$$

Определение 1. *[2] Алгеброй мультиопераций размерности $n$, ранга $k$ называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все $n$-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости.*

Замечание 1. *Алгебры унарных мультиопераций по существу совпадают с алгебрами бинарных отношений.*

Хорошо известно [3] матричное представление алгебр унарных мультиопераций ранга $k$.

- Пусть $B = \langle\{0,1\}; +, \cdot\rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для унарной мультиоперации $f$ ранга $k$ на $A$ определим булеву квадратную матрицу над $B$ $k$-го порядка $M_f = ||\alpha_{ij}||$ где:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in f(a_j); \\ 0, & \text{если } a_i \notin f(a_j). \end{cases}$$

- Метаоперации алгебры мультиопераций представляются матричными операциями:

  $M_{(f*g)} = M_f * M_g$ — матричное умножение;

  $M_{(\mu f)} = M_f^T$ — транспонирование матрицы;

  $M_{e_1} = E$ — диагональная матрица;

  $M_o = O$ — нулевая матрица.

Напомним некоторые понятия из теории пространственных матриц [4]:

- Двоичной $n$-мерной матрицей $k$-го порядка называется функция $\alpha : N_k^n \to \{0,1\}$, где $N_k = \{1, ..., k\}$.

  Обозначение: $M = ||\alpha_{i_1 \dots i_n}||$, где $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \alpha(i_1, ..., i_n)$.

- При фиксированном значении $i$ ($i \in N_k$) индекса $s$ получается $(n-1)-$мерная матрица $k$-го порядка, которая называется $i$-сечением $M$ по индексу $s$, обозначается $M^{i_s}$.

- Транспонированием матрицы $M = ||\alpha_{i_1 \dots i_s \dots i_p \dots i_n}||$ по индексам $s$ и $p$ получаем матрицу $M^{T_{sp}} = ||\alpha_{i_1 \dots i_p \dots i_s \dots i_n}||$.
  В случае $s = 1$ и $p = 2$ используем обозначение $M^T$.

- Умножение $n$-мерной матрицей $k$-го порядка $M$ на вектор $V$ длинны $k$ по индексу $s$ дает $(n-1)$-мерную матрицу $k$-го порядка $(M *_s V) = ||\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}||$, при

$$\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} = M^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} * V,$$

  где $*$ является скалярным произведением векторов над булевым полукольцом $B$.

Введем матричное представление мультиопераций размерности $n$, ранга $k$.

Пусть $B = \langle\{0,1\}; +, \cdot\rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации $f$ размерности $n$, ранга $k$ на $A$ определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу $k$-го порядка $M_f = ||\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n}||$ где:

$$\alpha_{i_0 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 \in f(a_1, ..., a_n); \\ 0, & \text{если } a_0 \notin f(a_1, ..., a_n). \end{cases}$$

Следующая теорема дает представление суперпозиции мультиопераций пространственными булевыми матрицами.

Теорема 1. *Пусть* $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ *и* $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ *и* $M_{(f_0 * f_1, ..., f_n)} = ||\beta_{i_0 i_1 ... i_m}||$. *Тогда*

$$\beta_{i_0 i_1 ... i_m} = (...((M_{f_0}^{i_0} *_n M_{f_n}^{i_1 ... i_m}) *_{n-1} M_{f_{n-1}}^{i_1 ... i_m})...) *_1 M_{f_1}^{i_1 ... i_m}$$

Замечание 2. *Порядок умножения на вектора не меняет результат вычисления матрицы суперпозиции.*

Битовой сложностью алгоритма нахождения матрицы суперпозиции мультиопераций назовем максимальное число операций $+, \cdot$ необходимое для нахождения по матрицам любых мультиопераций матрицы суперпозиции этих мультиопераций.

Теорема 2. *Алгоритм нахождения матрицы суперпозиции мультиоперации размерности* $n$ *с мультиоперациями размерности* $m$ *ранга* $k$*, представленный в теореме 1, имеет битовую сложность* $O(k^{n+m+1})$.

Оценим сложность алгоритма нахождения матрицы суперпозиции с предварительной обработкой. Предварительная обработка заключается в нахождении матрицы $S_k$ скалярного умножения всех векторов длины $k$.

Квадратная матрица $S_k$ порядка $2^k$ определяется так: $S_k = ||s_{ij}||$, где $s_{ij} = (i-1)_2 * (j-1)_2$ и $i, j \in \{1, ..., 2^k\}$.

Матрицу $S_k$ можно построить следующей рекуррентной процедурой:

$$S_0 = ||0||; S_k = \begin{Vmatrix} S_{k-1} & S_{k-1} \\ S_{k-1} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь нахождение матрицы суперпозиции мультиопераций заключается в многократном обращении к матрице скалярного умножения векторов.

Скалярной сложностью алгоритма нахождения матрицы суперпозиции мультиопераций назовем максимальное число обращений к матрице скалярного умножения векторов необходимое для нахождения по матрицам любых мультиопераций матрицы суперпозиции этих мультиопераций.

Теорема 3. *Скалярная сложность нахождения матрицы суперпозиции мультиоперации размерности* $n$ *с мультиоперациями размерности* $m$ *ранга* $k$ *равна* $O(k^{n+m})$.

Матричное представление алгебр мультиопераций размерности $n$, ранга $k$ следует из представления метаопераций алгебры матричными операциями:

- $M_{(f_0 * f_1, ..., f_n)}$ — $(n+1)$-мерная матрица $k$-го порядка находится по теореме 1 при $m = n$.
- $M_{(\mu f)} = M_f^T$ — транспонирование пространственной матрицы по двум первым индексам;
- $M_{e_s} = E_s$ — $(n+1)$-мерная матрица $k$-го порядка такая, что все сечения $M_s^{i_1 ... i_{s-1} i_{s+1} ... i_n}$ являются диагональными квадратными матрицами $k$-го порядка;
- $M_o = O$ — нулевая $(n+1)$-мерная матрица $k$-го порядка.

Замечание 3. *В случае алгебр унарных мультиопераций получается приведенное выше представление двумерными матрицами.*

Для задания конкретных мультиопераций удобно использовать представления их в векторной форме.

Если $f$ мультиоперация ранга $k$, размерности $n$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ и $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, а $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ в системе исчисления по основанию $k$ $n$-разрядным числом.

Приведем пример представления суперпозиции мультиопераций размерности 3, ранга 2 $f_0 = (426537011)$, $f_1 = (126543502)$, $f_2 = (247131225)$, $g = (f_0 * f_1, f_2) = (277415307)$.

Эти мультиоперации представимы следующими пространственными булевыми матрицами:
$M_{f_0} = (000111011\ 011011000\ 101101000)$
$M_{f_1} = (100101100\ 011001001\ 001110100)$
$M_{f_2} = (001111001\ 101010110\ 011000001)$

Вычисление элементов матрицы суперпозиции можно находить с использованием матрицы скалярного умножения векторов.

$$S_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Проделав вычисления
$\alpha_g(111) = (((000\ 111\ 011) *_2 (010)) *_1 (100)) = ((011) *_1 (100)) = 0$
$\alpha_g(211) = (((011\ 011\ 000) *_2 (010)) *_1 (100)) = ((110) *_1 (100)) = 1$
$\alpha_g(311) = (((101\ 101\ 000) *_2 (010)) *_1 (100)) = ((000) *_1 (100)) = 0$
и так далее, получим пространственную матрицу, представляющую суперпозицию:

$$M_g = (011011101\ 111000101\ 011101001).$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Перязев Н.А., Шаранхаев И.К. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискретная математика. 2015. Том 27. Вып. 4. С. 79-93.

2. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 113-116.

3. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois // Bull. Soc. math. Ffance. 1948. Vol. 76. P. 1-4, 114-155.

4. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. — М.: ГИФМЛ, 1960. 300 с.

УДК 512.53

# О некоммутативности вторичных идемпотентов моноида булевых матриц

**В. Б. Поплавский (Россия, г. Саратов)**
Национальный исследовательский Саратовский госуниверситет
e-mail: poplavskivb@mail.ru
**Д. Г. Явкаев (Россия, г. Саратов)**
Национальный исследовательский Саратовский госуниверситет

Мы доказываем два утверждения для идемпотентных булевых матриц, связанных с разбиением множества булевых $(0;1)-$матриц всевозможных размеров на классы $\mathcal{D}-$эквивалентности Грина. Первое утверждение посвящено взаимному расположению первичного идемпотента и порождённого им вторичного идемпотента в одном $\mathcal{D}-$классе. Второе утверждение указывает на такое расположение вторичных идемпотентных матриц в $\mathcal{D}-$классе, которое влечёт их некоммутативность.

Обозначим множество булевых матриц с элементами из $B_2 = \{0;1\}$ всевозможных размеров $k \times l$, где $k = 1..n$ и $l = 1..n$ через $M_{n\times n}(B_2)$. Вместе с частичной операцией конъюктного умножения $\sqcap$ множество $M_{n\times n}(B_2)$ образует частичную полугруппу с единицей, изучению свойств идемпотентов которой посвящены работы [1], [2].

Далее мы будем использовать такие известные понятия для полугрупп, как $\mathcal{D}-$, $\mathcal{R}-$, $\mathcal{L}-$ и $\mathcal{H}-$ отношения эквивалентностей Грина на полугруппе, разбивающее её на классы [3]. Подобная ситуация наблюдается и для частичной полугруппы $M_{n\times n}(B_2)$ [4]. Если $\mathcal{D}-$класс полугруппы содержит идемпотент, то его называют регулярным. Известно, что для каждого элемента некоторых полугрупп, названных В.В. Вагнером обобщенными группами (другое название – инверсные полугруппы), существует единственный обобщенно обратный элемент. Каждый $\mathcal{D}-$класс таких инверсных полугрупп регулярен, и каждый $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$ класс порождается ровно одним идемпотентом. Критерием инверсности полугруппы служит коммутативность любых её идемпотентов (см. предложение 2.12 в [5]). Таким образом, коммутативность идемпотентов существенным образом влияет на структуру полугруппы, что вызывает несомненный интерес к этому.

Ясно, что все $\mathcal{D}-$классы любой инверсной полугруппы являются по определению инверсными. Однако, $\mathcal{D}-$классы произвольной полугруппы могут быть и регулярными, и нерегулярными, а среди регулярных могут быть как инверсные, так и неинверсные [6], [7] .

Определение 1. Идемпотентные матрицы называются первичными идемпотентами, если они не сравнимы с единичной матрицей относительно булева частичного порядка, и вторичными идемпотентами в противном случае. При этом, если идемпотентная матрица $A$ и единичная матрица $E$ такого же размера удовлетворяют неравенству $E \subseteq A$, то $A$ называется вторичным идемпотентом максимального типа, а если удовлетворяют неравенству $A \subseteq E$, то $A$ называется вторичным идемпотентом минимального типа.

Известно [2], что любая матрица из $A \in M_{n\times n}(B_2)$ порождает два типа вторичных идемпотентов максимального типа: $A^R = ((A \sqcap A^{T'}))^{T'}$ и $A^L = ((A^{T'} \sqcap A))^{T'}$, где $T'$ обозначает одновременное транспонирование и взятие дополнения булевой матрицы (см. [1], [2]).

Теорема 1. Для любой матрицы $A$ справедливы следующие импликации:

$$(A, A^R) \in \mathcal{D} \to (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathcal{R}}) \in \mathcal{R},$$

$$(A, A^L) \in \mathcal{D} \to (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. Докажем первую импликацию. Предположим, что $(A, A^R) \in \mathcal{D}$, однако $A$ и $A^R$ порождают различные $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$подклассы. Тогда для любой матрицы $B$, принадлежащей пересечению классов $R_A \cap L_{A^R}$ (теорема 3.2,[1]) выполняется $B^R = A^R$. Так как

$B \in L_{A^R}$, то существуют решения $X$,$Y$ системы уравнений

$$XB = A^R, \quad YA^R = B$$

и, следовательно, существуют решения системы уравнений

$$XB^n = A^R B^{n-1}, \quad YA^R B^{n-1} = B^n.$$

Из равенств $A^R B = B^R B = B$ получаем $XB^n = B^{n-1}$,$YB^{n-1} = B^n$ для любого натурального $n$. Следовательно, $B^n \in L_B$, и тогда $(B^n, A^R) \in \mathcal{L}$. Так как $M_{n\times n}(B_2)$ является периодической полугруппой, то для некоторого $n = \tilde{n}$ степень $B^{\tilde{n}}$ является идемпотентом, причем $B^{\tilde{n}} \in L_{A^R}$, а множество $\{B, B^2, B^3, ...\}$ – конечной циклической полугруппой.

С другой стороны, из $B \in R_A \cap L_{A^R}$ следует $(A, B) \in \mathcal{R}$, и тогда $(B^{n-1}A, B^n) \in \mathcal{R}$ для любого натурального $n$. Получаем $B^{\tilde{n}} \in R_{B^{\tilde{n}-1}A}$.

Для дальнейших рассуждений понадобится теорема Миллера и Клиффорда [3]: для произвольных элементов $s$ и $t$ полугруппы принадлежность $st \in R_s \cap L_t$ выполняется тогда и только тогда, когда $R_t \cap L_s$ содержит идемпотент.

Так как было показано, что $B^{\tilde{n}}$ – идемпотент и $B^{\tilde{n}} \in L_{A^R} \cap R_{B^{\tilde{n}-1}A}$, то $A^R(B^{\tilde{n}-1}A) \in R_{A^R} \cap L_{B^{\tilde{n}-1}A}$. Получили $A^R(B^{\tilde{n}-1}A) = B^{\tilde{n}-1}A \in R_{A^R}$, и, следовательно, $B^{\tilde{n}} \in R_{A^R}$. Таким образом, $(B^{\tilde{n}}, A^R) \in \mathcal{H}$. В силу единственности идемпотента, принадлежащего $\mathcal{H}-$классу, получаем $B^{\tilde{n}} = A^R$. Поэтому множество $\{B, B^2, B^3, ..., B^{\tilde{n}}\}$ является конечной циклической группой, которая является подгруппой группы $H_{A^R} = H_{B^{\tilde{n}}}$, так как является максимальной подгруппой полугруппы $\mathbf{X}$. В итоге получили $B \in H_{A^R}$, а так как $B \in R_A \cap L_{A^R}$, то это влечёт $(A, A^R) \in \mathcal{R}$.

Вторая импликация теоремы доказываются аналогично. □

Как следствие получается следующая

Теорема 2. Любой первичный идемпотент $A$ (или вторичный идемпотент минимального типа) и соответствующий ему вторичный идемпотент максимального типа $A^R$ или порождают один и тот же $\mathcal{R}$-класс или порождают различные $\mathcal{D}$- классы. Аналогично, первичный идемпотент $A$ (или вторичный идемпотент минимального типа) и соответствующий ему вторичный идемпотент максимального типа $A^L$ или являются $\mathcal{L}$-эквивалентными или порождают различные $\mathcal{D}$- классы.

Если два идемпотента порождают один и тот же односторонний идеал, то они не коммутируют. Это утверждение сразу следует из того, что, порождая один и тот же односторонний идеал, эти идемпотенты становятся односторонними единицами для элементов этого идеала, которые не коммутируют.

Следующее утверждение показывает, что некоммутативность вторичных идемпотентов максимального типа зависит от их взаимного расположения в $\mathcal{D}$- классе с первичным идемпотентом (или вторичным идемпотентом минимального типа), который их порождает.

Теорема 3. Пусть $A$ – первичный идемпотент (или вторичный идемпотент минимального типа) и матрицы $A$, $A^R$, $A^L$ принадлежат одному и тому же $\mathcal{D}$- классу. Тогда $A^R A^L \neq A^L A^R$ .

Доказательство. Из того, что матрицы $A$, $A^R$, $A^L$ принадлежат одному и тому же $\mathcal{D}$-классу и теоремы 2, следует, что матрицы $A$, $A^R$, $A^L$ расположены в своём $\mathcal{D}$-классе так, что образуют прямой угол на "egg-box" картинке $\mathcal{D}$- класса с вершиной в матрице $A$.

Пусть $R_A$ и $L_A$ —порожденные матрицей $A$ $\mathcal{R}$- и $\mathcal{L}$-классы Грина соответственно. Так как $A \in R_{A^R} \cap L_{A^L}$, то по теореме Миллера - Клиффорда о произведении элементов в $\mathcal{D}$-классах имеем $A^L A^R \in L_{A^R} \cap R_{A^L}$. Если $A^R A^L = A^L A^R$, то произведение $A^R A^L$ является идемпотентом, и по той же теореме получаем $A^R A^L \in R_{A^R} \cap L_{A^L}$, то есть $A = A^R A^L$ в силу единственности идемпотента в таких пересечениях. Тогда из $A^R \geq E$ и $A^L \geq E$ следует $A = A^R A^L \geq A^L \geq E$, что противоречит тому, что $A$ является первичным, или вторичным, но минимального типа. □

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Поплавский В.Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц.// Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26-33.

2. Поплавский В.Б. О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц.// Фундаментальная и прикладная математика.- 2012. Т.17, вып.4. С. 181-192.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М:"МИР". - 1972. -Т.1. -287 с.

4. Поплавский В.Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008, Т.20, вып. 4, с. 42-60.

5. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: "Мир -1985. 440 с.

6. Поплавский В.Б., Явкаев Д.Г. Об инверсных D-классах полугруппы булевых матриц. // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С.112-114.

7. Поплавский В.Б. Явкаев Д.Г. Вычисление инверсных D-классов булевых матриц. // Математика, механика: сб. науч. тр., Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. Вып. 21. 2019. С.50-52.


---

УДК 512.579

# Наследственность формаций унарных алгебр

**А. Л. Расстригин (Россия, г. Волгоград)**
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

# Formations of unary algebras are hereditary

**A. L. Rasstrigin (Russia, Volgograd)**
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Алгебраическая система называется *унарной алгеброй*, если ее сигнатура содержит только символы унарных операций. Теория унарных алгебр рассматривается в качестве самостоятельного направления и для знакомства с ней можно обратиться к [1]. Кроме того, рассмотрение на некоторой алгебраической системе унарных операций не является редкостью и может быть использовано для установления свойств этой системы.

Многообразия самых простых унарных алгебр с одной операцией — *унаров* — описаны в [2], а конечная базируемость коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры показана [3]. Мы же рассмотрим классы унарных алгебр, близкие к аксиоматизируемым классам и, в частности, к многообразиям — формации. *Формацией* называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации получили распространение в теории конечных групп и после понятие было обобщено до понятия формации алгебраических систем [4].

Формация называется *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подсистем. Известны примеры как наследственных формаций, так и не являющихся таковыми. Например, в теории групп установлена наследственность любых формаций нильпотентных групп.

Унарные алгебры сильно отличаются от классических алгебраических систем (как группы, кольца, решетки). Они не образуют конгруэнц-модулярного многообразия. Тем не менее для них можно применять общие конструкции. Так, любая унарная алгебра является абелевой (а значит и нильпотентной) алгеброй в смысле коммутаторов конгруэнций. Алгебра называется *аффинной*, если она полиномиально эквивалентна (имеет те же полиномиальные операции) модулю над кольцом. Любой унар является редуктом аффинной алгебры [5, 6]. Алгебра называется *квазиаффинной*, если она является подалгеброй редукта некоторой аффинной алгебры. Любая унарная алгебра является квазиаффинной алгеброй.

Ранее в [7, 8] устанавливалась наследственность некоторых формаций унаров и унарных алгебр. В работе [9] в терминах коммутаторов конгруэнций для унарных алгебр окончательно получена

Теорема 1. *Любая формация унарных алгебр является наследственной.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Карташов В. К. О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, № 2. С. 18–26.

2. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

3. Карташов В. К. О конечной базируемости многообразий коммутативных унарных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, № 6. С. 85–89.

4. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

5. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

6. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией $p$, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, № 2. С. 127–134.

7. Расстригин А. Л. О наследственности формаций унаров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 108–113.

8. Расстригин А. Л. Формации и псевдомногообразия унарных алгебр // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула : ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 114–115.

9. Kearnes K. A., Rasstrigin A. Representing subalgebras as retracts of finite subdirect powers // Algebra Universalis. 2020. Vol. 81, no. 4. Article 46.

УДК 512.548.2 + 512.571

# О конгруэнциях умеренно частичных алгебр[1]

**А. В. Решетников (Россия, г. Москва)**
НИУ «Московский институт электронной техники»; Центр ФПМ МГУ
e-mail: a_reshetnikov@hush.com

# On congruences of moderately partial algebras

**A. V. Reshetnikov (Russia, Moscow)**
National Research University of Electronic Technology; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics
e-mail: a_reshetnikov@hush.com

Напомним, что *частичной операцией, заданной на множестве* $A$, точнее – *частичной $n$-арной операцией* (здесь $n$ – некоторый ординал) называется какое-либо отображение $f : A' \to A$, где $A' \subseteq A^n$. При этом множество $A'$ называется *областью определения* частичной операции $f$ и обозначается следующий образом: $A' = \operatorname{dom} f$. Множество $A$, рассматриваемое совместно с множеством $\Omega$ заданных на $A$ частичных операций, называется *частичной алгеброй* и обозначается через $(A, \Omega)$. В случае $\operatorname{dom} f = A^n$ будем говорить, что $f$ – *полная* операция. Если $\Omega$ – семейство полных операций, заданных на некотором множестве $A$, то частичную алгебру $(A, \Omega)$ назовём *полной алгеброй* – данное понятие совпадает с хорошо известным понятием универсальной алгебры. Отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$ называется *конгруэнцией* частичной алгебры $(A, \Omega)$, если все частичные операции $f \in \Omega$ замкнуты относительно $\rho$ (т.е. $x\rho y \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho$ для всех $x, y \in \operatorname{dom} f$).

Полные операции, заданные на некотором множестве $A$ и замкнутые относительно всех отношений эквивалентности на $A$, исчерпывающим образом были охарактеризованы Ф. Галвиным и А. Хорном в 1970-ом году [1]. По сути это означает, что была получена характеристика универсальных алгебр, у которых решётка конгруэнций совпадает с решёткой отношений эквивалентности. Характеристика частичных алгебр с аналогичным условием неизвестна. Возникает вопрос: каким образом теорема Галвина — Хорна может быть усилена, чтобы она стала применима к какому-либо достаточно широкому классу частичных алгебр?

Рассмотрим произвольную частичную операцию $f$ и зафиксируем значения всех её аргументов, кроме какого-то одного. Получим унарную частичную операцию, которую обозначим через $\varphi$; её называют *элементарной трансляцией* частичной операции $f$.

Определение 1. *Частичную операцию $f$ назовём умеренно частичной операцией, если для любой её элементарной трансляции $\varphi$ выполняется условие* $|\operatorname{dom} \varphi| \geqslant 3$.

Говорят, что частичная $n$-арная операция $f'$ *продолжается* до частичной $n$-арной операции $f$, если $\operatorname{dom} f' \subseteq \operatorname{dom} f$ и для всех $x \in \operatorname{dom} f'$ справедливо $f(x) = f'(x)$.

Теорема 1. *Пусть $A \neq \emptyset$. Тогда класс умеренно частичных алгебр, заданных на множестве $A$, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией, совпадает с классом умеренно частичных алгебр $(A, \Omega')$, каждая из которых продолжается до некоторой полной алгебры $(A, \Omega)$ такой, что каждое отношение эквивалентности на $A$ является конгруэнцией алгебры $(A, \Omega)$.*

В классе умеренно частичных алгебр утверждение теоремы 1 представляет собой обобщение теоремы Галвина -– Хорна. Действительно, коль скоро характеристика полных алгебр, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями, известна, из теоремы 1 ясно, как устроена любая умеренно частичная алгебра с аналогичным условием.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Центра ФПМ МГУ им. Ломоносова.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galvin F, Horn A. Operations preserving all equivalence relations // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24, № 3. P. 521-523.

---

УДК 512. 548

# Преобразования строк с помощью $n$-квазигрупп

**Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)**
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

# Converting strings by means of $n$-quasigroups

**N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)**
Volgograd State Pedagogical University
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

В криптографии находят широкое применение квазигруппы (латинские квадраты) (см., например, [1], [2], [3]). Мы здесь укажем на возможность применения $n$-квазигрупп в криптографии, где $n \geq 2$. Напомним, что множество $Q$ с одной $n$-арной операцией $f$ называют $n$-квазигруппой, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $Q$ и для любого индекса $i = 1, \ldots, n$ уравнения

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i \tag{1}$$

разрешимы однозначно ([4], стр. 6). При $n = 2$ имеем определение обычной квазигруппы.

Пусть множество $Q$ конечно и $Q = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Тогда каждой $n$-квазигруппе $\langle Q, f\rangle$ соответствует $n$-мерная матрица $k$-го порядка $B = (b_{j_1 j_2 \ldots j_n} | j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, k)$ ([5], стр. 5), где $b_{j_1 j_2 \ldots j_n} = f(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, причем, в силу однозначной разрешимости уравнения (1), в строках направления $(i)$ для каждого индекса $i = 1, \ldots, n$ стоят разные элементы из $Q$. Указанное соответствие будет взаимно однозначным. При $n = 2$ каждой обычной квазигруппе $\langle Q, \cdot\rangle$ соответствует латинский квадрат $k$-го порядка.

Заметим, что большое количество $n$-квазигрупповых операций, $n \geq 2$, на заданном конечном множестве позволяет использовать $n$-квазигруппы для шифрования. Такое использование квазигрупп ($n$-квазигрупп при $n = 2$) было предложено в работе [6]. Мы обобщим результаты этой работы на случай $n \geq 3$.

Рассмотрим конечную $n$-квазигруппу $\langle Q, f\rangle$, где $Q = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Множество всех слов в алфавите $Q$ обозначим $Q^+ = \{x_1 \ldots x_m | x_i \in Q, m \geq 1\}$. Для фиксированного набора элементов $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ из $Q$ на множестве $Q^+$ определим отображение

$$E_\alpha^{(1)}(x_1 \ldots x_m) = y_1 \ldots y_m,$$

где при $1 \leq m < n$ имеем $y_1 = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_1)$, $y_2 = f(a_1, \ldots, a_{n-2}, y_1, x_2)$, $\ldots$, $y_m = f(a_1, \ldots, a_{n-m}, y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m)$, если же $m \geq n$, то $y_1 = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_1)$, $y_2 = f(a_1, \ldots, a_{n-2}, y_1, x_2)$, $\ldots$, $y_{n-1} = f(a_1, y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1})$, $y_n = f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n)$, $y_{n+1} = f(y_2, \ldots, y_n, x_{n+1})$, $\ldots$, $y_m = f(y_{m-n+1}, \ldots, y_{m-1}, x_m)$, где $x_i, y_i \in Q$. Отображение $E_\alpha^{(1)}$ будет биективным. Далее строим композицию $s$ таких отображений. Выбираем $n$-квазигрупповые операции $f_1, f_2, \ldots, f_s$ на множестве $Q$ и для фиксированных наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \ldots, a_{n-1j})$ из $Q$,

$j = 1, 2, \ldots, s$, на множестве $Q^+$ определяем соответственно отображения $E^{(1)}_{\alpha_1}, E^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, E^{(s)}_{\alpha_s}$, затем строим композицию $E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1} = E^{(s)}_{\alpha_s} \circ E^{(s-1)}_{\alpha_{s-1}} \circ \ldots \circ E^{(1)}_{\alpha_1}$.

Найдем обратное отображение для $E^{(1)}_{\alpha}$. В силу однозначной разрешимости уравнения (1) для $i = n$, на множестве $Q$ определим еще одну $n$-арную операцию $g$ по правилу

$$g(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = b \Leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) = a_n.$$

Операции $f$ и $g$ связаны тождествами

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)) = y = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)). \tag{2}$$

Для этого же фиксированного набора элементов $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ из $Q$ на множестве $Q^+$ определим отображение

$$D^{(1)}_{\alpha}(y_1 \ldots y_m) = x_1 \ldots x_m,$$

где при $1 \leq m < n$ имеем $x_1 = g(a_1, \ldots, a_{n-1}, y_1)$, $x_2 = g(a_1, \ldots, a_{n-2}, y_1, y_2)$, $\ldots$, $x_m = g(a_1, \ldots, a_{n-m}, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m)$, если же $m \geq n$, то $x_1 = g(a_1, \ldots, a_{n-1}, y_1)$, $x_2 = g(a_1, \ldots, a_{n-2}, y_1, y_2)$, $\ldots$, $x_{n-1} = g(a_1, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1})$, $x_n = g(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$, $x_{n+1} = g(y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$, $\ldots$, $x_m = g(y_{m-n+1}, \ldots, y_{m-1}, y_m)$, где $x_i, y_i \in Q$. Отображение $D^{(1)}_{\alpha}$ также будет биективным. В силу верности тождеств (2) имеем равенства $D^{(1)}_{\alpha}(E^{(1)}_{\alpha}(\beta)) = \beta = E^{(1)}_{\alpha}(D^{(1)}_{\alpha}(\beta))$ для любого слова $\beta \in Q^+$, т.е. отображение $D^{(1)}_{\alpha}$ является обратным для отображения $E^{(1)}_{\alpha}$. Обратным отображением для отображения $E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}$ будет композиция $D^{(s)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = D^{(1)}_{\alpha_1} \circ D^{(2)}_{\alpha_2} \circ \ldots \circ D^{(s)}_{\alpha_s}$, где отображения $D^{(j)}_{\alpha_j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, построены в соответствии с отображениями $E^{(j)}_{\alpha_j}$ также, как $D^{(1)}_{\alpha}$ построено по отображению $E^{(1)}_{\alpha}$. Отображение $E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}$ можно использовать для шифрования текстов в алфавите $Q$. Ключом при таком шифровании будет набор $n$-арных операций $f_1, f_2, \ldots, f_s$.

Заметим, что при $n = 2$ отображения $E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}$ и $D^{(s)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ будут такими же, как в работе [6]. В этой работе доказаны свойства указанных отображений, которые нужны для применения этих отображений в криптографии. Для наших отображений мы тоже доказали эти свойства.

Теорема 1. *Пусть $b_1 \ldots b_m$ – слово в алфавите $Q = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Для любого набора $n$-квазигрупповых операций $f_1, f_2, \ldots, f_s$ на множестве $Q$ и для любых наборов элементов $\alpha_j = (a_{1j}, \ldots, a_{n-1j})$ из $Q$, $j = 1, 2, \ldots, s$, найдется единственное слово $d_1 \ldots d_m$ в алфавите $Q$ такое, что верно равенство $E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}(d_1 \ldots d_m) = b_1 \ldots b_m$.*

Перейдем теперь к оценке возможностей отыскания ключей $f_1, f_2, \ldots, f_s$ ($n$-арных операций), которые участвуют в отображении

$$E^{(s)}_{\alpha_s,\ldots,\alpha_1}(x_1 \ldots x_m) = y_1 \ldots y_m \tag{3}$$

по заданным наборам элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и словам $x_1 \ldots x_m$, $y_1 \ldots y_m$.

Теорема 2. *Для нахождения всех ключей $f_1, f_2, \ldots, f_s$ ($n$-арных операций), которые удовлетворяют (3) при заданных наборах элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и словах $x_1 \ldots x_m$, $y_1 \ldots y_m$, необходимо произвести столько испытаний, сколько существует наборов из $s - 1$ $n$-квазигрупповых операций.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. - 2008. - №2. - С. 28-32.

2. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S. K. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts // Quasigroups and Related Systems. - 2013. - Vol. 21, No. 2. - P. 117–130.

3. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterization of Polyno- mially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations // Discrete Applied Mathematics. - 2016. - P. 5–17.

4. Белоусов В.Д. $n$-Арные квазигруппы. Кишинев. Штиинца, 1972. 228 с.

5. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова думка, 1972. 175 с.

6. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maked. Academ. of Sci. and Arts for Math. And Tect. Sci. XX. - 1999 - 1-2. - P. 157-162.

---

# Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.55

## Строение некоторых метациклических групповых алгебр

**К. В. Веденев (Россия, г. Ростов-на-Дону)**
Южный Федеральный Университет
e-mail: vedenev@sfedu.ru

## The structure of some split metacyclic group algebras

**K. V. Vedenev (Russia, Rostov-on-Don)**
Southern Federal University
e-mail: vedenev@sfedu.ru

**1. Introduction**

Let $G$ be a finite group with the identity $e$, written multiplicatively, let $R$ be a ring with the identity $1_R$ and $\mathbb{F}_q$ be a Galois field of order $q$. Recall, the group ring $RG$ is a set of all formal linear combinations $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$, $a_g \in R$, equipped with operations of addition and (left and right) multiplication by elements of $R$ defined componentwise and multiplication defined as follows:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} \left( \sum_{h\in H} \alpha_{gh^{-1}} \beta_h \right) g.$$

(see [1]). In the case when $R$ is commutative, $RG$ is also called group algebra of $G$ over $R$. Note that, the correspondences $g \mapsto 1_R g$, $g \in G$, and $r \mapsto re$, $r \in R$, define natural embeddings of the group $G$ and the ring $R$ into $RG$ (see [1], p. 131).

As is well–known, if $\gcd(q, |G|)$, then Mashke Theorem implies that $\mathbb{F}_q G$ is semisimple. It follows that $\mathbb{F}_q G$ is isomorphic to a direct sum of matrix algebras over some extensions of $\mathbb{F}_q$ by The Wedderburn Theorem. However this theorem gives no information about the summands and the isomorphism. So, for an arbitary group algebra $\mathbb{F}_q G$ there is a problem of constructing its Wedderburn decomposition. There are several results on construction of the Wedderburn decomposition and central primitive idempotents known (see [2], [3], [4] ). In [5] the Wedderburn decomposition of finite dihedral group algebra was described and in [6], [7], [8] this decomposition and its generalization was used to study the dihedral codes. In [9] the structure of finite group algebra of direct product of dihedral groups was studied.

By $\mathbb{F}_q$ we denote a finite field of order $q = p^t$. By the *split metacyclic group* $G_{n,m,k}$ we mean the group given by the presentation

$$\langle a, b \mid a^n = b^m = e,\ b^{-1}ab = a^k \rangle, \quad k^m \equiv 1 \ (\mathtt{mod}\ n). \tag{1}$$

As is well–known, $G_{n,m,k}$ decomposes into the semidirect product $C_n \leftthreetimes C_m$, where $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$, $C_m = \langle b \mid b^m \rangle$; and any semidirect product of the cyclic groups has a presentation of the form (1).

In this paper, we consider the algebra $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$. In the case when $n \mid (q-1)$ and $m$ is prime, we provide a structural theorem for $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$. In addition, if $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$ is semisimple, i.e. by Mashke Theorem $\gcd(mn, q) = 1$, the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$ is explicitly constructed. The obtained results could be used to study the codes in $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$.

*From now on we assume that $n \mid (q-1)$ and $m$ is prime.*

**2. The structure of $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$**

Presentation (1) implies that any $g \in G_{n,m,k}$ can be presented as $b^i a^j$, $i = 0, \dots n-1$, $j = 0, \dots, m-1$. Hence any element $u \in \mathbb{F}_q G_{n,m,k}$ can be represented as follows:

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} b^i P_j(a), \tag{2}$$

where $P_j$ are polynomials over $\mathbb{F}_q$ of degree less than $n$.

Let $R$ be the set of roots of $x^n - 1$. Note that since $\gcd(n, q) = 1$, it follows that there is no repeated roots. If $\alpha \in R$, then clearly $\alpha^k \in R$. We can define an action of $C_m = \langle h \mid h^m \rangle$ on $R$ as follows: $h^t(\alpha) = \alpha^{k^t}$. Since $|C_m| = m$ is prime, it follows that the orbits of this action are of cardinality 1 or $m$. For every polynomial $f(x)$ of the form $f(x) = (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q$, by $f^{(t)}$ we denote the polynomial $(x - \alpha^{k^t})$. It follows that the polynomial $x^n - 1$ can be split into monic irreducible factors of degree 1 as follows:

$$x^n - 1 = [f_1(x) f_2(x) \dots f_r(x)] \left[ \left( f_{r+1} f_{r+1}^{(2)} \dots f_{r+1}^{(m-1)} \right) \left( f_{r+2} f_{r+2}^{(2)} \dots f_{r+2}^{(m-1)} \right) \dots \left( f_{r+s} f_{r+s}^{(2)} \dots f_{r+s}^{(m-1)} \right) \right], \tag{3}$$

where $f_i(x) = f_i^{(1)}(x)$ for $1 \le i \le r$. By $\alpha_i$ we denote a root of $f_i(x)$.

Theorem 1. *Let $G = G_{n,m,k}$ be a split metacyclic group. Let $m$ be prime and $n$ be a divisor of $(q-1)$; then the following $\mathbb{F}_q$–algebras isomorphism holds:*

$$\Phi : \mathbb{F}_q G \to \bigoplus_{i=1}^{r+s} A_i,$$

*where*

$$A_i = \begin{cases} \mathbb{F}_q \langle h \mid h^m \rangle, & 1 \le i \le r, \\ M_m(\mathbb{F}_q), & r+1 \le i \le r+s. \end{cases}$$

Proof. Define $\mathbb{F}_q$–algebras homomorphisms $\tau_i : \mathbb{F}_q G \to A_j$ on generators of $\mathbb{F}_q G$ as follows:

(i) for $1 \le i \le r$:

$$\tau_i(a) = \alpha_i, \quad \tau_j(b) = h;$$

(ii) for $r+1 \le i \le r+s$:

$$\tau_i(a) = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i^k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i^{k^{m-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_i^{k^{m-1}} \end{pmatrix}, \quad \tau_i(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $\Phi$ be defined as $\Phi = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \tau_i$. Note that $\Phi$ is injective. Indeed, let $u \in \mathbb{F}_q G$ be of the form (2) and $\Phi(u) = 0$; then

$$0 = \tau_i(u) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j(\alpha_i) h^j$$

for $i = 1, \dots, r$, and

$$0 = \tau_i(u) = \begin{pmatrix} P_0(\alpha_i) & P_1(\alpha_i^k) & P_2(\alpha_i^{k^2}) & \dots & P_{m-1}(\alpha_i^{k^{m-1}}) \\ P_{m-1}(\alpha_i) & P_0(\alpha_i^k) & P_1(\alpha_i^{k^2}) & \dots & P_{m-2}(\alpha_i^{k^{m-1}}) \\ P_{m-2}(\alpha_i) & P_{m-1}(\alpha_i^k) & P_0(\alpha_i^{k^2}) & \dots & P_{m-3}(\alpha_i^{k^{m-1}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\alpha_i) & P_2(\alpha_i^k) & P_3(\alpha_i^{k^2}) & \dots & P_0(\alpha_i^{k^{m-1}}) \end{pmatrix}$$

for $i = r+1, \dots, r+s$. So, for $j = 0, \dots, m-1$ and $i = 1, \dots, r+s$ we have

$$P_j(\alpha_i) = P_j(\alpha_i^k) = \dots = P_j(\alpha_i^{k^{m-1}}) = 0.$$

Hence $P_j(x) \mid (x^n - 1)$. And since $\deg(P_j) < n$, it follows that $P_j(x) = 0$ and $u = 0$. We conclude that $\Phi$ is injective.

Finally, we prove that $\Phi$ is surjective. We have $\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q G) = nm$ and

$$\dim_{\mathbb{F}_q}\left(\bigoplus_{i=1}^{r+s} A_i\right) = rm + sm^2 = (r+sm)m = nm.$$

It follows that $\Phi$ is surjective. Therefore, $\Phi$ is an isomorphism.

□

Let $\gcd(mn, q) = 1$, Mashke Theorem implies that $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$ is semisimple and there exists the Wedderburn decomposition. To construct the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q G_{n,m,k}$ we also need the factorization of $x^m - 1$. We have

$$x^m - 1 = g_1(x) g_2(x) \dots g_z(x),$$

where $g_j$ are irreducible over $\mathbb{F}_q$. By $\beta_j$ we denote a root of $g_j(x)$ in some extension of $\mathbb{F}_q$. As is well–known, $\mathbb{F}_q\langle h \mid h^m\rangle \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^m - 1)$ and by Chinese Reminder Theorem we have

$$\mathbb{F}_q\langle h \mid h^m\rangle \simeq \frac{\mathbb{F}_q[x]}{(x^m - 1)} \simeq \bigoplus_{j=1}^{z} \frac{\mathbb{F}_q[x]}{(g_j(x))}.$$

Moreover, since there is no repeated roots, it follows that $\mathbb{F}_q[x]/(g_j(x)) \simeq \mathbb{F}_q[\beta_j]$, where $\mathbb{F}_q[\beta_j]$ is an extension of $\mathbb{F}_q$ by $\beta_j$. Note that the $\mathbb{F}_q$–algebra homomorphism $\omega_m : \mathbb{F}_q\langle h \mid h^m\rangle \to \bigoplus_{j=1}^{z} \mathbb{F}_q[\beta_j]$ defined on generators by

$$\omega_m(h) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

is an isomorhism.

Theorem 2. *Let $G = G_{n,m,k}$ be a split metacyclic group. Let $m$ be prime, $n$ be a divisor of $(q-1)$ and $\gcd(m, q) = 1$; then the Wedderburn decomposition of $\mathbb{F}_q G$ is of the form*

$$\mathcal{W} : \mathbb{F}_q G \to \bigoplus_{i=1}^{r+s} \mathcal{B}_i,$$

*where*

$$\mathcal{B}_i = \begin{cases} \bigoplus_{j=1}^{z} \mathbb{F}_q[\beta_j], & 1 \le i \le r \\ M_m(\mathbb{F}_q), & r+1 \le i \le r+s \end{cases},$$

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{i=1}^{r+s} \mathcal{W}_i, \quad \mathcal{W}_i = \begin{cases} \omega_m \tau_i, & 1 \le i \le r \\ \tau_i, & r+1 \le i, \le r+s \end{cases}.$$

Proof. Follows from theorem 1 and Chinese Reminder Theorem for

$$\mathbb{F}_q\langle h \mid h^m\rangle \simeq \mathbb{F}_q[x]/(x^m - 1).$$

□

## REFERENCES


1. C. Polcino Milies and S. K Sehgal. *An introduction to group rings*. Springer Science & Business Media, 2002.
2. O. Broche and Á. del Río. Wedderburn decomposition of finite group algebras. *Finite Fields and Their Applications*, 13(1):71 – 79, 2007.
3. Y. Gao, Q. Yue, and Y. Wu. Lcd codes and self-orthogonal codes in generalized dihedral group algebras. *Designs, Codes and Cryptography*, Jul 2020.
4. G. K Bakshi, S. Gupta, and I. Bir S Passi. The structure of finite semisimple metacyclic group algebras. *J. Ramanujan Math. Soc*, 28(2):141–158, 2013.
5. F. E. Brochero Martínez. Structure of finite dihedral group algebra. *Finite Fields and Their Applications*, 35:204 – 214, 2015.
6. K. V. Vedenev and V. M. Deundyak. Codes in a dihedral group algebra. *Automatic Control and Computer Sciences*, 53(7):745–754, Dec 2019.
7. K. V. Vedenev and V. M. Deundyak. Relationship between codes and idempotents in a dihedral group algebra. *Mathematical Notes*, 107(1):201–216, Jan 2020.
8. K. V. Vedenev and V. M. Deundyak. The codes in some non-semisimple dihedral group algebras and their properties. *arXiv preprint arXiv:2005.08283*, 2020.
9. K. V. Vedenev and V. M. Deundyak. The structure of finite group algebra of a semidirect product of abelian groups and its applications. *Chebyshevskii Sb.*, 20(3):107–123, 2019.


---

УДК 512.54

# Об определяемости вполне разложимых групп ранга 2 группами автоморфизмов[1]

**В. А. Гайдак (Россия, г. Томск)**
Томский государственный университет
e-mail: gaidakvioletta@gmail.com
**Е. А. Тимошенко (Россия, г. Томск)**
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

# On determinability of completely decomposable groups of rank 2 by their automorphism groups

**V. A. Gaidak (Russia, Tomsk)**
Tomsk State University
e-mail: gaidakvioletta@gmail.com

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных – докторов наук МД-108.2020.1.

**E. A. Timoshenko (Russia, Tomsk)**
Tomsk State University
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Пусть $B \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — некоторый класс абелевых групп. Будем говорить, что $B$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{X}$, если из изоморфизма групп $\operatorname{Aut} B$ и $\operatorname{Aut} B'$, где $B' \in \mathbf{X}$, всегда следует $B \cong B'$.

Далее под $\mathbf{X}$ понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения) ранга 2. Наша работа служит продолжением статьи [1] и развивает некоторые идеи работы [2], посвящённой определяемости групп класса $\mathbf{X}$ их группами автоморфизмов. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга* $n$ называется всякая группа $B$, представимая в виде прямой суммы $n$ групп ранга 1; хорошо известно (см. [3]), что любые два таких разложения группы $B$ будут изоморфны.

В статье [2] были получены необходимые и достаточные условия существования изоморфизма $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ для случая 2-делимых групп $B, B' \in \mathbf{X}$. В настоящей работе аналогичная задача решена уже для произвольных групп класса $\mathbf{X}$.

Для коммутативного кольца с единицей $R$ через $GL_2(R)$ обозначается группа обратимых $(2 \times 2)$-матриц с элементами из $R$; эта группа состоит из тех матриц, определители которых суть обратимые элементы кольца $R$. Множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$, элементами которого служат матрицы с определителем $\pm 1$, очевидно, является подгруппой в $GL_2(R)$. Можно также показать, что $ML_2(R)$ — это подгруппа группы $GL_2(R)$, порождённая всеми принадлежащими $GL_2(R)$ инволюциями.

Опираясь на результаты статьи [1], можно доказать следующую основную теорему.

Теорема 1. *Для подколец $R$ и $S$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ эквивалентны условия*:
1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$.
2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$.
3) $R = S$.

Для группы $Y$ ранга 1 через $\mathbf{t}(Y)$ обозначаем тип этой группы; подробнее о типах см. [3]. Будем называть группу $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$, где $Y$ и $Z$ — группы без кручения ранга 1,
— *диагональной*, если типы $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ несравнимы;
— *треугольной*, если один из типов $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ строго меньше другого;
— *однородной*, если $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$.

Предложение 1 ([2]). *Если для групп $B, B' \in \mathbf{X}$ выполнено $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ и $B$ — диагональная (треугольная, однородная) группа, то $B'$ — тоже диагональная (соответственно треугольная, однородная) группа.*

С учётом предложения 1 достаточно рассмотреть вопрос о необходимых и достаточных условиях изоморфизма $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ по отдельности для диагональных, для треугольных и для однородных групп из класса $\mathbf{X}$.

В следующем предложении через $\mathbb{P}_\infty(Y)$ обозначается множество всех простых чисел $p$, для которых группа $Y$ является $p$-делимой.

Предложение 2 ([4]). *Для диагональных групп $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ из класса $\mathbf{X}$ эквивалентны условия*:
1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.
2) $|\mathbb{P}_\infty(Y)| + |\mathbb{P}_\infty(Z)| = |\mathbb{P}_\infty(Y')| + |\mathbb{P}_\infty(Z')|$.

Предложение 3. *Пусть $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ — треугольные группы из класса $\mathbf{X}$, причём $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$ и $\mathbf{t}(Y') > \mathbf{t}(Z')$. Следующие условия эквивалентны*:
1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.
2) $\operatorname{Hom}(Z, Y) \cong \operatorname{Hom}(Z', Y')$ *и* $\operatorname{Aut} Z \cong \operatorname{Aut} Z'$.

Теорема 2. *Для однородных групп $B = Y \oplus Y$ и $B' = Z \oplus Z$ из класса* $\mathbf{X}$ *эквивалентны условия*:

1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.

2) *Группы $Y$ и $Z$ имеют изоморфные кольца эндоморфизмов.*

Группа $Y$ называется *почти делимой*, если множество $\mathbb{P}_\infty(Y)$ содержит почти все простые числа. Предложения 2 и 3 и теорема 2 позволяют в явном виде указать те группы класса $\mathbf{X}$, которые определяются своей группой автоморфизмов в этом классе:

Теорема 3. *Группа $B \in \mathbf{X}$ определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{X}$ *тогда и только тогда, когда $B \cong Y \oplus Y$, где $Y$ — почти делимая группа ранга* 1.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайдак В. А., Тимошенко Е. А. Инволюции полной линейной группы $GL_2$ над подкольцом поля $\mathbb{Q}$ // Вестн. Томского государственного ун-та. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19-26.

2. Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174-177.

3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977. 416 с.

4. Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы её группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Нижний Новгород, 2014. 73 с.

---

УДК 512.552.4

# О 5-энгелевой ассоциативной алгебре, чья группа единиц не является 5-энгелевой

**Г. С. Дерябина (Россия, г. Москва)**
Кафедра вычислительной математики и математической физики МГТУ им. Баумана
e-mail: galina_deryabina@mail.ru
**А. Н. Красильников (Бразилия, г. Бразилиа)**
Департамент математики Университета Бразилиа
e-mail: alexei@unb.br

# On a 5-Engel associative algebra whose group of units is not 5-Engel

**G. S. Deryabina (Russia, Moscow)**
Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University
e-mail: galina_deryabina@mail.ru
**A. Krasilnikov (Brazil, Brasilia)**
Department of Mathematics, University of Brasilia
e-mail: alexei@unb.br

Доклад основан на работе [1].

Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей, $[R]$ — ассоциированное кольцо Ли (с умножением $[a,b]=ab-ba$), а $U(R)$ — группа единиц кольца $R$. Известно, что если $[R]$ — нильпотентное кольцо Ли класса $c$, то $U(R)$ — нильпотентная группа класса не выше $c$ (Н.Д. Гупта и Ф. Левин [2]), а если $[R]$ — метабелево кольцо Ли, то $U(R)$ — метабелева группа (А.Н. Красильников [3] и Р.К. Шарма и Дж.Б. Сривастава [4]).

С другой стороны, если $R$ — такое ассоциативное кольцо, что кольцо Ли $[R]$ центрально-метабелево, то группа $U(R)$, вообще говоря, не обязана быть центрально-метабелевой. Например, если $F$ — бесконечное поле характеристики 2 и $R=M_2(F)$ — алгебра всех $2\times 2$ матриц над $F$, то, как хорошо известно, кольцо Ли $[R]$ центрально-метабелево, тогда как группа $U(R)$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству и, в частности, $U(R)$ не является центрально-метабелевой.

Однако в некоторых важных частных случаях из того, что кольцо Ли $[R]$ центрально-метабелево, следует, что группа $U(R)$ центрально-метабелева. Действительно пусть $R$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем характеристики 0, порожденная (как алгебра с единицей) своими нильпотентными элементами. Тогда если $[R]$ — центрально-метабелево кольцо Ли, то $U(R)$ — центрально-метабелева группа (А.Н. Красильников и Д.М. Райли [5]). Более того, для такой алгебры $R$, порожденной своими нильпотентными элементами, если кольцо Ли $[R]$ удовлетворяет произвольному полилинейному коммутаторному тождеству, то группа $U(R)$ удовлетворяет соответствующему групповому коммутаторному тождеству (точные определения см. в [5] ); например, если $[R]$ разрешимо ступени $n$ то $U(R)$ тоже разрешима ступени не более $n$.

Возникает естественный вопрос: верно ли аналогичное утверждение для коммутаторных тождеств, не являющихся полилинейными; в частности, верно ли оно для тождества Энгеля? Мы покажем, что для тождества Энгеля такое утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть $[x,y]=[x,_{(1)}y]=xy-yx$, $[x,_{(k+1)}y]=[[x,_{(k)}y],y]$, где $k\geqslant 1$. Напомним, что кольцо Ли $L$ является $n$-энгелевым, если $[u,_{(n)}v]=0$ для всех $u,v\in L$. Аналогично, группа $G$ $n$-энгелева, если $(u,_{(n)}v)=1$ для всех $u,v\in G$, где $(x,y)=(x,_{(1)}y)=x^{-1}y^{-1}xy$ и $(x,_{(k+1)}y)=((x,_{(k)}y),y)$ для $k\geqslant 1$. Мы рассматриваем следующий вопрос.

**Вопрос.** *Пусть $F$ — поле характеристики 0, а $R$ — ассоциативная $F$-алгебра с единицей. Предположим, что алгебра Ли $[R]$ $n$-энгелева. Будет ли группа $U(R)$ также $n$-энгелевой?*

Если $n=2$ то ответ на данный вопрос положительный. Действительно, хорошо известно, что если $[R]$ 2-энгелева и $charF\neq 3$, то $[R]$ нильпотентна класса 2. Следовательно, в силу [2], группа $U(R)$ нильпотентна класса не выше 2 и потому 2-энгелева. Если $n=3$ и алгебра $R$ порождена (как алгебра с единицей) своими нильпотентными элементами, то ответ также положительный; это следует из результатов, приведенных в [6].

Однако в общем случае ответ на приведенный выше вопрос отрицательный. Нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $F$ — поле характеристики $\neq 2,3$. Существует ассоциативная $F$-алгебра с единицей $R$ такая, что алгебра Ли $[R]$ 5-энгелева, но группа $U(R)$ не является 5-энгелевой. Эта алгебра $R$ порождена (как $F$-алгебра с единицей) 2 нильпотентными элементами.*

Отметим, что если $R$ — ассоциативное кольцо с единицей и кольцо Ли $[R]$ $n$-энгелево то $U(R)$ $m$-энгелево для некоторого $m=m(n)$ (Д.М. Райли и М.С. Вильсон [7] и независимо Б. Амберг и Я.П. Сысак[6]). Если $R$ — поле характеристики 0 то существование такого $m=m(n)$ следует также из результатов Е.И. Зельманова [8] и Н.Д. Гупты и Ф. Левина [2].

Можно проверить, что в нашем примере из Теоремы 1 группа $U(R)$ является 6-энгелевой (и нильпотентной класса 7).

Теорема 1 получена как следствие приведенного ниже результата о присоединенных группах ассоциативных алгебр.

Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей или без единицы. Легко проверить, что $R$ с *присоединенным умножением,* определенным по формуле $u \circ v = u+v+uv$ $(u, v \in R)$, является моноидом. Группа единиц этого моноида называется *присоединенной группой* $R^\circ$ кольца $R$. Хорошо известно, что если кольцо $R$ нильпотентно, то есть если $R^n = \{0\}$ для некоторого целого положительного $n$, то $R^\circ = R$. С другой стороны, если $R$ — кольцо с единицей 1, то $R^\circ$ изоморфна группе единиц $U(R)$ кольца $R$ (отображение $R^\circ \to R$ такое, что $a \to 1+a$ является изоморфизмом $R^\circ$ на $U(R)$).

Пусть $F$ — поле, $A$ — свободная ассоциативная $F$-алгебра без единицы со свободными порождающими $x, y$. Пусть $m(x,y), n(x,y) \in A$ – (некоммутативные) одночлены от $x, y$. Если $n(x,y) = m_1(x,y)m(x,y)m_2(x,y)$ для некоторых одночленов $m_1(x,y), m_2(x,y) \in A \cup \{1\}$, мы говорим, что $m(x,y)$ *делит* одночлен $n(x,y)$, а $n(x,y)$ является *кратным* одночлена $m(x,y)$.

Пусть $I$ — двусторонний идеал в $A$, порожденный следующими элементами:

i) всеми одночленами степени 8;

ii) всеми одночленами степени больше, чем 2 по $x$;

iii) всеми одночленами степени 7 кроме $yxy^3xy$ и $y^2xyxy^2$;

iv) всеми одночленами степени меньше, чем 7 которые не делят одночлены $yxy^3xy$ и $y^2xyxy^2$;

v) многочленом $2xy^3xy - 5yxyxy^2 - 2yxy^3x + 5y^2xyxy$;

vi) многочленом $2yxy^3xy - 5y^2xyxy^2$.

Пусть $B = A/I$. Легко проверить, что $B^8 = 0$. Таким образом, ассоциативная алгебра $B$ нильпотентна и потому $B^\circ = B$.

Теорема 2. *Пусть $F$ — поле характеристики $\neq 2, 3$. Пусть $A$ — свободная ассоциативная $F$-алгебра без единицы, свободно порожденная элементами $x, y$, и пусть $I$ — двусторонний идеал алгебры $A$, порожденный описанными выше многочленами i)–vi). Пусть $B = A/I$. Тогда алгебра Ли $[B]$ 5-энгелева, но присоединенная группа $B^\circ$ не является 5-энгелевой.*

Для того, чтобы вывести Теорему 1 из Теоремы 2, нужно присоединить единицу к $F$-алгебре $B$. Пусть $B_1 = F \oplus B$ — прямая сумма двух векторных пространств над $F$, одномерного пространства $F$ и $B$. Тогда $B_1$ имеет естественную структуру ассоциативной алгебры, где элементы поля $F$ действуют на $B$ скалярными умножениями. Далее, элемент 1 первого слагаемого $F$ — единица в $B_1$, а множество $(1+B)$ образует группу по умножению, изоморфную присоединенной группе $B^\circ$, так как отображение $B^\circ \to B_1$ такое, что $u \to 1+u$, является изоморфизмом $B^\circ$ на $(1+B)$.

Легко проверить, что так как $[B]$ 5-энгелева, алгебра Ли $[B_1]$ также 5-энгелева. С другой стороны, так как $B^\circ$ не является 5-энгелевой, то подгруппа $(1+B) \simeq B^\circ$ группы $U(B_1)$, а с ней и сама группа $U(B_1)$, также не являются 5-энгелевыми. Таким образом, выполняется

Следствие 1. *Пусть $F$ — поле характеристики $\neq 2, 3$, а $B_1$ — алгебра, полученная из $B$ присоединением единицы. Тогда алгебра Ли $[B_1]$ 5-энгелева, но группа $U(B_1)$ не является 5-энгелевой.*

Теорема 1 сразу вытекает из Следствия 1 (при $R = B_1$).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Deryabina G., Krasilnikov A. A 5-Engel associative algebra whose group of units is not 5-Engel // J. Algebra. 2019. V. 519. P. 101–110.
2. Gupta N. D., Levin F. On the Lie ideals of a ring // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 225–231.
3. Красильников А. Н. О группе единиц кольца, присоединенное кольцо Ли которого метабелево // Успехи матем. наук. 1992. Том 47. №6 (288). С. 217–218.
4. Sharma R. K., Srivastava J. B. Lie centrally metabelian group rings // J. Algebra. 1992. V. 151. P. 476–486.
5. Krasilnikov A. N., Riley D. M. The transfer of a commutator identity in a nil-generated algebra // Internat. J. Algebra Comput. 2002. V. 12. P. 437–443.
6. Amberg, B., Sysak Ya. P. Radical rings with Engel conditions // J. Algebra. 2000. V. 231. P. 364–373.
7. Riley D. M., Wilson M. C. Associative rings satisfying the Engel condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 973–976.
8. Зельманов Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли // Докл. АН СССР. 1987. Том 292. №2. С. 265–268.


---

УДК 512.556

# Двойственность топологических пространств формальных сумм

**Н. И. Дубровин (Россия, г. Владимир)**
Владимирский государственный университет
e-mail: ndubrovin@rambler.ru

# Duality of topological spaces of formal sums

**N.I. Dubrovin (Russia, Vladimir)**
Vladimir State University
e-mail: ndubrovin@rambler.ru

Пусть $F$ – поле, $G$ – группа с конусом $P$, $U$ – группа обратимых элементов конуса $P$ и $K$ – какое-либо тело частных группового кольца $FU$. Определение и свойства конусов в группе см. в [1]. Обозначим $\Gamma_l$ систему представителей левых смежных классов $gU$ $(g \in G)$ а через $L$ обозначим $FG - F$-бимодуль формальных рядов (далее: L-рядов) вида

$$\alpha = \sum_{g \in \Gamma_L} g\alpha_g; \quad (\alpha_g \in K) \tag{1}$$

с вполне упорядоченным по возрастанию носителем $\operatorname{supp}\alpha := \{g \in \Gamma_l \mid \alpha_g \neq 0\}$ относительно левого порядка

$$g_1 < g_2 \;\Leftrightarrow\; g_1^{-1}g_2 \in J(P) = P \setminus U \;\Leftrightarrow\; g_2P \subset g_1P.$$

Обозначим $v_l(\alpha) = \min \operatorname{supp} \alpha$ – норму L-ряда $\alpha$ (минимум берется относительно левого порядка).

Симметрично, обозначим $\Gamma_r$ систему представителей правых смежных классов $Ug$ ($g \in G$), а посредством $R$ будем обозначать $F - FG$-бимодуль формальных рядов вида

$$\mathbf{a} = \sum_{h \in \Gamma_R} a^h h; \quad (a^h \in K) \tag{2}$$

с вполне упорядоченным по возрастанию носителем относительно правого порядка

$$h_1 <_r h_2 \;\Leftrightarrow\; h_2 h_1^{-1} \in J(P) \;\Leftrightarrow\; Ph_2 \subset Ph_1.$$

Посредством $v_r(\mathbf{a})$ обозначаем минимум носителя R-ряда $\mathbf{a}$ относительно правого порядка (норма R-ряда $\mathbf{a}$).

Правое линейное $K$-пространство $L$ наделим линейной топологией, беря подпространства $W_\Delta = \{\alpha \in L \mid \operatorname{supp}\alpha \cap \Delta = \emptyset\}$ в качестве окрестностей нуля. Здесь $\Delta$ пробегает вполне упорядоченные по убыванию подмножества л.у. множества $\Gamma_l$. Тело $K$ считаем наделенным дискретной топологией. Относительно линейной топологии (далее: L-топологии) пространство $L$ становится полным хаусдорфовым линейным пространством, в котором подпространство $[G]K$ L-рядов с конечными носителями образует плотное подмножество. Аналогично, на левом линейном $K$-пространстве $R$ вводим *R-топологию*. Более подробно об этом см. в статье [3].

Обозначим посредством $Q_l$ кольцо всех непрерывных линейных операторов $L \mapsto L$, а $Q_r$ – кольцо непрерывных линейных операторов $R \mapsto R$. Умножение формальных рядов (1) слева на элементы групповой алгебры $FG$ позволяет рассматривать последнюю как $F$-подалгебру алгебры $Q_l$. Аналогично, ту же самую групповую алгебру $FG$ считаем подалгеброй в $Q_r$. В алгебре $Q_l$ выделим подкольцо $D_l$ – рациональное замыкание групповой алгебры $FG$; а алгебре $Q_r$ выделим $D_r$ – рациональное замыкание $FG$. Образ L-ряда $\alpha$ под действием оператора $d \in Q_l$ обозначаем так: $d[\alpha]$. Образ R-ряда $\mathbf{a}$ под действием оператора $q \in Q_r$ обозначаем посредством $[\mathbf{a}]q$.

Далее будем считать системы $\Gamma_L$ и $\Gamma_R$ согласованными, что означает равенство $\Gamma_l^{-1} = \Gamma_r$. Кроме того, считаем, что $1 \in \Gamma_r$, а значит, и $1 \in \Gamma_l$. Для формальных рядов $\mathbf{a} \in R$ и $\alpha \in L$ определим спаривание

$$\langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle = \sum_{g \in \Gamma_l} a^{g^{-1}} \cdot \alpha_g = \sum_{h \in \Gamma_r} a^h \cdot \alpha_{h^{-1}}. \tag{3}$$

Сумма в (3) конечна, тем самым это определение корректно. Спаривание билинейно и, кроме того, справедливо

Утверждение 1. *Пусть $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ – система L-рядов такая, что для любого элемента $h \in \Gamma_L$ найдется индекс $i = i(h)$ с условием $v(\alpha_i) = h$. Предположим, что для R-ряда $\mathbf{a}$ верно равенство $\langle \mathbf{a} \mid \alpha_i \rangle = 0$ для любого индекса $i \in I$. Тогда $\mathbf{a} = 0$.*

Если $M$ – подмножество в пространстве $L$, то через $M^\top$ обозначим множество всех R-рядов $\mathbf{a}$ таких, что $\langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle = 0$ для любого L-ряда $\alpha \in M$. Ясно, что $M^\top$ – подпространство в $R$ и чем больше $M$, тем меньше $M^\top$.

Утверждение 2. *Пусть L-ряд $\alpha$ фиксирован. Тогда множество $\{\alpha\}^\top$ содержит стандартную окрестность нуля $\left\{\mathbf{a} \in R \mid \operatorname{supp} \mathbf{a} \cap (\operatorname{supp} \alpha)^{-1} = \emptyset\right\}$ пространства $R$. Аналогично, для фиксированного R-ряда $\mathbf{a}$ пространство $\{\mathbf{a}\}^\top$ содержит стандартную окрестность нуля $\left\{\alpha \in L \mid \operatorname{supp} \mathbf{a} \cap (\operatorname{supp} \alpha)^{-1} = \emptyset\right\}$ пространства $L$.*

Предложение 1. *Подпространство $M^\top$ замкнуто в R-топологии.*

Аналогично, для подмножества $N$ пространства $R$ обозначим через $N^{\perp}$ множество всех L-рядов $\alpha$ таких, что $\langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle = 0$ для любого R-ряда $\mathbf{a} \in N$. Как и выше утверждаем, что $N^{\top}$ – замкнутое подпространство пространства $L$.

Предложение 2. *Фиксируем $R$-ряд $\mathbf{a}$. Линейный функционал $\rho_{\mathbf{a}} : L \to K$ такой, что $\rho_{\mathbf{a}}(\alpha) = \langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle$ непрерывен, т.е. для любого подмножества $X \subseteq K$ прообраз $\{\alpha \in L \mid \langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle \in X\}$ открыт в пространстве $L$. Справедливо дуальное свойство для функционала $\rho_\alpha : R \mapsto R$ такого, что $\rho_\alpha(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a} \mid \alpha \rangle$* (здесь $\alpha$ – фиксированный L-ряд).

Сумму бесконечного семейства L-рядов в L-топологии будем обозначать $\sum_i^L \alpha_i$. Эта сумма существует в том и только том случае когда 1) для любого $g \in \Gamma_l$ лишь конечное число L-рядов $\alpha_i$ содержат $g$ в своем носителе, и 2) объединение $\bigcup_{i \in I} \operatorname{supp} \alpha_i$ вполне упорядочено по возрастанию. В силу непрерывности функционала $\rho_{\mathbf{a}}$ получаем

Предложение 3. *Если семейство $L$-рядов $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ суммируемо, то имеет место равенство*

$$\left\langle \mathbf{a} \mid \sum_{i \in I}{}^{L} \alpha_i \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle \mathbf{a} \mid \alpha_i \rangle$$

*для любого $R$-ряда $\mathbf{a}$. В частности, сумма в правой части содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.*

Теорема 1. *Пусть $L_0$ – подпространство пространства $L$. Тогда $L_0^{\top\top}$ – замыкание подпространства $L_0$ в $L$-топологии. Аналогично, если $R_0$ – подпространство пространства $R$, то $R_0^{\top\top}$ – замыкание $R_0$ в $R$-топологии.*

Утверждение 3. *Пусть $\left\{\mathbf{a}^{(j)} \mid j \in J\right\}$ – семейство финитных $\mathbb{N}$-строк, где $(J, \leqslant)$ – направленное множество, такое, что для любого $\mathbb{N}$-столбца $\alpha \in {}^{\infty}K$ найдется индекс $j(\alpha)$, что для любого $j \geqslant j(\alpha)$ верно равенство $\mathbf{a}^{(j)} \cdot \alpha = 0$.*

*Предположим, что множество $J$ содержит счетное кофинальное подмножество. Тогда существует индекс $j_0$ начиная с которого ($\forall\, j \geqslant j_0$) все строки $\mathbf{a}^{(j)}$ нулевые.*

Заметим, что заключение следствия верно и в предположении, что любое счетное подмножество в $J$ имеет верхнюю грань.

Задача 2. *Рассмотрим множество индексов $J$ как все вполне упорядоченные подмножества рациональной прямой, а порядок задается включением. Пусть тело $K$ – поле из двух элементов. Каждому $j \in J$ сопоставлена финитная $\mathbb{N}$-строка $\mathbf{a}^{(j)}$ из нулей и единиц, причем для любого $\mathbb{N}$-столбца $\alpha \in {}^{\infty}K$ найдется индекс $j(\alpha) \in J$, что для любого $j \geqslant j(\alpha)$ верно равенство $\mathbf{a}^{(j)} \cdot \alpha = 0$. Верно ли, что начиная с некоторого индекса все строки нулевые?*

Определим теперь сопряженный оператор $d^* \colon R \to R$ непрерывного линейного оператора $d \colon L \to L$. Пусть R-ряд $\mathbf{a}$ произволен. Образ $[\mathbf{a}]d^*$ по определению такой R-ряд, что

$$\langle [\mathbf{a}]d^* \mid \alpha \rangle = \langle \mathbf{a} \mid d[\alpha] \rangle \tag{4}$$

для любого $\alpha \in L$. Докажем, что (4) – корректное определение. Пусть $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ – два R-ряда такие, что

$$\langle \mathbf{b}_i \mid \alpha \rangle = \langle \mathbf{a} \mid d[\alpha] \rangle \quad (i = 1, 2)$$

для любого L-ряда $\alpha$. Тогда $\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \mid \alpha \rangle = 0$ для любого $\alpha \in L$. В виду свойства 1 получаем равенство $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. Единственность доказана. Существование следует из вычисления коэффициента ряда $\mathbf{b} := [\mathbf{a}]d^*$ при $h \in \Gamma_r$. А именно, $\langle \mathbf{b} \mid h^{-1} \rangle = \langle \mathbf{a} \mid d[h^{-1}] \rangle$. Получаем R-ряд.

Аналогично определяется сопряженный оператор $q^*\colon L \to L$ непрерывного линейного оператора $q : R \to R$, который будет непрерывным и будет удовлетворять условию

$$\langle \mathbf{a} \mid q^*[\alpha]\rangle = \langle [\mathbf{a}]q \mid \alpha\rangle$$

для любых $\mathbf{a} \in R$, $\alpha \in L$.

В алгебрах $Q_l$, $Q_r$ непрерывных операторов определим слабую топологию. Скажем, что обобщенная последовательность $\{d_i \mid i \in I\}$ операторов из $Q_l$ по направленному множеству $I$ (слабо) сходится к оператору $d \in Q_l$, если $d_i[\alpha] \to d[\alpha]$ для любого L-ряда $\alpha$ относительно L-топологии. В свою очередь это значит, что для любого R-ряда $\mathbf{a}$ найдется индекс $i(\mathbf{a})$ такой, что для любого индекса $i \geqslant i(\mathbf{a})$ L-ряд $d_i[\alpha]$ совпадает с L-рядом $d[\alpha]$ на множестве $(\mathrm{supp}\mathbf{a})^{-1}$.

Слабую топологию можно определить и на пространстве $L$. А именно, скажем, что направленность $\left\{\alpha^{(i)} \mid i \in I\right\}$ слабо сходится к L-ряду $\alpha$, если для любого $R$-ряда $\mathbf{a}$ имеет место равенство $\langle \mathbf{a} \mid \alpha^{(i)}\rangle = \langle \mathbf{a} \mid \alpha\rangle$ начиная с некоторого индекса $i(\mathbf{a})$. Слабая топология все же сильнее тихоновской (в тихоновской топологии вполне упорядоченная по убыванию последовательность $g_1 > g_2 > \cdots$ сходится к нулю, а в слабой топологии она расходится). С другой стороны, в силу непрерывности операторов $\rho_{\mathbf{a}}$, слабая топология не сильнее L-топологии.

Задача 3. *Эквивалентна ли слабая топология L-топологии?*

Все зависит от решения вопроса 2. Если ответ на вопрос 3 (а, значит, и на вопрос 2) положителен, то верно следующее:

Утверждение 4. *Семейство $R$-рядов $\left\{\mathbf{a}^{(i)} \mid i \in I\right\}$ сходится к $R$-ряду $\mathbf{a}$ по направленному множеству индексов $I$ в том и только том случае, когда для любого $L$-ряда $\alpha$ найдется индекс $i(\alpha)$ такой, что для любого индекса $i \geqslant i(\alpha)$ верно равенство $\langle \mathbf{a}^{(i)} \mid \alpha\rangle = \langle \mathbf{a} \mid \alpha\rangle$.*

Заметим, что утверждение "только в том случае" следует из непрерывности функционала $\rho_\alpha$.

В пространствах операторов $Q_l$, $Q_r$ можно определить и поточечную топологию. Скажем, что обобщенная последовательность $\{d_i \mid i \in I\}$ операторов из $Q_l$ по направленному множеству $I$ поточечно сходится к оператору $d \in Q_l$, если $d_i[\alpha] \to d[\alpha]$ в слабой топологии.

Теорема 2. *Отображение $d \to d^*$ – поточечный топологический изоморфизм кольца $Q_l$ на кольцо $Q_r$, обратным к которому является отображение $q \to q^*$.*

Задача 4. *Будет ли отображение $d \to d^*$ слабым изоморфизмом?*

Предложение 4. *Отображение $d \to d^*$ переводит рациональный оператор в рациональный оператор.*

Доказательство – индукция по сложности рационального оператора (см. [2]).

Относительно рационального замыкания и понятия сложности рационального оператора отсылаем к статье [2].

Для $\mathbf{a} \in R$, $\beta \in L$ определим одноранговый оператор $\beta \circ \mathbf{a} : L \to L$ который действует следующим образом:

$$\beta \circ \mathbf{a}[\alpha] = \beta \cdot \langle \mathbf{a} \mid \alpha\rangle.$$

Обозначим $Q_l^f$ – всевозможные конечные суммы одноранговых операторов.

Предложение 5. *$Q_l^f$ – плотное подкольцо кольца $Q_l$ в слабой топологии. Оператор $d \in Q_l$ принадлежит кольцу $Q_l^f$ тогда и только тогда, когда образ $d[L]$ конечномерен над телом $K$.*

Теорема 3. *Кольцо $D_l$ плотно в $Q_l$ в слабой топологии.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Дубровина Т. В., Дубровин Н. И. Конусы в группах.// Мат.сборник, 1996, Том 187, № 7. С. 59-74.

2. Dubrovin N. I., Gräter J, Hanke T. Complexity of elements in rings.// Algebras and Representation Theory. 2003. V 6. P. 33-45.

3. Дубровин Н.И. Рациональные операторы пространства формальных рядов// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Том 12, № 3. С. 9-53.


---

УДК 512.541

# О факторно делимых группах ранга 2

**М. Н. Зонов (Россия, г. Томск)**
Томский государственный университет
e-mail: mnzonov@gmail.com
**Е. А. Тимошенко (Россия, г. Томск)**
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

# On rank-2 quotient divisible groups

**M. N. Zonov (Russia, Tomsk)**
Tomsk State University
e-mail: mnzonov@gmail.com
**E. A. Timoshenko (Russia, Tomsk)**
Tomsk State University
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Все встречающиеся в работе группы являются абелевыми.

Пусть $n$ – неотрицательное целое число. Группа $G$ называется *факторно делимой группой ранга* $n$, если её периодическая часть $T(G)$ редуцированна и существует свободная подгруппа $F \subset G$ ранга $n$ такая, что $G/F$ – делимая периодическая группа. Факторно делимые группы без кручения были введены Бьюмонтом и Пирсом [1]; приведённое нами более общее определение дано Фоминым и Уиклессом в [2].

Факторно делимые группы ранга 1 были описаны Давыдовой в [3]. Из их описания, в частности, следует, что группа без кручения ранга 1 является факторно делимой тогда и только тогда, когда она имеет идемпотентный тип.

Развивая идеи из [4, 5], будем рассматривать факторно делимые группы ранга 2 как расслоённые произведения факторно делимых групп ранга 1. Нас интересуют коуниверсальные квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & T \end{array} \qquad (\alpha \text{ и } \beta \text{ – эпиморфизмы}). \tag{1}$$

Напомним, что для такого квадрата выполнено $G \cong \big\{(a,b) \in A \oplus B \mid \alpha(a) = \beta(b)\big\}$.

Тип группы без кручения $H$ ранга 1 обозначаем через $\mathbf{t}(H)$.

Теорема 1. *Пусть $G$ – группа без кручения ранга 2. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$G$ – факторно делимая группа.*

2) *Существует коуниверсальный квадрат (1), в котором $A$ и $B$ – факторно делимые группы без кручения ранга 1 и тип $\mathbf{t}(\ker\alpha)\wedge\mathbf{t}(\ker\beta)$ идемпотентен.*

3) *Существует коуниверсальный квадрат (1), в котором $A$ и $B$ – факторно делимые группы без кручения ранга 1, группа $T$ делима и тип $\mathbf{t}(\ker\alpha)\wedge\mathbf{t}(\ker\beta)$ идемпотентен.*

4) *Если в коуниверсальном квадрате (1) $A$ и $B$ – группы без кручения ранга 1, то группы $A$ и $B$ факторно делимы и тип $\mathbf{t}(\ker\alpha)\wedge\mathbf{t}(\ker\beta)$ идемпотентен.*

(Эквивалентность условий 1), 2) и 4) из теоремы 1 фактически установлена в [5], но на другом языке.)

Следующий пример показывает, что для смешанных факторно делимых групп ранга 2 подобное представление возможно уже не всегда.

Пример 2. *Зададим кольцо $K$ равенством*

$$K=\prod_{p\in L}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

*где $L$ – множество всех простых чисел вида $4k+1$. Обозначим через $b$ какой-нибудь из элементов кольца $K$ со свойством $b^2=-1$ и рассмотрим подкольцо $G$ кольца $K$, состоящее из всех элементов $g\in K$ таких, что $ng\in\langle 1,b\rangle$ для некоторого целого $n\neq 0$.*

*Тогда аддитивная группа кольца $G$ есть факторно делимая группа ранга 2, для которой не существует коуниверсального квадрата вида (1) такого, что $A$ и $B$ – факторно делимые группы ранга 1.*

Пусть $p$ – простое число. Факторно делимую группу $G$ будем называть *$p$-минимальной*, если для некоторой её свободной подгруппы $F$ выполнено $G/F\cong\mathbb{Z}(p^\infty)$; в статье [6] изучались $p$-минимальные факторно делимые группы без кручения.

Через $\mathbb{Q}^{(p)}$ обозначим подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порождённое элементом $p^{-1}$. Пусть $\eta$ – некоторый элемент мультипликативной группы $U(J_p)$ кольца целых $p$-адических чисел $J_p$. Зададим группу $H_\eta$ с помощью коуниверсального квадрата

$$\begin{array}{ccc} H_\eta & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{(p)} \\ \downarrow & & \downarrow\beta \\ \mathbb{Q}^{(p)} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z} \end{array}$$

такого, что $\beta(x)=x+\mathbb{Z}$ и $\alpha(x)=\eta\cdot(x+\mathbb{Z})$ для всякого элемента $x\in\mathbb{Q}^{(p)}$. Эта группа является $p$-минимальной факторно делимой группой без кручения ранга 2. Верно и обратное утверждение: всякая $p$-минимальная факторно делимая группа без кручения ранга 2 изоморфна группе $H_\eta$ для некоторого $\eta\in U(J_p)$. Для таких групп были получены следующие результаты:

Предложение 1. *Пусть $\eta\in U(J_p)$.*

a) *Если $\eta$ – рациональное число, то $H_\eta\cong\mathbb{Q}^{(p)}\oplus\mathbb{Z}$.*

b) *Если число $\eta$ не является рациональным, то $H_\eta$ – неразложимая группа, в которой все подгруппы ранга 1 свободны.*

Теорема 2. *Пусть $\eta,\zeta\in U(J_p)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$H_\eta\cong H_\zeta$.*

2) *Существуют числа $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ такие, что $ad-bc\in U(\mathbb{Q}^{(p)})$ и $\zeta=\frac{c+d\eta}{a+b\eta}$.*

Напомним, что кольцо $R$ называется *$E$-кольцом* [7], если всякий эндоморфизм его аддитивной группы представляет собой умножение слева на некоторый элемент кольца $R$.

Из результатов работ [1, 8] следует, что аддитивная группа $E$-кольца без кручения конечного ранга является факторно делимой. При этом оставался открытым вопрос о том, справедливо ли аналогичное утверждение для $E$-кольца, аддитивная группа которого является смешанной и имеет конечный ранг без кручения. Ниже приводится пример $E$-кольца, аддитивная группа которого не является факторно делимой и имеет ранг без кручения 2.

Пример 3. *Пусть $P$ – множество всех простых чисел и $L$ – его бесконечное подмножество такое, что множество $P \setminus L$ тоже бесконечно. Зададим кольцо $K$ равенством*

$$K = \prod_{p \in L} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$$

*и обозначим через $b$ элемент кольца $K$, у которого $p$-я координата равна $p + p^2\mathbb{Z}$ для всякого $p \in L$.*

*Через $\mathbb{Q}^{(L)}$ обозначим подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порождённое элементами $p^{-1}$, где $p \in L$; через $X$ – некоторую группу неидемпотентного типа такую, что $\mathbb{Q}^{(L)} \subset X \subset \mathbb{Q}$. Подкольцо $S$ делимого кольца без кручения $K/T(K)$ определим равенством*

$$S = \mathbb{Q}^{(L)} \cdot (1 + T(K)) \oplus X \cdot (b + T(K)).$$

*Наконец, обозначим через $R$ то подкольцо кольца $K$, для которого $S = R/T(K)$.*

*Тогда $R$ – $E$-кольцо, аддитивная группа которого не является факторно делимой.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, No. 1. P. 61-98.

2. Fomin A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, No. 1. P. 45-52.

3. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундам. и прикл. математика. 2007. Том 13, № 3. С. 25-33.

4. Beaumont R. A., Wisner R. J. Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two // Acta Sci. Math. Szeged. 1959. Vol. 20, No. 2-3. P. 105-116.

5. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free groups of rank two // Memoirs Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 38. P. 1-41.

6. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Мат. заметки. 1984. Том 36, № 2. С. 179-187.

7. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15, No. 1. P. 60-69.

8. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, No. 3. P. 197-214.

УДК 512.541

# Кольца на сильно неразложимых группах Мерли

**Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)**
Финансовый университут при Правительстве Российской Федерации, Московский государственный педагогический университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

# Rings on strongly indecomposable Murley groups

**E. I. Kompantseva (Russia, Moscow)**
Financial University under Government of the Russian Federation, Moscow State Pedagogical University
e-mail: kompantseva@yandex.ru

Умножением на абелевой группе $G$ называется гомоморфизм $\mu : G \times G \to G$. Группа $G$ с заданным на ней умножением определяет некоторое кольцо, называемое кольцом на группе $G$. Вообще говоря, на любой абелевой группе $G$ можно определить нулевое умножение $\mu : G \otimes G \to 0$, полученное кольцо называется нуль-кольцом. Абелевы группы, на которых не существует других умножений, кроме нулевого, называются ниль-группами.

В [1, проблема 95] Л. Фукс сформулировал проблему изучения колец на сильно неразложимых абелевых группах без кручения конечного ранга. К таким группам относятся, в частности, однородные группы Мерли. В [2, 3] С. Е. Мерли классифицировал абелевы группы без кручения $G$ конечного ранга такие, что $r_p(G) \leqslant 1$ при любом простом числе $p$, теперь такие группы называются группами Мерли. Обозначим через $\mathcal{MH}$ класс всех однородных групп Мерли, $\mathcal{MH}_0$ – класс однородных групп Мерли идемпотентного типа, $\mathcal{NIL}$ – класс всех ниль-групп.

При исследований колец на сильно неразложимых абелевых группах мы существенно используем подход, предложенный Р.А. Бьюмонтом и Р. С. Пирсом в [4]. Пусть $(G, \mu)$ — ассоциативное кольцо на абелевой группе без кручения $G$ конечного ранга. Это кольцо вкладывается в кольцо на делимой оболочке $\bar{G}$ группы $G$, которое является конечномерной алгеброй над полем $\mathbb{Q}$. В силу основной теоремы Веддерберна о сепарабельных конечномерных алгебрах строение кольца $(\bar{G}, \mu)$ известно с точностью до нильпотентного радикала, который выделяется прямым слагаемым. Следуя Бьюмонту и Пирсу, будем говорить, что кольцо без кручения $(G, \mu)$ является кольцом типа алгебры $T$, если алгебра $(\bar{G}, \mu)$ изоморфна $T$. Результаты [4] позволяют в классе групп Мерли, не являющихся ниль-группами, выделить сильно неразложимые группы и доказать некоторые свойства колец на них.

Теорема 1. *Пусть $G$ - группа Мерли, не являющаяся нильгруппой. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $G$ - однородная группа идемпотентного типа;*

*2) $G$ - неразложимая группа;*

*3) $G$ - сильно неразложимая группа;*

*4) любое кольцо с ненулевым умножением на группе $G$ является кольцом типа поля;*

*5) на группе $G$ существует кольцо типа поля.*

Отметим, что любая однородная группа Мерли сильно неразложима. Однако обратное утверждение верно только для групп Мерли, не являющихся ниль-группами. В работе приведен пример сильно неразложимой неоднородной группы Мерли, это говорит о том, что требование $G \notin \mathcal{NIL}$ в теореме 1 нельзя опустить.

Основной результат о кольцах на сильно неразложимых группах Мерли заключается в том, что класс $TI$-групп без кручения конечного ранга совпадает с объединением класса однородных групп Мерли и класса ниль-групп. Согласно [5], абелева группа называется $TI$-группой, если любое ассоциативное кольцо на ней филиально. Филиальные кольца были введены в [6] и широко изучались в алгебраической литературе (например, [7, 8, 9, 10]). Ассоциативное кольцо называется филиальным, если в нем отношение «быть идеалом» транзитивно. Нетрудно видеть, что нуль-кольцо филиально, поэтому любая ниль-группа является $TI$-группой. $TI$-группы, не являющиеся ниль-группами будем называть нетривиальными.

Теорема 2. *Редуцированная абелева группа без кручения $G$ конечного ранга является $TI$-группой тогда и только тогда, когда $G$ – однородная группа Мерли или $G$ – ниль-группа.*

Так как любая однородная группа неидемпотентного типа является ниль-группой, то можно утверждать, что редуцированная группа без кручения $G$ конечного ранга является $TI$-группой тогда и только тогда, когда $G$ удовлетворяет одному из условий 1)-5) теоремы 1 или $G$ - ниль-группа.

В теореме 2 утверждается, что класс редуцированных $TI$-групп без кручения конечного ранга совпадает с классом $\mathcal{MH} \cup \mathcal{NIL} = \mathcal{MH}_0 \cup \mathcal{NIL}$. Однако из формулировки неясно, какие именно группы из класса $\mathcal{MH}$ являются нетривиальными $TI$-группами, а какие – ниль-группами. Самые простые примеры – это группы без кручения ранга 1. Если $r(G) = 1$ и тип $t(G)$ идемпотентен, то $G \in \mathcal{MH}_0 \backslash \mathcal{NIL}$, если $t(G)$ – неидемпотентный тип, то $G \in \mathcal{MH} \cap \mathcal{NIL}$. Ниже показано, что в классе $\mathcal{MH}_0 \backslash \mathcal{NIL}$ существуют группы любого натурального ранга, а в классе $\mathcal{MH} \cap \mathcal{NIL}$ для любого типа $t \neq (\infty, \infty, ...)$ (даже идемпотентного) существует группа $G$ с $t(G) = t$.

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $2^{\aleph_0}$ попарно неквазиизоморфных групп $G \in \mathcal{MH}_0 \backslash \mathcal{NIL}$ таких, что $r(G) = n$.*

Следствие 1. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $2^{\aleph_0}$ попарно неквазиизоморфных нетривиальных $TI$-групп без кручения ранга $n$.*

Теорема 4. *Для любого типа $t \neq (\infty, \infty, ...)$ существует однородная группа Мерли типа $t$, являющаяся ниль-группой.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.2. — Москва: Изд-во Мир, 1977. 416 с.

2. Murley C. E. The classification of certain classes of torsion-free Abelian groups // Pacific J. Math. 1972. Vol 40. p. 647-655.

3. Murley C. E. Direct products and sums of torsion-free Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol 38. p. 235-241.

4. Beautmont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol 5. p. 61-98.

5. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On $TI$-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. p. 33-41.

6. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.

7. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. Vol. 35. P. 273-279.

8. Filipowicz M., Puczylowski E. R. Left filial rings // Algebra Colloq. 2004. Vol. 11. P. 335-344.

9. Andruszkiewicz R., Pryszczepko K. On fully filial torsion rings // Bull. Korean Math. Soc. 2019. Vol. 56. №1. P. 23-29.

10. Компанцева Е. И., Нгуен Т. К. Ч. Алгебраически компактные абелевы TI-группы // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20. №1. С. 202-211.

---

УДК 512.541

## Почти вполне разложимые $TI$-группы

**Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)**
Финансовый университет при Правительстве РФ, Московский государственный педагогический университет, Хошиминьский педагогический университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru
**Нгуен Т. К. Ч. (Россия, г. Москва)**
Финансовый университет при Правительстве РФ, Московский государственный педагогический университет, Хошиминьский педагогический университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com
**Фам Т. Т. Т. (Вьетнам, г. Хошиминь)**
Финансовый университет при Правительстве РФ, Московский государственный педагогический университет, Хошиминьский педагогический университет
e-mail: thuyptth@hcmue.edu.vn

## Almost completely decomposable $TI$-groups

**Kompantseva E. I. (Russia, Moscow)**
Financial University under the Government of the RF, Moscow Pedagogical State University, Ho Chi Minh City University of Education
e-mail: kompantseva@yandex.ru
**Nguyen T. Q. T. (Russia, Moscow)**
Financial University under the Government of the RF, Moscow Pedagogical State University, Ho Chi Minh City University of Education
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com
**Pham T. T. T. (Vietnam, Ho Chi Minh City)**
Financial University under the Government of the RF, Moscow Pedagogical State University, Ho Chi Minh City University of Education
e-mail: thuyptth@hcmue.edu.vn

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Умножением на группе $G$ называется гомоморфизм $\mu:\ G\otimes G\to G$, это умножение $\mu : G\otimes G\to G$ часто обозначается знаком $\times$ и т. п., т. е. $\mu(g_1\otimes g_2)=g_1\times g_2$ для всех $g_1,g_2\in G$. На любой группе $G$ можно определить умножение $\mu : G\otimes G\to 0$, которое называется нулевым, кольцо с таким умножением называется нуль-кольцом. Если на группе $G$ не существует умножений (ассоциативных умножений), кроме нулевого, то $G$ называется $nil$-группой ($nil_a$-группой). Одним из направлений теории аддитивных групп колец является изучение абелевых групп, на которых любое кольцо принадлежит определённому

классу. Мы рассматриваем классы филиальных, гамильтоновых и $SI$-колец. Согласно [1], $SI$-кольцом называется кольцо, в котором любое подкольцо является идеалом. Ассоциативное $SI$-кольцо называется гамильтоновым кольцом или $H$-кольцом, поскольку эти структуры в определенном смысле аналогичны гамильтоновым группам. Гамильтоновы кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [2, 3, 4]. Естественным обобщением гамильтоновых колец являются филиальные кольца, которые были введены в [5] и изучались в [6, 7, 8, 9]. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если в нём отношение «быть идеалом» транзитивно. Отметим, что класс филиальных колец содержит не только гамильтоновы, но и регулярные (в смысле фон Неймана), и простые кольца. В настоящей работе изучаются абелевы группы, на которых любое кольцо является филиальным (гамильтоновым, $SI$-кольцом), такие группы называются $TI$-группами ($SI_H$-группами, $SI$-группами). Проблема изучения $TI$-групп сформулирована в [10], там же получено описание периодических $TI$-групп. С. Фейгельстоком в [1] были введены $SI$-группы и $SI_H$-группы, там же и в [11] описаны такие группы в классе периодических абелевых групп. Кроме того, в [12] описаны $TI$-группы, $SI$-группы и $SI_H$-группы в классе алгебраически компактных абелевых групп. Отметим, что если $\mathcal{NIL}$ – класс всех $nil$-групп, $\mathcal{SI}$ – класс всех $SI$-групп, $\mathcal{SI_H}$ – класс всех $SI_H$-групп, $\mathcal{TI}$ – класс всех $TI$-групп, то из определения следует, что

$$\mathcal{NIL} \subseteq \mathcal{SI} \subseteq \mathcal{SI_H} \subseteq \mathcal{TI}.$$

В работе изучаются $TI$-группы в классе почти вполне разложимых групп. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой (*ПВР*-группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Теория *ПВР*-групп интенсивно развивается в последнее двадцатилетие (см. [13, 14, 15] и др.), за эти годы она выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп. В ряде работ (см. [16, 17]) изучаются кольца на *ПВР*-группах. Любая *ПВР*-группа $G$ содержит однозначно определенную вполне разложимую подгруппу $R(G)$ конечного индекса, которая является вполне характеристикой подгруппой группы $G$ и называется её регулятором.

Пусть $G$ – группа без кручения. Для произвольного типа $t$ определим вполне характеристические подгруппы группы $G$:

$$G(t) = \{g \in G \mid t(g) \geq t\}, \qquad G^*(t) = \langle g \in G \mid t(g) > t\rangle$$

$$G^\sharp \ - \ \text{сервантная оболочка группы } G^*(t).$$

Тип $t$ называется критическим для группы без кручения $G$, если $G(t)/G^\sharp(t) \neq 0$ [13, определение 2.4.6]. Множество $T_{cr}(G)$ всех критических типов группы $G$ совпадает с множеством $T_{cr}(R(G))$ всех критических типов регулятора $R(G)$. При этом множество $T_{cr}(R(G))$ определяется разложением $R(G)$ в прямую сумму групп ранга 1 и является инвариантом группы $G$. Будем говорить, что множество типов $T_{cr}(G)$ удовлетворяет $nil$-условию, если $t_1t_2 \not\leq t_3$ для любых $t_1, t_2, t_3 \in T_{cr}(G)$.

Лемма 1. *Пусть $G = A \oplus B$, где $B \neq T(B)$, $A$ – редуцированная группа без кручения, не являющаяся $nil_a$-группой. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$ такое, что $G \times G \subseteq mG$.*

Лемма 2. *Пусть $A$ – подгруппа группы $G$ и $nG \subseteq A$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Пусть на $A$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(A, \times)$ такое, что $A \times A \subseteq n^2A$. Тогда $G$ не является $TI$-группой.*

Теорема 1. *Пусть $G$ – почти вполне разложимая группа с регулятором $R(G)$, $r(G) > 1$. Тогда следующие условия равносильны:*

*1) $G$ является $TI$-группой;*

*2) $R(G)$ является $TI$-группой;*

*3) $T_{cr}(G)$ удовлетворяет nil-условию;*

*4) $G$ является nil-группой;*

Учитывая, что согласно [10] любая группа без кручения ранга 1 является $TI$-группой, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Почти вполне разложимая группа $G$ является $TI$-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или множество $T_{cr}(G)$ крических типов группы $G$ удовлетворяет nil-условию.*

Пусть $\mathfrak{K}$ – класс всех почти вполне разложимых групп, $\mathfrak{K}_2 = \{G \in \mathfrak{K} \mid r(G) \geq 2\}$.

Теорема 3. *Пусть $G \in \mathfrak{K}_2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*
*1) $G$ – nil-группа;*
*2) $G$ – $SI$-группа;*
*3) $G$ – $SI_H$-группа;*
*4) $G$ – $TI$-группа.*

Как уже отмечалось, имеют место включения

$$\mathcal{NIL} \subseteq \mathcal{SI} \subseteq \mathcal{SI}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{TI}.$$

В общем случае данные включения нельзя заменить равенством ни на каком месте, соответствующие примеры приведены в [11, 18]. Однако в силу теоремы 3 для класса $\mathfrak{K}_2$ имеют мето равенства

$$\mathcal{NIL} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{SI} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{SI}_{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{TI} \cap \mathfrak{K}_2.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feigelstock S. Additive groups of rings whose subrings are ideals // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. Vol. 55. P. 477-481.

2. Redei L. Vollidealringe im weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1952. Vol. 3. P. 243-268.

3. Андриянов В. И. Периодические гамильтоновы кольца // Матем. сб. 1967. Vol. 74(116). №2. С. 241-261

4. Kruse R. L. Rings in which all subrings are ideals // Canad. J. Math. 1968. Vol. 20. P. 862-871.

5. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.

6. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. Vol. 35. P. 273-279.

7. Andruszkiewicz R., Puczylowski E. On filial rings// Portugal. Math. 1988. Vol. 45, №2. P. 139-149.

8. Filipowicz M., Puczylowski E. R. Left filial rings // Algebra Colloq. 2004. Vol. 11. P. 335-344.

9. Filipowicz M., Puczylowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257-267.

10. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On $TI$-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33–41.

11. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On $SI$-groups // Bull. of the Australian Math. Soc. 2015. Vol. 91. №1. P. 92-103.

12. Компанцева Е. И., Нгуен Т. К. Ч. Алгебраически компактные абелевы TI-группы // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20. №1. С. 202-211.

13. Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups, Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. (Algebra Logic Appl. Ser. Vol. 13).

14. Arnold D. M., Mader A., Mutzbauer O., Solak E. Almost completely decomposable groups and unbounded representation type // J. of Algebra. 2012. Vol. 349(1). P. 50-62.

15. Solak E. Classification of a class of torsion-free abelian groups // Math. Journal of the Univ. of Padova. 2016. Vol. 135. P. 111–131.

16. Компанцева Е. И. Кольца на почти вполне разложимых абелевых группах // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Vol. 14(5). С. 93-101.

17. Компанцева Е. И., Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015. №4 (16). С. 200–211.

18. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. Vol. 40. №4. P. 527-537.

---

# Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

УДК 514.7, 514.82, 519.63

## О выражении числа помеченных блоков через число помеченных связных графов

**В. А. Воблый (Россия, г. Москва)**
Всероссийский институт научной и технической информации РАН
e-mail: vitvobl@yandex.ru

## On the expression of the number of labeled blocks in terms of the number labeled connected graphs

**V. A. Voblyi (Russia, Moscow)**
Russian Institute of Scientific and Technical Information RAS
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Теорема 1. *Пусть $C_n$ – число помеченных графов с $n$ вершинами, а $B_n$ – число помеченных блоков с $n$ вершинами. Тогда при $n \geqslant 1$ верна формула*

$$B_{n+1} = \sum_{\pi(n)} \frac{(-1)^{k+1}(n+k-1)!}{k_1!...k_n!} \Big(\frac{C_2}{1!}\Big)^{k_1} ... \Big(\frac{C_{n+1}}{n!}\Big)^{k_n},$$

*где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n)$ целого числа $n$, то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, ..., k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$.*

Доказательство. Введем производящие функции

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!},\ B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Из второго соотношения Риддела $\ln C'(z) = B'(zC'(z))$ с помощью формулы обращения Лагранжа в [1] получено выражение

$$B_{n+1} = -\frac{1}{n}\Big(\Big(C'(z)\Big)^{-n}\Big)^{(n)}\Big|_{z=0}.$$

Известна формула Фаа ди Бруно для $n$-й производной сложной функции [2, с. 420]:

$$\Big[\frac{d^n f(g(t))}{dt^n}\Big]_{t=a} = Y_n(fg_1, fg_2, ..., fg_n), f^k \equiv f_k,$$

$$g_r = \Big[\frac{d^r g(t)}{dt^r}\Big]_{t=a}, f_k = \Big[\frac{d^k f(u)}{du^k}\Big]_{u=g(a)},$$

$$Y_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\pi(n)} \frac{n!}{k_1!...k_n!} \Big(\frac{x_1}{1!}\Big)^{k_1} ... \Big(\frac{x_n}{n!}\Big)^{k_n},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(n)$ целого числа $n$, то есть по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, ..., k_n)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$, причем полагается $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Здесь $Y_n(x_1, ..., x_n)$ – многочлены разбиений (многочлены Белла).

В нашем случае имеем

$$g(t) = C'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\ g_r = \Big[ \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-r-1}}{(n-r-1)!} \Big]_{t=0} = C_{r+1}\ .$$

$$f(u) = u^{-n}, f_k = (-n)(-n-1)...(-n-k+1)u^{-n-k}\Big|_{u=1} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!},$$

$$B_{n+1} = -\frac{1}{n} Y_n(fg_1, fg_2, ..., fg_n) = -\frac{1}{n} Y_n(fC_2, fC_3, ..., fC_{n+1}), f^k \equiv f_k,$$

Выражая многочлен Белла в виде суммы по разбиениям целого числа, получим утверждение теоремы.

Доказательство закончено. □

Отметим, что в [3] получено выражение для числа помеченных связных графов через число помеченных блоков с помощью многочленов разбиений: $C_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(nB_2, ..., nB_n)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Bender E. A. An asymptotic expansion for the coefficients of some power series II: Lagrange inversion, Discrete Mathematics // 50(1984), 135-141.

2. Charalambides Ch. A. Enumerative combinatorics. , CRC Press, Boca Raton, 2002, 624 p.

3. Воблый В. А. Выражение числа помеченных связных графов через число помеченных блоков с помощью многочленов разбиений // Тезисы докладов Международной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (14-18 сентября 2015 г., Минск) , Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2015, — с. 95–96.


---

УДК 512.548.7, 519.716.39

# Об одном алгоритме построения правильных семейств функций[1]


**А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
**В. А. Носов (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: vnosov40@mail.ru
**А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru


[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта QGSEC, грант SAG/4600/TCID/Proj/QGSEC

# An algorithm for generation of proper families of functions

**A. V. Galatenko (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
**V. A. Nosov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vnosov40@mail.ru
**A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru

## Введение

Конечные квазигруппы являются перспективной алгебраической структурой для создания криптографических алгоритмов. В качестве примеров реализации квазигрупповых криптоалгоритмов можно привести табличное гаммирование по латинскому квадрату, предложенное Шенноном в [1] и являющееся совершенным симметричным шифром, алгоритм электронной подписи, основанный на квадратичных квазигруппах ([2]), а также хэш-функцию EDON–R', участвовавшую в конкурсе SHA-3 ([3]). Для обеспечения высокой стойкости важно уметь порождать большие семейства квазигрупп большого порядка. Заметим, что хранение больших квазигрупп в виде таблиц Кэли на практике оказывается невозможным, поэтому желательно использовать функциональное задание. В. А. Носов в работе [4] ввел конструкцию, названную правильными семействами булевых функций, позволяющую функционально задавать большие семейства квазигрупп, порядок которых равен степени двойки. Дальнейшее развитие конструкции было осуществлено в работах [5], [6]. Задача описания всех правильных семейств функций остается открытой. Известен ряд примеров, таких как треугольные и ортогональные семейства (см., например, [4]). В булевом случае К. Д. Царегородцеву удалось свести задачу к поиску всех одностоковых ориентаций булева куба ([7]); для построения равномерного распределения на множестве одностоковых конфигураций (или, что эквивалентно, на множестве правильных семейств булевых функций) можно воспользоваться MCMC-процедурой из работы [8], однако перенос результатов на случай логики произвольной значности представляется нетривиальным. Мы предлагаем эффективный (в сравнении с переборным) алгоритм, который позволяет строить правильные семейства порядка $n+1$, используя правильные семейства порядка $n$.

## Основные определения и обозначения

Определение 1. *Конечной квазигруппой называется пара $(Q, f)$, где $Q$ — конечное множество, а операция $f\colon Q \times Q \to Q$ такова, что для любых $a, b \in Q$ уравнения $f(a, x) = b$ и $f(y, a) = b$ однозначно разрешимы. При этом операция $f$ называется квазигрупповой.*

В дальнейшем для краткости слово "конечный" будет опускаться.

Пусть $|Q| = k^n$ для натуральных $k \geqslant 2$ и $n$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что множество $Q$ состоит из кортежей длины $n$, элементы которых принадлежат множеству $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$, а $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — вектор-функция, компонентами которой являются функции $k$-значной логики от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Рассмотрим частный случай:

$$f_i = x_i + y_i + g_i(\pi_1(x_1, y_1), \ldots, \pi_n(x_n, y_n)), \tag{1}$$

где $g_i$ — $n$-местная, а $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — двухместные функции $k$-значной логики, и сложение производится по модулю $k$.

Определение 2. *Семейство $(g_1, \ldots, g_n)$ $n$-местных функций $k$-значной логики называется правильным, если для любой пары наборов $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ из $E_k^n$, таких что $s \neq t$, найдется индекс $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которого $s_i \neq t_i$, но $g_i(s) = g_i(t)$.*

Из определения очевидным образом следует, что каждая функция $g_i$ фиктивным образом зависит от одноименной переменной.

Следующее утверждение устанавливает связь между квазигрупповыми операциями и правильными семействами.

Теорема 1 ([5]). *Соотношения (1) задают квазигрупповую операцию для любых $\pi_1, \ldots, \pi_n$ тогда и только тогда, когда семейство $(g_1, \ldots, g_n)$ правильное.*

Из теоремы вытекает, что одно правильное семейство порождает $\left(k^{k^2}\right)^n$ квазигрупповых операций, некоторые из которых, впрочем, могут совпадать.

Замечание 1. *Теорема 1 остается верной при замене двойной суммы на произвольную 3-квазигрупповую операцию ([6]). За счет вариации внешней операции число порождаемых квазигрупп может быть дополнительно увеличено.*

Для дальнейшего изложения потребуются унарные функции $k$-значной логики $I_0, \ldots, I_{k-1}$, определяемые соотношением

$$I_j(x) = \begin{cases} k-1 \text{ при } x = j \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Для краткости операцию взятия минимума будем обозначать через $\wedge$, операцию взятия максимума — через $\vee$.

## Построение правильных семейств

Несложно увидеть, что верны следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1})$ — правильное семейство, $a \in E_k$, $g_i^a(x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n, a)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда семейство $(g_1^a, \ldots, g_n^a)$ также является правильным.*

Лемма 2. *Пусть $G_0 = (g_1^0, \ldots, g_n^0), \ldots, G_{k-1} = (g_1^{k-1}, \ldots, g_n^{k-1})$ — правильные семейства функций от $n$ переменных,*

$$g_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \bigvee_{j=0}^{k-1} \left( I_{x_{n+1}}(j) \wedge g_i^j(x_1, \ldots, x_n) \right), \tag{2}$$

*$i = 1, \ldots, n$, $g_{n+1} \equiv 0$. Тогда семейство $(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1})$ правильное.*

Заметим, что расширение с помощью леммы 2 и последующая проекция с помощью леммы 1 является тождественным преобразованием, откуда следует, что все такие "линии уровня" правильных семейств порядка $n+1$ являются правильными семействами порядка $n$, и наоборот, любая комбинация правильных семейств порядка $n$ является "линиями уровня" правильного семейства порядка $n+1$.

Также заметим, что не любое правильное семейство порождается с помощью леммы 2; например, при замене $g_{n+1}$ на любую другую константу правильность сохраняется. Из этого наблюдения вытекает следующий факт.

Теорема 2. *Путь $L_k(n)$ — число правильных семейств порядка $n$ в $k$-значной логике. Тогда*

$$L_k(n+1) \geqslant k \cdot (L_k(n))^k .$$

Опишем всевозможные способы расширения $k$ правильных семейств порядка $n$ до семейства порядка $n+1$, в котором первые $n$ функций заданы соотношениями (2). Характеристическое свойство добавляемой функции $g'$ в этом случае задается следующим образом (с учетом того, что переменная $x_{n+1}$ фиктивная, то есть значение определяется переменными $x_1, \ldots, x_n$).

Лемма 3. *В обозначениях леммы 2 семейство $(g_1, \ldots, g_n, g')$ правильное тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие. Если для пары входных наборов $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и $t = (t_1, \ldots, t_n)$ найдется пара индексов $0 \leqslant i, j \leqslant k-1$, $i \neq j$, таких что $G_i(s)$ и $G_j(t)$ отличаются во всех позициях, в которых отличаются $s$ и $t$, то $g'(s) = g'(t)$.*

Рассмотрим следующий алгоритм, принимающий на вход $k$ правильных семейств $G_0, \ldots, G_{k-1}$ порядка $n$ и возвращающий правильное семейство порядка $n+1$.

```
1. Строим граф, вершинам которого приписаны всевозможные наборы длины n
   с элементами из Ek. Ребро между парой вершин проводится если и только
   если эта пара удовлетворяет условию из леммы 3.
2. Находим компоненты связности построенного графа.
3. Задаем значения функции g' так, что она постоянна внутри каждой компоненты
   связности.
```

Из лемм 1–3 непосредственно вытекает утверждение о свойствах алгоритма.

Теорема 3. *При добавлении $g'$ к функциям $g_1, \ldots, g_n$, определенным соотношениями (2), получается правильное семейство. Любое правильное семейство порядка $n+1$ может быть получено таким способом при выборе подходящих семейств $G_0, \ldots, G_{k-1}$.*

Для непосредственной реализации алгоритма потребуется $k \cdot k^n$ вычислений функций из семейств $G_0, \ldots, G_{k-1}$, проверка существования $\frac{k^n \cdot (k^n - 1)}{2}$ ребер (сложность обработки одного ребра составляет $k(k-1)$), в процессе которой можно вычислить компоненты связности. Заметим, что сложность экспоненциально зависит от порядка правильного семейства, но полиномиально от порядка порождаемой квазигруппы. При рассмотрении всевозможных последовательностей правильных семейств $(G_1, \ldots, G_{k-1})$ на выходе возникнут все правильные семейства порядка $n+1$.

Теорема 4. *Пусть $L_k(n)$ — число правильных семейств порядка $n$ в $k$-значной логике, $D_k(n)$ — число семейств $n$-местных функций $k$-значной логики, таких что одноименная переменная фиктивна для каждой функции. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_k(n)}{D_k(n)} = 0. \tag{3}$$

Известные алгоритмы проверки семейства на правильность ([5], [9], [10]) имеют сложность, сопоставимую с предложенным алгоритмом. Более того, уже в булевом случае для ряда естественных представлений доказана coNP-полнота задачи ([9]). Соотношение (3) показывает, что поиск правильных семейств с помощью перебора с последующей проверкой правильности является существенно менее выгодной стратегией. Заметим, что переход к новой структуре данных привел к повышению эффективности.

## Заключение

В работе предложен алгоритм, позволяющий строить правильные семейства порядка $n+1$ из правильных семейств порядка $n$. В дальнейшем мы планируем понизить сложность этого алгоритма, связанную с построением графа, сделать программную реализацию и осуществить поиск новых классов правильных семейств.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Shannon C. Communication theory of secrecy systems // Bell System Technical Journal. 1949. Vol. 28, №4. P. 656–715.

2. Gligoroski D., Ødegård R., Jensen R., Perret L., Faugère J.-C., Knapskog S., Markovski S. MQQ–SIG: an ultra-fast and provably CMA resistant digital signature scheme // INTRUST'11: Proceedings of the Third international conference on Trusted Systems. 2011. P. 184–203.

3. Gligoroski D., Ødegård R. S., Mihova M., Knapskog S. J., Drapal A., Klíma V., Amundsen J., El-Hadedy M. Cryptographic hash function EDON-R' // Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks. 2009. P. 1–9.

4. Носов В. А. Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных // Интеллектуальные системы. 1999. Том 4, № 3–4. С. 307–320.

5. Nosov V. A., Pankratiev A. E. Latin squares over Abelian groups // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 149, № 3. P. 1230–1234.

6. Galatenko A.V., Nosov V. A., Pankratiev A. E. Latin squares over quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. P. 194–203.

7. Царегородцев К. Д. О взаимно однозначном соответствии между правильными семействами булевых функций и рёберными ориентациями булевых кубов // Прикладная дискретная математика. 2020. № 48. С. 16–21.

8. Schurr I. A. Unique sink orientations of cubes. — Doctoral Thesis, ETH Zurich, 2004.

9. Носов В. А. Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом // Интеллектуальные системы. 1998. Том 3, № 3–4. С. 269–280.

10. Носов В. А. Построение параметрического семейства латинских квадратов в векторной базе данных // Интеллектуальные системы. 2004. Том 8, № 1–4. С. 517–528.


---

УДК 512.548.7, 519.716.2

## Проверка полиномиальной полноты $n$-квазигрупп [1]

**А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
**А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
**В. М. Староверов (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта "Quasigroup Based Cryptography: Security Analysis and Development of Crypto-Primitives and Algorithms (QGSEC)"

# Decision of polynomial completeness of $n$-quasigroups

**A. V. Galatenko (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
**A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
**V. M. Staroverov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

## Введение

Конечные квазигруппы являются перспективным источником криптографических преобразований. Достаточно широкий спектр различных криптоалгоритмов на основе квазигрупп представлен в обзоре М. М. Глухова [1]. В последние годы возник интерес к системам на основе конечных 3-квазигрупп, или, что то же самое, на основе латинских кубов. В качестве примеров можно привести работы [2], [3]. Полезным с точки зрения криптографии свойством используемой алгебраической структуры является полиномиальная полнота, так как проблема разрешимости уравнений над полиномиально полными алгебрами NP-полна ([4]). В случае $n$-квазигрупповых операций полиномиальная полнота эквивалентна простоте и неаффинности ([5]). Алгоритмы для проверки простоты и неаффинности для квазигрупп предложены в работах [6], [7]. Мы предлагаем обобщения алгоритмов на случай $n$-квазигрупп. Мы считаем, что $n$-квазигруппа задана таблицей Кэли, а элементарными операциями являются чтение и запись ячейки памяти (в частности, вычисление значения $n$-квазигрупповой операции), а также арифметические операции в $\mathbb{Z}_k$.

## Основные определения и обозначения

Определение 1. *Конечной $n$-квазигруппой называется пара $(Q, f)$, где $Q=\{q_1, \ldots, q_k\}$ — конечное множество, а $f\colon Q^n \to Q$ такова, что при произвольной фиксации любых $n-1$ переменных результат является биекцией, то есть перестановкой на множестве $Q$. При этом операция $f$ называется $n$-квазигрупповой.*

В дальнейшем для краткости слово “конечный” будет опускаться, а свойства операции — отождествляться со свойствами соответствующей $n$-квазигруппы.

Таблица Кэли $n$-квазигрупповой операции является латинским гиперкубом, то есть $n$-мерной матрицей размера $|Q| \times \ldots \times |Q|$, каждая одномерная “строка” которой содержит попарно различные элементы множества $Q$, и наоборот, произвольный $n$-мерный латинский куб задает $n$-квазигрупповую операцию.

Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $Q$.

Определение 2. *Функция $f$ сохраняет отношение $\sim$, если для любых наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ элементов $Q$, таких что $\alpha_i \sim \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполнено соотношение $f(\alpha) \sim f(\beta)$.*

Легко увидеть, что $n$-квазигрупповая операция может сохранять только отношение эквивалентности, все классы которого равномощны.

Определение 3. *Множество функций $k$-значной логики сохраняет отношение $\sim$, если каждая функция множества сохраняет это отношение.*

Определение 4. *Операция $f$ называется простой, если она не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.*

В терминах $k$-значной логики непростота означает принадлежность одному из предполных классов семейства $\mathcal{U}$.

Определение 5. *Квазигруппа $(Q, f)$ аффинна, если на множестве $Q$ можно ввести структуру абелевой группы $(Q, +)$, такую что существуют автоморфизмы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ группы $(Q, +)$ и элемент $c \in Q$, для которых выполнено тождество*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1(x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n) + c. \tag{1}$$

Если $|Q| = p^m$ для простого $p$ и натурального $m$, а группа $(Q, +)$ изоморфна $\mathbb{Z}_p^m$, то аффинность означает принадлежность одному из предполных классов семейства $\mathcal{L}$; в противном случае аффинность влечет непростоту ([8]).

Обозначим множество всех констант из $Q$ через $P_k^0$, множество всех функций на $Q$ через $P_k$, стандартным образом определенную операцию замыкания на $2^{P_k}$ через $[\,]$.

Определение 6. *$n$-квазигруппа $(Q, f)$ полиномиально полна, если $[P_k^0 \cup \{f\}] = P_k$.*

Как уже упоминалось во введении, полиномиальная полнота эквивалентна одновременной простоте и неаффинности $f$ ([5]).

## Проверка простоты

Сперва заметим, что простота операции $f$ эквивалентна простоте множества всех одноместных операций, полученных всевозможными фиксациями произвольных $n-1$ переменной. Обозначим это множество через $F_1$.

Лемма 1. *Функция $f$ сохраняет отношение эквивалентности $\sim$ тогда и только тогда, когда множество $F_1$ сохраняет отношение $\sim$.*

Алгоритм проверки простоты основан на следующей идее. Если сохраняется какое-либо нетривиальное отношение эквивалентности, то, в силу равномощности классов эквивалентности, найдется класс, содержащий элементы $q_1$ и $q_i$, $i \neq 1$. Таким образом, достаточно рассмотреть всевозможные пары $(q_1, q_i)$, $i \neq 1$, и рассмотреть транзитивное замыкание отношения $q_1 \sim q_i$ под действием множества $F_1$. Если хотя бы одна из начальных пар на выходе дает нетривиальное отношение эквивалентности, $n$-квазигруппа не является простой, в противном случае $n$-квазигруппа проста.

Оценим сложность алгоритма. Действие $F_1$ на одну пару имеет сложность $O(n \cdot k^{n-1})$ (действительно, есть $n$ вариантов выбрать свободную переменную и $k^{n-1}$ вариантов подстановки констант вместо оставшихся переменных). Проверка эквивалентности пары элементов может быть реализована с константной сложностью. Если эквивалентность пары элементов не установлена на предыдущих шагах, производится слияние соответствующих классов. Как показано в [7], при слиянии классов для последующего замыкания достаточно выбрать одну пару, первый элемент которой лежит в первом классе, а второй элемент — во втором классе. Таким образом, во-первых, сложность слияния классов мала по сравнению со сложностью вычисления действия $F_1$; во-вторых, число применений $F_1$ ограничено сверху значением $k-1$. Наконец, число перебираемых начальных пар не превосходит $k-1$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует алгоритм проверки простоты $n$-квазигруппы порядка $k$, имеющий сложность $O(k^{n+1})$ при фиксированном $n$ и $k \to \infty$.*

Полученный результат является усилением утверждения из [6].

Заметим, что если $k$ является простым числом, то, в силу равномощности классов сохраняемого отношения эквивалентности, любая $n$-квазигруппа автоматически является простой.

## Проверка аффинности

Случай $n$-квазигрупп может быть рассмотрен аналогично квазигрупповому случаю, описанному в [6]. Для корректности переноса потребуется следующее важное вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $(Q, f)$ — $n$-квазигруппа, аффинная над абелевой группой $(Q, +)$. Тогда для любого $d \in Q$ существует абелева группа $(Q, +')$, для которой элемент $d$ является нейтральным, и $(Q, f)$ аффинна над $(Q, +')$.*

Таким образом, в случае аффинности для восстановления абелевой группы $(Q, +)$ можно рассмотреть функцию $f_2$, полученную из $f$ подстановкой произвольных констант во все переменные, кроме двух, и воспользоваться процедурой для квазигрупп, описанной в [6] и имеющей кубическую по $k$ сложность. Восстановление каждого из автоморфизмов $\alpha_i$ очевидным образом может быть произведено со сложностью, квадратичной по $k$, восстановление константы $c$ имеет константную сложность. Наконец, для проверки тождества (1) потребуется сложность порядка $n \cdot k^n$. Обратно, если все шаги описанной процедуры будут успешно выполнены (операция $+$ действительно задает абелеву группу, $\alpha_i$ являются автоморфизмами этой группы, и тождество (1) выполнено), то $n$-квазигруппа аффинна по определению. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует алгоритм проверки аффинности $n$-квазигруппы порядка $k$, имеющий сложность $O(k^n)$ при фиксированном $n$ и $k \to \infty$.*

Интересно, что при переходе от квазигрупп к 3-квазигруппам порядок сложности не возрастает. Это связано с тем, что в квазигрупповом случае основная (кубическая) сложность приходится на проверку ассоциативности операции $+$.

Заметим, что в случае, если $k$ не является степенью простого числа, неаффинность автоматически следует из простоты.

## Проверка полиномиальной полноты

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает следующий факт.

Теорема 3. *Существует алгоритм проверки полиномиальной полноты $n$-квазигруппы порядка $k$, имеющий сложность $O(k^{n+1})$ при фиксированном $n$ и $k \to \infty$.*

## Заключение

В работе предложен полиномиальный алгоритм, позволяющий определять полиномиальную полноту $n$-квазигрупп. В дальнейшем мы планируем создать программную реализацию и с ее помощью оценить практическую эффективность. Кроме того, планируется рассмотрение случая, когда операция задана не таблично, а формульно. В этом случае, с одной стороны, увеличивается сложность вычисления, но, с другой стороны, возможно рассмотрение $n$-квазигрупп более высокого порядка.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. №2. С. 28–32.

2. Xu M., Tian Z. An Image Cipher Based on Latin Cubes // Proceedings of the 3rd International Conference on Information and Computer Technologies. 2020. P. 160–168.

3. Xu M., Tian Z. A novel image cipher based on 3D bit matrix and latin cubes // Information Sciences. 2019. Vol. 478. P. 1–14.

4. Horváth G, Nehaniv Gh. L, Szabó Cs. An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness // Theoretical Computer Science. 2008. Vol. 407. P. 591–595.

5. Hagemann J., Herrmann C. Arithmetical locally equational classes and representation of partial functions // Universal Algebra, Esztergom (Hungary). 1982. Vol. 29. P. 345–360.

6. Galatenko A. V., Pankratiev A. E. The complexity of checking the polynomial completeness of finite quasigroups // Discrete Mathematics and Applications. 2020. Vol. 30, № 3. P. 169–175.

7. Galatenko A. V., Pankratiev A. E., Staroverov V. M. Efficient verification of polynomial completeness of quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics, accepted for publication.

8. Artamonov V. A., Chakrabarti S., Pal S. K. Characterizations of highly non-associative quasigroups and associative triples // Quasigroups and Related Systems. 2017. Vol. 25. P. 1–19.

---

УДК 512.548.7

## Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных подквазигрупп [1]

**А. В. Галатенко (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: agalat@msu.ru
**А. Е. Панкратьев (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
**В. М. Староверов (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М.В.Ломоносова
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

## An algorithm for checking the existence of nontrivial subquasigroups

**A. V. Galatenko (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: agalat@msu.ru
**A. E. Pankratiev (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: apankrat@intsys.msu.ru
**V. M. Staroverov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке проекта “Quasigroup Based Cryptography: Security Analysis and Development of Crypto-Primitives and Algorithms (QGSEC)”

## 1. Введение

В последние годы возник значительный интерес к использованию некоммутативных и неассоциативных алгебраических структур для построения криптографических примитивов (см., например, [1]). Примером таких структур являются конечные квазигруппы. Обзор криптоалгоритмов на основе квазигрупп можно найти в работе [2]. Желательным является использование квазигрупп, не содержащих нетривиальных подквазигрупп. В работе П. И. Собянина предлагается алгоритм, проверяющий наличие нетривиальных подквазигрупп по таблице Кэли и имеющий сложность $O\left(n^4\right)$, где $n$ — порядок квазигруппы ([3]). Мы предлагаем новый алгоритм для решения этой задачи. Временну́ю сложность алгоритма удалось понизить почти на порядок за счет некоторого роста пространственной сложности.

## 2. Основные определения и обозначения

Определение 1. *Конечной квазигруппой называется пара $(Q, f)$, где $Q$ — конечное множество, а операция $f\colon Q \times Q \to Q$ такова, что для любых $a, b \in Q$ уравнения $f(a, x) = b$ и $f(y, a) = b$ однозначно разрешимы.*

В дальнейшем все используемые структуры будут конечными, поэтому для краткости слово “конечный” будет опускаться.

Пусть $Q' \subseteq Q$. Обозначим через $f(Q')$ множество всех констант, получаемых при подстановке элементов $Q'$ в формулы, порожденные $f$. Несложно увидеть, что такое замыкание обладает свойством монотонности: если $Q_1 \subseteq Q_2$, то $f(Q_1) \subseteq f(Q_2)$. Если $f(Q') = Q$, то множество $Q'$ назовем полным. Очевидно, что для полноты достаточно выполнения условия $|f(Q')| > \frac{|Q|}{2}$. В силу монотонности все надмножества полного множества также полны.

Определение 2. *Пусть $Q' \subset Q$, $2 \leqslant |Q'| < |Q|$. Если $f(Q') = Q'$, то говорят, что квазигруппа $(Q, f)$ содержит нетривиальную подквазигруппу $Q'$ (точнее, подквазигруппу $(Q', f')$, где $f'$ — ограничение операции $f$ на $Q' \times Q'$).*

Определение 3. *Пусть $M$, $|M| < \infty$, — некоторое множество, $n \in \mathbb{N}$, $M_1, \ldots, M_n$ — подмножества $M$. Множество $M_0 \subseteq M$ называется системой представителей для $M_1, \ldots, M_n$, если для любого $i$ от 1 до $n$ найдется элемент $m_i \in M_0$, такой что $m_i \in M_i$.*

Заметим, что представители для различных $i$ могут совпадать.

## 3. Описание алгоритма

Алгоритм из работы [3] основан на следующей идее. Рассматриваются всевозможные неупорядоченные пары $\{q_i, q_j\}$ элементов $Q$ и вычисляются (с квадратичной от $|Q|$ сложностью) замыкания $f(\{q_i, q_j\})$. Нетривиальные подгруппы существуют тогда и только тогда, когда хотя бы одно из замыканий отлично от $Q$. Таким образом, общая сложность алгоритма составляет $O\left(|Q|^4\right)$. Воспользуемся свойством монотонности замыкания и понизим сложность перебора — от множества всех пар перейдем к множеству пар существенно меньшего размера. Сформулируем важное вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $c$ — фиксированная положительная коснтанта, $|M| = N$, $M_1, \ldots, M_N \subset M$, $|M_1| = \ldots = |M_N| = \lfloor c \cdot \sqrt{N} \rfloor$. Тогда существует система представителей $M_0$, такая что $|M_0| = O\left(\sqrt{N} \cdot \log N\right)$, $N \to \infty$, причем для ее построения можно воспользоваться жадным алгоритмом.*

Лемма 1 и монотонность замыкания обосновывают алгоритм, состоящий из трех основных этапов:

1. рассматриваем всевозможные неупорядоченные пары $\{ q_i, q_j \mid q_i, q_j \in Q \}$; вычисляем замыкание каждой пары, либо пока не получится замкнутое подмножество (в этом случае, очевидно, находится нетривиальная подгруппа и алгоритм завершает работу), либо пока размер не станет больше, чем $c \cdot \sqrt{|Q|}$ (положительная константа $c$ является параметром);

2. каждое частичное замыкание рассматриваем как множество неупорядоченных пар входящих в него элементов и по лемме 1 строим систему представителей;

3. для каждой пары из системы представителей строим замыкание; квазигруппа содержит нетривиальные подквазигруппы, если и только если найдется пара, замыкание которой не равно $Q$.

Оценим сложностные характеристики. Значение параметра $c$ считаем фиксированным. Первый шаг имеет пространственную сложность порядка $n^2 \cdot \sqrt{n}$ и временну́ю сложность порядка $n^2\sqrt{n} = n^{5/2}$. Заметим, что объем используемой памяти прямо пропорционален параметру $c$; таким образом, для работы с квазигруппами большого порядка значение $c$ должно выбираться маленьким. С другой стороны, увеличение значения $c$ снижает мощность системы представителей, таким образом понижая сложность самых сложных по времени шагов 2 и 3.

На втором шаге в качестве $N$ выступает мощность множества неупорядоченных пар $\frac{n(n-1)}{2}$. По лемме 1 мощность системы представителей составит $O(n \log n)$; для реализации жадного алгоритма потребуется вычисление максимума на множестве мощности $O\left(n^2\right)$, то есть общая временна́я сложность равна $O\left(n^3 \log n\right)$, а дополнительная память пренебрежимо мала по сравнению с первым шагом. Наконец, на третьем шаге потребуется вычислить $O(n \log n)$ замыканий, причем каждое вычисление потребует $O\left(n^2\right)$ шагов, и требуемая память пренебрежимо мала по сравнению с первым шагом. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Предложенный алгоритм с фиксированной константой $c$ устанавливает наличие нетривиальных подквазигрупп в квазигруппе порядка $n$ с временно́й сложностью $O\left(n^3 \log n\right)$ и пространственной сложностью $O\left(c \cdot n^{5/2}\right)$, $n \to \infty$.*

## 4. Оценка практической эффективности

Для оценки практической эффективности алгоритма была создана программная реализация и проведен ряд вычислительных экспериментов на квазигруппах, использованных для тестов в работе [4].

Исходный код программной реализации вместе с файлом *Makiefile* и примером конфигурационного файла *config.txt* можно найти по ссылке *http://stargeo.ru/article20200808.zip* . В конфигурационном файле есть описания существенных параметров. Программа позволяет производить проверку наличия нетривиальных подквазигрупп алгоритмом из работы [3] и алгоритмом, описанным в данной работе. Также есть возможность сравнения результатов работы этих алгоритмов.

С помощью данной программы произведено тестирование времени работы алгоритма поиска подквазигрупп из [3] и алгоритма, описанного в данной работе. Каждый алгоритм реализован с использованием и без использования OpenMP-распараллеливания. В следующей таблице приведены максимальные времена (в секундах) проверки наличия подквазигрупп (на 80 различных примерах, описанных в [4]) на 8-ядерной рабочей станции (i7–3770 CPU @3.40GHz) с 32 гигабайтами оперативной памяти:

| N | Easy | EasyOMP | QC1 | QC2 | QC4 | QC8 | QC16 | QP2 | QP4 | QP8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 512 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 1024 | 10 | 6 | 2 | | | | | | | |
| 2048 | 95 | 52 | 27 | 11 | 6 | 9 | 12 | 28 | 25 | 27 |
| 4096 | 1581 | 987 | 273 | 100 | 70 | 74 | 92 | 253 | 231 | 228 |
| 8192 | 17941 | 11426 | 2254 | 813 | 654 | 669 | 661 | 205 | 1 1979 | 1989 |
| 16384 | | | | | | | 5602 | | | |

Обозначения столбцов: N — количество элементов в квазигруппе, Easy — алгоритм из работы [3]; EasyOMP — алгоритм из работы [3] с использованием OpenMP на 8 ядрах; QC$V$ — быстрый алгоритм с параметром $c = 1/V$; QP$N$ — быстрый алгоритм с использованием OpenMP на $N$ ядрах, $c = 1$.

Следующая таблица является продолжением предыдущей таблицы для случаев использования OpenMP, $c < 1$:

| N | QP2C2 | QP4C2 | QP8C2 | QP2C4 | QP4C4 | QP8C24 | QP4C16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2048 | 10 | 9 | 9 | 5 | 4 | 4 | 5 |
| 4096 | 93 | 81 | 82 | 49 | 32 | 32 | 35 |
| 8192 | 748 | 673 | 670 | 454 | 282 | 268 | 287 |
| 16384 | | | | | | | 2401 |

Обозначения столбцов: QP$N$C$V$ — быстрый алгоритм с использованием OpenMP на $N$ ядрах с параметром $c = 1/V$.

Проведенные расчеты показывают, что поставленную задачу можно успешно решать для квазигрупп размером до $2^{14}$. При этом, задача допускает весьма эффективное распараллеливание. Использование коэффициента $c < 1$ позволяет существенно ускорить работу программы и уменьшить требуемый объем оперативной памяти. Так, расчеты для $N = 16384$ с помощью быстрого алгоритма из-за ограничений по памяти удалось провести только для $c = 1/16$. Алгоритм из работы [3] при таких порядках становится неприменимым из-за высокой сложности.

## 5. Заключение

В работе предложена оптимизация алгоритма для проверки существования нетривиальных подквазигрупп, а также приведена оценка практической эффективности этого алгоритма. В дальнейшем планируется рассмотрение других способов задания квазигрупп, прежде всего случай функционального задания.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative Algebraic Structures in Cryptography and Coding // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, № 2. P. 178–196.

2. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. 2009. Vol. 17, № 2(50). P. 193–228.

3. Собянин П. И. Об алгоритме проверки наличия подквазигруппы в квазигруппе // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т. 23, № 2. С. 79–84.

4. Galatenko A. V., Pankratiev A. E., Staroverov V. M. Efficient verification of polynomial completeness of quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics, accepted for publication.

---

УДК 511

# Об одной матрице составных чисел и её приложениях. Алгоритм генерации простых чисел на основе $T$-матрицы

**И. И. Гарипов (Россия, г. Набережные Челны)**
e-mail: mathsciencegaripovii@gmail.com

# About one matrix of composite numbers and her applications. Prime number generation algorithm on the basis of $T$-matrix

**I. I. Garipov (Russia, Naberezhnye Chelny)**
e-mail: mathsciencegaripovii@gmail.com

Научная статья посвящена исследованию $T$-матрицы – матрицы составных чисел $6h \pm 1$ специального вида, и её приложениям.

## 1. Построение матрицы $T$ определяющих и не определяющих элементов

Построим матрицу $T \equiv (a(k;n))_{\infty\times\infty}$, где $a(k;n)$ – это элемент матрицы $T$, расположенный на $k$-ой строке и на $n$-ом столбце, определяющийся следующим образом:

$$a(k;n) \equiv p(k) \cdot \left(5 + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right),$$

где $p(k)$ – $k$-ый элемент последовательности $(p(k))_{k=1}^{\infty}$ простых чисел: $p(k) \equiv p_{k+2}$, где $p_i$ – $i$-ое простое число в последовательности всех простых чисел (см. таблицу 1).

**Таблица 1. Фрагмент подматрицы в матрице $T$ для случая $k = \overline{1;15},\ n = \overline{1;30}$.**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 35 | 55 | 65 | 85 | 95 | 115 | 125 | 145 | 155 | 175 | 185 | 205 | 215 | 235 | 245 | 265 | 275 | 295 | 305 | 325 | 335 | 355 | 365 | 385 | 395 | 415 | 425 | 445 | 455 | |
| 35 | 49 | 77 | 91 | 119 | 133 | 161 | 175 | 203 | 217 | 245 | 259 | 287 | 301 | 329 | 343 | 371 | 385 | 413 | 427 | 455 | 469 | 497 | 511 | 539 | 553 | 581 | 595 | 623 | 637 | |
| 55 | 77 | 121 | 143 | 187 | 209 | 253 | 275 | 319 | 341 | 385 | 407 | 451 | 473 | 517 | 539 | 583 | 605 | 649 | 671 | 715 | 737 | 781 | 803 | 847 | 869 | 913 | 935 | 979 | 1001 | |
| 65 | 91 | 143 | 169 | 221 | 247 | 299 | 325 | 377 | 403 | 455 | 481 | 533 | 559 | 611 | 637 | 689 | 715 | 767 | 793 | 845 | 871 | 923 | 949 | 1001 | 1027 | 1079 | 1105 | 1157 | 1183 | |
| 85 | 119 | 187 | 221 | 289 | 323 | 391 | 425 | 493 | 527 | 595 | 629 | 697 | 731 | 799 | 833 | 901 | 935 | 1003 | 1037 | 1105 | 1139 | 1207 | 1241 | 1309 | 1343 | 1411 | 1445 | 1513 | 1547 | |
| 95 | 133 | 209 | 247 | 323 | 361 | 437 | 475 | 551 | 589 | 665 | 703 | 779 | 817 | 893 | 931 | 1007 | 1045 | 1121 | 1159 | 1235 | 1273 | 1349 | 1387 | 1463 | 1501 | 1577 | 1615 | 1691 | 1729 | |
| 115 | 161 | 253 | 299 | 391 | 437 | 529 | 575 | 667 | 713 | 805 | 851 | 943 | 989 | 1081 | 1127 | 1219 | 1265 | 1357 | 1403 | 1495 | 1541 | 1633 | 1679 | 1771 | 1817 | 1909 | 1955 | 2047 | 2093 | |
| 145 | 203 | 319 | 377 | 493 | 551 | 667 | 725 | 841 | 899 | 1015 | 1073 | 1189 | 1247 | 1363 | 1421 | 1537 | 1595 | 1711 | 1769 | 1885 | 1943 | 2059 | 2117 | 2233 | 2291 | 2407 | 2465 | 2581 | 2639 | ... |
| 155 | 217 | 341 | 403 | 527 | 589 | 713 | 775 | 899 | 961 | 1085 | 1147 | 1271 | 1333 | 1457 | 1519 | 1643 | 1705 | 1829 | 1891 | 2015 | 2077 | 2201 | 2263 | 2387 | 2449 | 2573 | 2635 | 2759 | 2821 | |
| 185 | 259 | 407 | 481 | 629 | 703 | 851 | 925 | 1073 | 1147 | 1295 | 1369 | 1517 | 1591 | 1739 | 1813 | 1961 | 2035 | 2183 | 2257 | 2405 | 2479 | 2627 | 2701 | 2849 | 2923 | 3071 | 3145 | 3293 | 3367 | |
| 205 | 287 | 451 | 533 | 697 | 779 | 943 | 1025 | 1189 | 1271 | 1435 | 1517 | 1681 | 1763 | 1927 | 2009 | 2173 | 2255 | 2419 | 2501 | 2665 | 2747 | 2911 | 2993 | 3157 | 3239 | 3403 | 3485 | 3649 | 3731 | |
| 215 | 301 | 473 | 559 | 731 | 817 | 989 | 1075 | 1247 | 1333 | 1505 | 1591 | 1763 | 1849 | 2021 | 2107 | 2279 | 2365 | 2537 | 2623 | 2795 | 2881 | 3053 | 3139 | 3311 | 3397 | 3569 | 3655 | 3827 | 3913 | |
| 235 | 329 | 517 | 611 | 799 | 893 | 1081 | 1175 | 1363 | 1457 | 1645 | 1739 | 1927 | 2021 | 2209 | 2303 | 2491 | 2585 | 2773 | 2867 | 3055 | 3149 | 3337 | 3431 | 3619 | 3713 | 3901 | 3995 | 4183 | 4277 | |
| 265 | 371 | 583 | 689 | 901 | 1007 | 1219 | 1325 | 1537 | 1643 | 1855 | 1961 | 2173 | 2279 | 2491 | 2597 | 2809 | 2915 | 3127 | 3233 | 3445 | 3551 | 3763 | 3869 | 4081 | 4187 | 4399 | 4505 | 4717 | 4823 | |
| 295 | 413 | 649 | 767 | 1003 | 1121 | 1357 | 1475 | 1711 | 1829 | 2065 | 2183 | 2419 | 2537 | 2773 | 2891 | 3127 | 3245 | 3481 | 3599 | 3835 | 3953 | 4189 | 4307 | 4543 | 4661 | 4897 | 5015 | 5251 | 5369 | |
| | | | | | | | | | | | | | | ... | | | | | | | | | | | | | | | | |

- определяющие числа
- не определяющие числа
- ведущие числа
- ведущее число, являющееся не определяющим

Пусть $f(n) \equiv 3n + \frac{3-(-1)^n}{2}$ есть общий член последовательности $(f(n))_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1.1. $(\forall k, n \in \mathrm{N})\,(a(k;n) = p(k) \cdot f(n))$.

При доказательстве теоремы 1.1 используется [1].

Определение 1.1. Элемент $a(k;n)$ матрицы $T$ называется определяющим ($a(k;n) \in D_T$), если:

$$5 \not| a(k;n) \quad \wedge \quad (\exists p_1, p_2 \in \mathrm{P})\,(a(k;n) = p_1 \cdot p_2)\,. \tag{1}$$

Определение 1.2. Элемент $a(k;n)$ матрицы $T$ называется не определяющим ($a(k;n) \in nD_T$), если он не удовлетворяет условию (1).

Определение 1.3. Элемент $a(k;n)$ матрицы $T$ называется ведущим ($a(k;n) \in \mathrm{M}_T$), если

$$a(k;n) = p^2(k).$$

Определение 1.4. $T$-матрицей назовём матрицу из определяющих и не определяющих элементов.

Лемма 1.2. $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность из всех чисел вида $6h \pm 1$:

$$5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 25;\ \dots;\ 6h-1;\ 6h+1;\dots.$$

## 2. Простейшие свойства матрицы $T$ определяющих и не определяющих элементов

Свойство 2.1. Матрица $T$ является матрицей бесконечного порядка.

Свойство 2.2. $rang(T) = 1$, $\det(T) = 0$.

Свойство 2.3. $(\forall n \in \mathrm{N})\,(a(1;n) \in nD_T) \ \wedge\ a(1;1) \in \mathrm{M}_T$.

Свойство 2.4. Существует ведущий элемент, не лежащий на главной диагонали $T$-матрицы.

Свойство 2.5. $D_T \bigcap nD_T = \varnothing$, $M_T \bigcap nD_T = \{25\}$.

Свойство 2.6. Последовательность $\left(p^2(k)\right)_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей.

Свойство 2.7. Все определяющие элементы матрицы $T$ являются полупростыми.

## 3. Основные теоремы об элементах матрицы $T$

Лемма 3.1. $\left(\forall b \in \widetilde{T}\right)(\exists h \in \mathrm{N})\,(b = 6h+1 \ \vee\ b = 6h-1)$.

Лемма 3.2. $(\forall k \in \mathrm{N})\,(\exists! n \in \mathrm{N})\,(a(k;n) \in \mathrm{M}_T)$.

Теорема 3.3. $(\forall k, n \in \mathrm{N})\,(a(k;n) \in \mathrm{M}_T \ \Leftrightarrow\ a(k;1) = a(1;n))$.

Теорема 3.4 (о столбцах из не определяющих элементов матрицы $T$).

$$(\forall n \in \mathrm{N})\,((\exists k \in \mathrm{N})\,(k > 1 \ \wedge\ a(k;n) \in nD_T) \ \Leftrightarrow\ (\forall r \in \mathrm{N})\,(a(r;n) \in nD_T)).$$

Следствие 3.5 (о подстолбцах из определяющих элементов матрицы $T$).

$$(\forall n \in \mathrm{N})\,((\exists r \in \mathrm{N})\,(a(r;n) \in D_T) \ \Leftrightarrow\ (\forall k \in \mathrm{N})\,(k > 1 \ \Rightarrow\ a(k;n) \in D_T)).$$

Лемма 3.6. $(\forall n \in \mathrm{N})\,((\exists r \in \mathrm{N})\,(a(r;n) \in D_T) \ \Rightarrow\ (\exists! k \in \mathrm{N})\,(a(k;n) \in \mathrm{M}_T))$.

Лемма 3.7. $(\forall n \in \mathrm{N}\backslash\{1\})\,((\exists r \in \mathrm{N})\,(a(r;n) \in D_T) \ \Leftrightarrow\ f(n) \in \mathrm{P})$.

Теорема 3.8. Множества $\widetilde{T}$, $\mathrm{M}_T$, $nD_T$, $D_T$, $D_{T,6h+1}$, $D_{T,6h-1}$, $nD_{T,6h+1}$, $nD_{T,6h-1}$ счётны, где:

$\widetilde{T}$– множество всех элементов матрицы $T$;

$D_{T,6h+1}$ – множество всех определяющих элементов матрицы $T$ вида $6h+1$;

$D_{T,6h-1}$ – множество всех определяющих элементов матрицы $T$ вида $6h-1$;

$nD_{T,6h+1}$ – множество всех не определяющих элементов матрицы $T$ вида $6h+1$;

$nD_{T,6h-1}$ – множество всех не определяющих элементов матрицы $T$ вида $6h-1$.

Теорема 3.9. Пусть $\#_k(a)$ – номер элемента $a$ в $k$-строке матрицы $T$. Тогда:

$$(\forall k; n \in \mathrm{N})\left(\, p^2(k) < a(k;n) \ \wedge\ a(k;n) \in D_T \ \Rightarrow\right.$$
$$\left.\Rightarrow (\exists j \in \mathrm{N})\left(k < j \ \wedge\ a(k;n) < p^2(j) \ \wedge\ a(j;\#_k(p^2(k))) = a(k;n) \ \wedge\ a(j;n) = p^2(j)\right)\right).$$

Теорема 3.10. Если в матрице $T^*$ между любыми двумя столбцами $A$ и $B$, состоящими из не определяющих элементов, имеется $m > 1$ подряд идущих столбцов $C_1, ..., C_m$, состоящих из определяющих элементов, то между столбцами $A$ и $B$ существует квадратная вырожденная подматрица $T'$ конечного порядка $m$ матрицы $T^*$, на главной диагонали которой лежат ведущие элементы.

Пусть $\pi(x)$ – функция, равная числу простых чисел, не превосходящих числа $x \in \mathrm{R}$; $\pi_{\mathrm{M}_T}(x)$ – функция, равная числу ведущих элементов матрицы $T$, не превосходящих числа $x \in \mathrm{R}$.

Свойство 3.11. $(\forall x \in \mathrm{R})\,(x \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \pi_{\mathrm{M}_T}(x) = \pi_{\mathrm{M}_T}(\lfloor x \rfloor))$.

Теорема 3.12. $(\forall x \in \mathrm{R})\left(x \geqslant 3 \;\Rightarrow\; \pi(x) = \pi_{\mathrm{M}_T}\left(x^2\right) + 2\right)$.

Теорема 3.13. $(\forall x \in \mathrm{R})\left(x^2 \geqslant 3 \;\Rightarrow\; \pi\left((x+1)^2\right) - \pi\left(x^2\right) = \pi_{\mathrm{M}_T}\left((x+1)^4\right) - \pi_{\mathrm{M}_T}\left(x^4\right)\right)$.

Утверждение 3.14. Существуют 2 постоянные числа $a$ и $A$, такие, что $0 < a < 1$, $A > 1$ и для всех $x \geqslant 9$ выполняются неравенства:

$$\log_x\left(\frac{e^{2\cdot a\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right) < \pi_{\mathrm{M}_T}(x) < \log_x\left(\frac{e^{2\cdot A\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right).$$

При доказательстве утверждения 3.14 используется статья [2].

Следствие 3.15. Существуют 2 положительные постоянные числа $b$ и $B$, такие, что для всех $k \in \mathrm{N}$ имеет место соотношение:

$$b \cdot (k+2)^2 \cdot \ln^2(k+2) < p^2(k) < B \cdot (k+2)^2 \cdot \ln^2(k+2),$$

где $p^2(k)$ – ведущий элемент $k$-строки матрицы $T$.

С верхними и нижними оценками $n$-ого простого числа при разных условиях, заданных для числа $n$, можно ознакомиться в статьях [3]-[5].

Утверждение 3.16. 1) $\log_x\left(\frac{e^{2\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right) < \pi_{\mathrm{M}_T}(x) < \log_x\left(\frac{e^{2.51012\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right)$, $x \geqslant 289$.

2) $\log_x\left(\frac{e^{2\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right) < \pi_{\mathrm{M}_T}(x) \leqslant \log_x\left(\frac{e^{2.2112\ldots\cdot\sqrt{x}}}{x^2}\right)$ при достаточно больших $x$.

При доказательстве утверждения 3.16 используются статьи [6], [7].

Утверждение 3.17. $\pi_{\mathrm{M}_T}(x) \sim \frac{2\sqrt{x}}{\ln x}$ $(x \to \infty)$.

Следствие 3.18. $\pi(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \pi_{\mathrm{M}_T}(x)$ $(x \to \infty)$.

При доказательстве утверждения 3.17 и следствия 3.18 используется [8].

## 4. Алгоритм получения всех простых чисел, не превышающих заданное натуральное число, на основе $T$-матрицы

В дальнейшем, $a\%b$ будет означать остаток от деления числа $a \in \mathrm{N}$ на число $b \in \mathrm{N}$.

**Описание алгоритма №1. Входные данные:** $n \in \mathrm{N}$: $n \geqslant 5$. Числа 2 и 3 изначально будем считать простыми, так как их нельзя представить в виде $6r \pm 1$, $r \in \mathrm{N}$.

**Шаг 1.** Выписать подряд все числа $6r - 1$; $6r + 1$, где $r \in \mathrm{N}$ – номер пары, не превышающие заданное число $n$. Полученный массив чисел обозначим через $pr$. Пусть переменная $p$ изначально равна $p(1)$ – третьему простому числу.

**Шаг 2.** Проверяем условия: 1) Если $p^2 > x$, то алгоритм останавливается.

**Выходные данные:** список всех простых чисел, не превышающих $n$.

2) Если $p\%6 = 5$, то зачеркнуть в массиве $pr$ числа, начиная с ведущего элемента $p^2$:

$$p^2,\, p^2 + 2p,\, p^2 + 2p + 4p,\, p^2 + 2p + 4p + 2p,\, p^2 + 2p + 4p + 2p + 4p,\, \ldots \leqslant n.$$

Все зачёркнутые числа (5.1) увеличиваются на единицу в массиве $pr$. Переход к шагу 3.

3) Если $p\%6 = 1$, то зачеркнуть в массиве $pr$ числа, начиная с ведущего элемента $p^2$:

$$p^2,\, p^2 + 4p,\, p^2 + 4p + 2p,\, p^2 + 4p + 2p + 4p,\, p^2 + 4p + 2p + 4p + 2p,\, \ldots \leqslant n.$$

Все зачёркнутые числа (5.2) увеличиваются на единицу в массиве $pr$. Переход к шагу 3.

**Шаг 3.** Найти первое незачёркнутое число в массиве $pr$, большее чем $p$, и присвоить значению переменной $p$ это число. Переход к шагу 2.

Теорема 4.1. $(\forall b \notin \mathrm{P})\left((\exists h \in \mathrm{N})\,(b = 6h+1 \ \vee \ b = 6h-1) \ \Rightarrow \ b \in \widetilde{T}\right)$.

Утверждение 4.2. Асимптотическая временная сложность алгоритма №1 равна $O(n \cdot \ln(\ln(n)))$.

Утверждение 4.3. При заданном числе $n \in \mathrm{N}$, где $n \geqslant 5$, на каждом шаге 2,$k$ алгоритма №1:

1) если $p(k)\%6 = 5$, то в $k$-строке матрицы $T$ зачёркиваемые элементы имеют вид

$$p^2(k) + (f(j) - 5) \cdot p(k), \ j = \overline{1; m_k(n)}.$$

2) если $p(k)\%6 = 1$, то в $k$-строке матрицы $T$ зачёркиваемые элементы имеют вид

$$p^2(k) + (f(j) + (-1)^j - 4) \cdot p(k), \ j = \overline{1; m_k(n)}.$$

Здесь $m_k(n)$ – количество зачёркиваемых составных чисел, не превышающих число $n$, на шаге 2, $k$.

Утверждение 4.4. $C(n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n\%6}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n\%6}{5} \right\rfloor$, где $C(n)$ – ёмкостная сложность алгоритма №1 при заданном числе $n \in \mathrm{N}$: $n \geqslant 5$.

Следствие 4.5. $C(n) = O(n)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Семенов И. Л. Антье и мантисса. Сборник задач с решениями / Под ред. Е. В. Хорошиловой. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. 432 с.

2. Бухштаб А.А. Теория чисел, М., Просвещение, 1966.

3. P. Dusart, Estimates of some functions over primes without R.H., arXiv: 1002.0442 (February 2, 2010).

4. Dusart P. 1999. “The $k$th prime is greater than $k(\log k + \log\log k - 1)$ for $k \geqslant 2$”. Mathematics of Computation. 68 (225): 411–415. doi:10.1090/S0025-5718-99-01037-6. MR 1620223.13.

5. Rosser J. B. “The $n$-th Prime is Greater than $n \log n$”. Proceedings of the London Mathematical Society 45, 21-44, 1939.

6. Чебышев П.Л. О простых числах // Полное собрание сочинений. Т.1. М. – Л.: АН СССР, 1944. с. 191-207.

7. J.B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois. J. Math. 6 (1962), 64–94.

8. Ингам А.Э. Распределение простых чисел. М.: Едиториал УРСС, 2005.

УДК 511

# Тригонометрические суммы, квантовые вентили и квантование второго уровня

**Н. М. Глазунов (Украина, г. Киев)**
Национальный авиационный университет
e-mail: glanm@yahoo.com

# Trigonometric sums, quantum gates and second level quantization

**N. M. Glazunov (Ukraine, Kiev)**
National Aviation University
e-mail: glanm@yahoo.com

Работы Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева, С.Б. Стечкина, памяти которых посвящена конференция и предлагаемое сообщение, относятся к исследованию поведения арифметических функций на полугруппах, развитию дисперсионного метода Турана-Линника, оценкам рациональных тригонометрических сумм, теории линейно-реккурентных последовательностей над конечными полями, теории степенных и тригонометрических рядов, новым оценкам для нулей дзета-функции Римана, другим задачам аналитической и вероятностной теории чисел, алгебры и анализа.

При исследовании задач представления, преобразования и передачи квантовой информации применяется широкий спектр математических методов, в том числе теоретико-числовых, алгебраических, аналитических и вероятностных.

В предлагаемом сообщении описывается применение тригонометрических сумм и ряда алгебраических и аналитических конструкций для представления и обработки квантовой информации. Мы представляем обзор приложений тригонометрических сумм при обработке и передаче квантовой информации и исследуем возможные расширения этого подхода. План сообщения следующий.

I. Тригонометрические суммы и квантовая информация.

II. Квантовые вентили, квантовые схемы и тригонометрические суммы.

III. Дискретный вариант интегралов по траекториям.

IV. Квантовые каналы и их суперпозиция.

## 1. Тригонометрические суммы и квантовая информация

Напомним, что тригонометрические сумм использовались ещё Лежандром и другими для представления числа решений алгебраических уравнений в простых конечных полях через суммы символов Лежанлра. Алгебро-геометрической развитие исследований представлено формулами следа Гротендика-Лефшеца, Н. Каца (N. Katz), и других. Для тригонометрические сумм с произвольными характерами Дирихле, и для более общих тригонометрические сумм используют оценки. Найденные И.М. Виноградовым [1] методы оценки тригонометрических сумм (тригсумм) вида (в простейших случаях)

$$\sum_{\Omega}\sum \xi(u)\eta(v)\Phi(u,v)$$

где $\Phi(u,v) = e^{2\pi i f(u,v)}, f(u,v)-$ - вещественная функция, двойное суммирование распространяется на целые точки области $\Omega$, методы оценки сумм Вейля

$$T(\alpha_n, \dots \alpha_1) = \sum_{0<x<P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}$$

на основе “теоремы о среднем” И.М. Виноградов, методы оценки сумм

$$T'(\alpha_n, \dots \alpha_1) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)},$$

где суммирование идет по простым числам, позволили решить ряд классических проблем теории чисел. Метод тригсумм нашел приложения в исследовани и других фундаментальный и прикладных задач [2, 3, 4]. В [2] описано применение оценок тригсумм совместно с методами теории вероятностей в квантовой статистике и для решения задач с растущим числом слагаемых, а также представлены результаты Б.М. Бредихина и С.Б. Стечкина.

Р. Фейнман предложил использовать квантовую механику для эффективизации (квантовых) вычислений; Ю.И. Манин предложил элементы математических основ квантового компъютинга.

Элементарной единицей квантовой информации является кубит, квантовая система с двумя состояниями, базисные состояния которой $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (в обозначениях Дирака) соответствуют двоичным 0 и 1. Квантовая информация кодируется массивами кубитов, а элементарные преобразования квантовой информации ревлизуются квантовыми вентилями [5, 6]. Теоретико-групповые методы преобразования квантовой информации связаны с группами Паули и Клиффорда. Двумерная единичная матрица $\sigma_0$ и матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_e, \sigma_z$ [6] образуют базис пространства операторов плотности одного кубита.Для массивов из $n$ кубитов используют группу Паули, определяемую как

$$\mathbb{P}_n = \{e^{i\theta\pi/2}\sigma_{j1} \otimes \dots \otimes \sigma_{jn} | \theta = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3\}$$

и группу Клиффорда, определяемую как нормализатор группы Паули:

$$\mathbb{C}_n = \{V \in \mathbb{U}_{2^n} | V\mathbb{P}_n V^\dagger = \mathbb{P}_n\}.$$

## 2. Квантовые вентили, квантовые схемы и тригонометрические суммы

Ниже, когда мы говорим о вентилях и схемах, мы понимаем квантовые вентили и схемы, если не оговорено противное. Для обработки квантовой информации используется квантовое преобразование Фурье, вентили Адамара, которые являются однокубитовым квантовым преобразованием Фурье, вентили Тоффоли, которые являются универсальными вентилями с тремя входами и тремя выходами, вентили Клиффорда, которые являются элементами группы Клиффорда, и другие. Схемы строятся на основе вентилей. По схеме вычисляется амплитуда вероятности перехода. В работах [7, 8] продемонстрировано, как такие амплитуда вероятности могут быть вычислены посредством вычисления решений в соответствующих полях и кольцах соответствующих (систем) алгебраических уравнений над этими полями и кольцами.Тригонометрические суммы и их оценки возникают в этом контексте. Учитывается простота реализации и вычислительная эффективность.

## 3. Дискретный вариант интегралов по траекториям

Амплитуды вероятностей вычисляются на основе дискретного варианта интегралов по траекториям. Вариант дискретного метода интегралов по траекториям для конечномерного унитарного пространства $\mathcal{H}$, соответствующего пространству внутренних состояний исследуемой квантовой системе, может быть представлен следующими формулами (ниже мы используем обозначения линейной алгебры: $(\varphi, \psi)$ обозначает эрмитово положительно определенное

скалярное произведение векторов состояний $\varphi$ и $\psi$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ есть конечномерный ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда $\varphi \in \mathcal{H}$ представляется в виде

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} (\varphi, \varphi_j)\varphi_j.$$

Для $\psi \in \mathcal{H},\ r \geqslant 1$ выводят

$$(\varphi, \psi) = \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{n} (\varphi, \varphi_{j_1})(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}) \cdots (\varphi_r, \psi),$$

где суммирование идет по всем классическим траекториям одинаковой длины.

## 4. Квантовые каналы и их суперпозиция

Исследования квантовые каналов и их суперпозиции представлено в работах [5, 9] и в ссылках в них.

В сообщении планируется использовать также [10, 12, 11] и их развитие.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980. 120 с.

2. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. 416 с.

3. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. — М.: Наука, 1989. 237 с.

4. Чубариков В. Н.,Простые числа, дзета-функция Римана и тригонометрические суммы // Математический ин-т Стеклова РАН. 2011. [Электронный ресурс], Режим доступа: http://youtu/

5. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. — М.: МЦНМО, 2010. 328 с.

6. Havel T., Doran C. Geometric Algebra in Quantum Information Processing // Contamporery Mathematics. 2019. Том 306. С. 81-100.

7. Dawson C. M., Haselgrove H. L., Hines A. P., Mortimer D., Nielsen M. A., Osborne T. Quantum computing and polynomial equations over the finite field Z2. [Электронный ресурс], Режим доступа: http://arXiv:quant-ph/0408129.

8. Bacon D., van Dam W., Russell A., Analyzing algebraic quantum circuits using exponential sums [Электронный ресурс], Режим доступа: `https://www.researchgate.net/publication/255664199`

9. Chiribella C., Kristjansson H. Quantum Shannon theory with superpositions of trajectories // Proceedings of the Royal Society. 2019. Том A, № 475. С. 1-25.

10. Glazunov N. M. Stochastic properties of dynamical systems arising from (quantum) spaces and actions of (quantum) groups // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). 2018. Vol. 3. C. 395-401.

11. Glazunov N. M. // 20-th International Workshop on Computer Algebra: тезисы докладов, (JINR. Dubna 2017 г.) — Дубна, 2017. P. 23.

12. Glazunov N. M. Arithmetic statistics, probabilities and Langlands correspondence // Int. Conf. «Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017)», Procedings. — Moscow, 2017. P. 220-225.

---

УДК 512.548.7, 519.716.39

# О применении грамматик с правым контекстом в статическом анализе исходного кода программ

**А. А. Державин (г. Долгопрудный)**
Московский физико-технический институт
derzhavin@frtk.ru
**Н. Н. Ефанов (г. Долгопрудный)**
Moscow Institute of Physics and Technology
nefanov90@gmail.com

# An algorithm for generation of proper families of functions

**A. A. Derzhavin (Dolgoprudny)**
Московский физико-технический институт
derzhavin@frtk.ru
**N. N. Efanov (Dolgoprudny)**
Moscow Institute of Physics and Technology
nefanov90@gmail.com

Формальные грамматики, задающие всевозможные языки, были разделены Хомским на 4 класса. При описании некоторых языков программирования достаочно часто используется класс таких грамматик, называемый *контекстно – свободными* грамматиками. У данного класса грамматик есть сложности с описанием некоторых конструкций, что приводит к неоптимальному проведению статического анализа кода. Такие проблемы может решить более широкий класс грамматик, называемый *контекстно-зависимые* грамматики. В качестве языка для кейсов будет использоваться $C++$.

## 1. Мягко контекстно-зависимые грамматики

Мягко контекстно – зависимые грамматики – это класс грамматик, лежащих между типами КС и КЗ иерархии Хомского[1]. Для многих грамматик данного класса существуют вычислительно эффективные алгоритмы разбора [2].

В частности, к классу МКЗ относятся грамматики с контекстами, введённые Михаилом Барашем [1]. Данные грамматики являются расширением КС-грамматик, для которых введены операторы проверки контекста: $\lhd, \unlhd, \rhd, \unrhd$. Символ без дополнительной черты проверяет наличие правила в соответствующем контексте. Символ с дополнительной чертой проверяет наличие правила в соответствующем контексте, объединённом с текущей строкой.

Для примера можно рассмотреть следующий набор правил:

$$A \to BC \,\&\, \lhd D$$

$$B \to b$$

$$C \to c$$

$$D \to d$$

Первое правило определяет строку вида $BC$, которой должна предшествовать строка формы $D$. Таким образом, строка $w = dbc\ldots$ имеет правило $A$, а строка $w' = abc$ такого правила уже не имеет.

## 2. Применение грамматик с правым контекстом

Рассмотрим две конструкции:

1. Не заходить в ветку условного оператора

```
bool IsSomething;
...
IsSomething = false;
...
if (IsSomething)
{
...
}
```

Данный участок кода можно описать правилами вида:

$$S \to Assn\,\&\ \rhd \{ANY\}\ IF\ \{ANY\}\ \&\ \unrhd C\,\text{"}\,)\text{"}\ \{ANY\}$$

$$Assn \to Identifier\,tEqual\,keyWordFalse\,tSemicolon$$

$$IF \to keyWordIf\,\text{"}(\text{"}\ Identifier\,\text{"}\,)\text{"}$$

$$Identifier \to Sym\,SymOrDigitString$$

$$SymOrDigitString \to SymOrDigit\ \ SymOrDigitString \mid \varepsilon$$

$$Sym \to A - Z \mid a - z$$

$$SymOrDigit \to Sym \mid 0 - 9$$

Нетерминал $C$ проверяет совпадение идентификаторов в условном операторе и в присваивании. В силу своей грмоздкости здесь не приведён.

2. Проверка наличия обращения к динамической памяти при её выделении.

```
int *ptr = new int(10);
...
*ptr = 10; // any appeal to memory
...
delete ptr;
```

Данную конструкцию можно описать правилами вида:

$$S \to NEW\,\&\ \rhd \{ANY\}\ DEL\ \{ANY\}\ \&\ \unrhd C'\,\text{"}\,)\text{"}\ \{ANY\}$$

$$DEL \to Identifier\ \{ANY\}\ keyWordDelete\,Identifier\,tSemicolon$$

$$NEW \to Identifier\, tEqual\, keyWordNew\, Typename$$

$$Identifier \to Sym\, SymOrDigitString$$

$$SymOrDigitString \to SymOrDigit\ \ SymOrDigitString \mid \varepsilon$$

$$Sym \to A - Z \mid a - z$$

$$SymOrDigit \to Sym \mid 0 - 9$$

Нетерминал $C'$ проверяет совпадение идентификатора в трёх местах: оператор выделения, обращение к памяти и оператор освобождения памяти. В силу громоздкости также не приведён.

В работе произведена проверка леммы о накачке для подобных конструкций.

Эти и другие конструкции, описываемые соответствующими языками с контекстами, обсуждаются в работе с целью построения языкового средства статического анализа программ на C++ с поддержкой извлечения семантики непосредственно на стадии синтаксического анализа.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barash M. Defining Contexts in Context – Free Grammars // 2015

2. Bordihn H. (2004) Mildly Context-Sensitive Grammars. In: Martín-Vide C. , Mitrana V. , Păun G. (eds) Formal Languages and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 148. Springer, Berlin, Heidelberg.

---

УДК 519.1

# Реляционная алгебра и матроиды

**А. Н. Исаченко (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский государственный университет
e-mail: isachenkoan@mail.ru

# Relational algebra and matroids

**A. N. Isachenko (Belarus, Minsk)**
Belarusian State University
e-mail: isachenkoan@mail.ru

В настоящем сообщении вводится понятие зависимости по множеству атрибутов для кортежей отношений реляционной алгебры и рассматриваются матроиды, возникающие на основе этого понятия. Отметим, что матроиды, как объект исследования, появляются во многих разделах математики: алгебре, комбинаторике, дискретной математике, теории графов, криптографии, теории игр. Введение в рассмотрение матроидов отношений реляционной алгебры имеет важное прикладное значение, поскольку реляционная алгебра и реляционное исчисление является основой реляционной модели данных и реляционных баз данных [1].

Реляционная алгебра - замкнутая система операций над отношениями. Отношение задаётся на схеме отношений $R = (U)$, определённой на множестве атрибутов $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

с доменами $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и ключами $K_1, K_2, \ldots, K_p$. Отношение $\underline{R}(S)$ это совокупность кортежей $S \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$. В отношении не могут присутствовать совпадающие кортежи. Отношение $\underline{R}(S)$ имеет своё множество ключей, не обязательно совпадающее с множеством ключей схемы $R$. В составе реляционной алгебры можно выделить несколько вариантов наборов операций, через который можно выразить все остальные операции. Наиболее известный и строго определённый вариант дан Дейтом К. [2].

Теория матроидов возникла на основе обобщения понятий линеной алгебры. Существует несколько эквивалентных определений матроида, каждое из которых даётся с использованием определённого понятия (независимого множества, базы, рага, цикла, замыкания, отношения зависимости, плоскости и т.д.), вытекающего из предыдущего [3]. Подобная ситуация рассматривается как криптоморфизм определений [4]. Всего существует, по крайней мере. двадцать два понятия, позволяющие дать эквивалентные определения матроида [5-7].

Приведём определение матроида в терминологии независимых множеств, баз и отношения зависимости.

Пара $(S, F)$, где $S$ конечное множество элементов, а $F \subseteq 2^S$ называется матроидом, если выполняются следующие условия (аксиомы независимости):

$(i1)$ $\oslash \in F$;

$(i2)$ если $A \subset B$ и $B \in F$, то $A \in F$;

$(i3)$ если $A, B \in F$ и $|A| = |B| + 1$, то найдется $a \in A \setminus B$ такое, что $B \cup a \in F$.

Подмножества из $F$ называются независимыми, из $2^S \setminus F$ зависимыми. Ранг $\rho(A)$ подмножества $A \in 2^S$ в матроиде $(S, F)$ определяется как мощность максимального независимого множества, содержащегося в $A$. Максимальное по включению независимое множество называется базой, минимальное по включению зависимое множество – циклом матроида.

Матроид это пара $(S, F(S))$, где $S$ - некоторое конечное множество элементов, а $F(S)$ - непустое семейство подмножеств из $2^S$, для которого выполняется следующее условие (аксиома баз):

$(b)$ если $B_1, B_2 \in B(S)$ и $x \in B_1 \setminus B_2$, то существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такое, что $(B_1 \setminus x) \cup y \in B(S)$.

Элемент $e \in S$ зависит от множества $A \in 2^S$, обозначим $e \sim A$, если $\rho(A \cup e) = \rho(A)$. Для зависимости сформулируем следующие три свойства (аксиомы зависимости):

$(d1)$ $x \sim X$ при $x \in X$;

$(d2)$ если $x \sim Y$, $|Y| \geq 1$ и $x \nsim Y \setminus y$ для некоторого $y \in Y$, то $y \sim (Y \setminus y) \cup x$;

$(d3)$ если $x \sim Y$ и для каждого $y \in Y$ выполняется $y \sim Z$, то $x \sim Z$.

Матроид можно определить как пару $(S, \sim)$, где $\sim$ соотношение между элементами множества $S$ и подмножествами из $2^S$, удовлетворяющее аксиомам зависимости.

Введём для отношения $\underline{R}(S)$ понятие зависимости между кортежами по подмножеству атрибутов. Пусть $A \subseteq U$, $X \subseteq S$ и $z \in S$. Кортеж $z$ зависит от $X$ по множеству атрибутов $A$, обозначим $z \sim_A X$, если выполняется включение $\pi_A(z) \in \pi_A(X)$ или эквивалентно, если $\pi_A(z) = \pi_A(x)$ для некоторого $x \in X$. Здесь $\pi_A$ операция проекции на подмножество атрибутов $A$. Для зависимости по подмножеству атрибутов выполняются те же три аксиомы зависимости:

$(d_A1)$ $x \sim_A X$ при $x \in X$;

$(d_A2)$ если $x \sim_A Y$, $|Y| \geq 1$ и $x \nsim_A Y \setminus y$ для некоторого $y \in Y$, то $y \sim_A (Y \setminus y) \cup x$;

$(d_A3)$ если $x \sim_A Y$ и для каждого $y \in Y$ выполняется $y \sim_A Z$, то $x \sim_A Z$.

Справедливость выше приведенных свойств вытекает непостредственно из определения зависимости по подмножеству атрибутов $A$. Таким образом справедлива

Теорема 1. *Для отношения $\underline{R}(S)$ на схеме $R = (U)$ и подмножества атрибутов $A \subseteq U$ пара $(S, \sim_A)$ является матроидом.*

Напомним, что ключ для отношения это минимальный по включению набор атрибутов, значения которых однозначно идентифицируют кортеж. Возьмём подмножество атрибутов

$A \subseteq U$. Определим семейство $B(A)$ подмножеств $X \subseteq S$ таких, что $A$ является ключом $X$, но для любого $x \in S \setminus X$ подмножество $A$ не является ключом $X \cup x$. Другими словами $X$ является максимальным по включению относительно ключа $A$. Семейство $B(A)$ будет являться семейством баз матроида $(S, \sim_A)$. То есть справедлива эквивалентная теореме 1

Теорема 2. *Для отношения $\underline{R}(S)$ на схеме $R = (U)$ и подмножества атрибутов $A \subseteq U$ пара $(S, B(A))$ является матроидом с семейством баз $B(A)$.*

Семейство независимых подмножеств кортежей матроида $(S, B(A))$ определяется следующим образом: $F(A) = \{X \subseteq S | \exists Y \in B(A), X \subseteq Y\}$. Или эквивалентно $F(A)$ это все те подмножества из $S$, для которых $A$ является ключём или суперключём (множество, содержащее ключ).

Теорема 3. *Для отношения $\underline{R}(S)$ на схеме $R = (U)$ и подмножества атрибутов $A \subseteq U$ пара $(S, F(A))$ является матроидом с семейством независимых подмножеств $F(A)$.*

Для матроида $(S, F(A))$ справедливы следующие свойства.

1. Каждый цикл матроида $(S, F(A))$ образован двумя параллельными элементами, а именно, двумя совпадающими по проекции $\pi_A$ кортежами.

2. У матроида $(S, F(S))$ либо $F(S) = \{\oslash\}$, если $S \neq K_i, 1 \leq i \leq p$, либо $F(S) = 2^S$, если $S$ единственный ключ $\underline{R}(S)$.

Аналогичные свойства имеют место для ключей схемы $R$ и ключей отношения $\underline{R}(A)$.

3. Если $A = K_i$ для некоторого $i$, $1 \leq i \leq p$, то у матроида $(S, F(K_i))$ либо $F(K_i) = \{\oslash\}$, если $K_i$ не является ключом отношения $\underline{R}(S)$, либо $F(K_i) = 2^S$, если $K_i$ ключ $\underline{R}(S)$.

4. Если $A \supset K_i$ для некоторого $i$, $1 \leq i \leq p$, то у матроида $(S, F(A))$ семейство $F(A) = \{\oslash\}$.

Другими словами, в условиях свойств 2,3, матроид $(S, F(A))$ является либо однородным матроидом ранга 0, либо свободным матроидом, а в условиях свойства 4 - однородным матроидом ранга 0.

5. $(S, F(A))$ является трансверсальным матроидом.

Действительно, построим двудольный граф $G = (E, V_1 \cup V_2)$ с вершинами первой доли $V_1$, соответствующими кортежам отношения $\underline{R}(S)$, и вершинами второй доли $V_2$, соответствующими кортежам проекции $\pi_A(S)$. Между множествами совершенных паросочетаний графа $G$ и базами матроида $(S, F(A))$ существует взаимно однозначное соответствие. С другой стороны, каждое совершенное паросочетание соответствует системе различных представителей на множестве кортежей отношения $\underline{R}(S)$.

Прикладное значение матроидов $(S, F(A))$ заключается в возможности их использования для оценки сложности процедур поиска в данном отношении подмножества кортежей, удовлетворяющего определённым заданным условиям. что существенно при проектировании информационных поисковых систем.

Например, рассмотрим следующую задачу. Пуст даны попарно не пересекающиеся подмножества атрибутов $A^j \subset \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $1 \leq j \leq m \leq n$. Необходимо найти максимальное множество кортежей, различающихся на совокупности атрибутов каждого из заданных подмножеств. Получим задачу поиска максимального множества, являющегося независимым в каждом из матроидов $(S, F(A^j))$, $1 \leq j \leq m \leq n$, то есть задачу на пересечении матроидов $(S, F(A^j))$, $1 \leq j \leq m \leq n$. Как известно [8], задача на пересечении матроидов полиномиально разрешима только при $m \leq 2$. Причём при $m = 1$ можно применить "жадный"алгоритм, при $m = 2$ алгоритм "чередующихся цепей".

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаченко А. Н., Бондаренко С. П. Модели данных и системы управлениябазами данных. — Минск : БГУ, 2007. 220 с.

2. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных. — 8-е изд. — М.: Вильямс, 2005. 1328 с.

3. Айгнер М. Комбинаторная теория.— М.: Мир, 1982. 558 с.

4. Rota G. -C. Indiscrete Thoughts. - Boston : Birkhäuser Boston, Inc., MA. 1997. 280 p.

5. Исаченко А. Н. Полиномиальная сводимость матроидных оракулов. Известия АН БССР, сер.физ.-мат.наук, №6, 1984. С. 33-36.

6. Исаченко А. Н., Ревякин А. М. О сводимость матроидных оракулов. «Вестник МГАДА». Серия «Философские, социальные и естественные науки» №3 (9). — М.: МГАДА, 2011. С. 117–121.

7. Исаченко А Н., Исаченко Я А. Периметр матроида и задача коммивояжера на матроиде // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5 – 9 ноября 2012 г. – Часть 4. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. С. 87-88.

8. Korte B. Hausmann D. An analysis of the greedy heuristic for independence systems. Annals of Discrete Mathematics, № 2, 1978. p. 65 -74.

---

УДК 519.724.2

# Передача информации в скрытом канале блужданий по плоскости

**И. Б. Казаков (Россия, г. Москва)**
МГУ им. Ломоносова
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

# Transmitting information in the covert channel of walks on a plane

**I. B. Kazakov (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

## 1. Введение

Скрытым каналом называется коммуникационный канал, пересылающий информацию методом, который изначально не был для этого предназначен. Это означает, что существуют злоумышленники, передающие информацию таким образом, что сторонние наблюдатели не могут зафиксировать сам факт передачи. Исторически первой работой, посвященной теории скрытых каналов, считается статья [1].

Конкретно в данном докладе, речь пойдет о скрытом канале блужданий по плоскости. Блуждания по плоскости изучаются в связи с задачей построения скрытых каналов через online-шутеры, то есть многопользовательские игры, где некий клиент может передавать игровому серверу команды о перемещении своего персонажа по плоскости, а другие клиенты могут получать от сервера данные о местоположении данного персонажа. Задача построения таких каналов исследовалась ранее, например, в [2]. Однако, в [2] не ставился вопрос о потере

информации, т.е. о ситуации, когда до других клиентов сервера доходят не все последовательные местоположения первого клиента.

Опишем способ передачи информации посредством блужданий по плоскости. Имеется игровое поле и два игрока: первый игрок движется по полю, а второй — наблюдает движение первого. Относительно этих движений принято следующее. Во-первых, время принимается дискретным, т.е. состоящим из последовательных тактов. Во-вторых, полагаем, что Алиса движется только лишь вдоль конечного числа направлений, отстоящих друг от друга на равные углы, причем может менять направление своего движения на каждом такте. Подразумевается, что она «всегда движется», т.е. не может покоиться. В третьих, скорость движения Алисы постоянна. Также зафиксируем некое «начальное местоположение».

Таким образом, как это было показано в [3], фактически Алиса движется по некотором счетному графу местоположений $G_{loc}$, на каждом такте переходя в смежную вершину. Далее, зафиксируем число $N$ и рассмотрим множество путей длины $N$ в $G_{loc}$, начинающиеся в ранее упомянутой начальной точке. Таковые пути будем называть траекториями.

На протяжении $N$ тактов Алиса движется по некоторой траектории, т.е. проходит последовательно $N$ соответствующих местоположений. Боб, в свою очередь, посредством анализа получаемых с сервера данных, на протяжении этих же $N$ тактов считывает местоположения Алисы. Полагаем, что Бобу удается считать местоположения Алисы не на всех прошедших тактах $\{1, 2, ..., N\}$, а только лишь на некоторых из них, т.е. на подмножестве $T \subset \{1, 2, 3, ...N\}$.

Для двух выбранных траекторий будем говорить, что они пересекаются на $i$-м такте, если на данном также совпадают соответствующие местоположения Алисы. Выбор множества $T$ тактов задает разбиение (или, иначе выражаясь, отношение эквивалентности) на множестве траекторий: две траектории считаются эквивалентными, если они пересекаются на всех тактах $i \in T$, т.е если Боб не может в этом случае отличить их друг от друга. Таким образом, соответственно подмножествам $\{1, 2, ..., N\}$, на траекториях определено $2^N$ разбиений. Кроме того, разбиению, соответствующему множеству $T$ возможно приписать вероятность $p_T$ того, что Боб «увидит Алису именно на тактах из $T$».

Далее, посредством абстрагирования от самих траекторий и конкретных определенных на них разбиений, была получена формальная модель, называемая структурой частичного стирания. Соответственно, имеется также канал частичного стирания, которой, таким образом, является «надстроенным» над каналом блужданий по плоскости. И, следовательно, можно говорить о протоколах передачи информации в указанном канале. В [4] рассматривался определенный класс таковых протоколов, называемый «схемой равномерного кодирования». Однако, как будет видно из дальнейшего формализованного изложения, указанный класс не исчерпывает собой все возможные протоколы. Настоящий доклад и посвящен изучению общего случая.

Представим далее основные понятия и обозначения, а также излагаемые в настоящем докладе результаты.

## 2. Основные понятия

Вышеупомянутое множество траекторий обозначается как $A$.

Определение 1. *Структура частичного стирания — тройка, состоящая из алфавита $A$, множества определённых на нем разбиений (отношений эквивалентности) $\mathfrak{T}$, а также приписанных данным разбиениям весов $p_T$, сумма которых принимается равной 1.*

Опишем теперь канал частичного стирания. Алиса отправляет Бобу символ $a \in A$. Боб получает лишь часть информации об отправленном символе: выбранное отношение эквивалентности $T$, а также класс $\pi_T(a)$ по данному отношению. Множество, всех пар $(\pi_T(a), T)$ обозначается как алфавит Боба $B$.

Определение 2. *Для символов $a \in A$, $b \in B$ полагаем $a \mapsto b$, если в структуре частичного стирания имеется разбиение $T$ такое, что $b = (\pi_T(a), T)$. Также, для слов $\alpha \in A^*, \beta \in B^*$ полагаем $\alpha \mapsto \beta$, если $|\alpha| = |\beta| = l$ и для всех $i = 1...l$ выполнено $\alpha(i) \mapsto \beta(i)$.*

У Алисы есть входная лента, а у Боба, соответственно, выходная лента. На входной ленте находятся символы некоторого алфавита $S$, которые считывает Алиса. Боб печатает на выходную ленту те же символы из $S$ плюс ещё один специальный символ $*$. Общая цель как Алисы, так Боба состоит в том, чтобы отпечатать на выходной ленте ту же самую последовательность символов, имеющуюся изначально на входной, при этом, может быть, заменяя некоторые символы алфавита $S$ на $*$.

Представим также описание вышеупомянутой схемы «равномерного кодирования». Прежде всего, зафиксировано некое число $n$ — длина кодового слова.

Определение 3. *Равномерный код — это инъективное отображение $K : S \to A^n$, т.е. каждому символу $s \in S$ поставлено в соответствие кодовое слово $\alpha_s$, $|\alpha_s| = n$*

Алиса, прочитав с ленты очередной символ $s \in S$, в течение последующих $n$ тактов выбрасывает слово $\alpha_s$, т.е. последовательно высылает по каналу символы $\alpha_s(1), ..., \alpha_s(n)$. Боб же в свою очередь, на протяжении этих тактов последовательно получает символы $\beta(1)...\beta(n)$, такие что $\beta(i) = (\pi_{T_i}(\alpha(i)), T_i)$, где $T_i$ — разбиение, выбранное на $i$-ом такте. Иначе говоря, совокупно Боб получает слово $\beta = \beta(1)...\beta(n)$, для которого $\alpha \mapsto \beta$.

Получив слово $\beta$, Боб принимает решение относительно того, какой именно символ из множества $S \cup \{*\}$ ему следует отпечатать на выходной ленте. Возможны два случая. Если имеется только один символ $s \in S$ такой, что $\alpha_s \mapsto \beta$, то именно его и следует отпечатать. Иначе, т.е. если таковых имеется несколько, то следует напечатать символ стирания $*$. Отдельно отметим, что существование хотя бы одного такого $s \in S$, для которого $\alpha_s \mapsto \beta$, гарантировано вышеопределенным поведением Алисы.

Таким образом, схема равномерного кодирования надстраивает поверх канала частичного стирания так называемый канал полного стирания. Соответствующая ему структура полного стирания — это некий алфавит $A'$, каждому символу которого приписана вероятность его замены на символ стирания $*$ в процессе передачи по указанному каналу. $A'$ — это ничто иное, как множество кодовых слов $\alpha_s$, $\forall s \in S$. Упомянутые вероятности, в свою очередь, определяются входящими в состав структуры частичного стирания вероятностями $p_T$.

## 3. Протокол в общем виде

Легко заметить, что рассмотренная выше схема «равномерного кодирования» не исчерпывает множества всех возможных протоколов, так как были приняты два упрощающих предположения. Во-первых, выбрасываемое Алисой слово не зависит от предыстории чтения с ленты, а во-вторых, выбрасываемые слова имеют одинаковую длину для всех символов $s \in S$. И, следовательно, если эти предположения отбросить, то естественным образом получается общее понятие протокола. В качестве $\Lambda$ обозначается пустое слово.

Определение 4. *Протокол — это пара $(F, G)$, состоящая из функции поведения Алисы $F : S^* \to A^*$ и функции поведения Боба $G : B^* \to S \cup \{*, \Lambda\}$. Наложено ограничение: $G(\Lambda) = \Lambda$*

Пусть Алиса только что прочитала с входной ленты очередной символ $s \in S$, предварительно считав слово $\hat{s} = s_1...s_m$ в предыстории. Тогда считаем, что Алиса выбрасывает слово $F(\hat{s}s)$. До первого чтения с ленты Алиса выбрасывает $F(\Lambda)$. Что касается Боба, то на каждом такте он получает некий символ $b \in B$. Получив указанный символ, он должен принять решение о том, что печатать на выходной ленте: или какой-нибудь символ из $s \in S \cup \{*\}$, или

же ничего не печатать. Полагаем, что если $G(\beta) \in S \cup \{*\}$, то Боб и печатает $G(\beta)$. Иначе, т.е. если $G(\beta) = \Lambda$, то Боб ничего не печатает.

В целях удобства изложения определим также производные функции $\hat{F}$, $\hat{G}$:

Определение 5. *Пусть $\hat{s} = s_1...s_m$. Тогда полагаем:*
$\hat{F}(\hat{s}) = F(\Lambda)F(s_1)F(s_1s_2)...F(s_1...s_m)$
$\hat{G}(\hat{s}) = G(\Lambda)G(s_1)...G(s_1...s_m)$

*При этом относительно конкатенации с «пустым символом» $\Lambda$ принимается: $\hat{s}\Lambda = \hat{s}$, $\Lambda\hat{s} = \hat{s}$*

## 4. Результаты

Прежде всего, распространим на общий случай упомянутое ранее требование корректности «отпечатать на выходной ленте то же самое содержание, каковое имеется изначально на входной, при этом, может быть, заменяя некоторые символы алфавита $S$ на символ стирания $*$». Для его формализации понадобится определить на словах из $(S \cup \{*\})^*$ соответствующий частичный порядок.

Определение 6. *Для слов $\hat{s_1}, \hat{s_2} \in (S \cup \{*\})^*$ полагаем $\hat{s_1} \preceq \hat{s_2}$, если выполнено $|\hat{s_1}| = |\hat{s_2}|$, и слово $\hat{s_1}$ получается из слова $\hat{s_2}$ заменой некоторых его символов на $*$.*

Поясним вышеупомянутое требование более точным образом. Пусть Алиса к некоторому моменту считала с входной ленты слово $\hat{s} \in S^*$, и следовательно, совокупно выбросила слово $\hat{F}(\hat{s})$. Боб, в свою очередь, должен получить слово $\beta \in B^*$, для которого выполнено $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$ и отпечатать на выходной ленте слово $\hat{G}(\beta)$. Данное требование означает, что $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{s}$.

Определение 7. *Протокол $(F, G)$ называется корректным, если из выполнения $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$ следует выполнение $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{s}$. Если $(F, G)$ — корректный протокол, то также будем говорить, что функция $G$ согласована с функцией $F$.*

Обозначим как $H_F$ множество слов $\beta \in B^*$, для каждого из которых найдется $\hat{s} \in S^*$ такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$.

Пусть дана произвольная функция поведения Алисы $F : S^* \to A^*$. Первый вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, формулируется следующим образом: «существует ли для данной функции поведения Алисы $F$ согласованная с ней функция поведения Боба $G$».

Предположим, что ответ на данный вопрос положителен. В этом случае таковых функций поведения Боба может быть несколько: т.е. могут иметься две функции $G_1, G_2$, согласованных с $F$.

На множестве согласованных с $F$ функций возможно определить частичный порядок, означающий, что одно поведение «лучше» другого. Это означает, что «худшее» поведение отпечатывает на выходной ленте то же самое, что и «лучшее», заменяя, может быть, некоторые символы на символ стирания $*$. Выражаясь более формально, для предварительно зафиксированной $F$ и согласованных с ней $G_1, G_2$ полагаем $G_1 \preceq G_2$, если для всех $\beta \in H_F$ выполнено $G_1(\beta) \preceq G_2(\beta)$.

Достаточно очевидно, что если имеется «лучшее» поведение, то для передачи информации следует использовать именно его, а не «худшее». Таким образом, вторым рассматриваемым вопросом является существование среди всех поведений Боба наилучшего, т.е. максимального по отношению $\preceq$.

Выразим представляемые в настоящем докладе результаты в виде следующих теорем:

Определение 8. *Функция поведения Алисы $F$ называется правильной, если из выполнения $\beta_1$ — префикс $\beta_2$, $\hat{F}(\hat{s_1}) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s_2}) \mapsto \beta_2$ следует выполнение $|\hat{s_1}| \leqslant |\hat{s_2}|$*

Теорема 1. *Пусть $(F, G)$ — корректный протокол. Тогда $F$ — правильная функция.*

Теорема 2. *Пусть $F$ — правильная функция. Тогда существует функция $G^F_{best}$ такая, что:*
*1) $(F, G^F_{best})$ — корректный протокол.*
*2) Пусть $(F, G)$ — корректный протокол. Тогда для любого слова $\beta \in H_F$ выполнено $G(\beta) \preceq G^F_{best}(\beta)$.*

Таким образом, на поставленные выше вопросы имеются следующие ответы. Во-первых, для функции поведения Алисы $F$ существует согласованная с ней функция поведения Боба $G$ тогда и только тогда, когда $F$ — правильная функция. Во-вторых, среди всех функций поведения Боба, согласованных с правильной функцией поведения Алисы, есть «наилучшая».

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Lampson B. W. A note on the confinement problem // Communications of ACM. 1973. Vol. 16, N. 10. P. 613 — 615.

2. Zander S., Armitage G., Branch P. Covert channels in multiplayer first person shooter online games // Proc. 33rd IEEE Conf. LCN. 2008. pp. 215 – 222.

3. Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Часть 1 // Программная инженерия. В печати.

4. Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Часть 2 // Программная инженерия. В печати.


---

# Spanoids, Greedoids, Violator Spaces and Implicational Bases


**Yu. Kempner (Israel)**
Holon Institute of Technology
e-mail: yuliak@hit.ac.il


## 1. Implicational systems

Dependencies between "attributes"arises in many areas such as relational databases, data analysis, data-mining, knowledge spaces and coding theory. Informally, implication $A \to q$ means that the knowledge of the attribute values in set $A$ determines the value for attribute $q$. One of formalizations of dependencies leads to the notion of full implicational systems (also known as dependence relations) which is in one-to-one correspondence with closure operators and closure systems. Our goal is to connect another combinatorial structures with implicational systems.

An *implicational system* $\Sigma$ on $E$ is a binary relation on $2^E : \Sigma \subseteq 2^E \times 2^E$. An ordered pair $(A, B) \in \Sigma$ is called an implication, and it is written $A \to B$. We will use $A \to b$ for $A \to \{b\}$. $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : \forall (A \to B) \in \Sigma : A \subseteq X \Rightarrow B \subseteq X\}$ - the family of subsets that "respect"all the implicational rules.

It is easy to show that this family is closed under intersection. Moreover, with any family $\Sigma$ of implications we can associate an operator $\tau_\Sigma$ obtained by the following iterations on $X \subseteq E$:

$\tau_\Sigma(X) = \pi(X) \cup \pi^2(X)...$, where $\pi(X) = X \cup \bigcup\{B | A \subseteq X \wedge A \to B\}$.

$\tau_\Sigma$ is a closure operator. Namely, it satisfies the following:
**C1**: $X \subseteq \tau_\Sigma(X)$ (extensivity),
**C2**: $X \subseteq Y \Rightarrow \tau_\Sigma(X) \subseteq \tau_\Sigma(Y)$ (isotonicity),
**C3**: $\tau_\Sigma(\tau_\Sigma(X)) = \tau_\Sigma(X)$ (idempotence).
In this situation $\mathcal{F} = \{X : \tau_\Sigma(X) = X\}$ - the family of $\Sigma$-closed sets.
An implicational system is called *a full implicational system* if it satisfies three properties:
1. Extension: $B \subseteq A \Rightarrow A \to B$
2. Transitivity: $A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$
3. Union: $A \to B, C \to D \Rightarrow (A \cup C) \to (B \cup D)$
A full implicational system is *direct*, i.e., $\tau_\Sigma(X) = \pi(X)$ for every $X \subseteq E$.
If $\tau$ is a closure operator on E, then the closed sets of $\tau$ coincide with the $\Sigma$-closed sets of the implicational system $\Sigma_\tau = \{A \to \tau(A) : A \subseteq E\}$. Moreover, $\tau = \tau_\Sigma$.

## 2. Spanoids

Spanoids were introduced in codding theory for locally correctable codes where for every codeword $c$ the value of $c_i$ is determined by the values of $c$ in coordinates $T$.

Definition 6. *[2] Let $E = [n]$. A family of pairs $T \to i$ , $T \subseteq E$, $i \in E$ is a spanoid $\mathcal{S}$ over $E$ if and only if*
***S1***: $i \in T \Rightarrow T \to i$
***S2***: $X \subseteq Y \Rightarrow (X \to i \Rightarrow Y \to i)$

Define $sp(T) = \{i | T \to i\}$.
From **S1** and **S2** it straightforward follows that for each spanoid the operator $sp$ satisfies two properties:
$T \subseteq sp(T)$(extensivity)
$X \subseteq Y \Rightarrow sp(X) \subseteq sp(Y))$ (isotonicity)
Different families of implications $T \to i$ may turn to equivalent spanoids. A chain of sets $T = T_0, T_1, ..., T_r$, where for each $j \in [r]$ there is $i_j \in E$ such that $T_{j-1} \to i_j$ , $T_j = T_{j-1} \cup i_j$, and $T_r = T_{r-1} \cup i$ is called *a derivation* of $i$ from $T$, written $T \models i$.
Define [2] $span(T) = \{i | T \models i.\}$
Each spanoid is an implicational system. We can see that the operators $sp$ and $span$ are similar to the operators $\pi$ and $\tau_\Sigma$ respectively.

Proposition 2. *$sp(X) = \pi(X)$ for all $X \subseteq E$ if and only if an implicational system is a spanoid.*

So in every spanoid $\mathcal{S}$ $span(T) = \tau_\mathcal{S}(T)$, i.e., every spanoid determines a closure space with closure operator $span$.
If $A \to b$ for all $b \in B$, we can write it as $A \to B$. So, $A \to B \Leftrightarrow B \subseteq sp(A)$. Thus we have an equivalent definition of relations based only on an operator. It is easy to see that the relation $A \to B$ satisfies the union property, and $sp$ is an extensive operator if and only if the relation $A \to B$ satisfies extension. Transitivity implies isotonicity, but not vice versa. So

Proposition 3. *There are spanoids that are not full UISs, but each full UIS is a spanoid.*

## 3. Violator spaces

Violator spaces are arisen as generalization of Linear Programming problems. Further, Matoušek et al. [3] define a simpler framework: violator spaces, which constitute a proper generalization of

LP-type problems. Originally, violator spaces were defined for a set of constraints $E$, where each subset of constraints $G \subseteq E$ was associated with $V(G)$ - the set of all constraints violating $G$. The classic example of an LP-type problem is the problem of computing the smallest enclosing ball of a finite set of points in $R^d$. Here $E$ is a set of points in $R^d$, and the violated constraints of some subset of the points $G$ are exactly the points lying outside the smallest enclosing ball of $G$. We consider the dual function $\varphi(X) = E - V(X)$.

Definition 7. *([4]) A violator space is a pair $(E, \varphi)$, where $E$ is a finite set and $\varphi$ is a mapping $2^E \to 2^E$ such that for all subsets $X, Y \subseteq E$ the following properties are satisfied:*
***C1**: $X \subseteq \varphi(X)$ (extensivity),*
***C2**: $(X \subseteq Y \subseteq \varphi(X)) \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(Y)$ (self-convexity).*

The notion of violator space is an extension of closure spaces, since every closure space is a violator space as well ([4]).

Consider the properties of relation $A \to B \Leftrightarrow B \subseteq \varphi(A)$. First note

Lemma 1. *If $\varphi$ satisfies extensivity and self-convexity, then $B \subseteq \varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(A) = \varphi(A \cup B)$*

Remark. *Danilov and Koshevoy in [1] define for any operator $f$ the binary relation $\vdash_f$ as follows:*
*$A \vdash_f B$ if and only if $f(A) = f(A \cup B)$.*
*From Lemma 1 it follows that if $f = \varphi$, then the relation $\to$ and $\vdash_f$ are identical. Moreover, since each closure operator is extensive and satisfies self-convexity ([4]) these two relations coincide for closure operators as well. In the opposite direction, if $\to \equiv \vdash_f$, then the operator $f$ satisfies the self-convexity.*

Define a new type of relations that we call ***V-relation*** as a binary relation that satisfies two properties:
1. Extension: $B \subseteq A \Rightarrow A \to B$
2. Local Monotonicity: $A \subseteq B$, and $A \to B$, then $A \to C \Leftrightarrow B \to C$ for any $C$.

Theorem 1. *$A \to B \Leftrightarrow B \subseteq \varphi(A)$ is a V-relation if and only if $(E, \varphi)$ is a violator space.*

Each greedoid may be determine by its "closure operator"$\sigma$ [5].

Theorem 2. *Let $E$ be a finite set. $\sigma : 2^E \to 2^E$ is a closure operator of a greedoid if and only if $\sigma$ satisfies extensivity, self-convexity and the following property:*
*if $\sigma(X \cup y) = \sigma(X \cup x \cup y)$, but $\sigma(X \cup x) \neq \sigma(X \cup x \cup y)$, then there exists $z \in X \cup x$ such that $\sigma(X \cup x - z) = \sigma(X \cup x)$.*

Thus greedoids may be considered as a subclass of violator spaces, and so we can determine a greedoid by a $V$-relation with additional property corresponding to the third property of $\sigma$.

## REFERENCES


1. Danilov, V. and Koshevoy, G. *A new characterization of the path independent choice functions*, Mathematical Social Sciences **51**(2), 2006, 238–245.

2. Z. Dvir, S. Gopi, Y. Gu, and Wigderson, A. *Spanoids - an abstraction of spanning structures, and a barrier for LCCs*, Proceedings of the Innovations in Theoretical Computer Science (ITCS), 2019, 32:1 – 32:20.

3. Gärtner, B., Matoušek, J., Rüst, L. and Škovroň, P. *Violator spaces: structure and algorithms*, Disc. Appl. Math. **156**, 2008, 2124–2141.

4. Kempner, Y. and Levit, V. E. *Violator spaces vs closure spaces*, European Journal of Combinatorics **80**, 2019, 203–213.

5. Korte, B., L. Lovász and R. Schrader, "Greedoids," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1991.

---

УДК 519.7

## Вложение модели невлияния в модель CBAC

**В. А. Кузовихина (Россия, г. Москва)**
МГУ им. М.В.Ломоносова
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

## Embeddability of noninterference security model in CBAC model

**V. A. Kuzovikhina (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pletnyova_va@mail.ru

Для систем с повышенным уровнем защищенности необходимо наличие формальной модели безопасности. В настоящее время известно довольно большое количество формальных моделей безопасности, многие из которых представлены в виде нагруженных графов (take-grant [4], CBAC [1]) или имеют автоматную реализацию (модель Белла-Лападула [4], модель невлияния [3]). Безопасность системы определяется доступами и может быть определена как невозможность перехода системы в множество опасных состояний или как сохранение некоторых свойств на протяжении жизненного цикла. Хотя в общем случае нет алгоритма, позволяющего по начальной конфигурации определить существование последовательности доступов, переводящей систему в небезопасное состояние (например, модель CBAC [1], HRU-модель [2]), для некоторых моделей свойство безопасности разрешимо.

При необходимости интеграции систем с различными моделями безопасности,, например, для создания служб "единого окна" или слияния нескольких компаний, актуальной становится задача вложения одних моделей в другие.

В работе рассматривается задача вложения модели невлияния в модель CBAC, где под вложением понимается отображение удовлетворяющее условиям инъективности (разные системы переходят в разные), сохранения безопасности (образ безопасен тогда и только тогда, когда безопасен прообраз) и гомоморфности (сохранения функционирования).

Модель CBAC — графовая модель безопасности компьютерных систем, в которой объекты моделируются вершинами графа, состояния объектов — рациональными числами, отношения между объектами — нагруженными дугами ([1]). В работе [1] доказано, что задача проверки безопасности в модели CBAC в общем случае неразрешима.

Модель невлияния — автоматная модель, описывающая системы с многоуровневой политикой безопасности ([3]). Свойство безопасности в модели невлияния разрешимо (теорема раскрутки).

Так как при вложении сохраняется разрешимость свойства безопасности, то в модели CBAC выделен подкласс с разрешимым свойством безопасности.

Приведем более строгое описание модели CBAC.

В модели CBAC система моделируется графом данных $D =< O, A, R >$, где $O = \{o_1, \ldots, o_N\}$ — конечное множество объектов, $A$ — конечное множество имен атрибутов, $R \subseteq O \times O \times A$ — множество (нагруженных) ребер. Каждому объекту сопоставлено некоторое рациональное число. Значение объекта — это отображение $\mu : O \to \mathbb{Q}$. Пара $(D, \mu)$ называется конфигурацией системы.

1. Редактировнаие объекта $update(o, x)$ — присвоение нового значения $x$ объекту $o$.
2. Создание объекта $create(o, o', a, x)$ — создание нового объекта со значением $x$ и ребра к объекту $o$ с меткой $a$ из вершины $o'$ текущего графа.
3. Создание ребра $createEdge(o_1, a, o_2)$ — создание ребра с меткой $a$ между объектами $o_1$ и $o_2$.
4. Удаление объекта $delete(o)$ (при этом удаляются все ребра, инцидентные $o$) и удаление ребра с меткой $l$ между вершинами $o_1$ и $o_2$ $deleteEdge(o_1, o_2, l)$.

Политика безопасности задается совокупностью формул первого порядка, определяющих разрешенность доступа или операции.

Под безопасностью будем понимать запрещение опасного (заданного) множества доступов и ограничения на возможные поведения системы. Поведение системы — пара $(\alpha, Q)$, где $\alpha = a_1, \ldots, a_t$ — последовательность запросов, $Q = ((D_1, \mu_1), \ldots, (D_t, \mu_t))$ — последовательность конфигураций, порожденных последовательностью запросов из некоторой начальной конфигурации $(D_0, \mu_0)$, $t \in \mathbb{N}$.

Приведем формальное определение модели невлияния.

Имеются два пользователя High (H) с высоким уровнем доступа и Low (L) с низким уровнем доступа.

Система описывается автоматом без выхода $A = (S, \Sigma, \delta)$, где

1. $S$ — множество состояний. Каждое состояние задается как вектор значений $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и $S$ — совокупность возможных векторов.
2. $\Sigma$ — входной алфавит.
3. $\delta : S \times \Sigma \to S$ — функция переходов.

Продолжим функцию $\delta$ на множество $S \times \Sigma^*$, где $\Sigma^*$ — множество всех слов, составленных из букв алфавита $\Sigma$, $e$ — пустое слово:

1. $\delta(s, e) = s$
2. $\delta(s, (x^1 \ldots x^{n+1})) = \delta(\delta(s, (x^1 \ldots x^n)), x^{n+1})$, где $x^i \in \Sigma$.

Определение 1. *Автомат называется двухуровневым, если входной алфавит $\Sigma$ представляется как объединение двух непересекающихся множеств: $\Sigma = \Sigma_H \sqcup \Sigma_L$, а множество состояний — как $S = S_H \times S_L$.*

Определение 2. *Состояния $s^1, s^2 \in S$ называются эквивалентными, пишем $s^1 \sim s^2$, если их Low-компоненты равны.*

Таким образом, $S$ разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий $s \in S$, будем обозначать $[s]$. Обозначим отображение, разбивающее $S$ на классы эквивалентности, $\pi : S \to S/_\sim$.

Также вводится функция $Z_L$: $\Sigma^* \to \Sigma_L^*$, которая из последовательности входов автомата оставляет только команды пользователя Low:

1. $Z_L(x) = e$, если $x \in \Sigma_H$, $Z_L(x) = x$, если $x \in \Sigma_L$;
2. $Z_L(x^1 x^2) = Z_L(x^1) Z_L(x^2)$.

Определение 3. *Система, задаваемая автоматом $B = (S, \Sigma, \delta)$, называется безопасной, если:*

1. *Отображение* $\tilde{\delta} : S/_\sim \times \Sigma_L^* \to S/_\sim$, *определяемое формулой* $\tilde{\delta}([s], w_L) = [\delta(s, w_L)]$, *где* $[s] \in S/_\sim$ *и* $w_L \in \Sigma_L^*$, *корректно определено.*

2. $\pi \circ \delta = \tilde{\delta} \circ (\pi \times Z_L)$.
   *В левой и правой части равенств стоят отображения* $S \times \Sigma^* \to S/_\sim$. *Иными словами, следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} S \times \Sigma^* & \xrightarrow{\delta} & S \\ {\scriptstyle \pi \times Z_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S/_\sim \times \Sigma_L^* & \xrightarrow[\tilde{\delta}]{} & S/_\sim \end{array}$$

Содержательно 1 пункт определения безопасности означает, что “нет чтения вверх”, а 2 пункт означает, что “нет записи вниз”.

Построим отображение $G$, сопоставляющее автомату $A = (S, \Sigma, \delta)$ граф $D =< O, A, R, l >$.

1. Множество вершин состоит из одной вершины: $O = \{o\}$.

2. Ребер в графе нет: $R = \emptyset$.

3. Множество имен атрибутов пусто: $A = \emptyset$.

4. Сопоставим каждому состоянию $s = (s_1, \ldots, s_n)$ рациональное число $q = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$, где $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа (для определенности будем считать, что это первые простые числа). Значение объекта в текущий момент времени равно $q$. Ассоциируем с $O$ отображение $G_O(s) = G_O(s_1, \ldots, s_n) = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$.

5. Операции: редактирование объекта. Значение объекта изменяется в соответствии с функцией перехода. Пусть автомат $A$ находится в состоянии $s = (s_1, \ldots, s_n)$, тогда вершина $o$ графа $D$ имеет значение $q = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$. В соответствии с функцией перехода под действием $\alpha \in \Sigma^*$, автомат переходит в состояние $s' = (\delta_1(s, \alpha), \ldots, \delta_n(s, \alpha))$. Вершина $o$ новой конфигурации графа $D$ имеет значение $q' = p_1^{s'_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s'_n}$. Доступ на редактирование объекта разрешен тогда и только тогда, когда текущее состояние есть образ некоторого состояния исходного автомата, а новое состояние есть образ состояния автомата при функции перехода под действием некоторой входной буквы из алфавита соответствующего пользователя.

   Пусть значение объекта $o$ равно $q$. Обозначим $edit(\alpha, q) = q'$ переход по слову $\alpha \in \Sigma^*$ для операции $update(o, q')$ (присвоение нового значения $q'$ объекту $o$).

Пусть состояние $s = (s_1, \ldots, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n)$, где $s_H = (s_1, \ldots, s_k)$, а $s_L = (s_{k+1}, \ldots, s_n)$. Будем считать, что значение объекта $q_1$, соответствующее состоянию $s$, эквивалентно значению $q_2$, соответствующее состоянию $s'$, если $p_{k+1}^{s_{k+1}} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n} = p_{k+1}^{s'_{k+1}} \cdot \ldots \cdot p_n^{s'_n}$.

Под безопасностью в графовой модели будем понимать выполнение двух условий:

1. Для любого $\alpha \in \Sigma_L^*$ и для любых эквивалентных $q_1 \sim q_2$ выполнено: $edit(\alpha, q_1) \sim edit(\alpha, q_2)$.

2. Для любого $\alpha \in \Sigma_H^*$ и для любого $q$: $edit(\alpha, q) \sim q$.

Теорема 1. *Отображение $G$ удовлетворяет следующим свойствам:*
*1. инъективность;*
*2. сохранение безопасности/небезопасности;*

*3. коммутативность диаграммы для любого $\alpha \in \Sigma^*$:*

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "G_O"'] & \delta(s_0, \alpha) \arrow[d, "G_O"] \\ o_0 \arrow[r, "G_\alpha"'] & O \end{tikzcd}$$

Таким образом, в модели CBAC выделен подкласс с разрешимым свойством безопасности. Оценим сложность проверки безопасности.

Теорема 2 ([3]). *Условия безопасности в модели невлияния выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены с заменой $\Sigma^*$ на $\Sigma$, $\Sigma_L^*$ на $\Sigma_L$.*

При прямой проверке условий безопасности из теоремы раскрутки для модели невлияния получаем, что сложность проверки условия 1 безопасности равна $O(|S|^2 \cdot |\Sigma_L|)$. Для проверки условия безопасности 2 достаточно проверить, что для любого $s \in S$ и для любой буквы $x_H \in \Sigma_H$ выполнено $\delta(s, x_H) \sim s$. Таким образом, сложность проверки условия безопасности 2 равна $O(|S| \cdot |\Sigma_H|)$. В результате, сложность проверки безопасности составляет $O(|S|^2 \cdot |\Sigma|)$.

Приведем оптимизированный алгоритм проверки безопасности.

Без ограничения общности, можно считать, что элементы вектора $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ — натуральные числа (можно их занумеровать).

Опишем функцию, сопоставляющую каждому классу эквивалентности $[s]$ некоторое число. Возьмем первые $n - k$ простых чисел и для каждого $s = (s_1, \ldots, s_k, s_{k+1}, \ldots s_n) \in S$, где $(s_1, \ldots, s_k) \in S_H$, $(s_{k+1}, \ldots, s_n) \in S_L$, вычислим значение $l_i = p_1^{s_{k+1}} \cdot \ldots \cdot p_{n-k}^{s_n}$, где $i \leq |S|$. Если двум состояниям сопоставлено одно и то же число $l_i$, то они эквивалентны и принадлежат одному классу эквивалентности $C_i$. Для получения набора чисел $l_i$ достаточно $O(|S|)$ операций.

Рассмотрим класс эквивалентности $C_i = \{s^1, \ldots, s^m\}$. Заметим, что для того, чтобы проверить выполнение условия безопасности 1, достаточно проверить пары $(s^1, s^2), \ldots, (s^1, s^m)$. Если $\delta(s^1, x_L) \sim \delta(s^j, x_L)$ и $\delta(s^1, x_L) \sim \delta(s^t, x_L)$, то $\delta(s^j, x_L) \sim \delta(s^t, x_L)$, то есть для пары $(s^j, s^t)$ условие безопасности 1 также выполнено. Таким образом, сложность проверки условия безопасности 1 равна $O(|S| \cdot |\Sigma_L|)$.

В результате, сложность проверки безопасности составляет $O(|S| \cdot |\Sigma|)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Afonin Sergey, Bonushkina Antonina. Validation of Safety-Like Properties for Entity-Based Access Control Policies // Advances in Soft and Hard Computing. 2019. С. 259–271.

2. Harrison M.A., Ruzzo W.L., Ullman J.D.. Protection in Operating Systems // Communications of the ACM. 19 №8. 1976. С. 461–471.

3. Moskowitz I.S., Costich O.L.. A classical automata approach to noninterference type problems// Proc. Computer Security Foundations Workshop V. IEEE Press. 1992. С. 2–8.

4. Грушо А.А., Тимонина Е.Е.. Теоретические основы защиты информации // Яхтсмен. Москва. 1996.

УДК 519.722

# Построение и анализ моделей русского языка в связи с исследованиями криптографических алгоритмов

**А. Г. Малашина (Россия, г. Москва)**
НИУ ВШЭ
e-mail: amalashina@hse.ru
**А. Б. Лось (Россия, г. Москва)**
НИУ ВШЭ
e-mail: alos@hse.ru

# The construction and analysis of the Russian language models for a cryptographic algorithm research

**A. G. Malashina (Russia, Moscow)**
NRU HSE
e-mail: amalashina@hse.ru
**A. B. Los (Russia, Moscow)**
NRU HSE
e-mail: alos@hse.ru

## 1. Введение

Исследование вероятностного и статистического распределения слов и n-грамм естественного языка является предметом анализа во многих областях: лингвистике, теории игр, молекулярной биологии. Важную роль корпусный анализ языка играет в вопросах криптографической защиты информации, в том числе в вопросах эффективности ряда криптографических алгоритмов. При исследовании процедур восстановления отдельных участков сообщения по имеющейся информации о вариантах его знаков, основу анализа составляют создаваемые словари различных длин. В связи с этим, особое значение имеет изучение их статистических свойств, проверка полноты и адекватности используемого корпуса [1]. При исследовании языкового корпуса и составлении словарей, одним из основных вопросов является вопрос покрытия словарем всех возможных отрезков текста [2]. При этом проблема покрытия существенно усложняется для флективных языков, таких как французский и немецкий, и в особенности русский, по сравнению с аналитическими языками, такими как английский. Такие языки требуют большего объёма словаря для достижения необходимого покрытия [3]. В работе исследуются две языковые модели: лексическая и n-граммная. В лексической модели языка единицей анализа являются токены, то есть единицы текста, элементы раздельного написания. В n-граммной модели, являющейся частным случаем лексической, рассматриваются последовательности из n символов или слов.

## 2. Языковой корпус

Корпус - собрание текстов в текстовой форме, используемое для исследования языка с использованием компьютерных технологий. В данной работе был создан специализированный корпус русского языка, который отражает узкую область его употребления. В качестве исходного материала для составления корпуса были использованы новостные статьи последних лет

политической тематики. Эти тексты отражают срез состояния современного русского языка, включая разговорный, то есть составляемый корпус является синхроническим.

После создания текстового корпуса осуществляется его нормализация, состоящая из следующих этапов: 1) удаление html-тегов и переформатирование в *.txt; 2) перекодировка; 3) удаление всех сокращений, кроме аббревиатур; 4) удаление имён нарицательных ; 5) фильтрация текста (удаление всех символов, кроме «а-я», «.», «,», « », приведение к нижнему регистру); 6) удаление двойных пробелов, повторяющихся точек и запятых, пробелов перед точками и запятыми.

Метаданные в корпусе отсутствуют, так как их наличие не принципиально для дальнейших целей использования данного корпуса. Созданный корпус должен удовлетворять двум основным критериям: полноте и репрезентативности. Полнота корпуса обуславливается покрытием этого корпуса. Оптимизация покрытия зависит от задач, для которых создаётся этот корпус и словари. Во-первых, покрытие зависит от объёма текстового корпуса, который используется для построения словарей, но с определенного момента эта зависимость становится гораздо менее выраженной, поэтому возможна экстраполяция логарифмическими функциями. Например, для английского языка рост объёма словаря существенно замедляется при размере корпуса от 30 до 50 млн. слов. Во-вторых, оптимальный размер корпуса зависит от источников и новизны данных [3]. В целом, корпус считают насыщенным, когда с увеличением объёма корпуса прекращается резкий рост новых слов [2]. Репрезентативность — это способность корпуса адекватно отражать специфику выбранной предметной области. На основе собранного новостного текстового корпуса в соответствии с рассматриваемой языковой моделью создаются словари, которые впоследствии подвергаются статистическому исследованию.

## 3. Лексическая модель

Лексические модели языка представляют особый интерес для систем распознавания речи. Актуальность вопроса максимизации покрытия связана с тем, что каждое неизвестное слово (называемое также out-of-vocabulary или OOV) создаёт очередную ошибку в распознавании текущего слова. Более того, каждая такая ошибка способна породить ошибку распознавания следующего слова, создавая «волновой эффект» OOV-слов. В рамках лексической модели языка генерируются словари, единицами которых являются токены, то есть единицы текста как элементы раздельного написания. В таблице ниже представлены значения размеров словарей, создаваемых на основе корпусов различного объёма.

| Корпус, симв. | Объем словаря | Эмпирическое покрытие | Теоретическое покрытие |
|---|---|---|---|
| $10^4$ | 836 | 0.45 | 20.1 |
| $10^5$ | 5449 | 2.74 | 28.34 |
| $10^6$ | 31895 | 13.78 | 39.68 |
| $10^7$ с нарицат. | 163091 | 70.63 | 48.29 |
| $10^7$ без нарицат. | 125162 | 64.45 | 44.98 |
| $10^8$ | *180000* | - | *59.28* |
| $10^9$ | *230000* | - | *68.84* |

Поскольку скорость роста объёма словарей в зависимости от размера корпуса близка к скорости роста логарифмической функции, проводится следующая экстраполяция:

$$21910.5 \cdot \ln(0.000034344 \cdot x). \tag{1}$$

Прогнозируемые значения объёма словарей обозначены в таблице курсивом. Графически данная зависимость отражена на рисунке 1.

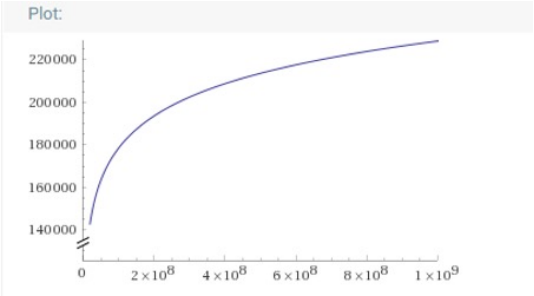



Рис. 1: Размер словаря в зависимости от объёма корпуса.

**4. Закон Ципфа.**

Для проверки качества и естественности созданного русскоязычного корпуса (объёмом $10^7$ символов) проводится проверка соответствия закону Ципфа. В соответствии с данным законом если все слова в корпусе упорядочить по убыванию частоты их встречаемости, то частота использования слов окажется обратно пропорциональной их порядковому рангу [4]. Результаты представлены на рисунке 2.

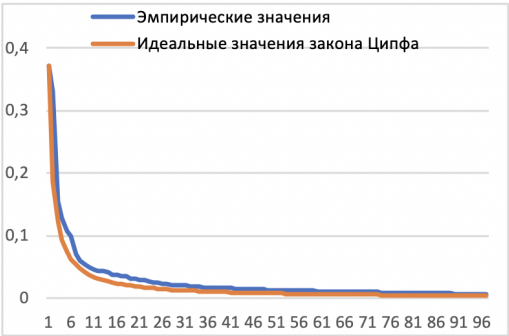



Рис. 2: Закон Ципфа.

Как наглядно демонстрирует график, эмпирически полученные значения лишь незначительно отклоняются от идеальных значений закона Ципфа. Поэтому можно заключить, что собранный корпус, в целом удовлетворяет данному закону и является достаточно естественным и полным в рамках лексической модели.

## 4. Лемматизация

Лемматизация - процесс обработки языкового корпуса, в результате которого все входящие в него слова приводятся к словарной форме. Для исследуемых корпусов проводится лемматизация, после чего оценивается величина покрытия. Сравнительные результаты приведены в таблице.

| Корпус | Покрытие (оригинал) | Покрытие (лемматизация) |
|---|---|---|
| $10^6$ | 13.78 | 16.16 |
| $10^7$ с нарицат. | 70.63 | 76.45 |
| $10^7$ без нарицат. | 64.45 | 66.77 |

Результаты наглядно демонстрируют, что величины покрытия лемматизированных корпусов выше покрытия оригиналов. Это связано с тем, что лемматизация значительно снижает флективность языка, приближая его к аналитическому [3]. Например, в исследуемом корпусе

присутствует слово «репрезентативные», а в тестовом корпусе только слово «репрезентативный». То есть одно и то же слово присутствует в корпусах в разной форме. Но с точки зрения автоматической обработки, точно сопоставляющей токены, это разные слова. Это снижает величину покрытия. Лемматизация устраняет данный недостаток и снижает объём словаря.

## 5. $N$-граммная модель

В $n$-граммной модели единицами корпуса (словаря) считаются последовательности из $n$ символов. Лексические модели являются подмножеством $n$-граммных моделей языка. Вопросы $n$-граммного покрытия представляют интерес в системах распознавания речи для максимизации производительности системы. Но, особое значение, $n$-граммные модели имеют для вопросов криптографии, так как в шифрованном тексте границы между словами неизвестны, и подбор в этом случае по лексическому словарю невозможен или крайне затруднителен. Если какая-либо $n$-грамма отсутствует в словаре, то языковая модель может опираться на $n$-граммы более низкого порядка, но они могут оказаться неуместны для текущей задачи. Именно поэтому ошибки распознавания гораздо чаще происходят в рамках $n$ - граммной модели языка. На основе собранных корпусов проводится оценка покрытия и подсчитывается энтропия $n$-грамм длиною $i$ символов:

$$H_i = \frac{log_2 N_i}{i}. \tag{2}$$

где $i$ - длина $n$-граммы, а $N_i$ - количество $n$-грамм в слове длиною $i$ символов. Рассматриваются $n$-граммы длиною 10, 15, 20 и 25 символов. Результаты исследования приведены в таблице.

| Длина $n$-граммы | Объем словаря | | Энтропия | |
|---|---|---|---|---|
| | $10^6$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^7$ |
| 10 | 795840 | 6217191 | 1.96 | 2.26 |
| 15 | 955193 | 9482897 | 1.32 | 1.55 |
| 20 | 983828 | 10372296 | 0.99 | 1.17 |
| 25 | 990430 | 10629589 | 0.80 | 0.93 |

Значения энтропии n-грамм близки к реальным значениям для русского языка. Величины покрытия представлены в таблице ниже.

| Длина $n$-граммы | Эмпирическое покрытие | | Теоретическое покрытие | |
|---|---|---|---|---|
| | $10^6$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^7$ |
| 10 | 4.32 | 39.71 | 11.27 | 19.95 |
| 15 | 1.10 | 12.03 | 3.15 | 7.21 |
| 20 | 0.28 | 3.12 | 1.30 | 3.27 |
| 25 | 0.07 | 0.84 | 0.79 | 2.07 |

Как видно, покрытие словаря n-грамм значительно ниже лексического покрытия. Это подтверждает свидетельства о том, что исследование n-граммной модели гораздо более сложное, а оптимизация покрытия словаря требует сверхбольшого языкового корпуса.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малашина А. Г. Алгоритм восстановления отдельных частей сообщения по информации о возможных значениях его знаков, Материалы конференции // Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского. – Москва, 2019. С. 215-217.

2. Rosenfeld R. Optimizing lexical and n-gram coverage via judicious use of linguistic data // Proceedings of the Fourth European Conference on Speech Communication and Technology – Madrid, 1995.

3. Bellegarda J. R. Robustness in Statistical Language Modeling // Robustness in Language and Speech Technology , Springer Science+Business Media Dordrecht, 2001, pp. 104-106.

4. Gelbukh A., Sidorov G. Zipf and Heaps Laws' Coefficients Depend on Language // Conference on Intelligent Text Processing and Computational Linguistics – Mexico City, 2001.

---

УДК 519.17

# Обобщённые графы де Брейна

**Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)**
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

# Generalized de Bruijn graphs

**F. M. Malyshev (Russia, Moscow)**
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

**1.** Графы де Брейна [1], благодаря своему совершенству и широте их применения, занимают особое место среди специальных классов ориентированных графов. Рассматриваемые в настоящих тезисах обобщённые графы де Брейна сохраняют наиболее важные качества графов де Брейна. Под графом понимается ориентированный граф.

Граф де Брейна на $n = m^r$ вершинах, $n > 1$, $r \geqslant 1$, обозначаемый как $\partial B(m, r)$, является графом переходов состояний неавтономного автомата в виде регистра сдвига на $r$ ячеек, в каждой ячейке которого может содержаться элемент конечного алфавита $X$, $|X| = m$. При входе $\varepsilon \in X$ состояние регистра сдвига $(x_1, \dots, x_r) \in S = X^r$ за один такт переходит в состояние $(\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-1})$. Широкое распространение этот автомат получил, в частности, благодаря его свойству *быстрого обновления*, состоящего в том, что из любого начального состояния $\left(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}\right) \in S$ за минимально возможное число тактов $r = \left\lceil \log_{|X|} |S| \right\rceil$ при независимых равновероятных входах $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ автомат может оказаться в любом состоянии из $S$ с одной и той же вероятностью $\frac{1}{|S|}$. Другие автоматы со свойством быстрого обновления можно строить как раз с помощью обобщённых графов де Брейна или, кратко, $\partial$-графов.

Определение 1. *Ориентированный граф $\Gamma$ на $n$ вершинах, $n > 1$, называется $\partial$-графом порядка $r \geqslant 1$, если для любых его вершин $v$, $w$ существует единственный направленный путь длиной в $r$ дуг из $v$ в $w$.*

Наследование в $\partial$-графах свойств графов де Брейна, обусловленных определением 1, обеспечивает им широкие практические приложения. Автоматы с графами переходов внутренних состояний в виде $\partial$-графов могут быть использованы, наряду с регистрами сдвига, для генерации псевдослучайных последовательностей [2].

Обозначим через $Y = Y(\Gamma)$ матрицу смежности графа $\Gamma$. Ясно, что граф $\Gamma$ на $n > 1$ вершинах является $\partial$-графом порядка $r \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $Y^r = J_n$, где $J_n$ – матрица размера $n \times n$, все $n^2$ элементов которой равны 1. Имеется обширная литература (см.,

например, ссылки в [3]), относящаяся к сформулированной в [4] проблеме решения матричного уравнения $Y^r = \lambda J_n$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, относительно целочисленных (0,1)-матриц $Y$. Много работ относится к решениям уравнения $Y^r = J_n$, являющимся циркулянтами.

**2.** При $r = 1$ $\partial$-граф является полным графом на $n$ вершинах вместе с петлями на каждой вершине. В $\partial$-графе не может быть двух различных направленных путей длины $l \leqslant r$ с общими началом и концом, в частности, исключены параллельные дуги и две петли на одной вершине. Каждая вершина $v$ в $\partial$-графе (из-за наличия единственного направленного пути длины $r$ из $v$ в $v$) содержится на единственном ориентированном цикле, длина которого делит $r$. Эти циклы не пересекаются. Их дуги изображаем обычными стрелками. Дуги, несодержащиеся на этих циклах, будем представлять пунктирными стрелками. На рис. 1 приведены примеры $\partial$-графов $\Gamma$ порядка $r = 2$ на $n = 9$ вершинах, в чём убеждаемся непосредственной проверкой равенств $Y(\Gamma)^2 = J_9$. Граф $T_4$ там является графом де Брейна $\partial B(3, 2)$.

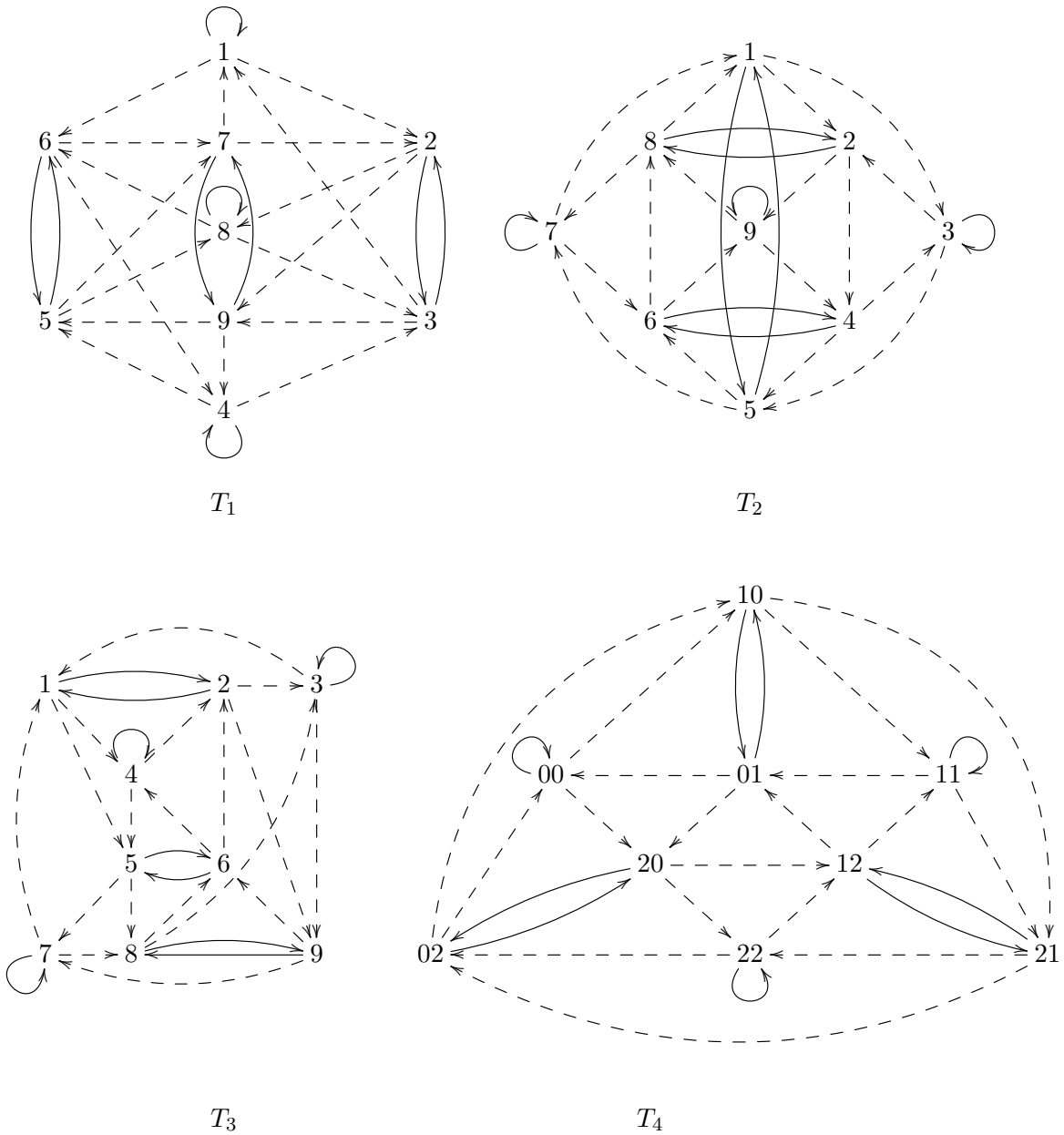



Рис. 1

С конкретным $\partial$-графом порядка $r$ можно связать другие $\partial$-графы. Если в $\partial$-графе $\Gamma$ порядка $r$ у всех дуг поменять направление на противоположное, то получится тоже $\partial$-граф порядка $r$, обозначаемый как $\overline{\Gamma}$. $\overline{\partial B(m,r)} \cong \partial B(m,r)$, $r \geqslant 1$. Двойственный $\partial$-графу $\Gamma$ порядка $r \geqslant 1$ граф $\Gamma^+$ будет $\partial$-графом порядка $r+1$. Напомним, что в графе $\Gamma^+$ вершинами являются дуги графа $\Gamma$, и в $\Gamma^+$ есть дуга из вершины $e_1$ в вершину $e_2$ тогда и только тогда, когда в графе $\Gamma$ конец дуги $e_1$ совпадает с началом дуги $e_2$. Граф де Брейна на $m^r$ вершинах является двойственным к графу де Брейна на $m^{r-1}$ вершинах, $\partial B(m,r-1)^+ \cong \partial B(m,r)$, $r \geqslant 2$.

Определение 2. *$\partial$-граф $\Gamma$ порядка $r > 1$ называется простым, если он не изоморфен $\Gamma_1^+$ ни для какого $\partial$-графа $\Gamma_1$ порядка $r-1$. Полный $\partial$-граф $\Gamma$ с параметром $r = 1$ считаем простым по определению.*

Под окрестностью $\Gamma(v)$ вершины $v$ ориентированного графа $\Gamma$ будем понимать множество концов всех дуг, исходящих из $v$. Если в ориентированном графе $\Gamma$ для любой пары вершин их окрестности либо совпадают, либо не пересекаются, то будем говорить, что в графе $\Gamma$ выполнено $\mathcal{N}$-свойство. Для двойственных $\partial$-графов $\mathcal{N}$-свойство выполняется.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma$ – $\partial$-граф порядка $r \geqslant 1$. Тогда: число $n > 1$ вершин графа $\Gamma$ есть $r$-я степень целого числа $m > 1$; из каждой вершины $\Gamma$ выходит ровно $m$ дуг; в каждую вершину $\Gamma$ входит ровно $m$ дуг; число петель в $\Gamma$ равно $m$.*

Благодаря теореме 1 легко понять, что если $r = r_1 r_2$, то по $\partial$-графу $\Gamma$ порядка $r$ на $m^r$ вершинах можно построить $\partial$-граф $\Gamma'$ порядка $r_2$ на тех же $m^r = (m^{r_1})^{r_2}$ вершинах. У графа $\Gamma'$ из каждой вершины $v$ выходит $m^{r_1}$ дуг с концами в вершинах $w$, для которых в $\partial$-графе $\Gamma$ из $v$ в $w$ есть направленный путь из $r_1$ дуг.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma$ – $\partial$-граф порядка $r > 1$, обладающий $\mathcal{N}$-свойством. Тогда существует и единственный с точностью до изоморфизма $\partial$-граф $\Gamma_1$ порядка $r-1$, для которого $\Gamma_1^+ \cong \Gamma$.*

Из теоремы 2 следует, что $\partial$-граф $\Gamma$ порядка $r$ является простым тогда и только тогда, когда для него $\mathcal{N}$-свойство не выполняется. Благодаря изоморфизму $\overline{\Gamma}^+ \cong \overline{\Gamma^+}$, из теоремы 2 следует также, что $\partial$-граф $\Gamma$ простой тогда и только тогда, когда $\partial$-граф $\overline{\Gamma}$ простой.

Обозначив в теореме 2 $\partial$-граф $\Gamma_1$ через $\Gamma^-$, имеем $(\Gamma^-)^+ \cong \Gamma$. Благодаря изоморфизму $\overline{G}^+ \cong \overline{G^+}$, справедливому для любого графа $G$, для $\partial$-графа с $\mathcal{N}$-свойством имеем $\left(\overline{\Gamma^-}\right)^+ \cong \overline{(\Gamma^-)^+} \cong \overline{\Gamma}$, и по теореме 2 получаем $\overline{\Gamma^-} \cong \overline{\Gamma}^-$.

Наиболее интересны как раз простые $\partial$-графы, неполучающиеся стандартным конструированием из $\partial$-графов меньшего порядка. Каждый простой $\partial$-граф $\Gamma$ порядка $r_0 \geqslant 1$ на $m^{r_0}$ вершинах порождает серию $\partial$-графов порядка $r$ на $m^r$ вершинах, $r \geqslant r_0$: $\Gamma$, $\Gamma^+$, $(\Gamma^+)^+$, $((\Gamma^+)^+)^+$, ... . Подобная серия из графов де Брейна $\partial B(m,r)$, $r \geqslant 1$, начинается с полного графа $\partial B(m,1)$ на $m$ вершинах.

Теорема 3. *Любой автоморфизм $\partial$-графа однозначно восстанавливается по его действию на петлях.*

Как следствие теоремы 3 получаем изоморфизм $\operatorname{Aut} \partial B(m,r) \cong S_m$.

Теорема 4. *Для $\partial$-графов на рис. 1 справедливы утверждения:*
*1) $\overline{T}_2 \cong T_2$, $\overline{T}_4 \cong T_4$,*
*2) $\partial$-графы $T_1$, $\overline{T}_1$, $T_2$, $T_3$, $\overline{T}_3$, $T_4$ попарно неизоморфны,*
*3) У $\partial$-графов $T_3$, $\overline{T}_3$ нет нетривиальных автоморфизмов, $\operatorname{Aut} T_1 = \operatorname{Aut} \overline{T}_1 \cong \operatorname{Aut} T_2 \cong \mathbb{Z}_2$, $\operatorname{Aut} T_4 \cong S_3$,*
*4) $\partial$-графы $T_1$, $\overline{T}_1$, $T_2$, $T_3$, $\overline{T}_3$ являются простыми, а граф де Брейна $T_4 \cong \partial B(3,2) \cong \partial B(3,1)^+$*

*– двойственнен к полному графу на трёх вершинах,*
*5) Любой $\partial$-граф с параметрами $n = 9$, $r = 2$ изоморфен одному из шести графов $T_1$, $\overline{T}_1$, $T_2$, $T_3$, $\overline{T}_3$, $T_4$.*

**3.** В свете теоремы 1 множество вершин $\partial$-графа порядка $r$ представляется в виде $X^r$, $|X| = m$, а дугами являются $(x_1, \dots, x_r) \to F(x_1, \dots, x_r, \varepsilon)$, $\varepsilon, x_1, \dots, x_r \in X$, для некоторого отображения $F\colon X^{r+1} \to X^r$. Требования определения 1 равносильны тому, что отображение $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \mapsto F(F(\dots F(F(x_1, \dots, x_r, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \dots, \varepsilon_{r-1}), \varepsilon_r)$ является биекцией множества $X^m$ при любых $x_1, \dots, x_r \in X$.

Далее считаем $m = 2$. При $r = 2$ и $m = 2$ простых $\partial$-графов на $n = 4 = 2^2$ вершинах нет. На 4-х вершинах имеется только граф де Брейна $\partial B(2, 2) \cong \partial B(2, 1)^+$, который не является простым. При наличии нетривиального автоморфизма соответствующий $\partial$-граф (при $m = 2$) будем называть *симметричным*, иначе не симметричным. Все графы де Брейна $\partial B(2, r)$, $r \geqslant 1$, симметричны.

Теорема 5. *При $r = 3$ на $n = 8 = 2^3$ вешинах имеются ровно два неизоморфных простых $\partial$-графа порядка 3, они не симметричны и получаются один из другого изменением направлений дуг.*

На 8 вершинах имеется ровно 3 неизоморфных $\partial$-графа порядка 3: два простых и граф де Брейна $\partial B(2, 3) \cong \partial B(2, 2)^+$. Один простой $\partial$-граф $G_3$ из теоремы 5 представляется дугами $(x_1, x_2, x_3) \to (\varepsilon, x_1 + \varepsilon(x_2 + 1)x_3, x_2)$, $\varepsilon \in GF(2)$, на множестве вершин $(x_1, x_2, x_3) \in GF(2)^3$. Обобщения $\partial$-графа $\overline{G}_3$ на произвольные порядки $r \geqslant 3$ приводит к следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть булева функция $f\colon GF(2)^{r-1} \to GF(2)$ удовлетворяет тождеству $f(y_1, \dots, y_{r-1})f(y_2, \dots, y_r) \equiv 0$ для всех $y_1, \dots, y_r \in GF(2)$. Тогда ориентированный граф $\Gamma_f$ на множестве вершин $GF(2)^r$, $r \geqslant 3$, с дугами*

$$(x_1, \dots, x_r) \to (\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2}, x_{r-1} + f(\varepsilon, x_1, \dots, x_{r-2})x_r),$$

*$\varepsilon, x_1, \dots, x_r \in GF(2)$, будет $\partial$-графом порядка $r$, при этом он будет простым тогда и только тогда, когда функция $f$ существенно зависит от первой пременной.*

Теорема 6 предоставляет большие возможности для построения простых $\partial$-графов порядка $r$ на $n = 2^r$ вершинах, но некоторые из так построенных $\partial$-графов могут оказаться изоморфными. Так, если функция $f$ удовлетворяет условиям теоремы 6, то функция $f'(y_1, \dots, y_r) = f(y_1 + 1, \dots, y_r + 1)$ тоже будет удовлетворять этим условиям, причём, $\Gamma_{f'} \cong \Gamma_f$.

При $r = 4$ тождеству из теоремы 6 удовлетворяют 13 функций. Ввиду изоморфизмов $\Gamma_{f'} \cong \Gamma_f$ из 13 функций для дальнейшего рассмотрения остаются 6 зависящих от первой переменной функций, $f_1 = y_1y_2 + y_2$, $f_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_1$, $f_3 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_3$, $f_4 = y_1y_2y_3 + y_1y_2$, $f_5 = y_1y_2y_3 + y_1y_3$, $f_6 = y_1y_2y_3 + y_2y_3$. При $r \geqslant 5$ считаем, что от $y_4, \dots, y_{r-1}$ эти функции зависят фиктивно.

Теорема 7. *При всех $r \geqslant 4$ простые $\partial$-графы порядка $r$ $\Gamma_{f_i}$, $\overline{\Gamma}_{f_i}$, $i = 1, \dots, 6$, не изоморфны друг другу. Симметричными среди этих 12 $\partial$-графов являются только $\Gamma_{f_2}$, $\overline{\Gamma}_{f_2}$, $\Gamma_{f_3}$, $\overline{\Gamma}_{f_3}$.*

Следствие. *Для всех $r \geqslant 3$ на $2^r$ вершинах имеется не менее $12r - 33$ попарно неизоморфных $\partial$-графов порядка $r$.*

В тезисах [5] аннонсировалась нижняя оценка $6r - 15$ для числа попарно неизоморфных $\partial$-графов порядка $r$ на $2^r$ вершинах.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. De Bruij N. G. A combinatorial problem// Nederl. Akad. Wetensch. Proc., v. 49, p. 758–764, 1946.

2. Fisher P., Aljohani N., Baek J. Generation of Finite Inductive, Pseudo Random, Binary Sequences// J. Inf. Process. Syst., v. 13, № 6, p. 1554–1574, 2017.

3. Wu J., Jia R., Li Q. g-Circulant solutions to the (0,1)-matrix equation $A^m = J_n$// Linear Algebra Appl., v. 345, p. 195–224, 2002.

4. Hoffman A. J. Research Problems 2 – 11// J. Combin. Theory, v. 2, p. 393, 1967.

5. Малышев Ф. М. Бесконечные серии простых обобщённых графов де Брейна// Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения Николая Михайловича Коробова. Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, с. 187–190, 2018.


---

УДК 511.32

## Теоретико-числовые задачи в теории информации

**Мханна Б. (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

## Number-theoretic problems in information theory

**Mhanna B. (Russian Federation, г. Moscow)**
Moscow State Pedagogical University
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Пусть $m_{ij}$- среднее время первого перехода из состояния i в состояние j в эргодической однородной цепи Маркова с n состояниями с матрицей переходов T. Пусть Г - взвешенный орграф без петель, множество вершин которого совпадает с множеством состояний цепи Маркова и веса дуги равны соответствующим вероятностям перехода.

Мы даем формулу $m_{ij}$ и способы его подсчета. Представлен пример и объяснимо все в нем, где

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если} \quad i \neq j, \\ q, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

где $f_{ij}$ - суммарный вес входящих лесов орграфа Г, состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее $i$, а другое дерево, сходящееся к $j$, $q_j$ - суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к $j$ в Г, а $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Catral, M., M. Neumann and J. Xu, Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices, Linear Algebra and its Applications 409, 2005. pp. 32-50.
2. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications, 2002. Vol. 356. P. 253–274.
3. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters, 2020. Vol. 14. P. 291–307. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2.
4. Chebotarev, P., A graph theoretic interpretation of the mean first passage times, arXiv preprint math.PR/0701359. 2007.
5. Meyer C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // SIAM Review. 1975. Vol. 17. P. 443–464.
6. Фурсов В.А. Теория информации. — Самара: Изд-во Книга, 2011. 128 с.


---

УДК 511.32

# Аффинные функции на выходе нелинейного регистра сдвига

**М. И. Рожков (Россия, г. Москва)**
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
e-mail: mirozhkov@hse.ru
**А. В. Сорокин (Россия, г. Москва)**
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
e-mail: asorokin@hse.ru

# Affine functions of nonlinear feedback shift register output stream

**M. I. Rozhkov (Russian Federation, Moscow)**
National Research University Higher School of Economics
e-mail: mirozhkov@hse.ru
**A. V. Sorokin (Russian Federation, Moscow)**
National Research University Higher School of Economics
e-mail: asorokin@hse.ru

**Введение**

Регистры сдвига с нелинейной обратной связью (NFSR) исследуются в работах многих авторов. Это обусловлено возможностями их использования в качестве генератора псевдослучайных последовательностей. Одной из важнейших задач при этом является оценка длины периода выходных последовательностей. Этому посвящены, например, работы [1, 2, 3, 4, 5]. Кроме длины периода, одним из признаков «хорошего» генератора является сложность восстановления его начального состояния по частично известным значениям выхода. В этой связи отметим, что наличие выходных аффинных функций снижает качество генератора, так как проблема восстановления начального состояния по частично известному выходу сводится к решению системы линейных уравнений.

В настоящей работе исследуются условия, при которых на выходе регистра сдвига с нелинейной обратной связью отсутствуют нетривиальные аффинные функции.

**1 Постановка задачи, определения и обозначения**

Определение 1. *$\delta_f : (x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_2, x_3, ..., x_n, f(x))$ - преобразование двоичного регистра сдвига с нелинейной функций обратной связи $f(x)$, где $f(x) = x_1 + \varphi(x_2, ..., x_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\quad deg(\varphi) \geq 2$.*

Определение 2. *$(\delta_f)^i = (g_{i+1}(f), g_{i+2}(f), ..., g_{i+n}(f))$ - координатное представление $i$-ой степени отображения $\delta_f$, где $i \geq 0$, $\quad g_1(f) = x_1$, $\quad g_{i+1}(f)(x) = g_i(f)(\delta_f(x))$; при этом множество функций $R(f) = \{g_j(f)(x), j = 1, 2, ...\}$ будем называть выходом соответствующего регистра сдвига.*

Определение 3. *$\omega = \omega(f)$ - период последовательности $g_1(f), g_2(f), ...g_\omega(f), ...$, т.е. такое наименьшее число $\omega$ при котором $g_{i+\omega}(f) = g_i(f), i = 1, 2, ...$ (при этом $(\delta_f)^\omega = E$, где $E$ - единичная подстановка на векторах длины $n$).*

$\tau$ - отображение, заключающееся в инвертировании всех координат вектора

$S$ – отображение вида $S(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$.

$f_* = f(x_1 + 1, x_2 + 1, ...x_n + 1) + 1$ - функция, двойственная к функции $f$.

Для заданной функции $f(x) = x_1 + \varphi(x_2, ..., x_n)$ через $f_s$ обозначим функцию

$$f_s(x) = x_1 + \varphi(x_n, x_{n-1}, ..., x_2).$$

Через $K(f)$ обозначим множество функций $\{f, f_*, f_s, (f_s)_*\}$.

Для двоичной функции $g(y) = g(y_1, y_2, ...y_m)$ и вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ под коэффициентом статистической структуры понимается величина

$$\Delta_a = \Delta_a(g) = 2^{m-1} - \|g(y) + (a, y)\|,$$

где $\|f\|$ - вес функции $f$, $(a, y) = a_1y_1 + ... + a_my_m$.

При равенстве по абсолютной величине всех коэффициентов статистической структуры соответствующая функция называется бент-функцией ([6]).

В настоящей работе изучаются условия, при которых в множестве $R(f)$ выходных функций регистра сдвига отсутствуют нетривиальные аффинные функции, т. е. функции $g(x)$, $(deg(g) = 1)$, отличные от функций $x_i$ и $x_i + 1$, $i = 1, 2, ..., n$.

Утверждение 5. *В выходных множествах $R(f), f \in K(f)$ одновременно содержатся или не содержатся аффинные функции, отличные от функций $x_i$ и $x_i + 1$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Теорема 1. *Пусть $f(x) = x_1 + \varphi(x_2, ..., x_n), deg(\varphi) \geq 2$ и у функции $\varphi$ (как функции от $n - 1$ переменных) нет нулевых коэффициентов статистической структуры. Тогда в множестве $R(f)$ нет нетривиальных аффинных функций.*

Следствие 1. *В множестве $R(f)$ нет нетривиальных аффинных функций, если выполнено одно из следующих условий.*

*1. $f(x) = x_1 + \varphi(x_2, ..., x_n)$, и функция $\varphi$ (как функции от $n - 1$ переменных) является бент-функцией.*

*2. $f(x) = x_1 + \varphi(x_2, ..., x_n), deg(\varphi) = n - 1, n \geq 3$*

*3. Преобразование $\delta_f$ обладает нечетным числом циклов, $n \geq 3$*

**2. Композиция функций специального вида**

Далее рассматриваем функции обратной связи вида

$$f(x) = x_1 + x_2 + \varphi(x_2 + x_3, ..., x_{n-1} + x_n),$$

$$h(x) = x_1 + x_2 + \varphi(x_2, ..., x_{n-1}) + \varphi(x_3, ..., x_n),$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \qquad deg(\varphi) \geq 2.$$

В работе [2] показано, что преобразования $\delta_h$ и $\delta_f$ обладают изоморфной цикловой структурой.

Теорема 2. *Пусть в множестве* $R(f) = \{g_j(f)(x), j = 1, 2, ...\}$ *содержится аффинная функция* $L_f(x)$, $L_f(x) \neq x_i + a, a \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n$. *Тогда в множестве* $R(h) = \{g_j(h)(x), j = 1, 2, ...\}$ *также содержится нетривиальная аффинная функция* $L_h(x)$.

Таким образом, если в множестве $R(h)$ нет нетривиальных аффинных функций, тогда их нет и в множестве $R(f)$

Пусть

$$(1+z)^{n-3} = \sum_{i=1}^{n-2} a_i z^{i-1}, L(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n,$$

здесь вес вектора $b = (b_2, b_3, ..., b_n)$ нечетен, $a_j, b_t \in 0, 1$. Для каждого $m = 1, 2, ..., n-2$ через $f_m$ обозначим фукнкцию

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [(\sum_{j=1}^{n-m-1} \beta_j x_{i+j})(\sum_{j=1}^{n-m-1} \beta_j x_{i+j+1})] + L(x),$$

где коэффициенты $\alpha_i$, $\beta_j$ однозначно определяются равенствами:

$$(1+z)^{m-1} = \sum_{i=1}^{m} a_i z^{i-1}, \qquad (1+z)^{n-m-2} = \sum_{i=1}^{n-m-1} \beta_i z^{i-1}.$$

При этом

$$f_1(x) = (\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_{i+1})(\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_{i+2}) + L(x), f_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-2} a_i x_{i+1} x_{i+2} + L(x).$$

Через $M_n$ обозначим множество функций $M_n = \cup_{j=1}^{n-2} \{K(f_j)\}$.

В работе [2] показано, что регистры сдвига с функциями обратной связи из множества $M_n$ имеют одинаковую цикловую структуру, и для любого $m = 1, 2, ..., n-3$ найдется функция $\varphi(x_2 + x_3, ..., x_{n-1} + x_n)$, при которой

$$f_m = x_1 + x_2 + \varphi(x_2 + x_3, ..., x_{n-1} + x_n),$$

$$f_{m+1} = x_1 + x_2 + \varphi(x_2, ..., x_{n-1}) + \varphi(x_3, ..., x_n).$$

Следствие 2. *Если в множестве* $R(f_{n-2})$ *нет нетривиальных аффинных функций, тогда их нет и в множествах* $R(g), g \in M_n$.

Теорема 3. *Пусть* $n = 2^k + 1$, $n > 3$. *Тогда при любой функции обратной связи* $g \in M_n$ *в множестве* $R(g)$ *нет нетривиальных аффинных функций.*

**3. Экспериментальные исследования**

Для $4 \leq n \leq 27$ в работе [2] приведены классы $M_n$ функций обратной связи рассматриваемого вида, которые отвечают регистрам сдвига с циклом длины $2^n - 1$. В рамках настоящей работы для $4 \leq n \leq 24$ экспериментально установлено отсутствие в множестве $R(f_{n-2})$ нетривиальных аффинных функций. Следовательно, с учетом утверждения 4 при любой функции обратной связи $g \in M_n$ на выходе соответствующего регистра сдвига нет аффинных функций.

Установлено также, что при $n = 4$ на выходе любого нелинейного регистра нет аффинных функций.

Для $n = 5$ имеются примеры нелинейных функций $f$, для которых в множестве $R(f)$ имеются аффинные функции $L(x)$.

Пример: $n = 5$ $f(x) = x_1 + x_2 + x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_5 + x_2 x_5 + x_2 x_3 x_5$,
$g_{23} = L(x) = x_1 + x_3 + x_5$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Golomb S. W. Shift Register Sequences. — Laguna Hills, California: Aegean Park Press, 1982.
2. Рожков М. И. On some classes of nonlinear shift registers with the same cyclic structure // Discrete Mathematics and Applications. 2010. № 20(2). С. 127-155.
3. Zhao X. X, Tian T., Qi W. F. Ring-like cascade connection and a class of NFSRs with the same cycle structures // Designs, Codes and Cryptography. 2018. № 86(2). С. 1-16.
4. Ma Z., Qi W. F., Tian T. On the decomposition of an NFSR into the cascade connection of an NFSR into an LFSR // Journal of Complexity. 2013. № 29(2). С. 173-181.
5. Zang J. M., Qi W. F., Tian T., Wang Z. X. Further Results on the decomposition of an NFSR into the cascade connection of an NFSR into an LFSR // IEEE Transactions on Information Theory. 2015. № 61(1). С. 645-654.
6. Rothaus O. S. On bent functions // Journal of Combinational Theory. 1976. № 20(3). С. 300-305.


---

УДК 511.1

# Быстрое перечисление рациональных чисел и задачи биоинформатики[1]

**А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)**
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук
e-mail: slvstv@iitp.ru

# Fast enumeration of rational numbers and bioinformatics problems

**A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)**
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru

Известны биекции между множествами рациональных и натуральных чисел, вычислимые за полиномиальное время [1, 2, 3]. Мы приведём ещё один способ нумерации, а также рассмотрим возможность его обобщения на другие случаи, включая нумерацию рациональных функций от одной переменной над полем. Близкие задачи возникают в биоинформатике, в частности, при оценке вероятности случайного совпадения рассматриваемых последовательностей, а также геномных структур или графов [4].

Через $\omega$ обозначим множество всех натуральных чисел $\{0, 1, \dots\}$, начиная с нуля. Натуральные числа отождествляются с их двоичными записями. Длина двоичной записи числа $n \in \omega$ равна $\lceil \log_2(n+1) \rceil$. Многочлены отождествляются с последовательностями их коэффициентов относительно лексикографического мономиального упорядочения. Для любого множества двоичных слов $X \subset \{0,1\}^*$ биекция $f : X \to \omega$ называется полиномиально вычислимой,

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ № 18-29-13037

если обе функции $f$ и обратная $f^{-1}$ вычислимы за полиномиальное время (на машине Тьюринга). Значение функции $f$ называется номером слова. Говоря о полиномиальной вычислимости функции на множестве $X \subset \{0,1\}^*$, мы подразумеваем, что соответствующая машина Тьюринга останавливается независимо от поданного на вход слова. Но если вход не принадлежит множеству $X$, то машина за полиномиальное время переходит в выделенное состояние VAGUE и останавливается. При этом содержание рабочей ленты может быть любым. Если же на вход подано слово из множества $X$, то машина не приходит в состояние VAGUE.

Например, существует полиномиально вычислимая биекция между множеством всех двоичных слов $\{0,1\}^*$ и множеством всех натуральных чисел $\omega$. Опишем некоторые полиномиально вычислимые биекции, которые будут использоваться. Обозначим через

$$\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

номер пары натуральных чисел $x$ и $y$ при канторовской нумерации. По номеру пары каждое из двух чисел $x$ и $y$ вычисляется за полиномиальное время.

Индукцией по числу элементов $n$ определим номер последовательности из ровно $n \geqslant 1$ натуральных чисел. При $n = 1$ номер последовательности из одного числа равен этому числу. При $n > 1$ он равен номеру пары $\langle a, b\rangle$, где $a$ — номер подпоследовательности первых $\lceil n/2\rceil$ членов, $b$ — номер подпоследовательности оставшихся членов. В частности, номер последовательности из двух элементов равен номеру пары. Номер последовательности из $n$ нулей равен нулю. Делить исходную последовательность посередине полезно для быстрой вычислимости номера. Такое вычисление соответствует пути длины $O(\log_2 n)$ в дереве номеров подпоследовательностей. На каждом ребре происходит вычисление номера пары. При этом длина двоичной записи номера пары не превышает суммы константы и удвоенной длины двоичной записи большего из элементов пары. После $O(\log_2 n)$ шагов размер двоичной записи номера остаётся ограниченным сверху некоторым многочленом от длины последовательности $n$ и от максимума длин двоичных записей элементов.

Номер последовательности неопределённой нечётной длины равен номеру пары $\langle n, m\rangle$ в случае, когда последовательность состоит из $2n+1$ чисел, а её номер среди всех последовательностей из $2n+1$ числа равен $m$. В частности, номер последовательности из одного нуля равен $\langle 0, 0\rangle = 0$. Однако номер тройки нулей равен $\langle 1, 0\rangle = 2$.

Термин *непрерывная дробь* введён Джоном Валлисом (John Wallis), но эти дроби применяли до него [5]. Каждое положительное рациональное число единственным способом разложимо в конечную обыкновенную непрерывную дробь

$$[a_0, \ldots, a_{2m+1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}},$$

где все числа $a_k \in \omega$ и все кроме $a_0$ положительные [6]. Требование нечётности последнего индекса обеспечивает единственность, поскольку для каждого индекса $\ell$ выполнено $[a_0, \ldots, a_\ell + 1] = [a_0, \ldots, a_\ell, 1]$.

Итак, рациональные числа из открытого интервала $(0,1)$ взаимно однозначно соответствуют непрерывным дробям вида $[0, a_1, \ldots, a_{2m+1}]$. В свою очередь эти дроби взаимно однозначно соответствуют последовательностям нечётной длины, состоящим из натуральных чисел $(a_1 - 1, \ldots, a_{2m+1} - 1)$. Такие последовательности нумеруются за полиномиаьное время. Разложение дроби в обыкновенную непрерывную дробь также вычислимо за полиномиальное время. Так получается следующий результат.

Теорема 1. *Существует полиномиально вычисимая биекция между множествами рациональных чисел из открытого интервала* $(0,1)$*, каждое из которых задано парой взаимно простых числителя и знаменателя, и всех натуральных чисел* $\omega$.

Отсюда легко получается взаимно однозначная полиномиально вычислимая нумерация всех рациональных чисел, каждое из которых однозначно соответстует паре из целой и дробной частей.

Над бесконечным полем общая (почти любая) рациональная функция от одной переменной $x$ разлагается в конечную непрерывную дробь вида

$$\cfrac{a_1}{a_0 + \cfrac{a_2 x}{a_1 + \cfrac{a_3 x}{a_2 + \dots}}},$$

где $a_k$ принадлежит полю коэффициентов [7]. Не каждая рациональная функция допускает такое разложение, а когда непрерывная дробь существует, её коэффициенты могут иметь очень большой размер, что служит препятствием для полиномиальной вычислимости.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Calkin N., Wilf H. S. Recounting the rationals // The American Mathematical Monthly. 2000. Vol. 107, no. 4. P. 360–363. DOI: 10.2307/2589182

2. Backhouse R., Ferreira J. F. Recounting the rationals: twice! // Audebaud P., Paulin-Mohring C. (eds) Mathematics of Program Construction. MPC 2008. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5133. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, pp. 79–91. DOI: 10.1007/978-3-540-70594-9

3. Bates B., Bunder M., Tognetti K. Linking the Calkin–Wilf and Stern–Brocot trees // European Journal of Combinatorics. 2010. Vol. 31, no. 7. P. 1637–1661. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.04.002

4. Горбунов К. Ю., Любецкий В. А. Линейный алгоритм перестройки графа // Автоматика и телемеханика. 2018. Том 79, № 12. С. 124–141. DOI: 10.31857/S000523100002861-1,

5. Cretney R. The origins of Euler's early work on continued fractions // Historia Mathematica. 2014. Vol. 41. P. 139–156. DOI: 10.1016/j.hm.2013.12.004

6. Morier-Genoud S., Ovsienko V. Farey boat: continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2019. Vol. 121. P. 91–136. DOI: 10.1365/s13291-019-00197-7

7. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. 688 с.


---

УДК 519.7

# Формальные модели безопасности

В. Л. Токарев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: tokarev22@yandex.ru

# Formal security models

V. L. Tokarev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: tokarev22@yandex.ru

## 1. Введение

Согласно требованиям основных критериев оценки безопасности информационных технологий [1], системы их защиты должны строиться на основе формальных моделей, кроме того, соответствие системы защиты информации (СЗИ) в автоматизированных системах требованиям заданной политики безопасности может быть теоретически (то есть достаточно достоверно) обосновано только с использованием формальных моделей информационной безопасности.

Вопросам построения формальных моделей информационной безопасности автоматизированных систем (АС) посвящен ряд работ, часть которых основана на построении дерева решений, например, [2]. В докладе предложено развитие этого подхода, а в качестве теоретической основы предложено использовать алгебру предикатов.

## 2. Предлагаемый метод

Существует ряд методов построения дерева решений (ДР), например, ID3, C5, CART. Но эти методы обладают общим недостатком – субъективность построенных деревьев: качество решения зависит от уровня знаний предметной области лица, выстраивающее ДР, от его опыта и предпочтений, от степени его заинтересованности и от нескольких других факторов.

В докладе предлагается метод построения ДР, основанный на использовании алгебры предикатов, который позволяет повысить объективность выстраиваемых ДР.

Предполагается, что задача, требующая решение, может быть: 1) описана на языке логики предикатов; 2) вопрос, на который должен быть получен ответ, представлен соответствующим предикатом.

Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Совокупность предикатов, включающая предикаты-описания и предикат-вопрос, путем применения метода резолюции, может быть представлена в форме дерева дизъюнктов (ДД).

Получение резольвент из исходного множества дизъюнктов формализуется в виде построения ДД, в котором листьям соответствуют исходные дизъюнкты, каждому узлу – образуемые резольвенты, а корню – возможные ответы на вопрос заданного класса.

Но чаще всего ответом на вопрос будет некоторый дизъюнкт $D = aVb$. Для получения конкретного ответа ("a"или, все-таки "b") предлагается алгоритм извлечения конкретного ответа (ИКО).

Утверждение 2. Дерево дизъюнктов (ДД) может быть преобразовано в дерево решений (ДР) с помощью алгоритма, основанного на методе резолюции.

Теорема 1. Алгоритм извлечения конкретного ответа (ИКО), позволяет преобразовать ДД в ДР и состоит из следующей последовательности шагов.

1. В ДД определяются дизъюнкт $D = res(D_1, D_2)$ – резольвента дизъюнктов $D_1$ и $D_2$, с отрезаемыми литерами $L_1$ и $L_2$, соответственно, и $u$ – наиболее общий унификатор литер $L_1$ и $\bar{L}_2$. После этого, ребро ДД, ведущее от $D_i$ к $D, i = 1, 2$, помечается отрицанием литеры $L_i u$ и подстановкой $u$ (если $u$ – пустая подстановка, то остается только отрицание литеры $L_i u$).

2. Полученное ДД “переворачивается”: корень оказывается наверху (становится верхним узлом), а листья внизу, направление ребер – от корня к листьям. Устраняются все дизъюнкты, присвоенные узлам и помечаются все висячие вершины, например: $A, B, C, \ldots$

3. В полученном дереве удаляются все узлы (и связанные с ними ребра), соответствующие дизъюнктам, не содержащим предиката-вопроса $ANS$.

4. Выделяется дизъюнкт $D_j$, соответствующий j-ому висячему узлу. Для каждого висячего узла определяется конъюнкция литер $I(D_j)$, приписанных пути от верхнего узла до $D_j$ и определяется дизъюнкт $C(D_j)$, соответствующий узлу $D_j$. В дизъюнкте-ответе отыскива-

ется литера $L(D_j)$, являющаяся логическим следствием конъюнкции $D_j \wedge I(D_j)$ После этого литера $L(D_j)$ приписывается узлу $D_j$.

5. Остаются в полученном дереве только такие i-е висячие узлы ($1 \leqslant i \leqslant q$), (q – число уровней дерева) из которых ведет только одно ребро $e_i$. Из полученного дерева удаляются литеры $L(e_i)$ , приписанные ребру $e_i$. В результате образуется искомое дерево решений.

Работа алгоритма показана на простом примере.

Пусть известны следующие правила: 1) если угроза информационной безопасности наиболее актуальна от внутреннего источника, то администратор безопасности (АБ) должен применить комплекс мер "a"; 2) если угроза безопасности наиболее актуальна от внешнего источника, то АБ должен применить комплекс мер "b"; 3) Вопрос: «какой комплекс мер должен применить АБ в настоящий момент времени?»

Пусть предикат P(x) означает: « $x$(АБ) знает, что в настоящий момент времени актуальна угроза внутренняя», предикат $R(x, y)$ – «$x$ должен применить комплекс $y$». Тогда описание ситуации на языке алгебры предикатов принимает вид множества дизъюнктов:

1) $\bar{P}(x) \vee R(x, a)$; 2) $P(x) \vee R(x, b)$; 3) $\bar{R}(x, y) \vee ANS(y)$.

Из этого множества получим резольвенты для построения ДД:

4) $\bar{P}(x) \vee ANS(a)$ из дизъюнктов 1,3;

5) $P(x) \vee ANS(b)$ из дизъюнктов 2,3;

6) $ANS(a) \vee ANS(b)$ из дизъюнктов 4,5;

Формулам 1-6 соответствует дерево дизъюнктов (рис.1,а). Применение алгоритма ИКО позволило получить дерево решений (рис.1,б).

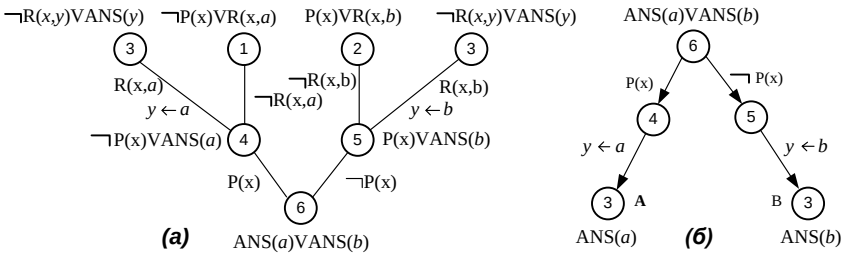



Рис. 1: Два дерева: а-дизъюнктов и б-решений

*Доказательство корректности алгоритма.* На шаге 4 предикат $ANS(a)$ приписан узлу $A$ после того, как было показано, что $ANS(a)$ является логическим следствием конъюнкции $P(x) \wedge R(x, a) \wedge (\bar{R}(x, y) \vee ANS(y))$, а так как дизъюнкт $\bar{R}(x, y) \vee ANS(y)$ входит в число входных дизъюнктов, то он истинен. Поэтому, предикат $ANS(a)$ истинен всегда, когда истинна конъюнкция $P(x) \wedge R(x, a)$. Показано, что предикат $R(x, a)$ является логическим следствием из $P(x)$ и дизъюнкта (1). Поэтому $R(x, a)$ должен быть истинен, если истинен предикат $P(x)$. Отсюда истинность предикатов $P(x)$ и $R(x, a)$ влечет истинность $ANS(a)$, тогда истинность $P(x)$ влечет истинность $ANS(a)$. Аналогично: истинность $\bar{P}(x)$ влечет истинность $ANS(b)$. Это доказывает корректность полученного дерева решений.

## 3. Практический пример использования предложенного метода

Типичную схему получения доступа некоторого субъекта к объекту защищенной АС можно продемонстрировать следующим примером. Субъект $s_i$ хочет получить доступ к объекту $o_j$,

выдавая соответствующий запрос $f_1$. Команда, выполняя этап проверки $b$ полномочий субъекта совершает действие $f_2$ – открывает доступ, если полномочия субъекта подтверждены, или действие $f_3$ - запрещает доступ, выдавая субъекту $s_i$ соответствующее сообщение, если иначе. СЗИ должна определить, какое действие ей нужно совершить $f_2$ или $f_3$ в ответ на запрос $f_1$.

Введя предикат $P(s, x, q_k)$: "субъект $s_i$ находится в точке $a$ в состоянии $q_k$ указанные правила представим в виде следующих формул алгебры предикатов:

1)$\bar{P}(s, a, q_k) \vee P(s, b, f_1(s, a, b, q_k))$;

2)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee R(s) \vee P(s, c, f_2(s, b, c, q_{k+1}))$;

3)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee R(s) \vee P(s, c, f3(s, b, a, q_k))$;

4)$P(s_i, c, q_{k+1})$;

5)$\bar{P}(s_i, c, q_{k+1}) \vee ANS(q_{k+1})$.

Из полученных дизъюнктов образуем резольвенты:

6)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee R(s) \vee ANS(f_3(s, b, a, q_k))$ из дизъюнктов (3) и (5)

7)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee \bar{R}(s) \vee ANS(f2(s, b, c, q_{k+1}))$ из дизъюнктов (2) и (5)

8)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee ANS(f_3(s, b, a, q_k)) \vee ANS(f_2(s, b, c, q_{k+1}))$ из дизъюнктов (6) и (7)

9)$\bar{P}(s, b, q_k) \vee ANS(f_3(s, b, a, f_1(s, a, b, q_k))) \vee ANS(f_2(s, b, c, f_1(s, a, b, q_k))$ из дизъюнктов (1) и (8)

10)$ANS(f_3(s, b, a, f_1(s, a, b, q_k)) \vee ANS(f_2(s, b, c, f_1(s, a, b, q_k))$ из дизъюнктов (4) и (9)

Полученный 10-й дизъюнкт – это ответы, полученные из ДР по алгоритму ИКО: 1) Субъект $s_i$ переходит из точки $a$ в состоянии $q_k$ в точку $b$ с помощью запроса $f_1$, если отношение R содержит право доступа субъекта к объекту $o_j$, а система с помощью действия $f_2$ переходит в состояние $q_{k+1}$; 2) Иначе система с помощью действия $f_3$ возвращается в исходное состояние $q_k$ и выдает сообщение субъекту $s_i$ об отказе в доступе к объекту $o_j$.

Практика показала: 1) соответствие полученного ДР реальной задаче обнаружения нарушения правил доступа несанкционированного субъекта к объекту защищенной АС; 2) адекватность моделей, полученных предложенным методом, реальным правилам и протоколам, прописанным в политиках безопасности большинства защищенных автоматизированных систем.

Предложенный подход может стать теоретической основой для построения СЗИ автоматизированных систем с гарантированным качеством и для разработки более совершенных механизмов обеспечения информационной безопасности.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ISO/1EC 15408-1: 2009 — Evaluation criteria for IT security — Part 1: Introduction and general model.

2. Kashnitsky Y. S. Methods of the search of accurate and interpretable rules for classifying data with complex structure //Proceedings of the conference КИИ-2016. In 3-t., Smolensk: publishing House «Универсум», 2016, 2, p.183-191, - 408c. (pdf)

---

## Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.3

# Об одной задаче Вирзинга

**Л. А. Громаковская, (Россия, г. Петрозаводск)**
Петрозаводский государственный университет
gromak_la@mail.ru
**Б. М. Широков, (Россия, г. Петрозаводск)**
Петрозаводский государственный университет
bmshir@mail.ru

# On some Wirsing's problem.

**L. A. Gromakovskaya, (Russia, Petrozavodsk)**
Petrozavodsk State University
gromak_la@mail.ru
**Б. M. Shirokov, (Russia, Petrozavodsk)**
Petrozavodsk State University
bmshir@mail.ru

Для арифметической функции $f(n)$ и положительного числа $x > 1$ бозначим

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n), \qquad m(x) - \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}.$$

В 1967 году в работе [1] Вирзинг поставил задачу: можно ли для мультипликативной функции $f(n)$ из условия

$$\sum_{p} \frac{f(p) \ln p}{p} = o(\ln x) \tag{1}$$

при каких-либо ограничениях на функцию $f$ вывести утверждение: при $x \to \infty$

$$M(x) = o\left(\frac{x}{\ln x} m(x)\right).$$

Б. В. Левин и А. С. Файнлейб в работе [2] показали, что если функция $m(x)$ ограничена, то ответ на вопрос Вирзинга отрицательный.

Если же $m(x)$ не ограничена, то вопрос остается открытым.

В нашем докладе устанавлиываются теоремы абелева и тауберова типа для интеграла Лапласа, применение которых позволяет связать условие (1) с некоторым специфическим поведением функции $m(x)$, если последняя неограничена.

Для действительной функции $\alpha(t)$, определенной при $t \geqslant 0$, обозначим

$$L_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\alpha(u).$$

Пусть $\sigma(t)$ — определенная при $t \geqslant 0$ измеримая положительная стремящаяся к 0 при $t \to +\infty$ медленно изменяющаяся в смысле Караматы функция, т. е. для любого $c > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(ct)}{\sigma(t)} = 1.$$

Определение 1. *Функция $\alpha(t)$ называется медленно изменяющейся с остатком $\sigma(t)$ на бесконечности, если для любого $c > 0$*

$$\alpha(ct) - \alpha(t) = O(\sigma(t)\alpha(t))$$

Множество медленно изменяющихся с остатком $\sigma(t)$ функций обозначим через $K(\sigma)$ ([3]).

Теорема 1. *Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — неотрицательные возрастающие функции, для которых функции $L_\alpha(s)$ и $L_\beta(s)$ дифференцируемы при $s > 0$ и при $s \to 0$*

$$\frac{L'_\alpha(s)}{L_\beta(s)} \sim L_\beta(s). \tag{2}$$

*Если $\alpha \in K(\sigma)$, то*

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t u d\beta(u) = O(t\sigma(t)). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — неотрицательные возрастающие функции, для которых при $s \to 0$ выполнено условие (2). Если для любого $\delta \in (0,1)$ функция $\alpha(t) - \alpha(\delta t)$ медленно изменяется в смысле Караматы и справедливо равенмтво (3), то $\alpha \in K(\sigma)$.*

Эти теоремы применяем к неотрицательной мультипликативной функции $f(n)$, которая удовлетворяет условиям

$$\sum_{p,k\geqslant 2} \frac{\Lambda_f(p^k)}{p^k} < +\infty, \quad f(p) = O(1), \quad \text{и} \quad m(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Определим $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ следующим образом:

$$\alpha(t) = m(e^t), \quad \beta(t) = \sum_{p\leqslant e^t} \frac{f(p)}{p}.$$

Тогда

$$\gamma(t) = \sum_{p\leqslant e^t} \frac{f(p)\ln p}{p}.$$

Применение к таким функциям $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ теорем 1 и 2 приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Если для любого $c > 0$*

$$m(x) - m(cx) = O(\sigma(\ln x)m(x)), \tag{4}$$

*то*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)\ln p}{p} = O(\sigma(\ln x)m(x)). \tag{5}$$

*Обратно, если выполнено условие (5) и, кроме того, для любого $\delta \in (0,1)$ функция $m(e^t) - m(e^{\delta t})$ медленно изменяется в смысле Караматы, то $m(x)$ удовлетворяет условию(4), т. е. функция $m(e^t)$ медленно изменяется с остатком $\sigma(t)$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Wirsing E. Das asimptotische Verhalten von Summen uber multiplikative Funktionen. II // Acta math. Hung. V. 18. 1967. P. 411 – 467.

2. Левин Б. М., Файнлейб Ф. С. Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел // Известия АН СССР. Серия Математика. Т. 34. № 5. С. 1064 – 1109.

3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.


---

УДК 511.32

# Тригонометрические интегралы

**И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)**
Гянджинский Государственный Университет
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

# Trigonometric integrals

**I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, г. Ganja)**
Ganja State University
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Многие вопросы аналитической теории чисел и анализа, а также других разделов математики, приводят к оценкам тригонометрических интегралов вида

$$J = \int_{\Omega} e^{2\pi i F(\bar{x})} d(\bar{x}, \tag{1}$$

где $\Omega$ - некоторая область $r$-мерного пространства $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_r), d\bar{x} = dx_1 \cdots dx_r$ , $F(\bar{x})$- некоторая действительная функция.

В настоящей работе приводятся теоремы об оценках тригонометрических интегралов и их приложения к нескоторым проблемам теории чисел.

## 1. Оценки тригонометрических интегралов.

Пусть $\Omega$- ограниченная замкнутая область $n$-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$- действительная прямая. Предположим, что в $\Omega$ задана $r$-мерная алгебраическая поверхность

$$f_j(\bar{x}) = 0, j = 1, \ldots, n-r, 0 \geq r \geq n, \tag{2}$$

причем матрица Якоби

$$J = J(\bar{x}) = ||\partial f_j / \partial x_i||, i = 1, \ldots, n, j = 1 \ldots n-r,$$

имеет, всюду в $\Omega$, максимальный ранг. Пусть далее, $A_0 = A_0(\bar{x})$- другая функциональная матрица, записанная в транспонированном виде

$$A_0^T = A_0^T(\bar{x}) = ||f_{ij}(\bar{x})||, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

с полиномиальными элементами, причем $m = r$. Располагая элементы матрицы $A_0$ в строку

$$f_{11}(\bar{x}), \dots f_{1m}(\bar{x}), \dots, f_{21}(\bar{x}), \dots, f_{2m}(\bar{x}), \dots, f_{n1}(\bar{x}), \dots, f_{nm}(\bar{x}),$$

возьмем транспонированную матрицу Якоби этой системы функций, обозначая ее $A_1$. Затем элементы столбцов этой матрицы последовательно, как выше, расположим в виде сроки и возьмем транспонированную матрицу Якоби $A_2 = A_2(\bar{x}) = A_1'(\bar{x})$ полученной системы функций и продолжим эту процедуру до получения матрицы $A_k = A_{k-1}'(\bar{x})$ для данного $k \geq 1$. Матрица, определенная таким образом, состоит из всевозможных частных производных одного и того же порядка $k$ элементов матрицы $A_0 = A_0(\bar{x})$ и имеет размер $n \times n^k m$. Предположим, что $A_j(\bar{x})$ имеет в $\Omega$ максимальный ранг равный $n$. Обозначим $G_j(\bar{x})$ произведение последних (наименьших) $r$ сингулярных чисел матрицы $A_j(\bar{x}), j = 0, \dots, k$. Положим:

$$E = E(H) = \{\bar{x} \in \Omega | G_0(\bar{x}) \leq H\}, H > 0.$$

Если $\varphi_{ik}(\bar{x})$ элементы матрицы $A_j(\bar{x})$, то примем следующие обозначения

$$L_j(\bar{x}) = \left( \sum_{i,k} |\varphi_{ik}(\bar{x})|^2 \right)^{1/2}, L = \max_j \max_{\bar{x} \in \Omega} L_j(\bar{x}), G_j = \min_{\bar{x} \in \Omega} G_j(\bar{x}), j = 0, \dots, k.$$

Следующие две теоремы позволяют оценить площади специального вида поверхностей.

Теорема 1. *Пусть $\Pi_H$ –часть поверхности (2), заключенная в $E(H)$ и $G_1 > 0$. Тогда для площади $\mu(\Pi_H)$ имеем оценку*

$$\mu(\Pi_H) \leq 2^{r-1} T \cdot H G_1^{-1} \log^{r-1}(c L^r H^{-1});$$

*здесь $T$- максимальное число подобластей $\Omega'$, где система (2) имеет однозначную разрешимость, а $c$ – постоянная, зависящая от $r$.*

Теорема 2. *Пусть $k \geq 1$ и $G_k > 0$. Тогда при условиях теоремы 1 имеем:*

$$\mu(\Pi_H) \leq 2^{r-1} T \cdot H^{1/k} G_k^{-1/k} \{\log(c L^r)^k H^{-(k+1)/2} G^{-(k-1)/2}\}^{r-1},$$

*где постоянная $c$ зависит лишь от $k$ и $r$.*

Пусть $F(\bar{x})$ — некоторый многочлен. Матрица $A_1(\bar{x})$ совпадает с матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_r} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_r^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_{k-1}(\bar{x})$ состоит из всех частных производных $k$ – го порядка функции $F(\bar{x})$.

Теорема 3. *Пусть число участков монотонности функции*

$$\varphi(u) = \int_{F(\bar{x})=u} \frac{ds}{\|\nabla F\|}$$

*не превосходит некоторую постоянную $K$, не зависящую от $u$. Тогда:*

1) *при $k \geq r$ существует положительная постоянная $c_1 = c_1(r, k, \deg F)$ такая, что*

$$\left| \int_\Omega e^{2\pi i F(\bar{x})} d\bar{x} \right| \leq c_1 K G^{\frac{r-k}{k(k-1)}} G_{k-1}^{\frac{r}{k(k-1)}} \{\log(L_0 + L_0^{-1})\}^{r-1},$$

*где $G = \min_{\bar{x} \in \Omega} \sqrt{\det(A_{k-1} \cdot A_{k-1}^T)}, G_{k-1}$ определено выше;*

2) *при* $k < r$ *имеет место оценка*

$$\left|\int_{\Omega} e^{2\pi i F(\bar{x})} d\bar{x}\right| \leq c_2 K H_0^{\frac{r-k}{k-1}} G_{k-1}^{\frac{1}{k-1}} \{\log(L_0 + L_0^{-1})\}^{r-1},$$

*где* $c_2 = c_2(r, k, F)$ *- постоянная,*

$$H_0 = max_{\bar{x}\in\Omega}\|\nabla F\|, H_1 = \min_{\bar{x}\in\Omega}\|\nabla F\|, L_0 = \max(L, L^{-1}, H_0, H_1^{-1}, G_{k-1}, G_{k-1}^{-1}).$$

Следствие. *Пусть* $k \geq r, \lambda$ *означает минимальное значение минимального сингулярного числа матрицы* $A_{k-1}(\bar{x})$ *в области* $\Omega$. *Тогда найдется положительная постоянная* $c_3 = c_3(r, k, F)$ *такая, что при условиях теоремы 3*

$$\left|\int_{\Omega} e^{2\pi i F(\bar{x})} d\bar{x}\right| \leq c_3 K \lambda^{-\frac{r}{k}} \left(\log(L_0 + L_0^{-1})\right)^{r-1}.$$

## 2. Приложения к экстремальным многообразиям

В работе [6, стр. 65] было дано понятие экстремальных многообразий. Из следствия выводим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\gamma_1(\bar{x}), \ldots, \gamma_k(\bar{x})$*- различные одночлены от* $r$ *переменных степени* $m \leq (1 + k^{-1})r$, *содержащие одновременно все независимые переменные. Тогда многообразие* $\Gamma = (\gamma_1(\bar{x}), \ldots, \gamma_k(\bar{x}))$ *экстремально.*

Следующая теорема опирается на результаты о показателе сходимости проблемы Терри ([3, 4]) и лемму Э. И. Ковалевской ([1, 5, 6]). Введем обозначение $\omega = [0, 1]^2$. Рассмотрим функции

$$f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = x^2, f_4(x, y) = xy,$$

$$f_5(x, y) = y^2, f_6(x, y) = x^3, f_7(x, y) = x^2 y, f_8(x, y) = y^2 x, f_9(x, y) = y^3,$$

$$g_j(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6) = f_j(\bar{x}_1) + \cdots + f_j(\bar{x}_6)), j = 1, ..., 9,$$

где $\bar{x}_i = (x_i, y_i)$.

Теорема 5. *12-мерное многообразие*

$$\Gamma^* = (g_1(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_2(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_3(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_4(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_5(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6),$$

$$g_6(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_7(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_8(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6), g_9(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6))$$

*является экстремальным как аффинный образ топологического произведения* 6 *экземпляров двумерного многообразия*

$$\Gamma = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9).$$

Следствием этой теоремы является экстремальность многообразия $\Gamma$. Докажем это. Введем множества

$$A_q = \{\bar{x} \in \omega | \, \|q f_j(\bar{x})\| < (1/6) q^{-1/9-\delta} (1 \leqslant j \leqslant 9)\},$$

$$B_q = \{(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \in \omega^6 | \, \|q g_j(\bar{x})\| < q^{-1/9-\delta} (1 \leqslant j \leqslant 9)\}.$$

Очевидно имеем: $A_q^6 \subset B_q$. Нами доказано, что для любого положительного $\delta > 0$ множество $A$ тех точек $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \in \omega^6$, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \in A_q^6$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел $q$ является подмножеством множества $B$ таких же точек, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \in B_q \tag{3}$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел $q$. Далее, из леммы Бореля - Кантелли следует равенство $mesB = 0$. Возьмем последовательность чисел $\delta_1 > \delta_2 > \cdots, \delta_n \to \infty$ и найдем последовательность множеств $M_1, M_2, \ldots$ меры нуль, для точек каждого из которых соотношение (3) выполняется для бесконечного количества натуральных чисел $q$, с соотетствующими значениями $\delta_n$. Обозначим $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Имеем $mesM = 0$. Для точек $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_6) \in \omega^6 \setminus M$ система (3) для любого положительного $\delta > 0$ уже может выполняться только для конечного числа натуральных чисел $q$, т. е. точная верхняя грань $u(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6)$ тех чисел $u > 0$, для которых система

$$\|qg_j(\bar{x})\| < q^{-u-1/9} (1 \leq j \leq 9)$$

имеет место для бесконечного множества натуральных чисел $q$, не превосходит $1/9$.

Далее, по теореме Фубини проекция $C$ множества $\omega^6 \setminus M$ на плоскость $(x, y)$ имеет полную меру. Нам надо доказать, что для всех $(x, y) \in C$ система неравенств

$$\|qf_j(\bar{x})\| < q^{-u-1/9} (1 \leq j \leq 9) \tag{4}$$

для всех $u > 0$ имеет место лишь для конечного числа чисел $q$. Допустим противное. Пусть для некоторого $(x, y) \in C$ найдется $u > 0$ такое, система (4) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел $q$. Тогда плоагая $(x, y) = \bar{x}_1 = \cdots = \bar{x}_6$ получаем, что (3) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел $q$, когда $u = \delta$, при этом $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_6) \in \omega^6 \setminus M$. Это противоречит доказанному выше. Итак, почти для всех точек из $\omega$ (4) выполняется.

Далее, из принципа Дирихле ([2]) следует, что эта точная верхняя грань не меньше чем $1/9$. Следовательно, наше утверждение доказано.

## 3. Приложения к оценкам тригонометрических сумм со сдвигом

Тригонометрические интегралы и оценки связанные с ними применяются к некоторым вопросам распределения дробных долей функций. Здесь особую роль играют тригонометрические суммы, усредненные по некоторому параметру. Таким путьем удается получить точные результаты в вопросе распределения целых точек внутри сдвинутых областей. Здесь для простоты рассматривается только одномерный случай.

Теорема 6. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b], a < b, a, b \in \mathbb{Z}$, при этом существуют $k > 0$ и $A > 0$ такие, что*

$$A^{-1} \leq |f''(x)| \leq kA^{-1}.$$

*Тогда найдется абсолютная постоянная $c = c(k) > 0$ такая, что*

$$\int_0^1 \left| \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n+\alpha)} \right|^2 d\alpha \leq c(b - a + A).$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Берник В. И., Ковалевская Э. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве. // Матем. заметки, 1974, том 15, выпуск 2, 247–254.
2. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.:ИИЛ, 1961, 212стр.
3. Джаббаров И. Ш., О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри, *Чебышевский Сборник*, 14:2 (2013), 74-103.
4. Джаббаров И. Ш. О многомерной проблеме Терри для кубческого многочлена // Математические заметки, том 107, выпуск 5, (2020), стр. 657-673 (в печати).
5. Ковалевская Э. И. Совместно экстремальные многообразия.// Матем. заметки, 1987, том 41, выпуск 1, 3–8.
6. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977, 143 стр.


---

УДК 511

# О цепных дробях с рациональными неполными частными, экстремальных значениях континуантов с ограничениями на переменные и аналоге теоремы Хейльбронна

**Д. А. Долгов (Россия, г. Казань)**
Казанский федеральный университет
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

# Continued fractions with rational incomplete quotients, extremal values of continuants with constrained variables and analogue of Heilbronn's theorem

**D. A. Dolgov (Russia, Kazan)**
Kazan (Volga region) Federal University
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

## 1. Цепная дробь с рациональными неполными частными

К-арные алгоритмы - одни из наиболее быстрых алгоритмов вычисления НОД натуральных чисел. В данной работе используются к-арные алгоритмы Соренсона с правым и левым сдвигом [1]. С помощью к-арного алгоритма с правым сдвигом можно разложить число $\frac{u}{v}$ ($u$, $v \in \mathbb{N}$) в цепную дробь с рациональными неполными частными (с правым сдвигом) длины $n$

$$\frac{u}{v} = \frac{y_1}{x_1} + \cfrac{k_1}{\cfrac{x_1 y_2}{x_2} + \cfrac{x_1 k_2}{\ddots + \cfrac{x_{n-2} k_{n-1}}{\cfrac{x_{n-1} y_n}{x_n}}}} = \langle (y_1, x_1, k_1); (y_2, x_2, k_2), \cdots (y_n, x_n) \rangle_1 \tag{1}$$

$$\frac{u}{v} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{x_i} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{k_j}{x_j} + \frac{k_{n-1}}{\frac{x_{n-1}y_n}{x_n}} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{k_i}{x_i} = \langle (y_1, x_1, k_1); (y_2, x_2, k_2), \cdots (y_n, x_n) \rangle_2 \tag{2}$$

Если $\frac{u}{v} > 1$, то $\frac{y_1}{x_1}$, ..., $\frac{y_n}{x_n}$ – ненулевые рациональные. Число $k_i$ – целое, $k_i \geqslant 2$, $i \geqslant 1$. Если $\frac{v}{u} < 1$, то будем рассматривать дробь $\frac{1}{\frac{u}{v}} = \langle (0, 0, 1), (y_1, x_1, k_1), \cdots, (y_n, x_n, k_n) \rangle$. На каждом шаге к-арного алгоритма всегда уходит наибольшее из двух чисел предыдущего шага алгоритма, т.к. $\gcd(u, v) = \gcd(\min(u, v), \frac{xu+yv}{k})$. Если результат к-арной редукции текущего шага алгоритма всегда меньше входных чисел текущего шага алгоритма, то получается цепная дробь вида 1, если же всегда больше, кроме последнего шага, то получится цепная дробь вида 2. В других случаях получится комбинация этих вариантов. Число $\frac{u}{v}$ также можно разложить в цепную дробь с рациональными неполными частными (с левым сдвигом) длины $n$

$$\frac{u}{v} = \frac{y_1}{x_1} {k_1}^{e_1} + \cfrac{1}{\frac{x_1 y_2}{x_2} {k_2}^{e_2} + \cfrac{x_1}{\ddots + \cfrac{x_{n-2}}{\frac{y_n x_{n-1}}{x_n} {k_n}^{e_n}}}} = \langle (y_1, x_1, k_1, e_1); \cdots (y_n, x_n, k_n, e_n) \rangle_3 \tag{3}$$

$$\frac{u}{v} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i {k_i}^{e_i}}{\prod_{j=1}^{i} x_j} + \frac{1}{\frac{y_n {k_n}^{e_n} \prod_{i=1}^{n-1} x_i}{x_n}} = \langle (y_1, x_1, k_1, e_1); (y_2, x_2, k_2, e_2), \cdots (y_n, x_n, k_n, e_n) \rangle_4 \tag{4}$$

Индексы 1, 2, 3, 4 указывают на принажлежность к конкретной цепной дроби. В алгоритме Соренсона с левым сдвигом $k_i = k > 2$, $x_i$ и $y_i$ — коэффициенты к-арной редукции на $i$ шаге алгоритма, причем $x_i$, $y_i \leqslant k$. При $u_i \geqslant v_i > 0$ невозможен только случай $x_i < 0$, $y_i > 0$. Для алгоритма Соренсона сокращение на каждом шаге $\geqslant k + 1$, найдется $m$: $C_m = u_m x_m - v_m y_m {k_m}^{e_m} < v_m$, $u_0 = u$, $v_0 = v$. Таким образом, в цепной дроби хотя бы один раз появляется домножаемый коэффициент $x_i$, например, $x_1$ в $\frac{x_1 y_2 {k_2}^{e_2}}{x_2}$. Подобное выполняется и для дробей вида 1, 2.

## 2. Экстремальные значения континуантов и аналог треугольника Паскаля

Определение 1. *Континуант — определитель трехдиагональной матрицы $M$, состоящей из нулей, кроме главной и двух примыкающих диагоналей [5].*

Для континуанта дроби 1 порядка $n$ матрица $M$ будет иметь следующую структуру

$$\begin{pmatrix} y_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ -x_2 & y_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & -x_3 & y_3 & \lambda_3 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & -x_n & y_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\lambda_i = k_i \tag{6}$$

$$\lambda_i = k_i x_i \tag{7}$$

Для дроби 1 в 5 будет выполняться 6. Если на каждом шаге искать НОД не от $(v, \frac{ux+vy}{k})$, а от $(vx, \frac{ux+vy}{k})$, то домножаемых коэффициентов не будет. В этом случае в 5 выполняется 7. Для дробей вида 2 $M$ будет иметь всего две диагонали и 1 ненулевой столбец

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^n y_1 & 0 \\ x_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1} y_2 & 0 \\ 0 & x_3 & \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+2} y_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & \lambda_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+3} y_4 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & \lambda_{n-2} & (-1)^{2n-3} y_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & y_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -x_n & y_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Для дробей 2 в 8 выполняется 6. Если на $n-1$ шаге выбирать такие коэффициенты к-арной редукции, что $\frac{u_i x_i + v_i y_i}{k} > \min(u_i, v_i)$, а на каждом новом шаге брать НОД от $(v_i x_i, \frac{u_i x_i + v_i y_i}{k})$, то в 8 будет выполняться 7. В общем случае разложения $\frac{u}{v}$ в цепную дробь с рациональными неполными частными в матрице $M$ будет чередоваться структура 5, 8. Подобные матрицы были получены и для дробей 3, 4.

Обозначим континуант как $[g_1, ..., g_n]_j$, где $g_i = (y_i, x_i, k_i)$, $i \in [1, n]$; $j = 1$ при 5 и 6, $j = 2$ при 5 и 7, $j = 3$ при 8 и 6, $j = 4$ при 8 и 7. Для цепной дроби $\langle g_1, ..., g_n \rangle$ назовем связанным с ней континуантом $[g_1, ..., g_n]$. Для континуантов цепных дробей с рациональми неполными частными справедливы аналогичные свойства, как и для континуантов элементарных цепных дробей : $[\ ] = 1$, $[g_1] = y_1$, $[g_1, g_2]_{1,3} = y_1 y_2 + k_1 x_2$, $[g_1, g_2]_{2,4} = y_1 y_2 + k_1 x_1 x_2$, свойства континуанта исследовались в [4], см. предложение 1. Для цепных дробей 3, 4 также получены свои континуанты, а также доказаны формулы, подобные формулам в [4].

Многочлены Фибоначчи $Fib_n(k)$ изучались во многих работах, вид представленного ниже многочлена Фибоначчи был введен и изучался в [2, 3].

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant |x_j|$, $|y_j| \leqslant \lceil \sqrt{k} \rceil$, $k_j = k$; $n \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда,*

1. $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2 = \lceil \sqrt{k} \rceil^n \sum\limits_{i=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \binom{n-i}{i} k^i = \lceil \sqrt{k} \rceil^n Fib_n(k)$.

2. $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2 = \left( \frac{\lceil \sqrt{k} \rceil q_2 - \lceil \sqrt{k} \rceil^2 - k \lceil \sqrt{k} \rceil^2}{q_2 - q_1} \right) {q_1}^{n-1} + \left( \frac{\lceil \sqrt{k} \rceil^2 + k \lceil \sqrt{k} \rceil^2 - \lceil \sqrt{k} \rceil q_1}{q_2 - q_1} \right) {q_2}^{n-1}$, *где* $q_{1,2} = \frac{\lceil \sqrt{k} \rceil \pm \sqrt{\lceil \sqrt{k} \rceil^2 + 4k \lceil \sqrt{k} \rceil^2}}{2}$.

3. $\min\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2 = - \max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2$.

4. *Для* $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2$ *производящая функция* $G(z) = \frac{1}{1 - \lceil \sqrt{k} \rceil z - k \lceil \sqrt{k} \rceil^2 z^2}$.

5. *При* $n \geqslant 2$, $k = \frac{1}{4z^2}$ *многочлен Чебышева второго рода*

$$C_n(z) = (2z)^{2n} \max_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \wedge 1 = 1 \\ n-2i \geqslant 0}}^{n} 2 \binom{n-i}{i} 2^{n-2i} z^{n-2i}$$

.

6. $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2 \sim \lceil \sqrt{k} \rceil^n \left( \frac{2\lceil \sqrt{k} \rceil + 2\lceil \sqrt{k} \rceil k - 1 + \sqrt{1+4k}}{2\sqrt{\lceil \sqrt{k} \rceil^2 + 4k \lceil \sqrt{k} \rceil^2}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2} \right)^{n-1}$

Знак $\wedge$ означает побитовую конъюнкцию. Подобные результаты получены и для остальных континуантов. Запишем аналог треугольника Паскаля для $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_1$, $\max\limits_{\forall x_j, y_j} [g_1, ..., g_n]_2$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & \\
 & 1 & & 3 & & 1 & \\
 & 1 & & 4 & & 3 & \\
1 & & 5 & & 6 & & 1 \\
1 & & 6 & & 10 & & 4 \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

## 3. Аналог теоремы Хейльбронна

Определение 2. *Решения некоторого диофантового уравнения равного $u$ назовем связанными с элементами множества $Q(u) \subseteq \{\langle g_1, ..., g_n\rangle : u = [g_1, ..., g_n]\}$, если для любого решения найдется такой элемент из $Q(u)$, что одно из разложений связанного с ним континуанта совпадает с данным решением.*

Пусть даны натуральные $u$, $v$, $k_1$, $k_m$, целые $R$, $\overline{R}$, $S$, $\overline{S}$, $T$, $\overline{T}$, $X$, $\overline{X}$, $Y$, $Z$. Рассмотрим уравнения

$$u = R\overline{R} + k_m S\overline{S}T\overline{T} \tag{9}$$

$$uX = vY + k_1 X^2 \overline{X} Z \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть множество $G(u, v, \mathbb{K}) \subseteq \left\{\langle g_1, g_2, g_3, \cdots g_n\rangle : \frac{v}{u} = \frac{x_1[g_2, g_3, \cdots g_n]}{[g_1; g_2, g_3, \cdots g_n]}\right\}$, $\mathbb{K} = \{k_i\}$, $k_i \geqslant 2$. $r_1(u, \mathbb{K})$ — количество решений уравнения 9, связанных с элементами множества $\{G(u, v, \mathbb{K}) : 1 < v < \frac{u}{2}, \gcd(u, v) = 1\}$. $r_2(u, v, k_1)$ — количество решений уравнения 10, связанных с элементами множества $G(u, v, \mathbb{K})$. Тогда,*

$$\sum_{\substack{1<v<u \\ \gcd(u,v)=1}} \sum_{g \in G(u,v,\mathbb{K})} n(g) = 2r_1(u, \mathbb{K}) + \frac{3}{2} \sum_{\substack{1<v<u \\ \gcd(u,v)=1}} r_2(u, v, k_1),$$

$$\sum_{\substack{1<v<\frac{u}{2} \\ \gcd(u,v)=1}} \#G(u, v, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{\frac{u}{2}<v<u \\ \gcd(u,v)=1}} \#G(u, v, \mathbb{K}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1<v<u \\ \gcd(u,v)=1}} \#G(u, v, \mathbb{K}).$$

Данная теорема позволяет связать среднее значение длины цепной дроби с рациональными неполными частными вида 1 с числом решений диофантова уравнения. Теорема справедлива для произвольного множества $G(u, v, \{k_i\})$ вне зависимости от условий на коэффициенты к-арной редукции. Если рассматриваются натуральные решения уравнения 9, с фиксированными $k_m$, $S$, $\overline{S}$, то их количество будет равно

$$\sum_{\substack{1 \leqslant v<u \\ u-v=0 \mod k_m S\overline{S}}} \tau_2(v)\, \tau_2\left(\frac{u-v}{k_m S\overline{S}}\right).$$

Конкретной дроби $\frac{v}{u}$ могут удовлетворять несколько различных цепных дробей в зависимости от выбора конкретных коэффициентов к-арной редукции. Отметим, что аналог подобной теоремы можно получить и для цепных дробей, которые получаются при использовании алгоритма Соренсона с левым сдвигом.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Sorenson J. Two fast GCD Algorithms // Journal of Algorithms. 1994. Том 16, № 1. С. 110-144.

2. Doman B. G. S, Williams J. K. Fibonacci and Lucas polynomials // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. Том 90, № 3. С. 385-387.

3. Galvez F. J. Novel properties of Fibonacci and Lucas polynomials // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1985. Том 97, №1. С. 159-164.

4. Долгов Д. А. «О среднем числе шагов в k-арном алгоритме Сорренсона с правым сдвигом» // XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 23-28 сентября 2019 г.) — Тула, 2019. С. 107-109.

5. Muir T. A treatise on the theory of determinants. — Dover Publications, 1960.


---

УДК 511.32

# О четности суммы цифр в случае системы счисления, основанием которой являются знаменатели подходящих дробей

**А. А. Жукова (Россия, г. Владимир)**
«Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», Владимирский филиал
e-mail: georg967@mail.ru
**А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)**
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

# On the parity of the sum of digits in the case of a number system based on the denominators of continued fractions

**A. A. Zhukova (Russia, Vladimir)**
"Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation" Vladimir branch
e-mail: georg967@mail.ru
**A. V. Shutov (Russia, Vladimir)**
Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Каждое натуральное число $n$ может быть разложено в систему счисления Фибоначчи:

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i F_i,$$

где $f_i \in \{0,1\}$, $f_i f_{i+1} = 0$, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$. Введем в рассмотрение два множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\infty} f_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}_0.$$

Пусть

$$F_i(X) = \sharp\{n \leqslant X : n \in \mathbb{F}_i\}.$$

Известна следующая асимптотика [1]

$$F_i(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

Существует два возможных пути обобщения данного результата.

1) Переход от чисел Фибоначчи к более общим линйным рекуррентным последовательностям (в том числе произвольного порядка). Это обобщение частично рассмотрено в [2].

2) Переход от чисел Фибоначчи к знаменателям подходящих дробей.

Пусть $\alpha \in [0;1)$ – иррациональное число, имеющее разложение в цепную дробь вида $\alpha = [0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$. Знаменатели подходящих дробей к $\alpha$, определяемые соотношением

$$Q_i = q_i Q_{i-1} + Q_{i-2},$$

где $Q_1 = 1$, $Q_2 = q_1$, образуют систему счисления [3], в которой любое натуральное число $n$ может быть представлено как

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i Q_i,$$

причем, если $f_i = q_{i+1}$, то $f_{i-1} = 0$.

Определим множества

$$\mathbb{Q}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\infty} f_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{Q}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}_0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$Q_i(X) = \sharp\{n \leqslant X : n \in \mathbb{Q}_i\},$$

*тогда*

$$Q_i(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

Доказательство теоремы 1 основывается на явной формуле

$$Q_i(X) = \sum_{n \le X} \frac{(-1)^i \varepsilon(n) + 1}{2},$$

где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Q}_0 \\ -1 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Q}_1 \end{cases},$$

а также на оценках сумм $S_1(X) = \sum_{n<X} \varepsilon(n)$ и $S_1^*(n) = S_1(Q_n)$. Поскольку эти оценки представляют и самостоятельный интерес, приведем их.

Лемма 1. *Существует постоянная $C$ такая, что*

$$|S_1^*(n)| \leq C$$

*для всех $n$.*

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$S_1(X) = O(\log X).$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Drmota M., Skałba M. The parity of the Zeckendorf sum-of-digits function // Nanuscripta mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.
2. Drmota M., Gajdosik J. The parity of the sum-of-digits-function of generalized Zeckendorf representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 3. Issue 6. P. 3-19.
3. Ostrowski A. Math. Miszellen XVI // Notiz zur Theorie der Diophantischen Approximationen und zur Theorie der linearen Diophantischen Approximationen // Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 1939. V. 39. P. 34-46.


---

УДК 517.521, 517.982.224

# Орторекурсивное разложение единицы

**А. Б. Калмынин (Россия, г. Москва)**
НИУ ВШЭ, факультет математики
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru

# Orthorecursive expansion of unity

**A. B. Kalmynin (Russia, Moscow)**
National Research University Higher School of Economics, Math Department
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru

Let $c_n$ be the sequence of real numbers defined by a recurrent formula

$$c_0 = 1,$$
$$\frac{c_0}{n+1} + \ldots + \frac{c_n}{2n+1} = 0.$$

This sequence can also be interpreted in terms of properties of polynomials $p_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ as elements of Hilbert space $L^2([0,1])$. In this talk, based on a joint work with P. R Kosenko, we will discuss various properties of $c_n$, such as upper and lower bounds, sign changes and infinite series identities relating $c_n$ to harmonic numbers and $\pi$.

We will also prove that $c_n \neq 0$, using 2-adic properties of permutations of special form.

---

УДК 511.42

# Количество комплексных сопряжённых алгебраических чисел в кругах малых радиусов

**М. А. Калугина (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
**М. В. Ламчановская (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
e-mail: lammv@mail.ru
**О'Доннелл (Ирландия, г. Дублин)**
Дублинский институт технологий
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

# The number of complex conjugate algebraic numbers in circles of small radius

**M. A. Kalugina (Belarus, Minsk)**
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: m.kalugina@bsuir.by
**M. V. Lamchanovckaya (Belarus, Minsk)**
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
e-mail: lammv@mail.ru
**O'Donnell (Ireland, Dublin)**
Dublin Institute of Texnology
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_n(H), H > 1$ многочленов $P(z)$ комплексной переменной $z$ степени $\deg P = n > 3$ и высоты $h(P) \leqslant H$. Ясно, что

$$c_1(n)H^{n+1} < \mathcal{P}_n(H) < c_2(n)H^{n+1}. \tag{1}$$

Нетрудно доказать, что при $\gamma_1 > 1$ существуют круги $C(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ радиуса $r = H^{-\gamma_1}$, внутри которых нет алгебраических точек высоты $h \leqslant H$ при любом $n \geqslant 3$.

Теорема 1. *Обозначим через $B_1(H, \gamma_1) \subset C(z, r)$, $z \in \mathbb{C}$, $H > 1$, $0 \leq \gamma < 1$ множество решений системы неравенств*

$$\begin{gathered} |P(z)| < c_3(n)H^{-\frac{n-1}{2}}, \\ H^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(z)| < \delta_0 H. \end{gathered} \tag{2}$$

*Тогда при достаточно малом $\delta_0$ справедливо неравенство*

$$\mu B_1(H, \gamma_1) < \frac{1}{4}\mu C(z, r),$$

*где $\mu B_1$ - плоская мера измеримого множества $B_1 \in \mathbb{C}$.*

Теорема 2. *Пусть $B_1(H,\gamma_1)$, как в теореме 1,*

$$B_2(H,\gamma_1) = C(z,r) \setminus B_1(H,\gamma_1),$$

*$A(H)$- множество комплексных алгебраических точек $\alpha \in C(z,r), \deg\alpha = n, h(\alpha) \leq H$. Тогда справедливо неравенство*

$$A(H) > c_3(n)H^{n+1-2\gamma_1}. \tag{3}$$

Теорема 2 несложно получается из теоремы 1. Теорема 1 доказывается средствами метрической теории диофантовых приближений [1].Теорема 2 для коротких интервалов $I$ и алгебраических действительных точек $\alpha \in I$ без оценки снизу для $|P'(z)|$ доказана в [2].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. 182 с.

2. Берник В. И., Гётце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Том 79, № 1. С. 21-42.

---

УДК 511.3

# Задача аналитического продолжения рядов Дирихле и некоторые проблемы теории L-функций Дирихле

**В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)**
Саратовский технический гос. университет имени Ю. А. Гагарина.
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
**О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)**
Саратовский технический гос. университет имени Ю. А. Гагарина.
e-mail: olga.matveevam.0@gmail.com

# Problems of analytic continuation of Dirichlet series and some problems of the theory of L-Dirichlet functions

**V. N. Kuznetsov (Russia, Saratov)**
Yury Gagarin State Technical University of Saratov
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
**O. A. Matveeva (Russia, Saratov)**
Yury Gagarin State Technical University of Saratov
e-mail: olga.matveevam.0@gmail.com

Начиная с конца 2016 года авторы занимались задачей аналитического продолжения рядов Дирихле (см. [1]-[6]). Это объясняется тем, что все задачи теории рядов Дирихле так или иначе связаны между собой, и результаты, полученные в направлении решения одной задачи, позволяют получить новые результаты в решении других задач. Авторы выбрали для себя задачу аналитического продолжения рядов Дирихле.

В работе [1] было установлено отличие в решении задачи аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами от случая немультипликативных коэффициентов. В работе [2] был определен класс рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, для которых последовательность первообразных сумматорной функции коэффициентов определяет аналитическое продолжение рядов Дирихле, как целых функций на комплексную плоскость. В работах [3] и [4] указан широкий класс рядов Дирихле, которые определяют целые функции. В основе доказательства этого факта лежат результаты Римана относительно обобщенного принципа симметрии в задаче аналитического продолжения функций комплексного переменного. В работах [5], [6] изучалась задача аналитического продолжения в критическую полосу эйлеровых произведений, взятых по последовательностям простых, лежащих в арифметических прогрессиях.

Авторы показали, что результаты работ [3] и [4] связаны с известной проблемой обобщенных характеров, что позволило до конца довести решение этой проблемы. (см. [7], [8]). В работах [5], [6] была установлена связь между свойствами продолженных в критическую полосу эйлеровых произведений и нулями L–функций Дирихле, что позволило доказать, что нули L–функций Дирихле в случае невещественных характеров, лежащих в критической полосе, с учетом кратностей совпадают с нулями дзета-функции Римана.

У авторов есть основание утверждать, что задача аналитического продолжения рядов Дирихле связана и с другими задачами теории L–функций.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2016, Т. 87, Вып.3, С. 115 - 124.

2. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость. // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2017, Т. 18, Вып.4, С. 285 - 295.

3. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2018, Т. 19, Вып.1, С. 124 - 137.

4. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Идеи Римана и их воплощение в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2020, Т. 21, работа послана в редакцию.

5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Основная и расширенная гипотеза Римана и нули L – функций Дирихле // Чебышевский сборник — Тула (работа в печати).

6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле и некоторые проблемы, связанные с нулями L – Функций Дирихле, лежащих в критической полосе // Чебышевский сборник — Тула (работа в печати).

7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю. В. Линника // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2018, Т. 19, Вып. 3, С. 222 - 232.

8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К проблеме обобщённых характеров // Чебышевский сборник — Тула: изд - во ТГПУ, 2018, Т. 19, Вып. 3, С. 232 -240.

---

УДК 511.32

# Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана

**Л. Н. Куртова (Россия, г. Белгород)**
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: kurtova@bsu.edu.ru
**Н. Н. Мотькина (Россия, г. Белгород)**
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: motkina@bsu.edu.ru

# Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem

**L. N. Kurtova (Russia, t. Belgorod)**
Belgorod State National Research University
e-mail: kurtova@bsu.edu.ru **N. N. Mot'kina (Russia, t. Belgorod)**
Belgorod State National Research University
e-mail: motkina@bsu.edu.ru

В 1770 г. Ж. Лагранж доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел. Эта задача получила название *задачи Лагранжа*. До Лагранжа П. Ферма, Л. Эйлер и другие математики изучали квадратичные формы частного вида. Лагранж установил основную связь между вопросом о представимости чисел квадратичной формой и существованием решений соответствующего сравнения второй степени. К. Ф. Гаусс, а затем Л. Дирихле, продолжая исследования Эйлера, создали теорию представления натуральных чисел квадратичными формами. Гаусс ввел тригонометрические суммы вида

$$S(q,a,b)=\sum_{1\leqslant j\leqslant q} e^{2\pi i(aj^2+bj)/q},$$

показал их полезность в решении задач теории чисел. Эти суммы называют *суммами Гаусса*.

В 1926 г. Х. Клоостерман рассмотрел обобщение задачи Лагранжа. Он нашел асимптотическую формулу для количества представлений целого положительного числа диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными. Эта задача получила название *задача Клоостермана*. В своей работе [1] Клоостерман выделил случаи, когда уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, где $a$, $b$, $c$, $d$, $n$ —положительные целые, не имеет решения.

В главном члене асимптотической формулы задачи Клоостермана возникает особый ряд

$$S(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}}S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0), \tag{1}$$

где $S(q,a,b)$ — суммы Гаусса. При рассмотрении особого ряда (1) задачи Клоостермана, были применены точные формулы для сумм Гаусса ([2]—[5]), сумм Рамануджана и их специальных аналогов в случае, когда $q$ является степенью двойки. Это позволило уточнить случаи Клоостермана, при которых уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, содержащее хотя бы один четный коэффициент $a,b,c$ или $d$, не имеет решений.

Теорема 1. *При* $(n,2)=1$ *то уравнение* $ax^2+by^2+cz^2+du^2=n$ *не имеет решений в случаях:*

*1. если* $a=2^\alpha a_1$, $(a_1,2)=1$, $\alpha\geq 3$, $(b,2)=1$, $(c,2)=1$, $(d,2)=1$, $b\equiv c\equiv d\not\equiv n \pmod 4$, $\left(\frac{2}{bcdn}\right)=1$;

*2. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=1$, $2\leq\alpha\leq\beta$, $(c,2)=1$, $(d,2)=1$, $c\equiv d\not\equiv n \pmod 4$;

*3. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma\geq 3$, $(d,2)=1$, $a_1\equiv b_1\equiv d\not\equiv n \pmod 4$, $\left(\frac{2}{dn}\right)=1$;

*4. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma\geq 3$, $(d,2)=1$, *два из коэффициентов* $a_1,b_1,d$ *и число* $n$ *сравнимы, но не сравнимы с третьим из коэффициентов* $a_1,b_1,d$ *по модулю* 4, $\left(\frac{2}{dn}\right)=-1$;

*5. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $\alpha=1$, $3\leq\beta\leq\gamma$, $(d,2)=1$, $a_1\equiv d\equiv n \pmod 4$, $\left(\frac{2}{dn}\right)=-1$;

*6. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $\alpha=1$, $3\leq\beta\leq\gamma$, $(d,2)=1$, $a_1\equiv d\not\equiv n \pmod 4$, $\left(\frac{2}{dn}\right)=1$;

*7. если* $a=2^\alpha a_1$, $b=2^\beta b_1$, $c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $\alpha=1$, $3\leq\beta\leq\gamma$, $(d,2)=1$, $a_1\not\equiv d \pmod 4$, $\left(\frac{2}{dn}\right)=-1$;

*8. если* $a=2^\alpha a_1, b=2^\beta b_1, c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $(d,2)=1$, $2=\alpha\leq\beta\leq\gamma$, $\left(\frac{-1}{dn}\right)=-1$;

*9. если* $a=2^\alpha a_1, b=2^\beta b_1, c=2^\gamma c_1$, $(a_1,2)=(b_1,2)=(c_1,2)=1$, $(d,2)=1$, $3\leq\alpha\leq\beta\leq\gamma$, $\left(\frac{-1}{dn}\right)=-1$ *или* $\left(\frac{2}{dn}\right)=-1$;

*10. если все коэффициенты* $a,b,c,d$ *делятся на* 2.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Kloosterman H. D. On the representation of number in the form // Acta mathematica. 1926. V. 49. P. 407-464.

2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 65. С. 3-212.

3. Hua Loo–Keng. Introduction to number theory. — Springer, 1982. 572 p.

4. Estermann T. A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. 1962. *12*. P. 425–444.

5. Estermann T. On Kloosterman's sum // Mathematica. 1961. *8*. P. 83–86.


---

УДК 511.12

# О теории делимости в кватернионных порядках одного специального вида

**У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)**
Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия
e-mail: urusbi@rambler.ru
**Т. А. Шакова (Россия, г. Нальчик)**
Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

# On the theory of divisibility in quaternionic orders of one special form

**U. M. Pachev (Russia, Nalchik)**
Kabardino–Balkarian State University, Nalchik, Russia
e-mail: urusbi@rambler.ru
**T. A. Shakova (Russia, Nalchik)**
Kabardino–Balkarian State University, Nalchik, Russia
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

В связи с применениями дискретного эргодического метода (см. [1, 2]) к вопросу представления целых чисел тернарными квадратичными формами важную роль играет теория делимости в кватернионных порядках того или иного вида.

Мы рассматриваем неопределённую анизотропную тернарную квадратичную форму

$$f_b = f_b(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - b\,x_2^2 - b\,x_3^2, \tag{1}$$

где $b > 0$ — целое число, не являющееся полным квадратом.

Условия анизотропности формулы (1) через число $b$ даёт следующая

Лемма 1. *Тернарная квадратичная форма $x_1^2 - b\,x_2^2 - b\,x_3^2$ анизотропна над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел тогда и только тогда, когда число $b$ точно делится на нечётную степень некоторого простого числа $p \equiv 3 \pmod 4$, т. е. $p^{2\alpha+1} \| b$.*

В доказательстве используется тот факт, что число $b$ не может быть полным квадратом, а простое число $p$ указанного вида не является суммой двух квадратов ненулевых целых чисел.

С тернарной квадратичной формой $f_b$ указанного вида (1) мы сопоставляем алгебру $U_{f_b}$ неопределённых кватернионов, задаваемую следующей таблицей умножения базисных кватернионных единиц $i_1,\ i_2,\ i_3$:

1) $i_1^2 = -b^2$, $i_2^2 = b$, $i_3^2 = b$;

2) $i_1\,i_2 = -b\,i_3$, $i_2\,i_1 = b\,i_3$;

3) $i_1\,i_3 = b\,i_2$, $i_3\,i_1 = -b\,i_2$;

4) $i_2\,i_3 = i_1$, $i_3\,i_2 = -i_1$.

Тогда элементы из алгебры кватернионов $U_{f_b}$ над полем $\mathbb{Q}$ имеют вид

$$X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3,$$

где $x_k \in \mathbb{Q}$.

В алгебре неопределённых анизотропных кватернионов $U_{f_b}$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел выделяем множество $O_{f_b}$ элементов, называемых целыми кватернионами, а именно $O_{f_b} = \left\{x_0^2 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3 \mid x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}\right\}$.

Такое определение даётся нами по аналогии с понятием обычного целого кватерниона по Липшицу (см. [3]).

При построении арифметики (теории делимости) в кольце $O_{f_b}$ используется также понятие нормы кватерниона $X \in O_{f_b}$, определяемое равенством $N(X) = x_0^2 + b^2\,x_1^2 - b\,x_2^2 - b\,x_3^2$.

Норма кватерниона обладает мультипликативным свойством, т. е. $N(X\,Y) = N(X) \cdot N(Y)$ для любых $X,\ Y \in O_{f_b}$.

В некоммутативной арифметике кольца целых кватернионов $O_{f_b}$ определяются делимости слева и справа.

Говорим, что кватернион $A \in O_{f_b}$ делится справа на кватернион $B \in O_{f_b}$, если найдётся кватернион $Q \in O_{f_b}$, если $A = Q\,B$ и записываем $A/B$. Аналогично определяется делимость слева $B\backslash A$ кватерниона $A$ на кватернион $B$.

Для полного построения теории делимости в кватернионных алгебрах наиболее существенным является существование в них алгоритма Евклида (алгоритм деления с остатком и цепочка делений, дающая наибольший общий делитель двух заданных кватернионов). В математической литературе алгоритм Евклида известен только для отдельных видов колец. Мы даём следующий новый аналог алгоритма Евклида в кольце неопределённых анизотропных кватернионов $O_{f_b}$.

Теорема 1 (алгоритм Евклида для $O_{f_b}$). *Для любых неопределённых анизотропных кватернионов $A,\ B \in O_{f_b}$, где $B \neq 0$ найдутся кватернионы $S,\ R \in O_{f_b}$, $R = 0$, либо $A = S\,B + R$, причём $0 < \rho(R) < \rho(B)$ а также кватернионы $S',\ R' \in O_{f_b}$ для которых $A = B\,S'$, $R' = 0$, либо $A = B\,S' + R'$, причём $0 < \rho(R') < \rho(B')$, где*

$$\rho(D) = \left| N_{\mathbb{Q}(\sqrt{b})}(\det \varphi(D)) \right| \quad \forall D \in O_{f_b};$$

*$\varphi$ — изоморфизм, при котором кватерниону $X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3 \in O_{f_b}$ сопоставляется матрица вида*

$$\begin{pmatrix} x_0 - \sqrt{b}\,x_2 & b\,x_1 - \sqrt{b}\,x_3 \\ -b\,x_1 - \sqrt{b}\,x_3 & x_0 + \sqrt{b}\,x_2 \end{pmatrix},$$

*при этом $b \in \{3,\ 21,\ 24,\ 28,\ 33,\ 57,\ 76\}$.*

Доказательство проводится предъявлением указанного изоморфизма в сочетании с леммой и тем фактом, что при указанных значениях числа $b$ соответствующие квадратичные кольца $\mathbb{Z}\left[\sqrt{b}\right]$ обладают алгоритмом Евклида (см. напр. [4]), при определении значений числа $b$ используется также приведённая выше лемма.

С помощью такого матричного представления порядка целых кватернионов $O_{f_b}$ может быть доказана следующая

Теорема 2. *Пусть $J$ — левый предел кольца целых кватернионов $O_{f_b}$, т. е. подкольцо $J$ с условием $J\,O_{f_b} \subseteq J$. Тогда найдётся такой кватернион $D \in O_{f_b}$ что $J = O_{f_b}\,D$, т. е. $O_{f_b}$ — кольцо главных идеалов. Аналогично, всякий правый идеал $J'$ кольца $O_{f_b}$ является главным, т. е. $J = D'\,O_{f_b}$ при некотором $D' \in O_{f_b}$.*

Следующий результат представляет собой аналог теоремы арифметики на случай кватернионного порядка $O_{f_b}$.

Теорема 3. *Пусть $A$ — ненулевой целый неопределённый анизотропный кватернион из порядка $O_{f_b}$, где $f_b = x^2 - b\,y^2 - b\,z^2$. Тогда*

$$A = u \prod_{P \in \mathscr{P}_b} P^{e(P)},$$

*единица $u$ и показатели степенней $e(P) = \operatorname{ord}_P A$ есть порядок кватерниона $A$ относительно простого кватерниона $P \in \mathscr{P}_b$.*

Используемое здесь понятие $\operatorname{ord}_P A$ вполне аналогично такому же понятию, но в случае коммутативных колец, в которых определено понятие делимости (см. напр. [5]).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.
2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического ин-та АН СССР. Т. 65 (1962), С. 1–212.
3. Малышев А. В., Пачев У. О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами (новый вариант дискретного эргодического метода) // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 82. С. 33–87.
4. Хассе Г. Лекции по теории чисел. М.: И. Л. 1953. 527 с.
5. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: «Мир». 1987. 415 с.


---

УДК 511.464

# Арифметические свойства элементов прямых произведений $p$-адических полей

**А. С. Самсонов (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет, аспирант кафедры теории чисел
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

# Arithmetic properties of direct product of $p$-adic fields elements

**A. S. Samsonov (Russia, Moscow)**
Moscow State Pedagogical University, department of number theory, postgraduate
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости элементов прямых произведений $p$-адических полей, получены обобщения некоторых теорем из работ [1], [2], [3], [4] про $p$-адические числа.

Используются следующие обозначения: $p$ — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — $p$-адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле $p$-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по $p$-адической норме; $\Omega_p$, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца $K$, например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \ldots, x_m]$ — кольцо многочленов от $m$ переменных над кольцом $K$.

Для $g$-адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых $g$-адических чисел, $|x|_g$ — $g$-адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо $g$-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по $g$-адической псевдонорме; построено кольцо $\Omega_g$ — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, и изоморфизм $\varphi:\ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, $\psi = \varphi^{-1}$.

Для полиадических чисел используются следующие обозначения: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел; $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Определение 1. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p \colon |\beta|_p = 1\}$. *Обозначим* $U_g := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ |\beta_k|_{p_k} = 1\}$.

Определение 2. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_k \neq 0\}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k \neq 0\}$.

Определение 3. *Обозначим* $0_{p_k} := \{G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$, $0_g := \bigcup\limits_{k=1}^{n} 0_k$, $\widehat{0}_{p_k} := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$, $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{0}_{p_k}$.

Определение 4. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. *Будем называть* $\alpha$ *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* $\Omega_g$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash 0_g$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 5. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* $\alpha_i$ *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* $\Omega_g$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash 0_g$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 6. *Пусть* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$. *Будем называть* $\alpha$ *глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементом* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 7. *Пусть* $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n}, \ldots)$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* $\alpha_i$ *глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементами* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$ *— произведение* $n$ *различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \text{где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

*Пусть*
*1) для любого* $i = 1, \ldots, m$ *неотрицательные рациональные числа* $r_{i,j}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*
*2) для любого* $i = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* $j$ *таких, что число* $r_{i,j+1}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ *и чисел* $r_{l,k}$, *где* $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
*3) не существует номеров* $i, j_1, j_2$ *таких, что разница* $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ *является целым числом.*

*Тогда числа* $\alpha_i$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* $\Omega_g$.

Теорема 2. *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$ *— произведение* $n$ *различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j},\ \text{где } a_{i,j} \in Z_g,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

*Пусть*
*1) неотрицательные рациональные числа* $r_j$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

*2)* $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n})$, *для каждого* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *и для любого* $n_0$, *существуют натуральные числа* $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ *такие, что* $n_1 > n_0$ *и*

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (1)$$

*3) для каждого* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *существует возрастающая функция* $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$r_n - c_k(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty,$$

*и для любого набора натуральных чисел* $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ *удовлетворяющих неравенству (1), выполняется неравенство*

$$ord_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

*4) для любого номера* $j$ *число* $r_{j+1}$ *не является суммой линейной комбинации чисел* $r_0, \ldots, r_j$ *с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.*

*Тогда числа* $\alpha_i$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* $\Omega_g$.

Теорема 3. *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$ *— произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \ \alpha_i \in \Omega_g, \ a_{i,j} \in U_g, \ i = 1, \ldots, m.$$

*Пусть*
*1) для любого* $i = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{i,j}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*
*2) для любого* $d \in \mathbb{N}$ *существует* $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого целого* $N \geqslant N_1$, *не могут одновременно выполняться следующие соотношения:*

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

*3)* $r_j = \max\{r_{1,j}, \ldots, r_{m,j}\}$, *для любых натуральных чисел* $d$ *и* $h$ *существует* $N_2 = N_2(d,h) \in \mathbb{N}$ *такое, что неравенство*

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

*выполняется для любого* $i = 1, \ldots, m$ *и для любого натурального* $N \geqslant N_2$;

*Если многочлен* $G = \psi(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, *а при некотором* $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ *и любой коэффициент* $B_{k_0}$ *многочлена* $P_{k_0}$ *таков, что либо* $B_{k_0} = 0$, *либо* $ord_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$. *Тогда неравенство*

$$|G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

*выполняется при* $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Теорема 4. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

*Пусть*
*1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;*
*2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров $j$ таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;*
*3) не существует номеров $i, j_1, j_2$ таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.*

*Тогда числа $\alpha_i$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.*

Теорема 5. *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

*Пусть*
*1) неотрицательные рациональные числа $r_j$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;*
*2) $a_{i,j} = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n}, \ldots)$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $n_0$, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и*

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{2}$$

*3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$r_n - c_k(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty,$$

*и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяющих неравенству (2), выполняется неравенство*

$$ord_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

*4) для любого номера $j$ число $r_{j+1}$ не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.*

*Тогда числа $\alpha_i$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math. 2002. V. 79. P. 345-352.

2. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm. 2004. V. 113, № 4. P. 309-326.

3. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th. 2015. V. 5, iss. 1-2. P. 14-20.

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовыми нормированиями. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000. 95 с.

---

УДК 511.1 + 517.22

# Обобщение формулы Фаа ди Бруно[1]

**П. Н. Сорокин (Россия, г. Москва)**
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

# Generalization of Faa Di Bruno's formula

**P. N. Sorokin (Russia, Moscow)**
Scientific Research Institute for System Analyze of the Russian Academy of Science
e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

В данной работе рассматриваются обобщения известной формулы Фаа Ди Бруно для вычисления производных высших порядков сложной функции [1]:

Теорема 1. *Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до $n$-го порядка. Тогда для $n$-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n} F^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots}\left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\left(\frac{u^{(3)}(x)}{3!}\right)^{k_3}\ldots,$$

*где сумирование берется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, k_3, \ldots$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные $m$-го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.*

Доказательство.

Используем утверждение о том, что, применяя $n$ раз правило дифференцирования сложной функции $G(x)$, получаем равенство вида

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} \cdot F^{(k)}(u),$$

где $A_{k,n}$ — некоторые выражения, незввисящие от конкретного задания функции $F(u)$.

В силу этого для нахождения $A_{k,n}$ считаем, что $F(u)$ и $u(x)$ — многочлены $n$-ой степени:

$$F(u) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}(u-u_0) + \ldots + \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u-u_0)^n, \tag{1}$$

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

или при $u_0 = u(x_0)$:

[1]Работа выполнена по теме государственного задания НИР 0065-2019-0007.

$$u - u_0 = \frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{2}$$

Подставляя в (1) вместо $u - u_0$ правую часть (2) получим

$$G(x) = F(u_0) + \frac{F^{(1)}(u_0)}{1!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right) + ...+ \tag{3}$$

$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)^n,$$

Отсюда видно, что $G(x)$ — многочлен степени $n^2$ имеет следующий вид:

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... + \frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}(x - x_0)^{n^2} \tag{4}$$

Далее, раскрывая скобки в (3) с помощью формулы полинома Ньютона:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m=n \\ k_1,k_2,...,k_m \geq 0}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m},$$

а затем сравнивая коэффициент при $(x - x_0)^n$ с соответствующим коэффициентом в формуле (4), приходим к утверждению теоремы 1.

□

Формула Фаа Ди Бруно может быть записана в комбинаторной форме:

Теорема 2. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема $n$ раз в точке $t_0$, а функция $y = f(x)$ дифференцируема $n$ раз в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = h(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема $n$ раз в точке $t_0$, причем*

$$h^{(n)}(t_0) = \sum_{\pi\in\Pi} f^{(|\pi|)}(x_0) \prod_{B\in\pi} \varphi^{(|B|)}(t_0),$$

*где $\Pi$ — множество разбиений $\{1, 2, ..., n\}$, $B$ пробегает все части разбиения $\pi$, а $|\pi|$, $|B|$ — число элементов в $\pi$, $B$.*

Пример 4.

$$G^{(1)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(1)}, \quad G^{(2)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(2)} + F^{(2)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^2,$$

$$G^{(3)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(3)} + 3 \cdot F^{(2)} \cdot u^{(1)} \cdot u^{(2)} + F^{(3)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^3,$$

$$G^{(4)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(4)} + F^{(2)}\left(4 \cdot u^{(1)} \cdot u^{(3)} + 3 \cdot \left(u^{(2)}\right)^2\right) + 6 \cdot F^{(3)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^2 \cdot u^{(2)} + F^{(4)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^4,$$

$$G^{(5)}(x) = F^{(1)} \cdot u^{(5)} + F^{(2)}\left(5 \cdot u^{(1)} \cdot u^{(4)} + 10 \cdot u^{(2)} \cdot u^{(3)}\right) +$$

$$+F^{(3)}\left(10 \cdot \left(u^{(1)}\right)^2 \cdot u^{(3)} + 15 \cdot u^{(1)} \cdot \left(u^{(2)}\right)^2\right) + 10 \cdot F^{(4)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^3 \cdot u^{(2)} + F^{(5)} \cdot \left(u^{(1)}\right)^5.$$

Сформулируем обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(u(x, y))$:

Теорема 3. *Пусть функция $F(u)$ имеет все производные до $n$-го порядка, а функция $u(x,y)$ имеет все частные производные до $n$-го порядка. Тогда для $n$-го дифференциала сложной функции $G(x,y)=F(u(x,y))$ имеет место формула:*

$$d^nG(x,y)=\sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}} F^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u)\cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots}=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots}\left(\frac{du(x,y)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{d^2u(x,y)}{2!}\right)^{k_2}\left(\frac{d^3u(x,y)}{3!}\right)^{k_3}\ldots,$$

*где $d^mu(x,y)$ — $m$-ый дифференциал функции $u(x,y)$, а $F^{(m)}(u)$ — производная $m$-го порядка для функции $F(u)$.*

Далее рассмотрим случай сложной функции вида $F(u(x),v(x))$ [2]:

Теорема 4. *Пусть функция $F(u,v)$ имеет все частные производные до $n$-го порядка, а функции $u(x)$, $v(x)$ имеют все производные до $n$-го порядка. Тогда для $n$-ой производной сложной функции $F(u(x),v(x))$ имеет место формула:*

$$\frac{F^{(n)}}{n!}=\left(\sum_{\substack{k_1+2k_2++\ldots+nk_3=n\\ k_1,k_2,\ldots,k_m\geq 0}}\frac{A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots A_n^{k_n}}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\right)F(u,v),$$

*где*

$$A_j=\frac{u_j}{j!}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{v_j}{j!}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad u_j=\frac{\partial^j u(x)}{\partial x^j},\quad v_j=\frac{\partial^j v(x)}{\partial x^j},\quad j=\overline{1,n}.$$

Пример 5.

$$F^{(1)}=(A_1)F,\quad F^{(2)}=(2A_2+A_1^2)F,\quad F^{(3)}=(6A_3+6A_2A_1+A_1^3)F,$$

$$F^{(4)}=(24A_4+24A_3A_1+12A_2^2+12A_2A_1+A_1^4)F,$$

*где*

$$A_1=\frac{\partial u(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad A_2=\frac{\partial^2 u(x)}{2\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^2 v(x)}{2\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v},$$

$$A_3=\frac{\partial^3 u(x)}{6\partial x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^3 v(x)}{6\partial x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad A_4=\frac{\partial^4 u(x)}{24\partial x^4}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial^4 v(x)}{24\partial x^4}\cdot\frac{\partial}{\partial v}.$$

Рассмотрим обобщение формулы Фаа Ди Бруно на случай сложной функции $F(\overline{u}(x))$, где $\overline{u}(x)=(u_1(x),\ldots,u_s(x))$ [3]:

Теорема 5. *Пусть $G(x)=F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x)=(u_1(x),\ldots,u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до $n$-го порядка, а функции $u_1(x)$, ..., $u_s(x)$ имеют все производные до $n$-го порядка. Тогда для $n$-го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:*

$$d^nG(x)=\sum_n\sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_n}\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(i!)^{k_i}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{s}a_{ij}!}\cdot\frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\,\partial u_2^{p_2}\,\ldots\,\partial u_s^{p_s}}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}}\left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}}\ldots\left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},$$

*где суммирование ведется по целочисленным решениям следующих диофантовых уравнений:*

$$\sum_{n} \ : \ k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n,$$
$$\sum_{k_1} \ : \ a_{11} + a_{12} + ... + a_{1s} = k_1,$$
$$\sum_{k_2} \ : \ a_{21} + a_{22} + ... + a_{2s} = k_2,$$
$$...$$
$$\sum_{k_n} \ : \ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{ns} = k_n,$$

*$d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, $k$ — порядок промежуточной производной, $p_j$ — порядок частной производной по $u_j$. Параметры $k$, $k_j$, $p_j$, $a_{ij}$ связаны соотношениями:*

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}, \quad j = \overline{1, s},$$
$$k = p_1 + p_2 + ... + p_s = k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

Пример 6.

$$F(u_1(x), u_2(x)) = e^{u_1(x)u_2(x)}. \text{ Найти } F^{(3)}.$$

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = \sum_{3} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{6}{\prod\limits_{i=1}^{3} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{3} \prod\limits_{j=1}^{2} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F}{\partial u_1^{p_1} \, \partial u_2^{p_2}} \prod_{i=1}^{3} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}},$$

$$\sum_{3} : k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3, \ \sum_{k_1} : a_{11} + a_{12} = k_1, \ \sum_{k_2} : a_{21} + a_{22} = k_2, \ \sum_{k_3} : a_{31} + a_{32} = k_3,$$
$$p_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \ p_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \ p_1 + p_2 = k = k_1 + k_2 + k_3.$$

*Подставляя значения параметров, полдучаем:*

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = e^{u_1 u_2} \cdot [u_2^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3\left(2u_2 + u_1 u_2^2\right) \left(u_1^{(1)}\right)^2 u_2^{(1)} + 3\left(2u_1 + u_1^2 u_2\right) u_1^{(1)} \left(u_2^{(1)}\right)^2 +$$
$$+ u_1^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3u_2^2 \, u_1^{(1)} u_1^{(2)} + 3(1 + u_1 u_2)(u_1^{(1)} u_2^{(2)} + u_1^{(2)} u_2^{(1)}) + u_2 u_1^{(3)} + u_1 u_2^{(3)}].$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.
2. Roman S. The formula of Faa di Bruno // Amer. Math. Monthly. 87 (1980), no. 10. P. 805–809.
3. Mishkov R. Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.


---

УДК 511.32

# Формула производной определитель-функции

**В. И. Усков (Россия, г. Воронеж)**
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова
e-mail: vum1@yandex.ru

## Formula of derivative of determinant-function

**V. I. Uskov (Russia, Voronezh)**
Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov
e-mail: vum1@yandex.ru

Вводятся следующие определитель-функции:

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad F_{ijk}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{d^i f_{11}}{dx^i} & \frac{d^i f_{12}}{dx^i} & \frac{d^i f_{13}}{dx^i} \\ \frac{d^j f_{21}}{dx^j} & \frac{d^j f_{22}}{dx^j} & \frac{d^j f_{23}}{dx^j} \\ \frac{d^k f_{31}}{dx^k} & \frac{d^k f_{32}}{dx^k} & \frac{d^k f_{33}}{dx^k} \end{pmatrix},$$

где $f_{rs} = f_{rs}(x)$, $r, s = 1, 2, 3,$ — достаточно гладкие функции.

Пусть

$$P(i, j, k) = \frac{(i + j + k)!}{i!j!k!}$$

— мультиномиальный коэффициент.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = \sum_{\substack{i,j,k \geqslant 0 \\ i+j+k=n}} P(i, j, k) F_{ijk}(x).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству обобщенной формулы бинома Ньютона.

---

УДК 511.325

## О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения

**Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)**
Институт математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: shamsullo@rambler.ru

## On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product

**Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)**
A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Функция Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ при $Res > 0$ задаётся равенством

$$f(s) = \frac{1 - i\text{æ}}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + i\text{æ}}{2} L(s, \bar{\chi}), \quad \text{æ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

$L(s, \chi)$ – функция Дирихле, $\chi = \chi(n)$ – характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$.

Функция $f(s)$ удовлетворяет уравнению риманова типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)f(1-s),$$

но $f(s)$ не имеет эйлерова произведения.

В 1936 г. Г. Дэвенпорт и Г. Хейльбронн [1] доказали, что для функции $f(s)$ при $Res>1$, $0<Ims\leqslant T$ выполняется соотношение $N_0(1,T)\geqslant c_1T$, где $c_1>0$ – абсолютная постоянная. С. М. Воронин [2] в 1984 г. доказал, что при $1/2<\sigma_1<\sigma_2<1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma_2,T)-N(\sigma_1,T)\geqslant c_2T,\quad c_2=c_2(\sigma_1,\sigma_2)>0.$$

Он также доказал [3], что для $N_0(T)$ – число нулей функции $f(s)$ в области $Res>1$, $0<Ims\leqslant T$ имеет место оценка

$$N_0(T)\geqslant c_3T\exp(0.05\sqrt{\log\log\log\log T}),$$

где $c_3>0$ – абсолютная постоянная, $T\geqslant T_0>0$.

А. А. Карацуба [4] в 1989 г. разработал новый метод, с помощью которого получил более точную оценку. Он доказал: *при* $H=T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T\geqslant T_0(\varepsilon)>0$, $\varepsilon>0$ – *сколь угодно малое фиксированное число, справедливо неравенство*

$$N_0(T)\geqslant T(\log T)^{0.5-\varepsilon}.$$

В 1993 г. А. А. Карацуба [5], развивая свой метод, получил более точную оценку, а именно доказал: *при* $H=T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $T\geqslant T_0(\varepsilon)>0$, $\varepsilon>0$ – *сколь угодно малое фиксированное число, выполняется соотношение*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant H(\log T)^{0.5}\exp(-c_4\sqrt{\log\log T}),\tag{1}$$

*где* $c_4$– *положительное абсолютное постоянное.*

В настоящей работе доказано неравенство А. А. Карацубы (1) для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, когда промежуток имеет более короткую длину.

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $N_0(T)$ – *количество нулей* $f(s)$ *на отрезке* $Res=\frac{1}{2}$, $0<Ims\leqslant T$. *Если* $\varepsilon$ – *произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при* $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon}$, $T\geqslant T_0(\varepsilon)>0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant H\sqrt{\log T}\exp(-c_5\sqrt{\log\log T}),$$

*где* $c_5>0$ – *абсолютная постоянная.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V. 11, pp. 181-185 and 307-312.

2. Воронин С. М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1984. Том 163. С. 74-77.

3. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Том 44, № 1. С. 63-91.

4. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Том 54, № 2. С. 303-315.

5. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Том 57, № 5. С. 3-14.

---

УДК 511.32

# Теоретико-числовые задачи, связанные с разложением по линейным рекуррентным последовательностям[1]

**А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)**
Хабаровское отделение института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: a1981@mail.ru

# Number-theoretic problems associated to expansions on linear recurrence bases

**A. V. Shutov (Russia, Vladimir)**
Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
e-mail: a1981@mail.ru

Хорошо известно, что каждое натуральное число $n$ имеет разложение по числам Фибоначчи

$$n = \sum_{i \geq 1} f_i(n) F_i,$$

где $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и $f_i(n) f_{i-1}(n) = 0$. Данное разложение может быть на широкий класс линейных рекуррентных последовательностей. Один из возможных способов сделать это состоит в следующем.

Пусть $a_1, \ldots, a_{d-1}$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq 1. \tag{1}$$

Слово $w$ над алфавитом $\{1, 2, \ldots, a_1\}$ будем называть допустимым, если каждое подслово $w$ лексикографически меньших слова $a_1 a_2 \ldots a_{d-1} 1$. Пусть $T_i$ – число допустимых слов длины $i$. Легко показать, что в этом случае последовательность $\{T_i\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению порядка $d$

$$T_i = a_1 T_{i-1} + \ldots + a_{d-1} T_{i-d+1} + T_d.$$

При этом из условия (1) вытекает [1], что характеристическое уравнение для последовательности $\{T_i\}$ имеет один вещественный корень больший единицы и $d-1$ корней, по модулю меньших единицы. Обозначим этот больший единицы корень через $\zeta$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065)

Каждое натуральное число $n$ имеет единственное жадное разложение по последовательности $\{T_i\}$:

$$n = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i(n) T_i. \tag{2}$$

Отметим, что только конечное число слагаемых в этой сумме отличны от нуля. Жадность разложения (2) означает, что для любого $m$ выполняется условие

$$0 \leq n - \sum_{i \geq m} \varepsilon_i(n) T_i < T_m.$$

Кроме того, жадность разложения эквивалентна условию, что каждое из слов $\varepsilon_i(n) \ldots \varepsilon_{i-d+1}(n)$ лексикографически меньше слова $a_1 a_2 \ldots a_{d-1} 1$.

Можно выделить два типа теоретико-числовых задач, связанных с разложениями типа (2):

1) Задачи о числах с заданными значениями $\varepsilon_0(n), \ldots, \varepsilon_k(n)$;

2) Задачи о числах, у которых суммы $\sum_{i \geq 0} \varepsilon_i(n)$ принадлежит заданной арифметической прогрессии.

Здесь мы рассмотрим только первый класс задач. Пусть $w$ – некоторое допустимое слово длины $k$. Обозначим через $\mathbb{N}(w)$ множество натуральных чисел $n$ для которых $\varepsilon_k(n) \ldots \varepsilon_0(n) = w$. Множества $\mathbb{N}(w)$ описываются следующей теоремой геометризации.

Теорема 1. *Существует множество $\mathcal{T}(w) \subset [0;1)^{d-1}$ такое, что $n \in \mathbb{N}(w)$ тогда и только тогда, когда*

$$(\{n\zeta^{-1}\}, \ldots, \{n\zeta^{-d+1}\}) \in \mathcal{T}(w).$$

Конструкция множеств $\mathcal{T}(w)$ основана на теории фракталов Рози [2].

В качестве следствия из теоремы 1 немедленно получаем следующий результат.

Теорема 2. *Множество $\mathbb{N}(w)$ содержит бесконечно много простых чисел. Более того, для числа $\pi_w(n)$ простых чисел из $\mathbb{N}(w)$, не превосходящих $n$, имеет место асимптотика*

$$\pi_w(n) \sim \nu(w)\pi(n),$$

*где $\pi(n)$ – число просых, не превосходящих $n$ и $\nu(w) = vol_{d-1}(\mathcal{T}(w))$.*

При замене простых чисел натуральными можно получить аналог теоремы 2 с остаточным членом порядка $O(1)$.

Теорема 3. *Пусть $N_w(n)$ – число натуральныч чисел их $\mathbb{N}(w)$, не превосходящих $n$. Тогда имеет место асимптотика*

$$N_w(n) = \nu(w)n + O(1),$$

*причем константа в $O(1)$ не зависит от выбора слова $w$.*

Кроме того, представляет интерес следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $|w|$ – длина слова $w$. Тогда при любом $m$ множество $\{\nu(w) : |w| = m\}$ содержит не более $2^{d-1}$ элементов.*

Пусть $r_{k,w}(n)$ – число решений уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = n$$

в натуральных числах $n_j \in \mathbb{N}(w)$.

Теорема 5. *$r_{k,w}(n) > 0$ для всех достаточно больших $n$ тогда и только тогда, когда $k \geq [\frac{1}{vol_{d-1}(\mathcal{T}(w)}] + 1$. Более того, в этом случае существует постоянная $c_{k,w} > 0$ такая, что*

$$r_{k,w}(n) > c_{k,w}(n) n^{k-1}.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergodic Theory and Dynamical Systems 1992. V. 12, Issue 4. P. 713-723.

2. Шутов А. В. Обобщенные разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 372-389.


---

УДК 511.36

# Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений $F$ – рядов в полиадических лиувиллевых точках

**Е. Ю. Юденкова (Россия, г. Москва)**
Московский Педагогический Государственный Университет, аспирант
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, ст.преподаватель
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

# Infinite linear and algebraic independence of values of $F$ – series at polyadic Liouvillea points

**E. Yu. Yudenkova (Russia, Moscow)**
Post–graduate student of Moscow Pedagogical State University
Senior Lecturer of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Цель настоящей работы – доказательство бесконечной линейной и алгебраической независимости значений $F$ – рядов в лиувиллевых полиадических точках. Классический метод Зигеля – Шидловского был использован для $E$ и $G$ функций Зигеля, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, коэффициенты которых обладают определенными арифметическими свойствами.

Определение 1. *Ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

*принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если его коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{K}$ и удовлетворяют условиям*

1. $|\overline{a_n}| = O(\exp(c_1 n)), n \to \infty$ *(где для алгебраического числа $\alpha$ символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с $\alpha$ чисел);*

2. *существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n$.*

*При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа $p$, не большие $c_2 n$, причём*

$$\operatorname{ord}_p d_{0,n} \leqslant c_3 \left( \log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Отметим, что $F$ – ряды сходятся в поле $\mathbb{Q}_p$ – $p$ – адических чисел и их алгебрических расширений $\mathbb{K}_v$. Под бесконечной линейной (алгебраичской) независимостью обозначается, что для любой ненулевой линейной формы (любого ненулевого многочлена) существует бесконечно много простых чисел $p$ и нормирований $v$, продолжающих $p$ – адическое нормирование на алгебраическое числовое поле $\mathbb{K}$, со следующим свойством: результат подстановки в рассматриваемую линейную форму (многочлен) значений $F$ – рядов вместо переменных является отличным от нуля элементом поля $\mathbb{K}_v$.

Определение 2. *Полиадическое лиувиллево число $\alpha$ обладает тем свойством, что для любых чисел $P, D$ существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство*

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Настоящая работа развивает результаты В.Г.Чирского [1], из которых следует, что для любой ненулевой линейной формы и многочлена существовует хотя бы одно простое число $p$ такое, что в поле $p$ – адических чисел результат подстановки значений $F$ – рядов в полиадической лиувиллевой точке вместо переменных отличных от 0. В предлагаемой работе этот результат усиливается и доказывается существование бесконечного множества простых чисел с таким свойством.

Перейдем к формулировкам утверждений. Предположим, что рассматриваемые ряды $f_i(z), i = 1, \ldots, m$ составляют (формальное) решение системы дифференциальных уравнений

$$y'(z) = \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \ldots, m, Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i, j = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Пусть $T = T(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ такой, что

$$T(z) Q_{j,i}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], j, i = 1, \ldots, m.$$

В работе [2] А.И. Галочкин доказал теорему об алгебраической независимости значений $E$ – функций в трансцендентных точках, допускающих высокий порядок приближения алгебраическими числами.

Э.Бомбиери в своей работе [3] в 1981 г. ввел понятие глобального соотношения.

Определение 3. *Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение*

$$P(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)) = 0 \tag{2}$$

*называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$. Назовем глобальное соотношение (2) тривиальным, если оно получается в результате подстановки $z = \xi$ в алгебраическое уравнение, связывающее $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ над $\mathbb{K}(z)$ и нетривиальным в противном случае.*

Сформулированное выше понятие глобального соотношения допускает следующее обощение. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \tag{3}$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причему этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Примеры таких рядов и описание их свойств будут приведены в конце второго параграфа.

Тогда в определениях глобального соотношения и нетривиального глобального соотношения можно рассматривать такую точку $\xi$ вместо точки $\xi$ из поля $\mathbb{K}$.

Обозначим $\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$.

Теорема 1. *Пусть $F$ – ряды $f_1 \equiv 1, f_2, \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Пусть $\xi$ – ряд (3), где $\theta_k$ – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров $n$ таких, что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leq m \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{4}$$

*и любого нормирования $v$, продолжающего $p$ - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство*

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(m-1+\delta)(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|). \tag{5}$$

*Тогда для любой линейной формы $L(y_1, \ldots, y_m)$, коэффициенты которой – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел $p$ и нормирований $v$, продолжающих $p$ – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_v = |L(1, f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi))|_v > 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть $F$ – ряды $f_1, f_2, \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений*

$$y_i'(z) = Q_{0,i}(z) \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \ldots, m,$$
$$Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i = 1, \ldots, m, j = 0, \ldots, m. \tag{7}$$

*и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi$ – ряд (3), где $\theta_k$ – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров $n$ таких, что для всех простых чисел $p$, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{8}$$

*и любого нормирования $v$, продолжающего $p$ - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство*

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{9}$$

*Тогда для любого многочлена $P(y_1, \ldots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел $p$ и нормирований $v$, продолжающих $p$ – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство*

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Чирский В. Г. Обобщение понятия глобального соотношения // Труды по теории чисел. — ПОМИ, СПб, 2005. С. 220-238.

2. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений $E$ – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63.

3. Bombieri E. On $G$ – functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1-68.

4. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.

5. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019, vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

6. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.

---

# Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.9

## О решетках наилучших совместных диофантовых приближений[1]

**Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)**
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

## Lattices of best joint diophantine approximations

**Yu. A. Basalov (Russia, Tula)**
TSPU of Leo Tolstoy
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Точная нижняя грань чисел $c$, для которых для любого иррационального $\alpha$ существует бесконечно много различных рациональных чисел $p/q$, таких что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$$

называется *константой наилучших диофантовых приближений* и равна $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ [1]. В работах [4, 5, 6] излагается связь между наилучшими совместными диофантовыми приближениями и геометрией чисел. В частности, значение константы наилучших совместных диофантовых приближений равно [7]

$$C_n = 1/\Delta(\mathbb{F}), \tag{1}$$

где $\Delta(\mathbb{F})$ – значение критического определителя звездного тела Дэвенпорта, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathbb{F}_1 : |x_0 x_1| < 1. \tag{2}$$

Определение 1. *Пусть $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + u_n\overrightarrow{a_n}$$

*с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется решеткой $\Lambda$. Величина*

$$d(\Lambda) = |\det \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n})|$$

*называется определителем решетки $\Lambda$.*

Определение 2. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка $\Lambda$ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то $\Lambda$ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

*определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток $\Lambda$ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.*

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант 16-41-710194_р_центр_а).

Из [8] известно, что допустимой для (2) является решетка порожденная чисто-вещественным алгебраическим полем. Значение определителя такой решетки равно корню квадратному из дискриминанта соответствующего алгебраического поля. Критической решеткой будет решетка с минимальным дискриминантом. В одномерном случае она (назовем ее $\Lambda_1$) соответствует полю, порожденному многочленом $x^2 - x + 1$. Базис $\Lambda_1$

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\varphi_1,\, \varphi_2),$$

где $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$. Дискриминант этого поля равен 5, а $d(\Lambda_1) = \sqrt{5}$, что в силу (1) дает $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Введем ряд понятий [3].

Определение 3. *Точка $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные 0.*

Определение 4. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Легко показать, что решетка $\Lambda_1$ является неприводимой.

Для размерности $n = 2$ ситуация усложняется. С точки зрения теории диофантовых приближений вычисление или оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений очень сложны. С точки зрения геометрии чисел, звездное тело Дэвенпорта принимает вид

$$\mathbb{F}_2 : |x_0| \max_{i=1,2} |x_i|^2 < 1,$$

что делает вычисление критического определителя проблематичным. Дж. В. С. Касселсом был предложен [4, 6] подход к построению допустимой решетки на основе линейного преобразования решетки, порожденной алгебраическим полем. Возьмем решетку $\Lambda_2^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^3 - x^2 - 2x + 1. \tag{3}$$

Дискриминант этого поля равен 49, а базис решетки

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 1,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_2), \quad \overrightarrow{a_3} = (\omega_1^2,\, \omega_3^2,\, \omega_3^2),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ корни уравнения (3). Применив к решетке $\Lambda_2^{(0)}$ преобразование

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

мы получим решетку $\Lambda_2$ с базисом

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\, 0,\, 1), \quad \overrightarrow{a_2} = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\, \frac{\omega_2 - \omega_1}{2},\, \omega_3\right), \quad \overrightarrow{a_3} = \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2},\, \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2},\, \omega_3^2\right),$$

и определителем $d(\Lambda_2) = \det M_2 \cdot \sqrt{49} = \frac{7}{2}$. Это дает оценку константы наилучших совместных диофантовых приближений $C_2 \geq \frac{2}{7}$, которая является допустимой для $\mathbb{F}_2$. Аналогично решетке $\Lambda_1$ легко показать, что $\Lambda_2$ – тоже неприводимая решетка.

Для размерности $n = 3$ звездное тело Дэвенпорта имеет вид

$$\mathbb{F}_3 : |x_0| \max_{i=1,3} |x_i|^3 < 1,$$

Допустимая неприводимая решетка $\Lambda_3$ получается из решетки алгебраического поля (дискриминант равен 275), порожденного многочленом

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 \tag{4}$$

применением преобразование

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Базис решетки $\Lambda_3$

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\omega_1^i,\ \frac{\omega_2^i + \omega_3^i}{2},\ \frac{\omega_3^i - \omega_2^i}{2},\ \omega_4^i\right), \quad i = \overline{0,3}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ корни уравнения (4). Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид

$$C_3 \geq 1/d(\Lambda_3) = \frac{1}{\det M_3 \cdot \sqrt{275}} = \frac{2}{\sqrt{275}}.$$

Для размерности $n = 4$ возьмем решетку $\Lambda_4^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1. \tag{5}$$

Применив преобразование

$$M_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

получим решетку $\Lambda_4$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\omega_1^i,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_2^i,\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_3^i + \omega_4^i),\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_4^i - \omega_3^i),\ \omega_5^i\right), \quad i = \overline{0,4}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ корни многочлена (5). Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид

$$C_4 \geq 1/d(\Lambda_4) = \frac{1}{\det M_4 \cdot \sqrt{1609}} = \frac{16}{9\sqrt{1609}}.$$

В работе [2] были получены оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. Изложим их в терминах решеток.

Для $n = 6$ возьмем решетку $\Lambda_6^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^7 - x^6 - x^5 + x^3 + x^2 - x - 1. \tag{6}$$

Применив преобразование

$$M_6 = \begin{pmatrix} \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{11}{16\left(30\sqrt{5}-67\right)}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5}-11},$$

получим решетку $\Lambda_6$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt[6]{2}\alpha\omega_1^i,\ \sqrt[6]{2}\alpha\omega_2^i,\ \alpha\beta(\omega_3^i+\omega_4^i),\ \alpha\beta(\omega_4^i-\omega_3^i),\ \alpha\beta(\omega_5^i+\omega_6^i),\ \alpha\beta(\omega_6^i-\omega_5^i),\ \omega_7^i\right),$$

где $i = \overline{0,6}$, $\omega_{i+1}$ корни многочлена (6).

Соответствующая оценка

$$C_6 \geq 1/d(\Lambda_6) = \frac{1}{\det M_6 \cdot \sqrt{184\,607}} = \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

Для $n = 5$ возьмем решетку $\Lambda_5^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^6 + 3x^5 + x^4 - 2x^3 - x - 1. \tag{7}$$

Применив преобразования

$$M_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7+3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{27}{134+60\sqrt{5}}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5}-11}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{13+5\sqrt{5}}{27}},$$

получим решетку $\Lambda_5$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\alpha\omega_1^i,\ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_2^i+\omega_2^i),\ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_3^i-\omega_2^i),\ \alpha\beta\gamma(\omega_4^i+\omega_5^i),\ \alpha\beta\gamma(\omega_5^i-\omega_4^i),\ \omega_6^i\right),$$

где $i = \overline{0,5}$, $\omega_{i+1}$ корни многочлена (7).

Соответствующая оценка

$$C_5 \geq 1/d(\Lambda_5) = \frac{1}{\det M_5 \cdot \sqrt{28\,037}} = \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Басалов Ю.А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений. // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388-405.

2. Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 66–81.

3. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // , Чебышевский сборник, 2017, т. 18, вып. 4, с. 326–338.

4. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.

5. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 119-121.

6. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556.

7. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). p. 186-195.

8. Gruber. P. M., Lekkerkerker. C. G. Geometry of numbers. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.


---

УДК 511.42

# Приближения нуля значениями целочисленных приводимых полиномов на комплексной плоскости

**В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
bernik.vasili@mail.ru
**Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
vasilyev@im.bas-net.by
**А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
knxd@yandex.ru

# Zero approximation by the values of reducible integer polynomials on complex plane

**V. I. Bernik (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
bernik.vasili@mail.ru
**D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
vasilyev@im.bas-net.by

**A. S. Kudin (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
knxd@yandex.ru

В работе [1] при доказательстве гипотезы А. Бейкера [2] показано, как доказать гипотезу для приводимых целочисленных полиномов, если она уже доказана для неприводимых. В тезисах мы приводим две более общие теоремы о приближении нуля значениями целочисленных приводимых полиномов на комплексной плоскости.

Для целочисленного многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ обозначим как $H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ его высоту и как $\deg P = n$ его степень. Множество целочисленных приводимых полиномов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\mathcal{P}_{n,red}(Q) := \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Теорема 1. *Для любых $n \ge 4$ и $Q > 1$ найдется величина $c_1 = c_1(n)$ такая, что для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует целочисленный приводимый полином $P \in \mathcal{P}_{n,red}(Q)$ с условием*

$$|P(z)| < c_1(n) Q^{-\frac{n-3}{2}}.$$

Теорема 2. *При некотором $\varepsilon > 0$ обозначим как $B_1$ множество $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенство*

$$|P(z)| < Q^{-\frac{n-3}{2}-\varepsilon}$$

*разрешимо в полиномах $P \in \mathcal{P}_{n,red}(Q)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, $c_2 = c_2(n) > 0$ и $Q > Q_0(n, \varepsilon)$, при которых*

$$\mu B_1 < c_2(n) Q^{-\varepsilon_1}.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernik, V. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. Bernik, M. Dodson // Cambridge University Press. — 1999.

2. Baker, A. On a Theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1966. — Vol. 292, No. 1428. — pp. 92–104.

---

УДК 511.42

# Интервалы малой длины, содержащие алгебраические числа заданной степени и высоты

**Е. В. Гусева (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
**Н. В. Бударина (Ирландия, г. Дандолк)**
Технологический институт Дандолка
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie
**И. А. Корлюкова (Беларусь, г. Гродно)**
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: korlyukova_ia@grsu.by

# Intervals of small length containing algebraic numbers of given degree and height

**E. V. Guseva (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
**N. V. Budarina (Ireland, Dundalk)**
Dundalk Institute of Technologys
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie
**I. A. Korlyukova (Belarus, Grodno)**
Grodno State University
e-mail: korlyukova_ia@grsu.by

Рассматривается возрастающий ряд всех положительных несократимых правильных дробей, знаменатель которых $\leqslant n$.Такой ряд называется последовательностью Фарея n-го порядка. Расстояния между соседними дробями в ряде Фарея сильно разнятся. Для алгебраических чисел существует функция их распределения. Для действительных алгебраических чисел при их естественном упорядочивании такую функцию в 2013 году нашёл Д. В. Коледа [1].

Интересно, существуют ли интервалы, не содержащие в себе алгебраических чисел степени $n$ и высоты не более $Q$. Недавно было доказано, что такие интервалы существуют, и их длины $c_1(n)Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. При $0 \leqslant \gamma < 1$ существует не менее $c_2(n)Q^{n+1-\gamma}$ алгебраических чисел на интервале длины $Q^{-\gamma}$.

Теорема 1. *[2] При некотором $c_3 > c_0(n)$ интервал $I_1$, $|I_1| > c_3(n)Q^{-v}$, $0 \leqslant v < 1$, содержит $c_4Q^{n+1-v}$ алгебраических чисел $\alpha$, $\deg\alpha \leqslant n$, $H(\alpha) \leqslant Q$.*

В 2015 году Ф. Гётце и А. Г. Гусакова [3] изучили интервалы с $\gamma = 1.5$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При условии*

$$\gamma > v\frac{n^2}{n-k+1} + 1$$

*интервалу $I$, $|I| = Q^{-\gamma}$ принадлежит не более $c_5Q^{n+1-\gamma}$ алгебраических чисел $\alpha$, $\deg\alpha = n$, $H(\alpha) \leqslant Q$.*

При доказательстве также рассматривается k-мерное обобщение задачи.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koleda D. V. On the destiny function of the distribution of real algebraic numbers // J. Theor. Nombers Bordeaux. 2017. Vol. 29, № 1. P. 179–200.

2. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izv. Math. 2015. Vol. 79, № 1. P. 18–39.

3. Гётце Ф., Гусакова А. Г. Алгебраические числа в коротких интервалах // Доклады НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 4. С. 11–16.

УДК 511.42

# О точных значениях меры Лебега множеств комплексных чисел с заданным порядком аппроксимации

**Е. В. Гусева (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
**Н. В. Сакович (Беларусь, г. Могилев)**
Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова
e-mail: sakovichnv@tut.by
**Н. В. Шамукова (Беларусь, г. Минск)**
Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь
e-mail: shamukova_n@mail.ru

# On exact values of the Lebesgue measure of complex numbers sets with a given approximation order

**E. V. Guseva (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: elena.guseva.96@yandex.by
**N. V. Sakovich (Belarus, Mogilev)**
Mogilev State University
e-mail: sakovichnv@tut.by
**N. V. Shamukova (Belarus, Minsk)**
University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus
e-mail: shamukova_n@mail.ru

Еще в 1924 году Хинчин [1]получил оценку для множества $B \subset I = [a, b]$ — точек интервала $I$, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H)$ имеет бесконечное число решений в полиномах первой степени $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. При $\Psi(x) = H^{-1-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$ и любой степени $P(x)$ задачу решил В.Г. Спринджук [2]. Случай сходимости ряда для полиномов произвольной степени доказан В.И. Берником, а расходимости — В.В. Бересневичем.

Среди последних результатов интерес представляет работа Н.В. Будариной. Недавно она доказала [3] оценку при правой части $Q^{-w}$ в поле $\mathbb{R}$. В поле $\mathbb{C}$ справедлива теорема.

Теорема 1. *При $w > \frac{n-1}{2}$ верно неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(w, Q) < c_1(n)Q^{-\frac{2w-n+1}{5}}.$$

Здесь множество $\mathcal{L}_n(w, Q)$ — множество $z$ из единичного круга комплексной плоскости, для которых неравенство $P(z) < Q^{-w}$ имеет решение в полиномах $P(z)$ из класса $\mathcal{P}_n(Q) = \{P(z) : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}$ при фиксированном $Q \in \mathbb{N}$, $Q > 1$.

При доказательстве данной теоремы используется разделение областей на существенные и несущественные, а также разложение полинома в ряд Тейлора.

Вводятся следующие круги:

1) $\sigma(P) = \{z, |z - \alpha_1| \ll Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1}\}$,

2) $\sigma_1(P) = \{z, |z - \alpha_1| \ll Q^{-u}|P'(\alpha_1)|^{-1}\}$, $0 < u < w$.

При этом области $\sigma_1(P)$ разделяются на:

1. существенные (если $\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$),
2. несущественные (если $\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) \geqslant \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$).

В итоге, для существенных интервалов была получена оценка $Q^{-2w+2u+n-1}$, а для несущественных — оценка $Q^{-\frac{2w-n+1}{5}}$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Koleda D. V. On the destiny function of the distribution of real algebraic numbers // J. Theor. Nombers Bordeaux. 2017. Vol. 29, № 1. P. 179–200.

2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел //Минск: Наука и техника. 1967. 181 с.

3. Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers // Math. Z. 2019. Vol. 293. P. 809–824.


---

УДК 511.361

# Эффективная конструкция совместных приближений для гипергеометрических функций специального вида

**П. Л. Иванков (Россия, Москва)**
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankovpl@mail.ru

# Effective construction of simultaneous approximations for hypergeometric functions of a special type

**P. L. Ivankov (Russia, Moscow)**
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: ivankovpl@mail.ru

В докладе будет рассказано об эффективном построении совместных приближений для гипергеометрических функций специального вида и их производных по параметру, причем этот параметр входит как в числитель, так и в знаменатель общего члена соответствующих рядов. Предложенное построение можно затем использовать для получения оценки снизу числовой линейной формы от значений таких функций. При этом некоторые из параметров функций могут быть иррациональными. Аналогичные оценки, которые можно было бы получить с помощью известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля (в его классической форме), возможны лишь для случая рациональных параметров.

Пусть даны рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, и пусть $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, старшие коэффициенты которых равны единице; степень многочлена $b(x)$ равна $m$. Определим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x}, \tag{1}$$

$k = 1, \ldots, t,\ l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1,\ j = 1, \ldots, m+1;\ \tau_1, \ldots, \tau_t$ — некоторые натуральные числа. При известных ограничениях на параметры функций (1) с помощью предложенной эффективной конструкции можно получить оценку снизу модуля нетривиальной линейной формы

вида

$$h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi), \tag{2}$$

коэффициенты которой суть целые числа из мнимого квадратичного поля, а $\xi$ — ненулевое число из этого поля. Ранее эффективная конструкция аппроксимаций Паде первого рода была опубликована в [1]. В этой последней работе оценка линейной формы вида (2) получена для случая, когда все параметры функций (1) рациональны. Линейная независимость функций (1) над полем рациональных дробей, которая используется для получения оценки линейной формы (2), доказана в работе [2].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Иванков П.Л. *О дифференцировании по параметру гипергеометрической функции специального вида* // Известия высших учебных заведений. Математика. № 12. С. 71-80. (2019).

2. Иванков П.Л. *О линейной независимости некоторых функций над полем рациональных дробей* //Математика и математическое моделирование, № 4, С. 1–12 (2015). DOI: 10.7463 / mathm. 0415.0817328.


---

УДК 511.361

# О приближении значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций

**П. Л. Иванков (Россия, Москва)**
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankovpl@mail.ru

# On approximation of the values of differentiated with respect to parameter hypergeometric functions

**P. L. Ivankov (Russia, Moscow)**
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Пусть даны рациональные числа $A, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$, и пусть $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, старшие коэффициенты которых равны единице. Определим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\lambda_k + x)(A - \lambda_k + x)}, \tag{1}$$

где $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, m+2$, а $\tau_1, \ldots, \tau_t$ — некоторые натуральные числа ($m$ — степень многочлена $b(x)$). В докладе будет рассказано об эффективном построении совместных приближений для функций (1). Данное построение можно затем использовать для получения оценки снизу модуля числовой линейной формы от значений таких функций. При этом некоторые из корней многочлена $b(x)$ могут быть иррациональными. Ранее эффективная конструкция аппроксимаций Паде первого рода для функций (1) была опубликована в [1]. В этой последней работе оценка указанной линейной формы получена для случая, когда все параметры функций (1) рациональны. Вопрос о линейной независимости функций (1) над полем рациональных дробей рассматривается в работах [2] и [3]; эта линейная независимость требуется для получения упомянутого арифметического результата.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Иванков П. Л. *О линейных приближающих формах* // Чебышевский сборник. Т. 21, вып. 1. С. 200–212. 2020.

2. Иванков П. Л. *О линейной независмости некоторых функций* //Математика и математическое моделирование. № 1. 2019.

3. Иванков П. Л. *О линейной независимости функций, продифференцированных по параметру* // Чебышевский сборник. Т. 20, вып. 4. С. 155-166. 2019.


---

УДК 511

# О влиянии количества алгебраических чисел на величину дискриминантов и производных в корне

**Н. И. Калоша (Беларусь)**
Институт математики НАН Беларуси
**А. В. Луневич (Беларусь)**
Институт математики НАН Беларуси
**О. В. Рыкова (Беларусь)**
Белорусский государственный Университет информатики и радиоэлектроники

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_1 x + a_0 \quad -$$

неприводимый многочлен с целыми коэффициентами степени $n$ с корнями $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n$ и высотой $H = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant} |a_j|$ Если $(a_0,\ a_1,\ \dots\ a_n) = 1$ то $P(x)$ является минимальным многочленом для всех своих корней. Для $Q \in \mathbb{N}$ определим класс таких многочленов

$$\mathcal{P}_n(x) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ \deg P = n,\ H(P) \leqslant Q\}, \quad a_n \geqslant c_1 H.$$

В работах [1–2] были получены оценки сверху для $\rho(P)$, а также снизу и сверху для $|P'(\alpha_1)|,\ |D(P)|$ [3].

В метрических задачах диофантовых приближений важно получить оценку сверху для количества многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$, $v > 0$. Эта задача рассматривалась Давенпортом и Фолькманом и была применена ими при решении проблемы Малера. Оценки

$$\#\left\{P \in \mathcal{P}_n(Q):\ \left|P'(\alpha_1)\right| < Q^{1-v},\ 0 \leqslant v \leqslant 1\right\} \leqslant Q^{n+1-v} \tag{1}$$

были доказаны В. Спринджуком и Р. Бейкером. В последующем, оценка (1) была усилена для $0 \leqslant v \leqslant 1,5$.

В данной работе установлено влияние количества действительных корней $P(x)$ на оценки сверху для $|D(P)|$. Оказывается, что при небольшом количестве действительных корней нельзя так же эффективно находить многочлены с малыми дискриминантами, как в общем случае.

Обозначим

$$\mathcal{D}_{n,m,\gamma} = \left\{P \in \mathcal{P}_n(Q)\ :\ 1 \leqslant |D(P)| \leqslant \gamma Q^{2n-2-2v}\right\}, \tag{2}$$

где $P$ имеет ровно $m$ действительных корней.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Тогда для достаточно больших* $Q$ *при* $0 \leqslant v \leqslant \frac{(m-1)(n+1)}{m+1}$ *выполняется неравенство*

$$\#\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(Q,\ v) \gg Q^{n+1-\frac{m+2}{m}v}, \tag{3}$$

*где константа в символе Виноградова зависит только от* $n$.

Доказательство теоремы 1 основано на использовании трех вспомогательных лемм, доказанных в [1] и [4].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Beresnevich, V. The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Goetze // Compositio Mathematica. — 2010. — Vol. 5. — PP. 1165—1179.

2. Bugeaud, Y and M. Mignotte. On the distance between roots of integer polynomials / Y. Bugeaud, M. Mignotte // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 2004. — Vol. 2, no 47. — PP. 553—556.

3. Спринджук, В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. — Минск: Наука и техника, 1967. — 194 С.

4. Beresnevich, V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Goetze // Advances in Mathematics. — 2016. No 298. — PP. 393—412.


---

УДК 511.32

# О распределении комплексных алгебраических чисел с близкими сопряженными

**О. Н. Кемеш (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
**И. М. Морозова (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: inna.morozova@tut.by
**Ж. И. Пантелеева (Беларусь, г. Минск)**
Белорусский Государственный Аграрный Технический Университет
e-mail: janna-85@list.ru

# About the distribution of complex algebraic numbers with close conjugates

**O. N. Kemesh (Belarus, Minsk)**
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
**I. M. Morozova (Belarus, Minsk)**
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: inna.morozova@tut.by

**Zh. I. Panteleeva (Belarus, Minsk)**
Belarusian State Agrarian Technical University
e-mail: janna-85@list.ru

В работах последних двадцати лет популярными задачами стали задачи о распределении алгебраических чисел, их дискриминантов и результантов [1,2,3].

Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

целочисленный многочлен комплексной переменной $z$ степени $n$, высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ и корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При достаточно большом $Q$ обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, v, \gamma_1)$ множество многочленов степени $n$, высоты $H \leqslant Q$ и с условиями $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$, $0 \leqslant v < \frac{n+1}{6}$, $|a_n| > c_1(n)Q$. При этом корни $P(z)$ лежат в круге $K(z_0, r)$ с центром в алгебраической точке $z_0$, $H(z_0) = Q^{\lambda}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\deg z_0 = m$ и радиусом $r = Q^{-\gamma_1}$, $0 \leqslant \gamma_1 < 1$.

В результате наших исследований мы выяснили, для каких кругов $K(z_0, r)$ корни $\alpha_j$ являются корнями многочленов из $\mathcal{P}_n(Q, v, \gamma_1)$.

Теорема 1. *Если $\gamma > \frac{\lambda n + m}{2} - v$ то существуют круги $K(z_0, r)$, не содержащие других алгебраических чисел полиномов из $\mathcal{P}_n(Q, v, \gamma_1)$.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И., Гетце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Том 79, № 1. С. 21-42.

2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

3. Bugeaund Y. Approximation by Algebraic Numbers // Cambridge Tracts in Math. 2004. Vol. 160.

---

УДК 511.35, 511.48, 511.75

# Алгебраические числа одинаковой высоты на вещественной прямой

**Д. В. Коледа (Беларусь, г. Минск)**
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: koledad@rambler.ru

# Algebraic numbers of the same height on the real line

**D. V. Koleda (Belarus, Minsk)**
Institute of Mathematics of NAS of Belarus
e-mail: koledad@rambler.ru

Доклад посвящён статистическому распределению алгебраических чисел фиксированной степени на промежутках вещественной оси. Алгебраические числа образуют на вещественной оси всюду плотное множество. Задача их подсчёта приобретает смысл, если для всех алгебраических чисел определить некоторую функцию $H$, называемую высотой, так, чтобы при любом

конечном $Q$ неравенству $H(\alpha) \leqslant Q$ удовлетворяло лишь конечное множество алгебраических чисел $\alpha$ заданной степени $n$.

Эту задачу можно рассматривать с точки зрения обобщения последовательности Фарея: роль знаменателя дроби для алгебраических чисел выполняет высота $H$. В качестве $H(\alpha)$ мы берём т. н. обычную высоту алгебраического числа $\alpha$. Мы покажем, что распределение алгебраических чисел одинаковой высоты в некотором смысле аналогично распределению несократимых дробей с одинаковым знаменателем.

В докладе используются следующие обозначения для теоретико-числовых функций:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \omega(n) = \sum_{p|n} 1, \qquad J_k(n) = n^k \prod_{p|n} (1 - p^{-k})$$

— где в знаках суммы и произведения $d$ пробегает все натуральные делители числа $n$, а $p$ — все простые. Отметим, что $J_1(n) = \varphi(n)$ — это функция Эйлера.

*Минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha$ будем называть неприводимый (над $\mathbb{Q}$) многочлен

$$p_\alpha(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \qquad a_n > 0,$$

со взаимно простыми коэффициентами, такой что $p_\alpha(\alpha) = 0$. *Степень* $\deg \alpha$ и *(обычную) высоту* $H(\alpha)$ алгебраического числа $\alpha$ определим как

$$\deg \alpha = \deg p_\alpha = n, \qquad H(\alpha) = H(p_\alpha) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

Пусть $\mathbb{A}_n$ обозначает множество алгебраических чисел степени $n$ над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим через $\Psi_n(H, S)$ количество алгебраических чисел $\alpha$ степени $n$ и высоты $H$, лежащих в $S$, т. е.

$$\Psi_n(H, S) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) = H\right\}.$$

Аналогично определим функцию $\Phi_n(Q, S)$ с тем лишь отличием, что она будет считать алгебраические числа высоты $\leqslant Q$:

$$\Phi_n(Q, S) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) \leqslant Q\right\}.$$

Очевидно, что $\Phi_n(Q, S) = \sum_{H=1}^{Q} \Psi_n(H, S)$.

Про $\Phi_n(Q, S)$ известно следующее.

Теорема 1 ([1]). *Существует непрерывная положительная функция $\phi_n(x)$ такая, что для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\left|\Phi_n(Q, I) - \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \phi_n(x)\, dx\right| \leqslant \begin{cases} \kappa_n Q^n, & n \geqslant 3, \\ \kappa_n Q^n \ln Q, & n = 1, 2, \end{cases}$$

*где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, а $\kappa_n$ — постоянная, зависящая только от степени $n$.*

*Функцию $\phi_n$ можно вычислить по формуле*

$$\phi_n(x) = \int\limits_{D_n(x)} \left|\sum_{k=1}^{n} k p_k x^{k-1}\right| dp_1 \dots dp_n,$$

*где*

$$D_n(x) = \left\{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |p_k| \leqslant 1, \ \left|\sum_{k=1}^{n} p_k x^k\right| \leqslant 1\right\}.$$

О функции $\Psi_n(H,S)$, в отличие от $\Phi_n(Q,S)$, нельзя сказать, что она имеет асимптотику в привычном смысле, поскольку минимальные многочлены алгебраических чисел распределены по поверхностям $H(p)=H$ достаточно нерегулярно, и монотонной асимптотики по $H$ здесь не будет. Тем не менее, можно выделить доминирующее слагаемое, которым определяется поведение $\Psi_n(H,S)$ при $H\to\infty$. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2 ([2]). *Пусть $n\in\mathbb{N}$ фиксировано, $I\subseteq\mathbb{R}$ — промежуток. Тогда*

$$\Psi_n(H,I)=\frac{(n+1)}{2}\,J_n(H)\int_I\phi_n(x)\,dx+r_n(H), \tag{1}$$

*где функция $\phi_n(x)$ та же, что и в теореме 1, а остаточный член $r_n(H)$ удовлетворяет неравенству*

$$|r_n(H)|\leqslant\begin{cases}c_nH^{n-1}, & n\geqslant 5,\\ c_4H^3\ln H, & n=4,\\ c_3H^2(\ln H)^2, & n=3,\\ c_2H(\ln H+\tau(H)), & n=2,\\ 2^{\omega(H)}, & n=1.\end{cases}$$

*Постоянные $c_n$ зависят только от $n\geqslant 2$.*

Отметим, что в теоремах 1 и 2 допускается зависимость промежутка $I$ от $Q$ и $H$ соответственно. Утверждения теорем остаются справедливыми и в этом случае.

Несложно показать, что для всех $n\geqslant 1$

$$\lim_{H\to\infty}\frac{r_n(H)}{J_n(H)}=0.$$

При $n\geqslant 2$ это следует из неравенства $H^n/\zeta(n)<J_n(H)<H^n$, верного для $H\geqslant 2$.

Для рациональных чисел (т. е. для $n=1$) равенство (1) имеет вид

$$\left|\Psi_1(H,I)-\varphi(H)\int_I\frac{dx}{\max(1,x^2)}\right|\leqslant 2^{\omega(H)},$$

где $\varphi(N)=N\prod_{p|N}\left(1-p^{-1}\right)$ — функция Эйлера. При этом справедливы оценки

$$\alpha\,\frac{H}{\ln\ln H}\leqslant\varphi(H)<H,\qquad 2^{\omega(H)}\leqslant\tau(H)\leqslant H^{\beta/\ln\ln H},$$

где $\alpha$ и $\beta$ — положительные абсолютные постоянные. Отсюда видно, что чем выше степень $n$ алгебраических чисел, тем слабее выражены колебания их количества, наблюдаемые при увеличении $H$. Сильнее всего немонотонность количества чисел, как функции высоты $H$, проявляется у рациональных чисел.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koleda D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2017. Vol. 29, № 1. P. 179–200.

2. Коледа Д. В. О распределении вещественных алгебраических чисел равной высоты // Дальневост. матем. журн. 2018. Том 18, № 1. С. 56–70.

УДК 511.36

## Арифметические свойства некоторых почти полиадических чисел

**В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), Институт математики и информатики
e-mail: salomaa@mail.ru

## Arithmetic properties of certain almost polyadic numbers

**V. Y. Matveev (Russia, Moscow)**
Moscow Pedagogical State University (MPGU), Institute of Mathematics and Informatics
e-mail: salomaa@mail.ru

Доклад посвящён описанию нескольких задач, связанных с почти полиадическисми числами, т.е. числами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!,$$

где $a_n$–рациональные числа, причём этот ряд сходится во всех полях $p$-адических чисел, кроме, быть может, некоторого их числа. В первой задаче доказана бесконечная алгебраическая независимость значений рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$, удовлетворяющей некоторой системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка[2]. Вторая задача посвящена сравнению полиадического разложения натурального числа с разложением с двойной базой [5]. В третьей задаче исследуются статистические свойства цифр конечных отрезков полиадических рядов [6].)

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю., «О представлениях натуральных чисел», 2013, *Вестник Московского университета*, сер. 1, математика, механика. №6 с 57– 59; "Representations of positive integers", Moscow University Mathematics Bulletin, 68:6 (2013), 307 — 308.

2. Матвеев В. Ю. «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», 2015, *Чебышевский сборник*, т.16 выпуск 3, С 339 – 354.

3. Матвеев В. Ю. «Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов», 2016, *Чебышевский сборник*, т.17 выпуск 3, С 166 – 177.

4. Матвеев В. Ю., «Свойства элементов прямых произведений полей», 2019, *Чебышевский сборник*, том 20, выпуск 2 (70), С. 386 – 393.

5. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. «О представлениях натуральных чисел», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 1(45), 2013, С 75–85

6. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. «О некоторых свойствах полиадических разложений», Чебышевский сборник, т.14 выпуск 2(46), 2013, С 164–172

---

УДК 511.36

# Некоторые арифметические свойства обобщенных гипергеометрических $F$ – рядов

**А. Х. Муньос Васкес (Россия, г. Москва)**
аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

# Some arithmetic properties of generalized hypergeometric $F$ – series

**A. Kh. Munos Vaskes (Russia, Moscow)**
postgraduate student, department of number theory, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Теорема 1. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \dots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn},$$

*представляет собой ряд некоторого класса* $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, *где числа* $c_1, c_2, c_3, q$ *выражаются через множество*

$$S = \{\eta_1 \dots \eta_r; \lambda_1 \dots \lambda_s\},\ r > s$$

*которое состоит из нецелых рациональных параметров, а*

$$t = r - s.$$

*чётно,* $t = 2k$, *и для множества параметров* $S$ *выполнены условия:*

$$\eta_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, t+s, \quad j = 1, \dots, s.$$

*Пусть для всех* $d$ *– общих делителей чисел* $t, s$ *либо не выолняется соотношение* $\overline{\eta} + \frac{1}{d} \approx \overline{\eta}$, *либо не выполняется соотношение* $\overline{\lambda} + \frac{1}{d} \approx \overline{\lambda}$; *т.е. разность левой части и любой перестановки правой части, соответствующих наборов* $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $(\bar{\lambda} + c) = (\lambda_1 + c, \dots, \lambda_s + c)$, $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$, $(\bar{\eta} + c) = (\eta_1 + c, \dots, \eta_r + c)$, *не будет целым числом.*

*Пусть не выполняется ни одно из следующих условий:*

1. *если* $s = 0$, *то существуют* $X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_1; -X_1; \dots; X_{k-1}; -X_{k-1});$$

2. *если* $s > 0$– *чётно,* $s = 2u$, *то существуют* $X_0, X_1, \dots, X_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ *такие, что либо*

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_1; -X_1; \dots; X_{k+u-1}; -X_{k+u-1});$$
$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (X_{k+u}; -X_{k+u}; \dots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1});$$

*либо*

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (X_1; -X_1; \dots; X_{k+u}; -X_{k+u});$$
$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_{k+u+1}; -X_{k+u+1}; \dots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1});$$

*3. если $s > 0$–нечётно, $s = 2u + 1$, то существуют $X_0, X_1, \ldots, X_{k+l-1} \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; X_1; -X_1; \ldots; X_{k+u}; -X_{k+u});$$
$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (-\frac{1}{2}; X_{k+u+1}; -X_{k+u+1}; \ldots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1}).$$

*Пусть*

$$P(y_1, \ldots, y_m)$$

*произвольный многочлен степени $K$, коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна $H, H \geqslant H_0$.*

*Пусть $p$ – простое число, $(p, q) = 1$, выполняются условия*

$$p\left(\frac{\ln p - 1}{\ln p}\right) > 2(c_3 + 1)K,$$

*а также $\xi = p^{\gamma(H)}$ и пусть $\gamma(H) \geqslant \binom{m+K}{m}\frac{\ln\ln H}{\ln p}$.*

*Тогда в поле $Q_p$ выполняется*

$$P(f(\eta_1, \ldots, \eta_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \xi), f'(\eta_1, \ldots, \eta_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \xi), \ldots, f^{(r-1)}(\eta_1, \ldots, \eta_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \xi) \neq 0.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Муньос Васкес А. Х. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений $F$ – рядов // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, вып. 3.

2. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независмость значений $E$ – функций // Acta Arith. –1990. т. 53. с.453–471.

3. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических $E$ – функций // ДАН СССР. 1989. т.307, №2. с.284–286.

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических $F$ – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. Том 483, № 3. С. 257-259.

5. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric $F$ – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.


---

УДК 511.36

# Об оценке меры иррациональности $\arctan\frac{1}{6}, \arctan\frac{1}{10}$

**В. Х. Салихов (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный технический университет
e-mail:svdh@rambler.ru
**М. Г. Башмакова (Россия, г. Брянск)**
Брянский государственный технический университет
e-mail:mariya-bashmakova@yandex.ru

# On irrationality measure of $\arctan\frac{1}{6}, \arctan\frac{1}{10}$

**V. Kh. Salikhov (Russia, Bryansk)**
Bryansk State Technical University
e-mail: svdh@rambler.ru
**M. G. Bashmakova (Russia, Bryansk)**
Bryansk State Technical University
e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Одним из направлений теории диофантовых приближений является вопрос о возможности приближения данного иррационального числа рациональными дробями с ограниченными знаменателями. Для оценки качества такого приближения используется специальная характеристика - показатель иррациональности, которая для произвольного иррационального числа $\gamma$ определяется как нижняя граница чисел $\mu$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел $p$, $q$ при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$ исследовались неоднократно, различными авторами. Первые подобные результаты были получены как частные случаи в работах [1],[2], где были построены общие методы оценки показателя иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса.

Новым направлением в развитии данной области исследования стало использование для построения приближения интегральных конструкций, свойством которых была симметричность относительно какой-либо замены параметров. С помощью симметричных интегралов разного типа был получен ряд значимых результатов, например, для $\ln 3$ [3], $\pi$ [4] и других чисел. В работе Е.Б.Томашевской [5] при помощи симметричного комплексного интеграла были построены оценки показателя иррациональности значений $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 2$. Позднее часть этих результатов была улучшена, см. [6],[7]. В данной работе мы докажем новые оценки для значений $\operatorname{arctg}\frac{1}{6}, \operatorname{arctg}\frac{1}{10}$. Метод, которым будут получены новые значения, использует интегральную конструкцию, аналогичную интегралу работы К.Ву [8].

Теорема 1. *Справедлива следующая оценка:* $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}) \leq 5.5366...$

Теорема 2. *Справедлива следующая оценка:* $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{10}) \leq 4.4657...$

Предыдущие результаты для этих чисел составляли соответственно $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}) \leq 6.2401...$, $\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{10}) \leq 4.5949..$ и принадлежали Е.Б. Томашевской [5].

Доказательство утверждений основано на исследовании двух аналогичных интегральных конструкций:

$$I_n = \frac{1}{i}\int\limits_{6-i}^{6+i} \frac{(x-6-i)^{(1-\alpha-\beta)n}(x-6+i)^{(1-\alpha-\beta)n}(6x-37)^{\alpha n}(x-6)^{\alpha n}(7x^2-85x+259)^{\beta n}dx}{x^{n+1}} \tag{1}$$

и

$$Y_n = \frac{1}{i}\int\limits_{10-i}^{10+i} \frac{(x-10-i)^{(1-\alpha-\beta)n}(x-10+i)^{(1-\alpha-\beta)n}(10x-101)^{\alpha n}(x-10)^{\alpha n}(11x^2-221x+1111)^{\beta n}dx}{x^{n+1}} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha n, \beta n, \in \mathbb{N}$.

Исследование получаемых линейных форм даёт возможность оценить меру иррациональности указанных значений функции $\operatorname{arctg} x$. Для выводов используется классический подход, принадлежащий М. Хата. (см. [9]).

Лемма 1. *[[9], лемма 2.1] Пусть* $n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$ *-иррационально,* $l_n = g_n\gamma + p_n$, *где* $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|g_n| = \delta$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|l_n| \le -\tau, \tau > 0$, *тогда* $\mu(\gamma) \le 1 + \frac{\delta}{\tau}$.

Рассмотрим интеграл $I_n(x)$. Обозначим

$$f(x) = \frac{(x-6-i)^{(1-\alpha-\beta)}(x-6+i)^{(1-\alpha-\beta)}(6x-37)^{\alpha}(x-6)^{\alpha}(7x^2-85x+259)^{\beta}}{x}.$$

Справедливо представление

$$I_n = \frac{1}{i}\int\limits_{6-i}^{6+i} \frac{(f(x))^n dx}{x} = \frac{1}{i}\int\limits_{6-i}^{6+i} \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k + \frac{1}{i}\int\limits_{6-i}^{6+i} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{x^k} dx =$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n-1} B_k \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{6-i}^{6+i} + 2a_1 \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{n+1} \left.\frac{a_k}{(-k+1)x^{k-1}}\right|_{6-i}^{6+i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k+1} + 2a_1 \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \frac{a_k}{-k+1}\left(\frac{b_k}{37^{k-1}} - \frac{b_k'}{37^{k-1}}\right), b_k, b_k' \in \mathbb{Z}[i], B_k, C_k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 2. *Для любого* $k = 2, ..., n+1$ *справедливо представление* $a_k = L_k \cdot 37^{k-1}, L_k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство леммы проводится стандартным методом, см., например, [7]. Таким образом, получаем линейную форму

$$q_n I_n = 2a_1 \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + B_n, a_1, B_n \in \mathbb{Z},$$

где $q_n = HOK\{1, ..., n\}$.

Возьмём $\alpha = 0.11909, \beta = 0.06306, n-$ кратное $10^5$ и применим к данной линейной форме лемму 1. Асимптотику интеграла исследуем методом Лапласа. Уравнение $\ln f'(x) = 0$ имеет шесть корней, максимум подынтегральной функции достигается в точке $x_0 = 6,078 - 0.251i$, тогда $-\tau = \ln|f(x_0)| = -1.99685...$

Асимптотика коэффициента $a_1$ исследуется методом перевала. Этот метод всегда применяется при исследовании подобных линейных форм, подробности можно найти, например, в [10]. Получаемая точка перевала $x_1 = -6.083..$, тогда $\delta = \ln(|f(x_1)|) = 3.5222..$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln q_{An} = A$, в соответствии с леммой 1 получаем заявленную оценку

$$\mu(\operatorname{arctg}\frac{1}{6}) \le 1 + \frac{1+\delta}{-1-\tau} = 5.53646...$$

Для получения оценки меры иррациональности значения $\operatorname{arctg}\frac{1}{10}$ аналогичным образом используется интеграл $Y_n$, построенный по тому же принципу. Справедливо представление интеграла в виде линейной формы

$$q_n Y_n = 2\hat{a}_1 \arctan\frac{1}{10} + \hat{B}_n, \hat{a}_1, \hat{B}_n \in \mathbb{Z}.$$

При значениях параметров $\alpha = 0.07963, \beta = 0.03130$ применение к этой линейной форме леммы Хата даёт заявленный результат.

Подбор оптимальных параметров, поиск точек максимума и перевала, как обычно в таких задачах, осуществлялся с помощью компьютерной программы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques// J. Number Theory. 1987. № 26. P. 166-178.

2. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

3. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.

4. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа $\pi$ // Успехи математических наук. 2008. Том 63. № 3. С. 163-164.

5. Томашевская Е. Б. О мере иррациональности числа $\ln 5+\pi/2$ и некоторых других чисел// Чебышевский сборник. 2007.Том 8. № 2. С. 97-108.

6. Салихов В. Х.,Башмакова М. Г. О показателе иррациональности $\arctan\frac{1}{3}$// Известия вузов. Математика. 2019.№ 3. С. 69-75.

7. Башмакова М. Г.,Салихов В. Х. Об оценке меры иррациональности $\arctan\frac{1}{2}$// Чебышевский сборник. 2019. Том 20. № 4. С. 58-68.

8. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers //Math. Of computation. 2002. Vol.72. № 242. P. 901–911.

9. Hata M. Rational approximations to $\pi$ and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.

10. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С. 785-797.


---

# Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 514.7, 514.82, 519.63

## Вариационный метод Ю. А. Волкова в теории выпуклых многогранников

**Д. Ю. Волков ( Россия, г. Санкт-Петербург)**
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

## Yu. A. Volkov's variational method in the theory of convex polyhedra

**D. Yu. Volkov ( Russia, St. Petersburg)**
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

Доклад посвящен основным работам Юрия Александровича Волкова (1930-1981) по теории выпуклых многогранников. Юрий Александрович Волков родился 2 сентября 1930 года в Казани. В 1947 году он поступил в на математико - механический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1952 году. В 1955 г. он защитил кандидатскую диссертацию, выполненную под руководством А. Д. Александрова. Юрий Александрович защитил в 1968 году докторскую диссертацию. В докторской диссертации была решена знаменитая проблема Кон - Фоссена – Вейля. Всю свою жизнь Юрий Александрович работал на кафедре геометрии математико - механического факультета, а с 1961 по 1981 годы был ее заведующим. Юрий Александрович скончался 23 мая 1981 года в Санкт -Петербурге. Основные научные достижения Юрия Александровича относятся к теории выпуклых поверхностей в целом. Эта теория получила новое развитие в работах Александра Даниловича Александрова и его учеников.

В теории выпуклых поверхностей одно из центральных мест занимают задачи о восстановлении поверхности по какой-либо её характеристике (метрике»кривизне, поверхностной функции,...). Традиционное исследование таких задач состоит из 1) доказательства разрешимости рассматриваемой задачи в подходящем классе поверхностей (теорема существования), 2) установления однозначной определённости решения, возможно, с точностью до преобразований некоторого типа (теорема единственности), 3) проблема регулярности построенной поверхности в зависимости от регулярности исходной характеристике 4) оценки деформации поверхности при изменении данной характеристики (теорема устойчивости).Первые два этапа являются, по существу доказательством биективности отображения, сопоставляющего поверхности её характеристик, четвертый есть исследование метрических свойств этого отображения.Как правило доказательства однозначной определённости являются типичными доказательствами инъективности. Попытки превратить их в выводы оценок устойчивости, т.е. распространить на случай неравных, но близких характеристик, обычно не приносят успеха. Поэтому получение оценок устойчивости требует существенно новых соображений и методов.

Ю. А Волков предложил новый метод в теории выпуклых поверхностей и с его помощью дал конструктивное доказательство знаменитой теоремы А.Д.Александрова о существовании выпуклого многогранника, заданного своей разверткой, и доказал теорему устойчивости для проблем Г. Вейля - Кон-Фоссена.

Напомним, что проблема Г. Вейля заключается в построении замкнутой выпуклой поверхности, на которой реализуется абстрактно заданная метрика положительной кривизны.

История ее решения хорошо известна (см. [5, 6, 9]). Уже сам Г. Вейль наметил решение своей проблемы [1]. Вейль свел ее к разрешимости нелинейного уравнения в частных производных типа Монжа - Ампера (так называемого уравнения Дарбу). Г. Вейль доказал существование в случае метрик, достаточно близких к метрике сферы. Полное решение в случае аналитичности было получено Г. Леви в 1937 г. [2]. Исследования Леви продолжили Ниренберг, Heinz и другие исследователи ( см. [3, 4, 5]).

А.Д.Александров в 1940 годах развил новый подход к проблеме Вейля и теории выпуклых поверхностей [5, 6, 7]. А. Д. Александров рассмотрел сначала аналог проблемы Вейля для многогранников. В этом случае получается задача о существовании выпуклого многогранника с заранее заданной разверткой, удовлетворяющей некоторым простым необходимым условиям (условия эти состоят в том, что, во-первых, при склеивании многоугольников развертки должно получаться многообразие, гомеоморфное сфере, и, во-вторых, сумма углов при каждой вершине развертки должна быть не больше $2\pi$ ). А.Д.Александров доказал знаменитую теорему, что по каждой развертке, которая удовлетворяет указанным условиям, можно построить единственный выпуклый многогранник. Решение проблемы Вейля для общего случая получается из теоремы А. Д.Александрова для многогранников путем приближения римановых метрик многогранниками и последующим предельным переходом.

Работы А.Д. Александрова по проблеме Вейля продолжил А.В.Погорелов [9]. А.В. Погорелов доказал знаменитую теорему о том, что изометричные замкнутые выпуклые поверхности равны и доказал теорему о регулярности поверхности в зависимости от гладкости метрики. Таким образом, в проблеме Вейля были решены первые три основных вопроса. Сам А.Д.Александров доказал теорему о существовании многогранника с данной разверткой топологическим методом. Юрию Александровичу Волкову удалось найти новый конструктивный метод доказательства существования и удалось ответить на четвертый вопрос в проблеме Вейля ( этот вопрос поставил Кон -Фоссен в 1936 году) и оценить изменение пространственных расстояний замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения внутренних расстояний между точками. Метод Ю.А. Волкова заключается в нахождении такого функционала $F$ на множестве многогранников, что его экстремум соответствует выпуклому многограннику в пространстве, поверхность которого изоморфна данной развертке. Кратко о метод Ю.А. Волкова сводится к следующему. Замкнутый выпуклый многогранник можно представлять склеенным из пирамид с общей вершиной, например, в одной из вершин многогранника. По наперед заданной развертке можно построить обобщенный( абстрактный ) многогранник, который состоит из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют данную развертку. Такой обобщенный многогранник нельзя поместить в евклидово пространство, т.е он является кусочно - евклидовым пространством. Далее обнаруживается, что до тех пор, пока хотя бы при одном внутреннем ребре угол больше $2\pi$ можно, уменьшая это ребро и не увеличивая других ребер, получить развертку того же вида. Естественно ожидать, что у обобщенного многогранника такого вида с наименьшей суммой длин внутренних ребер, все углы при этих ребрах будут равны $2\pi$, и из него склеивается искомый выпуклый многогранник. По материалам диссертации были опубликованы статьи [10, 12]. Работа [12] содержит полное доказательство для конечного и бесконечного выпуклых многогранников, но она была практически недоступной для исследователей. Полностью диссертация опубликована только в 2018 году [13]. В начале 60 годов Юрий Александрович обнаружил, что метод абстрактных многогранников позволяет решить вопрос о устойчивости в проблеме Вейля [14, 15].

Пусть $F_1$ и $F_2$ - две замкнутые выпуклые поверхности и $\phi$ гомеоморфизм $F_1$ на $F_2$. Пусть при гомеоморфизме $\phi$ внутренние расстояния между точками поверхности отличаются не более чем на $\varepsilon$. Ввиду однозначной определенности замкнутой выпуклой поверхностью ее метрикой можно утверждать, что пространственные расстояния между соответствующими точками поверхностей $F_1$ и $F_2$ отличаются не более чем на $\delta(\varepsilon)$, причем $\delta$ мало вместе с $\varepsilon$. Проблема

состоит в том, чтобы оценить величину $\delta$ в зависимости от $\varepsilon$. Ю.А.Волков доказал следующую теорему: отклонение внутренней метрики поверхностей $F_1$ и $F_2$ от изометрии на величину, не превосходящую $\varepsilon$, гарантирует отклонение от конгруэнтности на величину $C\varepsilon^{\alpha}$, где константа $C$ зависит от диаметра поверхности $F_1$ ( или $F_2$), а константа $\alpha$ удовлетворяет неравенству $1/24 < \alpha < 1/2$ [14, 15]. При $\varepsilon = 0$ из этой теоремы следует однозначная определенность замкнутых выпуклых поверхностей. Таким образом, Ю.А.Волков с помощью метода абстрактных многогранников доказал основные теоремы в проблеме Вейля. В последние годы вырос интерес в вариационным методам Ю.А. Волкова. В 2008 году появились интересные статьи [16, 17], в которых разработаны в том числе и конструктивный метод построения многогранника по развертке. Появление этого алгоритма вызвало немедленный интерес специалистов по компьютерной графике [18]. Интересно отметить, что практически одновременно с работами Ю.А.Волкова в общей теории относительности Т.Редже предложил новый дискретный подход [19], в котором используется та же дискретизация полной средней кривизны, что и в работе [14].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Weyl H 1916 Über die bestimmheit einer geschlossenen konvex fläche durch ihr linienelement Vierteljahresschrift Der Nat.-Forschenden Ges., Zürich 61 40–72

2. Lewy H 1938 On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric Proc. Natl Acad. Sci. USA 24 104

3. Nirenberg L 1953 The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large Commun. Pure. Appl. Math. 6 337–94

4. Heinz E 1962 On Weyl's embedding problem Appl. Math. Mech. 11 421–54 MR0139127

5. Han, Q., Hong, J.-X., Isometric Embedding of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces, - Mathematical Surveys and Monographs, 130, Amer. Math. Soc., Providence, 2006 -260 с.

6. Александров, А. Д.*Выпуклые многогранники.* Гостехиздат, М.–Л., 1950. - 428 с.

7. Александров А.Д. *Избранные труды том 2 Выпуклые многогранники* – Новосибирск:Наука, 2007 - 491 с.

8. Alexandrov A. D. *Convex polyhedra.* – Berlin: Springer, 2005.- 539с.

9. Погорелов А. В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* – М. Изд-во"Наука 1969.- 760 с.

10. W. Blaschke, G. Herglotz, *Über die Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenem Bogenelement im Euklidischen Raum.* — Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. **2** (1937), 229–230.

11. Волков Ю. А *Существование выпуклого многогранника с данной разверткой* Вестник ЛГУ 1960 19 Серия математики, механики и астрономии. вып.4- С. 75-86

12. Волков Ю. А Е.Г. Подгорновой Е. Г. *Существование многогранника с данной разверткой* Ученые записки Ташкентского Государственного педагогического института им. Низами 1972- т. 85 - С. 3-54

13. Волков Ю. А *Существование многогранника с данной разверткой* Записки научных семинаров ПОМИ, том 476, 2018, С. 50–78

14. Волков Ю. А *Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики* Доклады Академии наук. 1968. – Т. 178. – №. 6. – С. 1238-1240.

15. Волков Ю. А *Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения внутренней метрики* Украинский геом. сборник 1968- №.5 - 6-С.44-69 перевод [8] Section 12.1

16. Bobenko A. I., Izmestiev I.V. *Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes* Annales de l'institut Fourier. – 2008. – Т. 58. – №. 2. – С. 447-505.

17. Izmestiev I.V. *A variational proof of Alexandrov's convex cap theorem* Discrete & Computational Geometry. – 2008. – Т. 40. – №. 4. – С. 561-585.

18. Kane D., Price G. N., Demaine E. D. *A pseudopolynomial algorithm for Alexandrov's Theorem* Workshop on Algorithms and Data Structures. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. – С. 435-446.

19. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. *Gravitation.* W. H. Freeman and Co., San Francisco (1973)

---

УДК 51 М34

# Прямые $y = -[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...] \cdot x + t$ с четными $a_n^+$ и нечетными $a_n^- = a(\neq 1)$ и шахматная раскраска

**М. М. Галламов (Россия, Москва)**
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: gallamovj@gmail.com

# Straight line $y = -[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...] \cdot x + t$ with even $a_n^+$ and odd $a_n^- = a(\neq 1)$ and chess coloring

**M. M. Gallamov (Russia, Moscow)**
Mathematical Institute. V. A. Steklov of the RAS
e-mail: gallamovj@gmail.com

## 1. Постановка задачи

Пусть единичные квадраты целочисленной решетки первого квадранте $I_{OXY}$ прямоугольной системы координат $OXY$ раскрашены в шахматном порядке таким образом, что клетка, прилегающая к началу $O$, белого цвета, а

$$f_t: \ y = -\alpha \cdot x + t, \ t > 0. \tag{1}$$

— семейство прямых, отсекающих от $I_{OXY}$ при каждом фиксированном $t$ треугольник $\Delta OA(t)B_(t)$, где $A(t) = OX \cap f_t$, $B(t) = OY \cap f_t$. Здесь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] \tag{2}$$

— положительное иррациональное число, представленное бесконечной цепной дробью, а каждый её элемент $a_n$ принадлежат множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, а $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем все элементы $a_n$ имеют одинаковую четность — любо все одновременно четные, либо — нечетные числа больше единицы и равны между собой.

Теорема 1. *Пусть $OXY$ — прямоугольная система координат, $f_t^{\pm}: y=-[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...]$ $x+t$, $t>0$, — прямая с элементами $a_n^{\pm}$ цепной дроби $[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...]$ одинаковой четности, причем $a_n^{+}$ все четные, $a_0^{+} \neq 0$ и нечетные $a_n^{-} = a^{-}$ $(\neq 1)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, а единичными квадратами с целочисленными вершинами из первого квадранта $I_{OXY}$ раскрашены в шахматном порядке, да к тому же $A(t) = OX \cap f_t^{\pm}$, $B(t) = OY \cap f_t^{\pm}$. Тогда разность $u^{\pm}(t)$ между белыми и черными квадратами из $\Delta OA(t)B_(t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху, когда прямая $f_t^{\pm}$ уходит на бесконечность при $t \to \infty$.*

Теорема 1 является основным результатом данной статьи. Если в теореме цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \cdot ...]$ заменить на произвольное положительное иррациональное число, то получим задачу, которая была поставлена в [1].

## 2. Немного о геометрии цепных дробей

К точке $A(\alpha q) = (q; 0)_{OXY}$, $q \in \mathbb{N}_0$, приложим два единичных и взаимно перпендикулярных вектора $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ так, чтобы первый был противоположно направлен оси $OX$, а второй сонаправлен с $OY$. Вследствие чего прямая $f_{\alpha q}$ расположится между этими векторами. Векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ с точкой $A(\alpha q)$ образуют новую левоориентированную систему координат $A(\alpha q)\overline{e}_1\overline{e}_2$ с началом в $A(\alpha q)$ и осями абсцисс $A(\alpha q)\overline{e}_1$ и ординат $A(\alpha q)\overline{e}_2$. В этой системе координат будем осуществлять геометрическую интерпретацию цепной дроби (2). По этой причине все используемые ниже координаты указываются в новой системе координат, за исключением точки $A(\alpha q)$, координаты которой будут указываться в $OXY$.

Выше к координатам точки $A(\alpha q)$ мы прикрепили нижний индекс $OXY$, что указывает о выборе их из системы координат $OXY$, в дальнейшем будем поступать аналогично, если из контекста неясно из какой системе координат взяты координаты того или иного объекта.

В $A(\alpha q)\overline{e}_1\overline{e}_2$ уравнение прямой $f_{\alpha q}$ будет иметь вид: $f_{\alpha q}:\ e_2 = \alpha e_1$, где $e_1$ — абсцисса и $e_2$ — ордината текущей точки $(e_1; e_2)$ прямой $f_{\alpha q}$.

Пусть

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]\,,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

подходящая дробь порядка $n$ цепной дроби из (2). Согласно рекуррентным формулам для числителя и знаменателя подходящих дробей из (3) имеем

$$\begin{aligned} &p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1},\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},\\ &p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1,\ q_0 = 1, q_1 = a_1,\ n \in \mathbb{N};\\ &p_{-2} = 0,\ q_{-2} = 1,\ p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Для подходящих дробей справедливо равенство $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, которое с геометрической точки зрения говорит о том, что если на векторах $\overline{e}_{n+2} = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}$ и $\overline{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$ с координатами $(q_{n-1}; p_{n-1})$ и $(q_n; p_n)$ построить параллелограмм, то внутри его нет целочисленных– точек, а его вершины -целочисленные точки. Это следует из формулы Пика, см. [2].

Последовательность $\{\overline{e}_{n+2}(l_1; l_2)\}_{n=1}^{\infty}$ векторов, определяемая рекуррентыми формулами

$$\begin{aligned} \overline{e}_{n+2}(l_1; l_2) = \overline{e}_n(l_1; l_2) + a_{n-1}\overline{e}_{n+1}(l_1 + q_{n-3}; l_2 + p_{n-3}) =\\ a_{n-1}\overline{e}_{n+1}(l_1; l_2) + \overline{e}_n(l_1 + a_{n-1}q_{n-2}; l_2 + a_{n-1}p_{n-2}).\\ p_{-2} = q_{-1} = 0,\ q_{-2} = p_{-1} = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

в наших исследованиях играет существенную роль, где у векторов в скобках указаны координаты целочисленных точек их приложения. При $(0; 0) = A(\alpha q)$ эти равенства являются

адаптированным алгоритмом *"вытягивания носов"* из [3], вследствие чего векторы из правой части первого равенства в (5) при нечетном $n$ принадлежат $\Delta OA(q_{n-1}\alpha)B(q_{n-1}\alpha)$, а из такой же части второго равенства не принадлежат ему.

Треугольники, дающие сумму $\overline{e}_{n+2}(l_1;l_2)$ из (5), содержат целочисленные точки только на своих сторонах — каждый по $a_{n-1}+2$ штук и их вершины — целочисленные точки. В параллелограмм, построенный на векторах $\overline{e}_{2m+1}(l_1;l_2)$ и $\overline{e}_{2m+2}(l_1;l_2)$, входят целочисленные точки только в качестве его вершин для любого $m$ из $\mathbb{N}_0$ — это есть следствие теоремы Пика.

Детально о цепных дробях см. в [4] .

## 3. О построении технических средств для доказательства теоремы 1

Пусть вектор $\overline{e}_{k+2}(l_1;l_2)$ при произвольно фиксированном $k$ из $\mathbb{N}$ приложен к такой целочисленной точке $(l_1;l_2)$, что этот вектор принадлежит пересечению $I_{OXY}\cap I_{A(\alpha q)\overline{e}_1\overline{e}_2}$ первых квадрантов:, кончено, при этом параметр $q\geq q_{k-1}+l_1$. Тогда через $\mathtt{E}_{k+2}(l_1;l_2)$ обозначим трапецию, ограниченную осью $OY$ вектором $\overline{e}_{k+2}(l_1;l_2)$ и прямыми, проходящими через концы этого вектора и параллельные $OX$. Трапеция $\mathtt{E}_{k+2}(l_1;l_2)$ однозначно определяется вектором $\overline{e}_{k+2}(l_1;l_2)$ Если конец вектора $\overline{e}_{k+2}(l_1;l_2)$ принадлежит $OY$, то эта трапеция выродится в треугольник. Разность между белыми и черными квадратами принадлежащими к $\mathtt{E}_{k+2}(l_1;l_2)$ обозначим $\epsilon_{k+2}(l_1;l_2)$

Предложение 1. *Разность $\epsilon_{k+2}(l_1;l_2)$ зависит только от четностей координат $l_1$ и $l_2$ из системы координат $A(\alpha q)\overline{e}_1\overline{e}_2$, а не их величины.*

На основании (5) разности $\epsilon_{k+2}(l_1;l_2)$ определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned}&\epsilon_{2m+1}(l_1;l_2)=\epsilon_{2m-1}(l_1;l_2)+\\&\textstyle\sum_{j=0}^{a_{2m-2}-1}\epsilon_{2m}(l_1+q_{2m-4}+q_{2m-3}j;l_2+p_{2m-4}+p_{2m-3}j),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon_{2m+2}(l_1;l_2)=\textstyle\sum_{j=0}^{a_{2m-1}-1}\epsilon_{2m+1}(l_1+q_{2m-2}j;l_2+p_{2m-2}j)+\\&\epsilon_{2m}(l_1+a_{2m-1}q_{2m-2};l_2+a_{2m-1}p_{2m-2}),\quad m\in\mathbb{N}\end{aligned}\tag{7}$$

с начальными условиями $\epsilon_2(l_1^+;l_2^+)=\epsilon_2(l_1^+;l_2^-)=0$, $\epsilon_2(l_1^-;l_2^+)=1$ и $\epsilon_2(l_1^-;l_2^-)=-1$ при четном $q$, а при нечетном $q$ — $\epsilon_2(l_1^+;l_2^+)=1$, $\epsilon_2(l_1^+;l_2^-)=-1$, $\epsilon_2(l_1^-;l_2^+)=\epsilon_2(l_1^-;l_2^-)=0$, где верхние индексы указывают на четность чисел: плюс — четно, минус — нечетно.

Каждая последовательность $\{\epsilon_{k+2}(l_1;l_2)\}_{k=1}^{\infty}$ при фиксированном значении $\alpha$ из теоремы 1 шестипериодична по четности аргументов $l_1$ и $l_2$ в силу периодичности по четности элементов каждой цепной дроби из теоремы 1. Поэтому на основании предложения 1, а также в силу матричного представления для каждой указанных последовательности удалось получить общую формулу. Например, если $\alpha=[a_0^+;a_1^+,a_2^+,\ldots,a_n^+,\ldots]$ есть цепная дробь с четными элементами, $a_0\neq 0$, то разности

$$\begin{aligned}&\epsilon_{6k+7}(l_1^+;l_2^+)=b_{6(k+1)-2}+b_{6k-2}+\cdots+b_4+k+1,\\&\epsilon_{6k+7}(l_1^-;l_2^+)=-(b_{6(k+1)-2}+b_{6k-2}+\cdots+b_4+k+1),\\&\epsilon_{6k+7}(l_1^+;l_2^-)=-(b_{6(k+1)-2}+b_{6k-2}+\cdots+b_4+k+1),\\&\epsilon_{6k+7}(l_1^-;l_2^-)=b_{6(k+1)-2}+b_{6k-2}+\cdots+b_4+k+1,\end{aligned}\quad k\in\mathbb{N}_0,\tag{8}$$

где слагаемые определяются через целую часть $b_n=\left\lfloor\frac{a_n^+-1}{2}\right\rfloor$.

Если $\alpha=[a^-;a^-,a^-,\ldots]$ есть цепная дробь с равными нечетными элементами, $a^-\neq 1$, то

$$\begin{aligned}\epsilon_{6k+3}(l_1^+;l_2^+)&=\tfrac{(4b^2+1)(16b^4+1)^k+4b^2-1}{8b^2},\quad \epsilon_{6k+3}(l_1^+;l_2^-)=\tfrac{(4b^2+1)(1-(16b^4+1)^k)}{8b^2},\\ \epsilon_{6k+3}(l_1^+;l_2^-)&=\tfrac{(4b^2+4b+1)(16b^4+1)^k+4b^2-4b-1}{8b^2},\ \epsilon_{6k+3}(l_1^-;l_2^-)=\tfrac{(4b^2+4b+1)(1-(16b^4+1)^k)}{8b},\end{aligned}\tag{9}$$

где $k \in \mathbb{N}_0$, а $b = \lfloor (a-1)/2] \rfloor$.

Последние формулы получены с помощью жорданова разложения квадратной матрицы восьмого порядка. При применении жорданова разложения матрицы возникает особенность при $a = 1$, которую не удается преодолеть посредством метода, используемым в данной работе.,но эта задача была решена ранее на основании также алгоритма “вытягивания носов” с помощью усовершенствования указанного метода, см. [5].

Теперь учитывая, что $\mathtt{E}_{k+2}(l_1; l_2)$ однозначно определяется вектором $\overline{e}_{k+2}(l_1; l_2)$, сделаем следующую замену гипотенузы $A(t)B_(t)$ треугольника $\Delta OA(t)B_(t)$ вектором $\overline{e}_{k+2}(A(t))$ так, что множества раскрашенных клеток из $\Delta OA(t)B_(t)$ и из $\mathtt{E}_{k+2}(l_1; l_2)$ совпадали — такая замена возможна на основании формулы Пика.

Из формул (8) и (9) соответственно следует, что при $t = \alpha q_{6k+4}$ $(t = \alpha(q_{6k+4}+1))$ разность $u(\alpha q_{6k+4}) \to -\infty$ $(u(\alpha(q_{6k+4}+1))) \to \infty)$ для прямой $f_{\alpha q_{6k+4}}$ $(f_{\alpha(q_{6k+4}+1))})$ и при $t = \alpha(q_{6k}+1)$ $(t = \alpha q_{6k})$ разность $u(\alpha(q_{6k}+1) \to \infty$ $(u(\alpha q_{6k}))) \to -\infty)$ для прямой $f_{\alpha(q_{6k}+1)}$ $(f_{\alpha q_{6k}})$, когда $k \to \infty$

## 4. О множестве значений угловых коэффициентов из (1), для которых решена поставленная задача

Эта задача решена в частных случаях когда угловой коэффициент $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $-e$ прямой (1) см. соответственно [5] и [6].

Метод решения поставленной задачи для прямой

$$f_t^{\pm} : y = -[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...]x + t$$

см. теорему 1, аналогичен методу решения в случае, когда угловой коэффициент равен

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots, (2(m+1))_{3m+2}, 1_{3m+3}, 1_{3m+4}, \ldots] \ (= -e)$$

Техническая реализация этого метода оказалась сложней, в особенности, когда угловой коэффициент равен цепной дроби $[a^-; a^-, a^-, \ldots]$ с равными нечетными элементами такими, что $a^- \neq 1$, вследствие жорданова разложения, о котором говорилось выше.

Метод решения задачи из первой части теоремы 1 применим также к решению задачи с угловыми коэффициентами

$$-[1; 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \ldots, 1, 2m+1, \ldots] \, (= -\operatorname{tg} 1), \ -\left[a_0^+; a_1^-, a_2^+, a_3^-, \ldots\right]$$

где элементы цепной дроби для четного индекса четны, а для нечетного — нечетны и принадлежат множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Отметим, что если перейти к обратным значениям угловых коэффициентов, то поставленная задача сводится к задаче с соответствующим исходным угловым коэффициентом переменной осей координат. Поэтому эта задача верна для угловых коэффициентов

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ -\operatorname{ctg} 1, \ -\left[0; a_0^+, a_1^+, a_2^+, ...\right], \ -\left[0; a_0^+, a_1^-, a_2^+, a_3^-, \ldots\right].$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khovanova T., Konyagin S. Научная статья в сети Интернет: Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors. arXiv:1104.0441v1 [math.CO] 4 Apr 2011, 2011, pp. 1–20.

2. Вавилов В. В., Устинов А. В. *Многоугольники на решетках.* М.: МЦНМО, 2006. — 72с.

3. Арнольд В. И. Цепные дроби. — М: МЦНМО, 2001. 40 с.

4. Хинчин А. Я., 1978, 4-ое изд. *Цепные дроби.* Наука, Москва, 112 с.

5. Галламов М. М. *Прямые* $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$ *и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Наума Ильича Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров Аскольда Ивановича Виноградова, Александра Васильевича Малышева и Бориса Фаддеевича Скубенко. Тула, 23–29 сентябрь 2019 г.

6. Галламов М. М. *Прямые* $y = -e \cdot x + t$ *и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.

---

УДК 517.5

## Построение диаграмм трехмерных решеток

**О. А. Горкуша (Россия, г. Хабаровск)**
Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики ДВО РАН
684bmts@rambler.ru

## Construction of diagramms for three-dimensional lattices

**O. Gorkusha (Russia, Khabarovsk city)**
Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
684bmts@rambler.ru

В 1896 г. Г. Вороной и Г. Минковский (см. [1]) независимо друг от друга построили геометрическую теорию классических цепных дробей, в которой цепная дробь $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] \in \mathbf{R}$ ассоциируется с двумерной примитивной решеткой

$$\Lambda = \Lambda(r) = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

построенной на векторах $(1, 0)$, $(-\alpha, 1)$. Если $\alpha \leqslant 1/2$, то подходящие дроби этого числа описываются множеством $\mathfrak{M}(\Lambda)$ локальных минимумов решетки (узел $\lambda$ — локальный минимум решетки, если внутри прямоугольника с центром в точке $(0, 0)$ и с вершинами $\pm\lambda$ нет ненулевых узлов решетки). По теореме Лагранжа о наилучших приближениях [2]

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{(P_i - \alpha Q_i, Q_i) | i \geqslant 0\},$$

где $P_i, Q_i$ — числитель и знаменатель подходящей дроби с номером $i$ числа $\alpha$. Заметим, что каждая пара узлов $(P_i - \alpha Q_i, Q_i), (P_{i+1} - \alpha Q_{i+1}, Q_{i+1})$ является базисом решетки и обладает свойством минимальности — внутри прямоугольника с центром в точке $(0, 0)$ и с вершинами

$\pm(P_i - \alpha Q_i, Q_{i+1})$ нет ненулевых узлов решетки (позднее в статье определения локального минимума и минимальной системы будут уточнены). Таким образом, цепной дроби соответствуют границы выпуклых оболочек точек решетки в конусах, порожденных прямыми $x = 0$, $y = 0$.

Обобщая цепные дроби на случай большей размерности ($n$), Г. Вороной и Г. Минковский рассматривали границы выпуклых оболочек в $(n+1)$–конусах. Развитию этого направления посвящено много работ — подробный обзор исследований до 1981 года отражен в книге [3]. Поздние результаты описаны в [4], [5]. Так, в случае $n = 3$ ([5]) трехмерная цепная дробь $\mathcal{P}(\Lambda)$, ассоциированная с решеткой $\Lambda$ — граница множества

$$\{(|x|, |y|, |z|) + r \big| (x, y, z) \in \Lambda \setminus \{0\},\ r \in \mathbf{R}^3_{\geqslant 0}\}.$$

Для описания $\mathcal{P}(\Lambda)$ используются канонические диаграммы Вороного [4], [5]. Авторы работ интерпретировали множество минимальных систем трехмерной решетки как граф на плоскости, ребрами которого являются отрезки трех направлений. Грани графа — минимальные узлы решетки, вершины — минимальные системы (такие графы сохраняют информацию о взаимном расположении минимальных систем решетки). В работе [6] сформулирована задача о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы граф, удовлетворяющий свойствам канонической диаграммы, представлял каноническую диаграмму некоторой решетки.

В статье [7] мы рассматриваем решетчатые замощения (назовем их $\mathcal{T}$–замощения) плоскости многоугольниками специального вида с целью установить связь таких замощений и трехмерных неприводимых максимальных решеток, повторяющихся умножением. Мы описываем алгоритм построения решетчатого замощения, соответствующего заданной трехмерной неприводимой максимальной решетке, повторяющейся умножением и доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Канонической диаграмме графа Вороного максимальной решетки, повторяющейся умножением, соответствует $\mathcal{T}$–замощение плоскости.*

В докладе мы приведем примеры $\mathcal{T}$–замощений плоскости, не связанных с решетками такого вида.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. — Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1952. 221 с.

2. Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. — Москва: ИЛ, 1961. 215 с.

3. Brentjes A. J. Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. —Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1961. 183 с.

4. Karpenkov O. Geometry of continued fractions, Algorithms and Computations in Mathematics, vol. 26. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. 424 с.

5. Karpenkov O., Ustinov A. Geometry and combinatoric of Minkowski–Voronoi 3-dimensional continued fractions, режим доступа: https://arxiv.org/abs/1407.0135, 2014.

6. Устинов А. В. Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана // УМН. 2015. Том 70, № 3(423). С. 107-180.

7. Горкуша О. А. О замощениях плоскости, связанных с минимальными системами трехмерных решеток // Математические заметки (сдана в печать).

---

УДК 514.13

## Задача о тени для оришаров и псевдосферические поверхности

**А. В. Костин (Россия, г. Елабуга)**
Елабужский институт Казанского федерального университета
e-mail: kostin_andrei@mail.ru

## Problem of Shadow for Horoballs and pseudo-spherical Surfaces

**A. V. Kostin (Russia, Elabuga )**
Elabuga Institute of Kazan Federal University
e-mail:kostin_andrei@mail.ru

Задача о тени предложена Г. Худайбергановым [1] в 1982 году в следующей постановке:

*какое минимальное число непересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере евклидова пространства $R^n$ и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы каждая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из шаров семейства?*

В двумерном случае Г. Худайбергановым доказано, что для этой цели достаточно двух кругов. Полное решение задачи дано в работе [2]. Ю.Б.Зелинский, И.Ю. Выговская и М.В. Стефанчук доказали, что в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ необходимо и достаточно $n+1$ шара. Различным обобщениям этой задачи посвящено большое количество работ Ю.Б.Зелинского и его учеников и коллег. Ряд аналогичных задач и их модификаций для гиперболического пространства рассмотрен в работе [3]. Задача о тени является частным случаем задачи о принадлежности точки обобщённо-выпуклой оболочке множеств.

Определение 1. *Множество $U$ из $n$-мерного пространства Лобачевского $H^n$ называется $m$-выпуклым относительно точки $x \in H^n \backslash U$, если существует $m$-мерная плоскость, проходящая через точку $x$ и не имеющая с множеством $U$ общих точек. Множество $U \in H^n$, $m$-выпуклое относительно каждой точки $x \in H^n \backslash U$, называется $m$-выпуклым.*

Определение 2. *Минимальное $m$-выпуклое множество, содержащее множество $U$, называется $m$-выпуклой оболочкой множества $U$.*

Если в определениях $m$-мерные плоскости заменить полуплоскостями, то получим $m$-полувыпуклые множества и оболочки. Задача о тени в пространстве Лобачевского, как и в евклидовом, эквивалентна задаче об условиях, обеспечивающих принадлежность центра сферы 1-выпуклой оболочке шаров с центрами на этой сфере. Если радиус сферы в пространстве Лобачевского устремить к бесконечности, шары заменятся оришарами. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы точка $x$ в трёхмерном гиперболическом пространстве принадлежала 1-выпуклой оболочке оришаров, удалённых от $x$ на два расстояния, необходимо и достаточно четырёх оришаров.*

Теорема 2. *Для того, чтобы точка $x$ в трёхмерном гиперболическом пространстве принадлежала 1-полувыпуклой оболочке оришаров, достаточно девяти открытых (замкнутых) оришаров, либо пяти открытых и трёх замкнутых оришаров.*

Если рассмотреть касательный конус к орисфере, ограничивающей оришар, то любая прямая и любой луч, лежащие внутри конуса, пересекают оришар. С касательным конусом связан вопрос вложения псевдосферических поверхностей вращения в плоское трёхмерное пространство.

Теорема 3. *Каждый сегмент поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве глобально изометричен части касательного конуса до линии, по которой конус касается орисферы. При этом в зависимости от выбора расположения вершины конуса – в собсвенной области, на абсолюте или в идеальной области расширенного гиперболического пространства – получим разные псевдосферические поверхности.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ. 1982. **21.** С.1772–85.

2. Зелинский Ю. Б.,Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. 2015. Том 65, № 12. С. 1658-1666. (english translation: Generalized convex sets and shadows problem. Ukrainian Math. Journal. 2016. V 67. № 12. P. 1874–1883 ).

3. Костин А. В. Задача о тени в пространстве Лобачевского // Укр.мат.журнал. 2018. Том 70, № 11. С. 1525-1532. (english translation: Problem of Shadow in the Lobachevskii Space// Ukrainian Math. Journal. 2019.V 70, № 11. P.1758-1766).

---

УДК 514.113.5+515.164.2

# Задача М. М. Постникова о трёхмерных сферических многообразиях

**Я. В. Кучериненко (Россия, г. Москва)**
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: yar_kuch@mail.ru
**В. С. Макаров (Россия, г. Москва )**
МГУ им. М.В.Ломоносова
e-mail: vsmak@mail.ru

# M. M. Postnikov problem on spherical 3-manifolds

**Ya. V. Kucherinenko (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yar_kuch@mail.ru
**V. S. Makarov (Russia, Moscow )**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vsmak@mail.ru

Классификация сферических многообразий хорошо изучена с точки зрения алгебры (особенно прост трёхмерный случай) [1]. М.М. Постников предложил вернуться к истокам и дать их геометрическое описание с помощью ячеек Дирихле-Вороного правильных систем точек на 3-сфере. Таких систем, которые являются орбитами дискретных групп, действующих без неподвижных точек [2]. Движения группы, переводящие ячейку в соседнюю по общей двумерной грани, одновременно отождествляют пары её граней, завершая таким образом геометрическое описание трёхмерных сферических многообразий. Среди всех пяти серий рассматриваемых многообразий Постников предъявил ячейку Дирихле-Вороного (для каждой из групп без неподвижных точек $C_n \times C_m$, $D_n^* \times C_m^*$, $T^* \times C_m^*$, $O^* \times C_m^*$, и $I^* \times C_m^*$)[1] только в двух первых сериях: в т.н. "линзах"и "призмах". Для остальных трёх серий было приведено геометрическое описание для первых членов, а именно, для пространств октаэдра, усечённого куба и додекаэдра, а остальные случаи натолкнулись на вычислительные трудности [2]. М.М. Постников предложил второму из авторов найти способ их преодоления.

Подход, применённый первым автором для описания ориентаций компонентов двойников и сростков кристаллов, позволил разобраться в идее и технике работы [2], а также предъявить форму ячеек Дирихле-Вороного для каждой группы остальных трёх серий [3, 4] (см. Рис. 1). Геометрия ячеек такова, что они имеют симметрию поворотов правильных трёх-, четырёх- и пятиугольных призм. Кроме того, ячейки отчасти напоминают призмы: каждая имеет по два основания (развёрнутые друг относительно друга вокруг вертикальной оси на угол, величиной равной толщине ячейки) и боковые грани.

В данной работе мы приводим доказательство комбинаторного устройства ячеек, описанного в [3, 4]. Доказательство использует алгебру движений дискретных групп 3-сферы. При этом (графически показано на Рис.1) серия $O^* \times C_m^*$, распадается на две подсерии: 2a ($m = 6i - 1$) и 2b ($m = 6i + 1$) для любых натуральных $i$; серия $I^* \times C_m^*$ — на 3a ($m = 6i + 1$) и 3b ($m = 6i - 1$) с такими натуральными $i$, чтобы $m$ не было кратным пяти. Комбинаторные характеристики многогранников указанных подсерий приведены в [3]. Отдельно укажем, что число боковых граней для серии 1 равно $3m + 3$, для серии 2a равно $(8m + 20)/3$, для серии 2b равно $(8m + 28)/3$, для серии 3a равно $(5m + 25)/3$ и для серии 3b равно $(5m + 35)/3$.

Для каждого многогранника получены также карты отождествлений пар граней. При этом каждая из серий 1, 2a и 2b распадается на две подсерии, в которых одинаковым образом отождествляются грани оснований и по одинаковому принципу — боковые грани. Каждая из серий 3a и 3b распадается на четыре подсерии. Карты отождествлений призм (серия $D_n^* \times C_m^*$) естественным образом делятся на две подсерии.

Таким образом, решение задачи М.М. Постникова завершено. Кроме того, получена более подробная классификация трёхмерных сферических многообразий (в сравнении с известными пятью счётными сериями), учитывающая геометрические особенности операций дискретных групп, действующих на трёхмерной сфере без неподвижных точек.

Настоящую работу можно рассматривать также, как небольшое продвижение в решении задач о перечислении правильных разбиений 3-сферы [5] и четырёхмерных изоэдров (простых форм) [6].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 480 с.

[1] $m$ выбирается так, чтобы перемножаемые группы не имели одинаковых операций. Звёздочкой обозначено удвоение группы. Её применение к циклическим группам в последних четырёх сериях удобно при применении аппарата описания двойников и сростков кристаллов (фигур) и не приводит к исключению из рассмотрения каких-то групп [4]. В работе [2] циклические группы не помечены звёздочками.

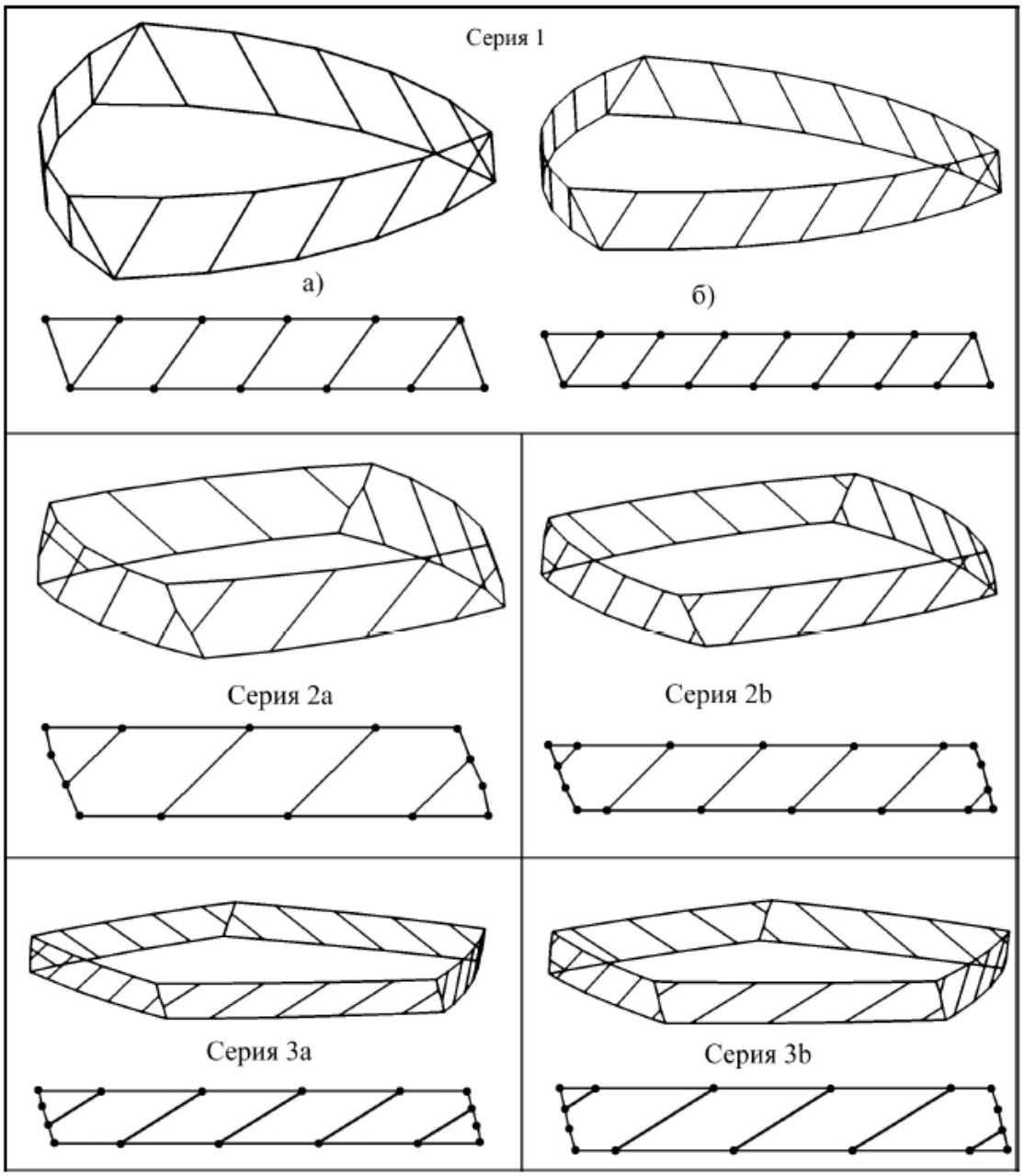



Рис. 1: Примеры сферических стереоэдров бесконечных серий: 1 — фундаментальные многогранники групп $T^* \times C_5^*$ (a) и $T^* \times C_7^*$ (b); 2a — $O^* \times C_5^*$; 2b — $O^* \times C_7^*$; 3a — $I^* \times C_{13}^*$ 3b — $I^* \times C_{11}^*$ [4]

2. Постников М. М. Трехмерные сферические формы // Труды МИАН СССР. 1991. Том 196. С. 114–146. English version: M. M. Postnikov M. M. Three-dimensional spherical forms// Proc. Steklov Inst. Math., 196 (1992), 129—161.

3. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Геометрия бикристаллов и трёхмерные сферические многообразия //Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О.Б. Лупанова (Москва, 20-25 июня 2016 г.) — М.: МГУ, 2016. С. 360-362.

4. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Теория двойников и сростков кристаллов как раздел

четырехмерной кристаллографии // Труды XIII Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках"(Апатиты, 17 октября 2016 г.) — Апатиты: Изд-во K&M, 2016. С. 52-63.

5. Долбилин Н. П. О правильных разбиениях Дирихле сферы. — Москва: МИАН, 1972. 89с.

6. Долбилин Н. П. О трёхмерных и четырёхмерных простых формах // Сб. «Проблемы кристаллологии», посвящённый 80-летию академика Н.В. Белова. — М.: МГУ, 1971. С. 315-324.

---

УДК 514.172.45

## $RR$-многогранники: существование, полнота списка

**В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)**
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М. И. Платова
e-mail: geometry@mail.ru

## $RR$-polyhedra: existence, completeness of the list

**V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)**
Platov South-Russian State Polytechnic University
e-mail: geometry@mail.ru

Представляют интерес многогранники, связанные с правильными (платоновыми), (см., например, [1] – [2]). В связи с этим в настоящем докладе продолжено исследование $RR$-многогранников. Напомним, что замкнутый выпуклый многогранник в $E^3$ называется $RR$-многогранником, если у него существует хотя бы одна симметричная ромбическая вершина, а все грани, не входящие в ромбическую звезду вершин, являются правильными. В [3] – [4] автором перечислены $RR$-многогранники с правильными гранями одного типа; количество таких многогранников, указанных там— 21. Один из этих многогранников имеет тупоугольную ромбическую вершину; при этом не существует бесконечных серий $RR$-многогранников.

В [4] не указан $RR$-многогранник с пятью 10-ромбическими вершинами, который получается присоединением к 10-угольным граням в усечённом додекаэдре двенадцати 10-ромбических пирамид. Этот многогранник, в случае его существования, имел бы 120 ромбических граней и 140 треугольных граней. Однако, вычислением можно показать, что такой выпуклый многогранник не существует.

В настоящем докладе доказано, что могут существовать только два RR-многогранника с тупоугольными ромбическими вершинами. Приводится конструктивное доказательство существования таких многогранников. Таким образом, список RR-многогранников исчерпывается следующими двадцатью двумя многогранниками.

Теорема 1. *Следующие многогранники исчерпывают класс всех $RR$-многогранников:*

*1) шесть многогранников с двумя $n$-ромбическими вершинами, $6 \leq n < 12$, и правильными треугольными гранями;*

*2) 24-гранник с двумя 4-ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями;*

*3) 20-гранник с двумя 5-ромбическими вершинами и квадратными гранями;*

*4) Удлинённый ромбический додекаэдр;*

*5) 12-гранник с двумя неизолированными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами;*

*6) семь многогранников с двумя неизолированными $n$-ромбическими вершинами, $4<n<12$, и треугольными гранями;*

*три многогранника с одной остроугольной ромбической вершиной:*

*7) 7-гранник с треугольными гранями и 3-ромбической вершиной;*

*8) 12-гранник с треугольными гранями и 4-ромбической вершиной;*

*9) 15-гранник с треугольными гранями и 5-ромбической вершиной;*

*два многогранника с одной тупоугольной ромбической вершиной:*

*10) 13-гранник с треугольными гранями и тупоугольной 3-ромбической вершиной.*

*11) 19-гранник с треугольными гранями и тупоугольной 3-ромбической вершиной.*

При доказательстве теоремы рассмотрены способы доказательства несуществования некоторых многогранников.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

2. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

3. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Том 476. С. 153-164.

4. Субботин В. И.О перечислении выпуклых многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами. «Современная геометрия и её приложения». :материалы Международной конференции (Казань, 4-7 сентября 2019 г.) — Казань, 2019. С. 152-153.

# Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений

УДК 519.86; 330.4

## Теоретико-числовые методы поиска параметров сложных эконометрических моделей Тульского региона[1]

**Т. Н. Аверина (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: averinatn@tsput.ru
**Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

## Numerical-theoretical methods for searching parameters of complex econometric models of the Tula region

**T. N. Averina (Russia, Tula)**
Tula State Pedagogical University L. N. Tolstoy
e-mail: averinatn@tsput.ru
**N. M. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)**
Tula State Pedagogical University LN Tolstoy
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Выявление факторов, определяющих рост эффективности ресурсопотребления в условиях цифровой экономики, позволяет сформировать стратегию ее развития и обеспечивает прикладное значение задачи построения производственной функции. Величины средней и предельной эффективности использования ресурсов, эластичность результирующего показателя по факторным признакам, предельная норма замещения ресурсов могут использоваться в системе индикаторов сложного процесса развития постиндустриальной экономики.

В научной литературе кроме классических трехфакторных производственных функций с трудом, основным и интеллектуальным капиталом представлены и пятифакторные, дополнительно учитывающие роль социальных институтов и уровень развития инфраструктуры для оценки экономического роста, энергоэкономические модели стран мира [5] и другие. Для технической инфраструктуры используют плотность железных и автомобильных дорог и уровень обеспеченности электроэнергией занятого населения. Цифровизация экономики, мощные инновационные процессы приводят к необходимости совершенствования инструментального аппарата моделирования на макро- и мезоуровнях.

Российские специалисты в области экономико-математического моделирования накопили значительный опыт в построении многокритериальных оценок эффективности и ранжировании национальных экономик. Одним из результатов их работы стало выявление «ловушек» сравнительного анализа эффективности производства различных стран. Среди таких проблемных вопросов отмечается перенос циклической компоненты в оценку эффективности ацикличных факторов производства, завышение оценок эффективности стран-экспортеров природных ресурсов, что делает актуальным введение поправок выпуска на ресурсную ренту [4].

[1]Работа выполнена при поддержке грантов: РФФИ №19-41-710004_р_а.

Вопрос о необходимости учета структуры валового продукта при проведении анализа на региональном уровне, зависимости параметров модели от масштаба данных представляется в настоящее время дискуссионным и требует дальнейшего исследования. Так для трехфакторной модели производственного потенциала нашла подтверждение гипотеза о достаточности общей модели для всей совокупности регионов, зависящей от анализируемого периода, но индифферентной по отношению к величине ВРП [3].

При построении пятифакторных производственных функций коррекция на ресурсную ренту является значимой и актуализирует вопрос отраслевой структуры валового продукта. Качество параметров производственных функций, построенных для регионов РФ после предварительной группировки, является более высоким. Переход на уровень федеральных округов уже предполагает отраслевую близость ВРП и дает лучшие результаты при оценке характеристик корреляционной связи производительности труда и показателей, характеризующих влияние основного капитала, человеческого и интеллектуального капитала, инфраструктурных, институциональных, социальных, инновационных факторов, факторов, связанных с инфляцией и внешнеэкономической деятельностью [1].

Переход на региональный уровень анализа дает преимущество в вопросе сопоставимости данных, но ограничен страновыми рамками в вопросе структуры открытых статистических данных. Научно-технологическая компонента развития экономики отражается открытой системой показателей, значение которых меняется под воздействием социально-экономических факторов.

По данным НИУ ВШЭ [6] за последние десятилетия выросла доля образовательных организаций высшего образования среди организаций, выполнявших научные исследования и разработки, в 2000 г. она составляла 9,5%, к 2018 увеличилась до 23,2%. В отношении численности вовлеченного в исследования персонала образовательных организаций наблюдается аналогичная тенденция, его доля выросла с 3,5%, до 8,6%. РФ занимала в 2018 г. 4 место в мире по критерию «Персонал, занятый научными исследованиями и разработками». В секторе высшего образования в 2018 г. осуществлялось 9,7% внутренних затрат на НИОКР, 67% составили государственные средства, предпринимательский сектор — 29,5%.

В состав факторов, определяющих производительность труда в Тульской области, в рамках представляемых исследований были включены факторы, значение которых выявлено на первом этапе работы: фондовооруженность труда работника, доля неустаревших (неизношенных) основных фондов, инвестиции в основной капитал на одного работника, иностранные инвестиции, приходящиеся на одного работника, доля занятых работников со средним профессиональным образованием, доля занятых работников с высшим образованием, численность работников территориальных органов федеральных органов исполнительной власти на 1000 работников, среднемесячная начисленная заработная плата, показатель неравенства доходов населения, число студентов на 10 000 человек населения [2]. Для наполнения научно-технической составляющей использованы данные, характеризующие инновационную деятельность регионов [6], [7].

При обработке статистических данных направленной на поиск параметров производственных функций, например, методом наименьших квадратов часто возникают сложные математические проблемы, связанные с необходимостью решения нелинейных систем уравнений, которые даже не являются алгебраическими. С целью получения простых процедур оценки параметров можно использовать псевдо-случайный поиск, основанный на использовании различных теоретико-числовых сеток. Этому посвящены работы [8]–[10].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Басовский Л. Е., Басовская Е. Н. Исследование экономики регионов России: эконометрический подход // Научные исследования и разработки. Экономика. 2014. — №2. — С. 13–17.

2. Басовский Л.Е., Басовская Е.Н., Аверина Т.Н. Основные факторы производительности труда в регионах России // Научные исследования и разработки. Экономика. Научно-практический журнал. 2019. Т. 7. — №5. — С. 9–17.

3. Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю, Бахтизин А.Р, Нанавян А.М. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения // Экономика регионов, 2014. — №4. — С. 9–30.

4. Мамонов М.Е., Пестова А.А. Анализ технической эффективности национальных экономик: роль институтов, инфраструктуры и ресурсной ренты // Журнал Новой экономической ассоциации, 2015, — №3. — С. 44–78.

5. Информационно-аналитический, энергетический сайт — Режим доступа: http://www.eeseaec.org/energoekonomiceskie-modeli-stran-i-organizacij-mira

6. Наука. Технологии. Инновации: 2020: краткий статистический сборник / Л.М. Гохберг, К.А. Дитковский, Е.И. Евневич и др.; Нац. Исслед. Ун-т «Высшая школа экономики». — М.: НИУ ВШЭ, 2020. — 88с. — Режим доступа: https://issek.hse.ru/mirror/pubs/share/340117242.pdf

7. Рейтинг инновационного развития субъектов Российской Федерации / Нац. Исслед. Ун-т «Высшая школа экономики». — М.: НИУ ВШЭ, 2019. — Режим доступа: https://issek.hse.ru/rirr2019

8. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 4 (68). С. 118–176.

9. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., , Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Моногр. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — 223 с.

10. Л. П. Добровольская, С. И. Шелобаев. Теоретико-числовой метод в эконометрике // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 280–283.


---

УДК 517.583

# Новый метод вычисления полного эллиптического интеграла второго рода

**Е. С. Алексеева (Россия, г. Нижний Новгород)**
Нижегородское математическое общество
e-mail: kometarella@mail.ru

**А. Э. Рассадин (Россия, г. Нижний Новгород)**
Нижегородское математическое общество
e-mail: brat_ras@list.ru

# New method of calculation for the complete elliptic integral of the second kind

**E. S. Alekseeva (Russia, Nizhnii Novgorod)**
Nizhnii Novgorod Mathematical Society
e-mail: kometarella@mail.ru
**A. E. Rassadin (Russia, Nizhnii Novgorod)**
Nizhnii Novgorod Mathematical Society
e-mail: brat_ras@list.ru

Задача о вычислении значений полного эллиптического интеграла второго рода

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz \tag{1}$$

была [1] и остаётся [2] востребованной на практике.

Новый способ вычисления интеграла (1) даёт следующая теорема:

Теорема 1. *При $k \in [0,\,1)$ полный эллиптический интеграл второго рода равен:*

$$\boldsymbol{E}(k) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{n}\sqrt{1-k^2\cos^2\frac{2\,m\,\pi}{n}} - \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1-k^2\cos^2\frac{(2\,m-1)\,\pi}{n}}\right)\right]. \tag{2}$$

Доказательство.

Рассмотрим эллипс с большой полуосью, равной единице, и эксцентриситетом $k$ $(0 \le k < 1)$, заданный параметрическими уравнениями:

$$x = \cos\theta\,, \qquad y = \sqrt{1-k^2}\,\sin\theta\,, \qquad \theta \in [0,\,2\,\pi]\,. \tag{3}$$

Пусть точки $M_m = (\cos(2\,m\,\pi/n),\,\sqrt{1-k^2}\,\sin(2\,m\,\pi/n))$ $(m = \overline{0,\,n-1})$ — вершины многоугольника $M_0M_1\ldots M_{n-1}$, вписанного в эллипс (3), тогда вершинами многоугольника $N_0N_1\ldots N_{n-1}$, описанного около эллипса (3) и касающегося его в точках $M_0$, $M_1$, …, $M_{n-1}$, являются точки $N_m = (\cos((2\,m+1)\,\pi/n),\,\sqrt{1-k^2}\,\sin((2\,m+1)\,\pi/n))/\cos(\pi/n)$ $(m = \overline{0,\,n-1})$. И пусть $L(k)$ — длина эллипса (3).

Далее, в книге [3] (см. задачу 39 параграфа 4 главы 1) доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2\,(L(k) - p_n(k)) = \frac{\pi^2}{6}\,L(k) \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} n^2\,(q_n(k) - L(k)) = \frac{\pi^2}{3}\,L(k)\,, \tag{5}$$

где $p_n(k)$ и $q_n(k)$ — периметры многоугольников $M_0M_1\ldots M_{n-1}$ и $N_0N_1\ldots N_{n-1}$ соответственно.

Сложив пределы (4) и (5) и воспользовавшись известным соотношением $L(k) = 4\,\mathbf{E}(k)$, придём к утверждению теоремы.

□

В докладе скорость сходимости правой части формулы (2) к функции (1) сравнивается как со скоростью сходимости алгоритма вычисления значений полного эллиптического интеграла второго рода на основе арифметико-геометрического среднего (см. формулу (1.4.6) в монографии [4]), так и со скоростью убывания остаточного члена квадратурной формулы для полного эллиптического интеграла второго рода, выведенной в статье [5].

Также в докладе обсуждаются две гипотезы:

Гипотеза 1. *Фазовые траектории гамильтоновой системы с функцией Гамильтона:*

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x) \tag{6}$$

*при выборе в качестве потенциала $U(x)$ потенциалов Пёшля-Теллера, Морзе и Калоджеро задаются элементарными функциями. Длины же фазовых траекторий у таких систем выражается гиперэллиптическими интегралами [6, 7, 8]. Метод, аналогичный методу, предложенному в этой работе для полного эллиптического интеграла второго рода, будет давать эффективные приближения для интегралов этого вида.*

Гипотеза 2. *Метод, развитый в данной работе, можно распространить на аппроксимацию длин фазовых траекторий гамильтоновых систем вида (6), фазовые траектории которых задаются эллиптическими функциями Якоби.*

Точность таких аппроксимаций нужно будет сравнивать не только с оценками, которые можно будет получить с помощью работы [5], но и с оценками, данными в статье [9].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пархомовский Я. М. Приближённые формулы для эллиптических интегралов и примеры применения их к двум задачам нелинейной статики упругих балок // Учёные записки ЦАГИ. 1978. Т. 9. N. 4. С. 75-86.

2. Анахаев К. Н. Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады РАН. 2020. Т. 491. N. 1. С. 24-29.

3. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 310 с.

4. Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. — John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

5. Фок В. А. Об остаточном члене некоторых формул квадратур // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1932. Вып. 4. С. 419-448

6. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Оценки длины фазовой траектории классической частицы в потенциале Пёшля-Теллера // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения».: тезисы докладов международной научной конференции (Уфа, 10-14 марта 2020 г.) — Уфа, 2020. С. 10-11.

7. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Длина фазовой траектории и коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых для классической частицы в потенциале Морза // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. — Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019. - 328 с. С. 90-92.

8. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Длина фазовой траектории и коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых для классической частицы в потенциале Калоджеро // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Международной научно-технической конференция молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 3-6 июня 2019 г.) / под ред. д. ф.-м. н., проф. И. В. Бойкова. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. - 304 с. С. 3-9.

9. Боголюбский А. И., Скороходов С. Л., Христофоров Д. В. Быстрое вычисление эллиптических интегралов и их обобщений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. N. 11. С. 1938-1953.

---

УДК 517.5

## Константы Маркова — Бернштейна — Никольского для полиномов в $L^p$ с весом Гегенбауэра[1]

**Д. В. Горбачев (Россия, г. Екатеринбург; г. Тула)**
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
**И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

## Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in $L^p$ with the Gegenbauer weight

**D. V. Gorbachev (Russia, Yekaterinburg; Tula)**
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
**I. A. Martyanov (Russia, Tula)**
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$, $s \geqslant 0$,

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;s) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|D_\alpha^s T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \mathcal{M}_{p,\alpha}(n;s) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}$$

точные константы Бернштейна–Никольского и Маркова–Никольского для тригонометрических и алгебраических полиномов соответственно. Здесь нормы $\|T\|_{p,\alpha}$ и $\|P\|_{p,\alpha}$ берутся в весовых пространствах $L^p((-\pi,\pi]); |\sin x|^{2\alpha+1})$ и $L^p([-1,1]; (1-t^2)^\alpha)$ соответственно, $D_\alpha$ и $\mathcal{D}_\alpha$ — дифференциальные операторы Гегенбауэра–Данкля, такие что

$$D_\alpha^2 T(x) = T''(x) + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} x}\, T'(x), \quad \mathcal{D}_\alpha^2 P(t) = (1-t^2)P''(t) - (2\alpha+2)tP'(t).$$

[1]Работа первого автора выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$, $n, r \in \mathbb{Z}_+$.

(i) *Существует экстремальный действительный четный тригонометрический полином* $T_{*r}$ *порядка* $n$, *такой что*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}}.$$

(ii) *Имеем*

$$2^{1/p}\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n;2r) = \frac{(-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}},$$

*где экстремальный алгебраический полином* $P_{*r}$ *степени* $n$ *связан с* $T_{*r}$ *тригонометрической подстановкой* $P_{*r}(\cos x) = T_{*r}(x)$.

(iii) *При* $p \in [1,\infty)$ *справедливы следующие соотношения, характеризующие экстремальные полиномы* $T_{*r}$, $P_{*r}$:

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)|T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x)\, |\sin x|^{2\alpha+1}\, dx = (-D_\alpha^2)^r T(0), \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_n,$$

$$\frac{(-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{-1}^{1} P(x)|P_{*r}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} P_{*r}(t)\, (1-t^2)^\alpha\, dt = (-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P(1), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}_n.$$

*В частности, экстремальные полиномы меняют знак на отрезке интегрирования.*

(iv) *При* $p \in (1,\infty)$ *экстремальные полиномы в обоих задачах единственные с точностью до множителей. Если* $p = 1$ *и* $\alpha > -1/2$, *то любой экстремальный тригонометрический полином* $T$ *обязательно действительный, четный и* $\|D_\alpha^{2r} T\|_\infty = |D_\alpha^{2r} T(0)|$.

В случае констант Никольского при $r = 0$ теорема доказана в [6, 4]. Доказательство теоремы использует гармонический анализ Гегенбауэра–Данкля из работы [5].

Из теоремы и известных результатов для сферических полиномов [2, 3, 1, 7] вытекает несколько интересных следствий, в частности, точное значение константы

$$\mathcal{C}_{\infty,\alpha}(n;2r) = ((-D_\alpha^2)^r \cos(n\,\cdot))(0),$$

соотношение двойственности для $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)$, а также в случае полуцелого $\alpha$ асимптотика

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;0) = \mathcal{L}_{p,\alpha} n^{(2\alpha+2)/p}(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

где $\mathcal{L}_{p,\alpha}$ — константа Никольского для целых функций экспоненциального типа 1 в пространстве $L^p(\mathbb{R}; |x|^{2\alpha+1})$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

2. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3(231). С. 179–180.

3. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР: сб. тр.: Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 14. Т. 194. М.: Наука, 1992. С. 111–119.

4. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.

5. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах $L_p$, $1 \le p < 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.

6. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and $L_q$-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

7. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

---

УДК 517.5

## Оценка алгебраической константы Никольского в $L^1$[1]

**Д. В. Горбачев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
**И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

## Estimation of the algebraic Nikolskii constant in $L^1$

**D. V. Gorbachev (Russia, Tula)**
Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
**I. A. Martyanov (Russia, Tula)**
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами,

$$M_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in [-1,1]} |P(x)|}{\int_{-1}^{1} |P(x)|\, dx}$$

— точная алгебраическая константа Никольского между $L^\infty$- и $L^1$-нормами.

Нам были известны следующие оценки $M_n$:

$$0.5(n+1)^2 \geqslant M_n \geqslant 0.125 \begin{cases} (n+2)^2, & n \text{ четное}, \\ (n+1)(n+3), & n \text{ нечетное} \end{cases}$$

(см. [3], [5, 5.3.1]),

$$M_n = Mn^2 + o(n^2), \quad n \to \infty, \quad 0.141 < M < 0.192,$$

где константа $M$ является точной константой Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ и функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$ (см. [4, 1, 2]).

Мы уточняем эти границы.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Теорема. *Для произвольного целого* $n \geqslant 0$ *имеем*

$$M(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant M(n+2)^2,$$

*где*

$$0.1410 < M < 0.1411.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

3. Amir D., Ziegler Z. Polynomials of extremal $L_p$-norm on the $L_\infty$-unit sphere // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18. P. 86–98.

4. Ganzburg M.I. Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 215. P. 92–105.

5. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.


---

УДК 511.3

# Актуальные задачи теоретико-числового метода в приближенном анализе[1]

**Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
**Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

# Actual problems of the number-theoretic method in approximate analysis

**N. M. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru
**N. N. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)**
Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Особенностью теоретико-числового метода в приближенном анализе состоит в том, что фактически один раз выполняется сведение вычислительной задачи к задаче теории чисел, а потом исследуются те или иные фундаментальные проблемы теории чисел. Поэтому часто возникает иллюзия, что специалисты по теоретико-числовому методу в приближенном анализе занимаются задачами теории чисел, а не задачами теоретико-числового метода. Но если осознать, что дальнейшее развитие теоретико-числового метода напрямую связано с решением некоторых фундаментальных проблем теории чисел, то становиться понятным, что выбор тематики исследований продиктован логикой развития данной предметной области.

Нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций из класса Коробова выражается либо через гиперболическую дзета-функцию сетки с весами, либо через гиперболическую дзета-функцию решетки, поэтому основные проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа непосредственно связаны с изучением гиперболической дзета-функции решеток и гиперболической дзета-функции сеток с весами. Это необходимо для построения эффективных алгоритмов вычисления оптимальных многомерных квадратурных и интерполяционных формул на основе теоретико-числовых свойств используемых сеток. Оба типа дзета-функций в правой полуплоскости задаются рядами Дирихле, а дзета-функции, соответствующие мультипликативно-замкнутым системам целых чисел, выражаются через L-функции Дирихле.

Пространство решёток является полным метрическим пространством, так как с алгебраической точки зрения оно изоморфно факторгруппе полной линейной группы матриц по подгруппе унимодулярных матриц, то на нём можно задать структуру гладкого многообразия. Возникает задача явного описания гладкого многообразия решёток и изучение дифференциальных свойств основных функций на нём.

В теоретико-числовом методе приближенного анализа важной проблемой является приближение алгебраических сеток, построенных с помощью чисто вещественных алгебраических полей, рациональными сетками, соответствующим целым решёткам. Поэтому изучение вопросов диофантовых приближений алгебраических решёток чисто вещественных алгебраических полей целыми решётками имеет большое значение для развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Основными объектами исследования являются: пространство решеток; гиперболическая дзета-функция решеток; гиперболическая дзета-функция сеток с весами; гладкое многообразие решёток.

Основные задачи проектов, разрабатываемых в Тульской школе теории чисел, состоят в изучении гиперболической дзета-функции произвольных решеток и алгоритмов её вычисления; оценки гиперболической дзета-функции сеток с весами; изучении матричных разложений алгебраических иррациональностей чисто вещественных алгебраических полей; приложение полученных результатов к многомерным квадратурным формулам.

Задачами этих проектов являются:

1. Изучение гиперболической дзета-функции решёток на пространстве решёток.

2. Изучение гладкого многообразия решёток и дифференциальных свойств основных функций на нём.

3. Изучение приближения алгебраических решёток целочисленными решётками.

4. Изучение вопросов численного интегрирования на новых классах, порожденных моноидами натуральных чисел.

Гиперболическая дзета-функция решёток в правой полуплоскости абсолютной сходимости ряда Дирихле является непрерывной функцией на пространстве решёток и предел гиперболических дзета-функций по сходящейся последовательности решёток является гиперболической дзета-функцией предельной решётки. Следующий принципиальный вопрос связан с возможностью предельного перехода в левой полуплоскости. Как показали наши исследования суще-

ствуют моноиды натуральных чисел, для которых дзета-функция не продолжается в левую полуплоскость и предельный переход в правой полуплоскости абсолютной сходимости нарушается для левой полуплоскости. Выяснение возможности такой ситуации на пространстве решёток, несомненно, актуальная задача.

Важность второй фундаментальной задачи обусловлена тем, что, квадратурные формулы с алгебраическими сетками асимптотически дают наилучший возможный порядок убывания погрешности приближенного интегрирования, но они очень сложны с точки зрения генерации точек сетки и расчёта узлов. Возникает вопрос о наилучших приближениях алгебраических решёток целочисленными, которые будут давать квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками, относящиеся к классу простейших однопараметрических квадратурных формул. Поэтому для практического применения теоретико-числовых методов приближенного интегрирования функций многих переменных особую роль играет теория целочисленных приближений алгебраических решёток, которую необходимо построить.

Перечислим несколько актуальных тем исследований, продвижение в которых вызывает значительные сложности.

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при $\alpha \to \infty$;
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma \leqslant 1)$ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$;
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений;
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$;
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки $\Lambda$;
7. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе;
8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

Из перечисленных задач существенное продвижение есть в последнее время в работах Е. М. Раровой по изучению тригонометрических сумм с весами для алгебраических сеток.

Отметим, что именно логика научных исследований привела к необходимости построения современной аналитической теории моноидов натуральных чисел.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, 211, 2014, 23–62.
2. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii, "On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities", Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016, no. 2, 27–39.
3. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова, "О гиперболической дзета-функции Гурвица", Чебышевский сб., 17:3 (2016), 72–105.

4. Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева. О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ–М. Н. Добровольского–В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 18:2 (2017), 54–97.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 18:2 (2017), 98–128.

6. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб., 18:4 (2017), 6–85.

7. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Гипотеза о "заградительном ряде"для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб., 19:1 (2018), 106–123.

8. Алгебраические решетки в метрическом пространстве решеток / Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский // Чебышевский сборник,2017. - Т. 18, № 4. - С. 325-337. - 13 с.

9. Смирнова, Е. Н. Алгебраические решетки в метрическом пространстве решеток / Смирнова Е. Н., Пихтилькова О. А. // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XV Междунар. конф. посвящ. 100-лет. со дня рождения проф. Николая Михайловича Коробова, 28-31 мая 2018 г., Тула / М-во образования и науки Рос. Федерации [и др.]. - Электрон. дан. - Тула : Тульск. гос. пед. ун-т,2018. - . - С. 325-328. . - 4 с.

10. Смирнова, Е. Н. Структура гладкого многообразия на пространстве решеток и пространстве сдвинутых решеток / Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVI Междунар. конф. посвящ. 80-лет. со дня рождения проф. М. Деза, 13-18 мая 2019 г., Тула / М-во науки и высш. образования Рос. Федерации [и др]. - Электрон. дан. - Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого,2019. - . - С. 303-306. . - 4 с.

11. Пихтилькова, О. А. Гладкое многообразие решеток и сдвинутых решеток / Пихтилькова О. А., Добровольский Н. М., Смирнова Е. Н. // Университетская наука: решения и инновации : материалы Всерос. науч.-практ. конф., 23-25 окт. 2018 г., Оренбург / М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбургский гос. ун-т". - Электрон. дан. - Оренбург : ОГУ,2018. - . - С. 131-136. . - 6 с.

12. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

13. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

14. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5

15. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

---

УДК 517.5

# Задача Чебышева об экстремальных значениях моментов неотрицательных многочленов

**В. И. Иванов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

# Chebyshev's problem on extreme values of moments of nonnegative polynomials

**V. I. Ivanov (Russia, Tula)**
Tula State University
e-mail: ivaleryi@mail.ru

## 1. Введение

Пусть $w(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — нетривиальная неотрицательная интегрируемая весовая функция, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $\Pi_n$ — пространство алгебраических многочленов степени не выше $n$ с действительными коэффициентами, $\mu_k(p) = \int_a^b x^k p(x) w(x)\,dx$ — $k$-й момент многочлена $p \in \Pi_n$ на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу Чебышева о наибольшем и наименьшем моментах неотрицательных многочленов.

Вычислить величины

$$\overline{M}_k(n) = \max\Big\{\mu_k(p)\colon\ p(x) \geq 0,\ x \in [a,b],\ \mu_0(p) = 1\Big\} \tag{1}$$

и

$$\underline{M}_k(n) = \min\Big\{\mu_k(p)\colon\ p(x) \geq 0,\ x \in [a,b],\ \mu_0(p) = 1\Big\}. \tag{2}$$

Эти экстремальные задачи и даже для более общих чем $x^k$ функций были поставлены П.Л. Чебышевым в 1883 году (см. [1, глава, 7]). В случае единичного веса $w(x) = 1$ и $k = 1$ задачи (1), (2) были решены самим П.Л. Чебышевым, а в случае произвольного веса и $k = 1$ — Г. Сеге [1, глава, 7]. Других случаев решения задач (1), (2) нам не известно.

Обычно эти задачи исследуются на отрезке $[-1,1]$. Нам удобнее использовать отрезок $[0,1]$. Задачи Чебышева (1), (2) нами решены на отрезке $[0,1]$ для произвольного $k$.

При решении задач (1), (2) для первого момента П.Л. Чебышев и Г. Сеге использовали представление неотрицательных многочленов и квадратурную формулу Гаусса. Мы полагаем, что в этих задачах предпочтительнее применять только квадратурные формулы Гаусса и Маркова. Применение квадратурных формул для решения экстремальных задач для многочленов, в том числе и задач (1), (2) при $k = 1$, можно найти в [2, лекция 3]. Этот метод мы будем использовать и в этой работе.

## 2. Построение квадратурных формул.

Для построения новых квадратурных формул определим системы ортонормированных многочленов, зависящие от параметра $\lambda \in [0,1]$. Пусть $\{P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортонормированных многочленов на отрезке $[0,1]$ с весом

$$(1-x)^\alpha x^\beta w(x,\lambda) = (1-x)^\alpha x^\beta w(x)\frac{x^k-\lambda^k}{x-\lambda}$$

$$= (1-x)^\alpha x^\beta w(x)\sum_{s=0}^{m-1}\lambda^{m-1-s}x^s \geqslant 0,$$

$\{t_{1,n}^{\alpha,\beta}(\lambda),\dots,t_{n,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)\}$ — нули многочлена $P_n^{\alpha,\beta}(x,\lambda)$, занумерованные в порядке убывания. Верхние индексы при $\alpha=\beta=0$ будем опускать.

Теорема 1. *Пусть $n=2m-2$. Существуют $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$, определяемые соотношениями*

$$t_{1,m}(\lambda_1)=\lambda_1,\quad t_{m,m}(\lambda_2)=\lambda_2, \tag{3}$$

*и наборы положительных чисел $\{\delta_k^1\}_{k=2}^m$, $\{\delta_k^2\}_{k=1}^{m-1}$ такие, что для любого многочлена $p\in\Pi_n$*

$$\int_0^1 x^k p(x)w(x)\,dx = (t_{1,m}(\lambda_1))^k\int_0^1 p(x)w(x)\,dx - \sum_{k=2}^m \delta_k^1 p(t_{k,m}(\lambda_1))$$

*и*

$$\int_0^1 x^k p(x)w(x)\,dx = (t_{m,m}(\lambda_2))^k\int_0^1 p(x)w(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m-1} \delta_k^2 p(t_{k,m}(\lambda_2)).$$

Теорема 2. *Пусть $n=2m-1$. Существуют $\lambda_3,\lambda_4\in(0,1)$, определяемые соотношениями*

$$t_{1,m}^{0,1}(\lambda_3)=\lambda_3,\quad t_{m,m}^{1,0}(\lambda_4)=\lambda_4, \tag{4}$$

*и наборы положительных чисел $\{\delta_3^3\}\cup\{\delta_k^3\}_{k=2}^m$, $\{\delta_k^4\}_{k=0}^{m-1}$ такие, что для любого многочлена $p\in\Pi_n$*

$$\int_0^1 x^k p(x)w(x)\,dx = (t_{1,m}^{0,1}(\lambda_3))^k\int_0^1 p(x)w(x)\,dx - \delta_0^3 p(0) - \sum_{k=2}^m \delta_k^3 p(t_{k,m}^{0,1}(\lambda_3))$$

*и*

$$\int_0^1 x^k p(x)w(x)\,dx = (t_{m,m}^{1,0}(\lambda_4))^k\int_0^1 p(x)w(x)\,dx + \delta_0^4 p(1) + \sum_{k=1}^{m-1} \delta_k^4 p(t_{k,m}^{1,0}(\lambda_4)).$$

При доказательстве теорем 1,2 используется непрерывная зависимость нулей $t_{1,n}^{\alpha,\beta}(\lambda)$ от $\lambda$ (см. [3]), теорема Брауэра о неподвижной точке (см. [4]) и квадратурные формулы Гаусса и Маркова для многочленов с весом $w(x,\lambda)$ (см. [2]).

## 3. Решение экстремальных задач Чебышева

Приведем решение экстремальных задач Чебышева (1), (2) для отрезка $[0,1]$ и произвольного $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 3. *Если $n=2m-2$ и $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ определены в (3), то*

$$\overline{M}_k(n)=\lambda_1^k=(t_{1,m}(\lambda_1))^k,\quad \underline{M}_k(n)=\lambda_2^k=(t_{m,m}(\lambda_2))^k.$$

*Единственные экстремальные многочлены имеют вид*

$$\overline{p}_{2m-2}(x) = c_1 \frac{(P_m(x,\lambda_1))^2}{(x - t_{1,m}(\lambda_1))^2}, \quad \underline{p}_{2m-2}(x) = c_2 \frac{(P_m(x,\lambda_2))^2}{(x - t_{m,m}(\lambda_2))^2},$$

*где*

$$c_1^{-1} = \int_0^1 \frac{(P_m(x,\lambda_1))^2}{(x - t_{1,m}(\lambda_1))^2} w(x)\,dx, \quad c_2^{-1} = \int_0^1 \frac{(P_m(x,\lambda_2))^2}{(x - t_{m,m}(\lambda_2))^2} w(x)\,dx.$$

Теорема 4. Если $n = 2m-1$ и $\lambda_3, \lambda_4 \in (0,1)$ определены в (4), то

$$\overline{M}_k(n) = \lambda_3^k = (t_{1,m}^{0,1}(\lambda_3))^k, \quad \underline{M}_k(n) = \lambda_4^k = (t_{m,m}^{1,0}(\lambda_4))^k.$$

Единственные экстремальные многочлены имеют вид

$$\overline{p}_{2m-1}(x) = c_3 \frac{x(P_m^{0,1}(x,\lambda_3))^2}{(x - t_{1,m}^{0,1}(\lambda_3))^2}, \quad \underline{p}_{2m-1}(x) = c_4 \frac{(1-x)(P_m^{1,0}(x,\lambda_4))^2}{(x - t_{m,m}^{1,0}(\lambda_4))^2},$$

где

$$c_3^{-1} = \int_0^1 \frac{x(P_m^{0,1}(x,\lambda_3))^2}{(x - t_{1,m}^{0,1}(\lambda_3))^2} w(x)\,dx, \quad c_4^{-1} = \int_0^1 \frac{(1-x)(P_m^{1,0}(x,\lambda_4))^2}{(x - t_{m,m}^{1,0}(\lambda_4))^2} w(x)\,dx.$$

В заключение приведем некоторые замечания.

Замечание 1. Учитывая, что константы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ определяют экстремальные значения, их выбор единственен.

Замечание 2. Анализ доказательств теорем 1, 2 показывает, что предложенный подход сохранится, если отрезок $[0,1]$ заменить на произвольный отрезок $[a,b]$, а функцию $x^k$ на произвольную функцию $\varphi(x)$, для которой функция $\psi(x,\lambda) = \frac{\varphi(x)-\varphi(\lambda)}{x-\lambda}$ при $x \neq \lambda$ и, дополненная предельными значениями при $x = \lambda$, непрерывна и сохраняет знак на $[a,b]^2$, например, если функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[a,b]$. В частности, аналогичным образом можно вычислить экстремальные значения моментов нечетного порядка на любом отрезке и моментов четного порядка на любом отрезке, левый конец которого неотрицателен или правый конец неположителен. Экстремальные значения моментов четного порядка могут быть также вычислены на отрезке $[-1,1]$, если вес $w(x)$ является четным. Нетрудно видеть, что в этом случае экстремальные многочлены будут четными и задачи (1), (2) сведутся к задачам об экстремальных значениях моментов на отрезке $[0,1]$. Во всех остальных случаях вопрос об экстремальных значениях четных моментов остается открытым.

Замечание 3. Отметим, что $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в теореме 1 — это наибольший и наименьший корни уравнения $P_m(\lambda,\lambda) = 0$ на отрезке $[0,1]$. Аналогично, $\lambda_3$ в теореме 2 — наибольший корень уравнения $P_m^{0,1}(\lambda,\lambda) = 0$, а $\lambda_4$ — наименьший корень уравнения $P_m^{1,0}(\lambda,\lambda) = 0$ на отрезке $[0,1]$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
2. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 132 с.
3. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 219 с.
4. Шашкин Ю.А. Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. 80 с.


---

УДК 511.9

# О слабой теореме универсальности[1]

**А. В. Кирилина (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: nastia9420@yandex.ru

# On the weak universality theorem

**A. V. Kirilina (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: nastia9420@yandex.ru

45 лет тому назад в 1975 году вышла работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [1]. С помощью этой теоремы в [2] была доказана слабая форма теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Дадим новую интерпретацию метода работы [2], которая объясняет возникновение эффекта слабой универсальности.

Для дальнейшего нам потребуются моноиды $M$ с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [3]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов $M$ с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

В работе [2] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного $T$ справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1 \right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}} \right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Пусть $p_0$ — простое число и моноид $M_-(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на $p_0$. Дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \prod_{p\neq p_0} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r} \left| f(\alpha) - \zeta\left(M_-(p_0) \middle| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right) \right| < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710 004_р_а.

Теорему 1 можно существенно усилить. Пусть $Q$ — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид $M_{-Q}$ как множество натуральных чисел, не делящихся на простые $p$ из $P(M)$ и больших $Q$. Если определить моноид $M_{+Q}$ как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше $Q$, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

Лемма 2. *Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного $T$ справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| \frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1 \right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| \frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha + \frac{3}{4} + iT\right.\right)} \right| < 1 + \varepsilon_1.$$

Теорема 2. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r} \left| f(\alpha) - \zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right) \right| < \varepsilon\,(1 + \varepsilon_1) + 3A\varepsilon_1.$$

Дадим следующее определение делителя слабой изоляции.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $d(\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1, B > 0$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$d(\alpha)$ аналитична в полосе $\alpha = \sigma + it$, $\frac{3}{4} - r \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{4} + r$;*
2. *$d(\alpha)$ не имеет нулей в этой полосе;*
3. *для любого $T$ в данной полосе выполняются неравенства*

$$\left| \frac{d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - 1 \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{1}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} \right| < B$$

.

Теорема 3. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r} \left| f(\alpha) - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} \right| < \varepsilon \cdot B + A\varepsilon_1.$$

Из леммы 1 следует, что для заданного $Q > 4$ функция $d(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_0^{\alpha}}\right)^{-1}$ при $p_0 > Q$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1 = \frac{4}{\sqrt{Q}}$, $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}$ и дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{d(\alpha)}$ в силу теоремы 3 удовлетворяет теореме 1.

Из леммы 2 следует, что для $Q = Q(\varepsilon_1)$ дзета-функция $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $3\varepsilon_1$, $B = 3$ и дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$ в силу теоремы 3 удовлетворяет теореме 2.

Заметим, что любой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ свойством универсальности или слабой универсальности не обладает, так как он в силу определения ограничен сверху некоторой

константой $C$: $|d(\alpha)| \leqslant C$, а, значит, не может приближать с любой точностью функции, которые по модулю имеют значения больше $C$.

Из метода доказательства теоремы 3 легко видеть, что универсальность сохраняется только для тривиальных делителей слабой изоляции, которые сами являются константами. Кроме этого, так как никакой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ кроме константы не может удовлетворять третьему условию из определения для любого $\varepsilon_1 > 0$, то становится понятна формулировка теорем из работы [2].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Том 39, № 3. С. 475–486.

2. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, вып. 1, С. 180—196.

3. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, вып. 2. С. 142–150.

---

УДК 518.865

# Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея-Касса-Купманса стремящийся к бесконечности степенной функции полезности

**А. И. Козко (Россия, г. Москва)**
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
**Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: lluzhina@gmail.com
**А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
**В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС, МПГУ
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

# Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey-Kass-Koopmans problem tending to infinity of the power utility function

**A. I. Kozko (Russia, Moscow)**
Moscow center of fundamental and applied mathematics, Moscow State University, Ranepa
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
**L. M. Luzhina (Russia, Moscow)**
Moscow State University, Ranepa

e-mail: lluzhina@gmail.com
**A. Yu. Popov (Russia, Moscow)**
Moscow State University, Ranepa
**V. G. Chirskii (Russia, Moscow)**
Moscow State University, Ranepa, MPGU
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

В статье исследуется полная полезность экономической деятельности в задаче Рамсея-Касса-Купманса. Задача Рамсея-Касса-Купманса (см. [1]–[3]) заключается в максимизации интеграла

$$P = \int_0^{+\infty} U\left(f\left(K(t)\right) - \dot{K}(t)\right)e^{-\rho t}dt. \tag{1}$$

Точная верхняя грань интегралов (1) берется по всем не возрастающим на луче $[0;+\infty)$ функциям $K \in C^1[0;+\infty)$, удовлетворяющим условиям (число $K_0 > 0$ задано)

$$K(0) = K_0, \quad \lim_{t\to+\infty} K(t) = 0.$$

Такая задача ставится при иследовании эффективности различного рода экономических моделей, где в качестве $U$ (функции полезности) обычно рассматривают

$$U(C) = U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad C > 0, \quad \theta > 0. \tag{2}$$

В "особом"случае $\theta = 1$ функция полезности является логарифмической:

$$U_1(C) = \lim_{\theta\to 1} U_\theta(C) = \lim_{x\to 0} \frac{C^x - 1}{x} = \ln C. \tag{3}$$

Все функции (2) возрастают на луче $0 < C < +\infty$, но стремятся к $+\infty$ при $C \to +\infty$ только при $0 < \theta \leqslant 1$. В исследованиях по этой тематике рассматривались всевозможные значения параметра $\theta$: значения $\theta \in (0;1)$, $\theta = 1$ и $\theta > 1$ брались в [1]-[3] в [4] фигурировала функция (3).

Здесь мы уделим внимание значениям $0 < \theta \leqslant 1$, особому случаю $\theta = 1$ была посвящена наша статья [5].

В случае производственной функции Кобба-Дугласа и экономического ресурса $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ доказывается, что показатель экспоненты $\lambda$, доставляющий максимум полной полезности (1), находится в определенном интервале.

Основным результатом статьи являются следующая теорема. В ней мы рассматриваем параметр $\alpha$, определяющий производственную функцию Кобба – Дугласа $f(K) = aK^\alpha$, $a > 0$, удовлетворящим ограничению $2/3 \leqslant \alpha < 1$.

Теорема 1. *Пусть $\theta \in (0;1)$. Тогда при условии $\varepsilon \leqslant \alpha$ показатель $\lambda$ экспоненты в функции экономического ресурса $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$, доставляющий максимум на полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$ интеграла*

$$P_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} U_\theta(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t})e^{-\rho t}\,dt,$$

*лежит в интервале*

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\frac{\rho}{\theta} < \lambda < \frac{\rho}{\theta}.$$

Отметим, что авторами был разобран аналог поставленной модели в случае конечного отрезка [6]–[8] (интегрирование в (1) ведётся по конечному отрезку).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

2. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

3. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: `http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf`, 2010.

4. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. (готовится к выходу в печать)

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

8. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 4. С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196


---

УДК 621.74.01

# О математическом моделировании литейных процессов при получении отливок из сплавов черных и цветных металлов

**И. С. Кончакова (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: inga.nepomnyashaya@yandex.ru
**А. Н. Кубанова (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: chupeychik@mail.ru
**А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

# On the mathematical modeling of foundry processes in the production of castings from alloys of ferrous and non-ferrous metal

**I. S. Konchakova (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: inga.nepomnyashaya@yandex.ru
**A. N. Kubanova (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: chupeychik@mail.ru
**A. E. Gvozdev (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Процесс литья заключается в заливке расплавленного металла в литейную форму, внутренняя полость которой соответствует конфигурации и размерам будущей детали [1].

Не все сплавы в одинаковой степени пригодны для изготовления фасонных отливок. Из одних сплавов (оловянной бронзы, силумина, серого чугуна и др.) без особого труда можно получить отливки сложной конфигурации и соответствующих свойств, из других (титановых легированных сталей, специальных бронз и латуней) получение отливок сопряжено с большими технологическими трудностями.

Возможность получения доброкачественных тонкостенных отливок, сложных по форме или больших по размерам, без раковин, трещин, пригара и других литейных дефектов предопределяется литейными свойствами сплавов.

При разработке конструкции литой детали учитываются: литейные свойства сплавов, технология изготовления отливок и способы их дальнейшей обработки. Поэтому для управления и корректировки литейных свойств рекомендуется пользоваться методами математического моделирования.

Математическое моделирование позволяет:

— совершенствовать экономически эффективные инновационные производственные технологии;

— экономить сырьевые, энергетические и трудовые ресурсы;

— повышать качество изготавливаемых деталей и минимизировать производственный брак.

В математическом моделировании двухфазной области, включающей жидкую и кристаллическую фазы, выделяются два основных направления: твердожидкая область принимается либо двухфазной средой, состоящей из твердой фазы и жидкого расплава, либо сплошной средой со сложными переменными свойствами.

Особую роль в математическом моделировании процессов первичной и вторичной кристаллизации при затвердевании отливки следует уделить модели образования усадочной пористости, как основного возможного дефекта готового изделия. Образование усадочной пористости происходит в процессе формирования твердой фазы, поэтому модель пористости связана с выбранной моделью двухфазной зоны [2].

Моделирование формирования макроструктуры является очень важной задачей отливки в процессе затвердевания, где также различают несколько основных подходов к созданию математической модели.

Детерминированный подход к моделированию микроструктуры связан с объединением уравнений сохранения и их привязке к моделям кристаллизации [3]. Однако, для данного подхода характерна проблема с визуализацией результатов, поэтому был разработан вероятностный подход. В рамках вероятностного подхода выделяют два основных метода: метод

Монте-Карло (МК), в основу которого лег принцип минимизации свободной энергии поверхности раздела группы зерен [4] и метод клеточных автоматов (КА), основанный разбиении области отливки на клетки (ячейки) [5].

Важной задачей является определение напряженно-деформированного состояния в литниковой системе (технологической усадки, коробления и остаточных напряжений), а также его эволюции в процессе охлаждения отливки до комнатной температуры [6], при достаточном содержании твердой фазы. Наиболее актуальным для моделирования напряженно-деформированного состояния в форме, отливке и стержне является выбор вязкоупругопластической постановки. Основными математическими моделями, для описания вязкоупругопластического поведения затвердевающих отливок являются модели Пэжина и модель деформационного упрочнения, которые отличаются способами определения скорости вязкопластической деформации.

Методы математического моделирования нашли широкое применение в литейной промышленности благодаря функциональности, надежности, полноте и наглядности полученных результатов.

Одними из лучших систем автоматизированного моделирования литейных процессов (САМ ЛП) в данной области по соотношению цена, возможности, производительность, являются: немецкая программа Magma, американская Procast, российские ПОЛИГОН и LVMFlow [7].

1. Универсальный продукт ProCast базируется на методе конечных элементов (МКЭ) [8], а также сложном наборе физически универсальных моделей. Из недостатков можно выделить сложный интерфейс и сочетание огромной базы моделей, чувствительных к выбору базовых коэффициентов.

2. В основу продукта MagmaSoft входит метод конечных разностей (МКР) [9]. MagmaSoft сочетает в себе возможность решения тепловой, гидродинамической деформационной задачи. Основными недостатками являются использование упрощенных моделей и алгоритмов и отсутствие возможности определения пользователем параметров решения.

3. Программный продукт ПОЛИГОН имеет в своей основе МКЭ. В данной системе могут решаться задачи гидродинамики, теплофизики, физики электромагнитного поля и механики. Из недостатков можно выделить отсутствие полномасштабной задачи определения напряженно-деформированного состояния.

4. Продукт LVMFlow для моделирования литейных технологий включает в себя тепловую, гидродинамическую, механическую, сегрегационную задачи. Основным недостатком пакета является отсутствие возможности моделирования макроструктуры отливки.

Разнообразие литейных дефектов, условий формирования структуры и свойств отливок из разных сплавов осложняет разработку универсальных моделей для всестороннего и прецизионного прогноза качества отливки (что, однако, ни в коей мере не отменяет актуальность их развития). По этой причине возникает необходимость в применении сразу нескольких программ для решения заданного комплекса задач.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титов Н.Д., Степанов Ю.А. Технология литейного производства. М., "Машиностроение 1974г.— 442с.

2. Тихомиров М.Д. Основы моделирования литейных процессов. Усадочная задача // — М.: Приложение к журналу «Литейное производство», № 12, 2001. — С. 8-14.

3. Rappaz M., Thevoz.P.H. Solute Diffusion Model for Equiaxed Dendritic Growth: Analytical Solution // Acta Metall, Vol. 35, 1987. — pp.2929-2933.

4. Chun Y.B., Semiatin S.L., Hwang S.K. Monte Carlo modeling of microstructure evolution during the static recrystallization of cold -rolled,commércial-purity titanium // Acta Mater, Vol. 54, 2006. — pp. 3673-3689.

5. Sumitesh D. Modeling mixed microstructures using a multi- level cellular automata finite element framework // Comput Mater Sci, Vol. 47, 2010. — pp. 705-711.

6. Цаплин А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — 238 с.

7. Геращенко В. В., Кампова И. Ю. Компьютерное моделирование процессов литья. Фундаментальные и прикладные научные исследования.Сборник статей XXII Международной научно- практической конференции. Издательство: "Наука и Просвещение"(ИП Гуляев Г.Ю.), 2019.— Пенза.С. 69-71.

8. Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи:учебное пособие / — М.: Изд. АСВ, 2008. — 256 с.

9. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объёмов для эллиптических уравнений / — Новосибирск, Инта математики, 2000. — 345 с.

---

УДК 511.9

## Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II[1]

**А. Н. Кормачева** — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
*e-mail: juska789@mail.ru*

## Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices[1]

**A. N. Kormacheva (Tula)** — Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
*e-mail: juska789@mail.ru*

## 1. Введение

В случае произвольного радикала $d > 1$, т. е. числа свободного от квадрата, для кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеется два различных случая (см. [8], гл. 4, стр. 309):

первый случай, когда дискриминант $d = 2$ или $d \equiv 3 \pmod 4$, в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{d} | n, k \in \mathbb{Z}\};$$

второй случай, когда дискриминант $d \equiv 1 \pmod 4$, в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{n + k\omega | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

где целое алгебраическое число $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля $F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

В данной работе нас будет интересовать вопрос о приближении квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками в метрическом пространстве решёток. Целью данной работы будет рассмотрение случая произвольного квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d > 0$ — радикал, то есть произвольное натуральное число свободное от квадратов.

Кроме этого в работе будут установлены два общих свойства метрики на пространстве решёток, согласно которым расстояние между решётками не меняется, если их умножить на одно и тоже ненулевое число и расстояние от решётки до фундаментальной решётки равно расстоянию взаимной решётки до фундаментальной решётки.

Таким образом, в первом случае $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{d}, \quad \Theta^{(2)} = n - k\sqrt{d} \quad n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - dk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$.

Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается $m$-ая подходящая дробь к $\sqrt{d}$. Таким образом,

$$\sqrt{d} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m\sqrt{d} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{(Q_m(n + k\sqrt{d}), Q_m(n - k\sqrt{d})) | n, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{d}, -Q_m\sqrt{d})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{d}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(d)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$.

Во втором случае, когда $d \equiv 1 \pmod 4$, мы имеем $\Theta^{(1)} = n + k\omega$, $\Theta^{(2)} = n + k(1-\omega)$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - (2n - k)x + n^2 + nk + \frac{1-d}{4}k^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega, 1 - \omega)$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами в зависимости от двух случаев:

если $P_m$ и $Q_m$ — разной четности, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{(Q_m(2n + k(1 + \sqrt{d})), Q_m(2n + k(1 - \sqrt{d}))) | n, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(2Q_m n + k(P_m + Q_m), 2Q_m n + k(P_m - Q_m)) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (2Q_m, 2Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m(1 + \sqrt{d}), Q_m(1 - \sqrt{d}))$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 4Q_m^2\sqrt{d}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(d)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (2Q_m, 2Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m + Q_m, Q_m - P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 4Q_m P_m$;

если $P_m$ и $Q_m$ — оба нечетные числа, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ \left( Q_m \left( n + k\frac{1+\sqrt{d}}{2} \right), Q_m \left( n + k\frac{1-\sqrt{d}}{2} \right) \right) \middle| n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \left\{ \left( Q_m n + k\frac{P_m+Q_m}{2}, Q_m n + k\frac{P_m-Q_m}{2} \right) \middle| n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\quad \vec{\lambda}_{m,2} = \left( Q_m \frac{1+\sqrt{d}}{2}, Q_m \frac{1-\sqrt{d}}{2} \right)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = Q_m^2\sqrt{d}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(d)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = \left( \frac{P_m+Q_m}{2}, \frac{Q_m-P_m}{2} \right)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = Q_m P_m$.

## 2. Два общих свойства метрики на пространстве решёток

Для произвольной решётки $\Lambda$ рассмотрим её взаимную решётку $\Lambda^* = \{\vec{x} | (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}, \forall \vec{y} \in \Lambda\}$.

Теорема 1. *Для любой решётки $\Lambda$ справедливо равенство $\rho(\Lambda, \mathbb{Z}^s) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}^s)$.*

Теорема 2. *Для любого $t > 0$ и любых решёток $\Lambda$ и $\Gamma$ справедливы равенства $\rho(t\Lambda, t\Gamma) = \rho(\Lambda, \Gamma)$, $\rho((t\Lambda)^*, (t\Gamma)^*) = \rho(\Lambda^*, \Gamma^*)$.*

## 3. Вычисление расстояния для первого случая дискриминанта поля

Обозначим через $A_m$ базисную матрицу решётки $\Lambda_m(F)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\sqrt{d} \\ Q_m & -Q_m\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через $B_m$ — базисную матрицу решётки $\Lambda_m(d)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & P_m \\ Q_m & -P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть $C_m = B_m A_m^{-1}$, $D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}$, $I_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ и $J_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$. Тогда $C_m \in I_m$, $D_m \in J_m$. Положим $\nu_m = \|C_m - E_2\|$, $\mu_m = \|D_m - E_2\|$.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

Лемма 2. *Если решётки $\Lambda = A\mathbb{Z}^2$ и $\Gamma = B\mathbb{Z}^2$ с базисными матрицами $A$ и $B$, соответственно:*

$$A = \begin{pmatrix} Q & P + \frac{\theta}{Q} \\ Q & -P - \frac{\theta}{Q} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2\left(P+\frac{\theta}{Q}\right)} & -\frac{1}{2\left(P+\frac{\theta}{Q}\right)} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & -P \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2P} & -\frac{1}{2P} \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < 1, \quad P, Q \in \mathbb{N}, \quad PQ > 1$$

*связаны соотношениями*

$$\Lambda = B^*\Gamma, \quad B^* = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & 1+\frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = A^*\Lambda, \quad A^* = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & 1-\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix},$$

$$\nu_0 = \|A^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{\theta+PQ}, \quad \mu_0 = \|B^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{PQ}, \quad \varepsilon_0 = \max(\nu_0, \mu_0) < 1,$$

*то для расстояния между этими решётками справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(1+\varepsilon_0).$$

Теорема 3. *При $P_m \geqslant 2$, $Q_m \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \frac{\theta_m}{P_mQ_m}\right)\right).$$

## 4. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, первый подслучай

Пусть теперь $d \equiv 1 \pmod 4$ и числитель и знаменатель $P_m$ и $Q_m$ подходящей дроби к квадратичной иррациональности $\sqrt{d}$ имеют разную четность.

Обозначим в этом случае через $A_m$ базисную матрицу решётки $\Lambda_m(F)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} 2Q_m & Q_m(1+\sqrt{d}) \\ 2Q_m & Q_m(1-\sqrt{d}) \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{4Q_m\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{4Q_m\sqrt{d}} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через $B_m$ — базисную матрицу решётки $\Lambda_m(d)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} 2Q_m & Q_m+P_m \\ 2Q_m & Q_m-P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_m-Q_m}{4P_mQ_m} & \frac{P_m+Q_m}{4P_mQ_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть $C_m = B_mA_m^{-1}$, $D_m = C_m^{-1} = A_mB_m^{-1}$, $I_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ и $J_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$. Тогда $C_m \in I_m$, $D_m \in J_m$. Положим $\nu_m = \|C_m - E_2\|$, $\mu_m = \|D_m - E_2\|$.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

Теорема 4. *Для $d \equiv 1 \pmod 4$, если числитель и знаменатель $P_m$ и $Q_m$ подходящей дроби к квадратичной иррациональности $\sqrt{d}$ имеют разную четность, то при $P_m \geqslant 2$, $Q_m \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \frac{\theta_m}{P_mQ_m}\right)\right).$$

## 5. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, второй подслучай

Пусть теперь $d \equiv 1 \pmod 4$ и числитель и знаменатель $P_m$ и $Q_m$ подходящей дроби к квадратичной иррациональности $\sqrt{d}$ оба нечетные.

Обозначим в этом случае через $A_m$ базисную матрицу решётки $\Lambda_m(F)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ Q_m & Q_m\frac{1-\sqrt{d}}{2} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{2Q_m\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{2Q_m\sqrt{d}} \\ \frac{1}{Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через $B_m$ — базисную матрицу решётки $\Lambda_m(d)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & \frac{Q_m+P_m}{2} \\ Q_m & \frac{Q_m-P_m}{2} \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_m-Q_m}{2P_mQ_m} & \frac{P_m+Q_m}{2P_mQ_m} \\ \frac{1}{P_m} & -\frac{1}{P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть $C_m = B_mA_m^{-1}$, $D_m = C_m^{-1} = A_mB_m^{-1}$, $I_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ и $J_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$. Тогда $C_m \in I_m$, $D_m \in J_m$. Положим $\nu_m = \|C_m - E_2\|$, $\mu_m = \|D_m - E_2\|$.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

Теорема 5. *Для $d \equiv 1 \pmod 4$, если числитель и знаменатель $P_m$ и $Q_m$ подходящей дроби к квадратичной иррациональности $\sqrt{d}$ оба нечетные, то при $P_m \geqslant 2$, $Q_m \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \frac{\theta_m}{P_mQ_m}\right)\right).$$

## 6. Заключение

Из теорем 3, 4, 5 следует, что построенные целочисленные приближения алгебраических решёток $\Lambda_m(F)$ с растущим детерминантом приближаются целочисленными решётками со скоростью $O\left(\det^{-1}\Lambda_m(d)\right)$.

Теорема 2 позволяет утверждать, что с такой-же скоростью квадратичная решётка $\Lambda(F)$ приближается рациональной решёткой со знаменателем $Q = O\left(\sqrt{\det\Lambda_m(d)}\right)$.

В работах А. В. Михляевой [6]–[7] изучаются эти приближения с точки зрения построения квадратурных формул. Качество соответствующих сеток можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1].

А. В. Родионова показал, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра решётки и явно описать минимальное множество Быковского.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

2. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.

3. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

4. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.

5. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

6. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

7. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.

8. Г. Хассе. Лекции по теории чисел. — М. И*Л. 1953 г. — 528 с.

УДК 511.3

## Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением[1]

**Н. В. Максименко (Россия, г. Оренбург)**
Оренбургский государственный университет
*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

## The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication[1]

**N. V. Maksimenko (Rossia, Orenburg)**
Orenburg state University
*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

Определение 1. *Тригонометрической суммой сетки с весами $(M, \rho)$ для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется выражение*

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}, \tag{1}$$

*а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —*

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [2]). [2]

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.
[2]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{2}$$

*и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном $s$-мерном кубе.*

В работе [3] дано следующее определение дзета-функции сетки $M$ с весами $\vec{\rho}$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки $M$ с весами $\vec{\rho}$ называется функция $\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(M,\vec{\rho},n)}{n^\alpha}, \tag{3}$$

*где*

$$S^*(M,\vec{\rho},n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \tag{4}$$

*и $N(n)$ — норменная поверхность, заданная равенством $N(n) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s|\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s = n\}$.*

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 1 и следующая теорема:

Теорема 2. *Если $f(x_1,\ldots,x_s)\in E^\alpha_s(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \le C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + C\cdot\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}), \tag{5}$$

*где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1). На классе $E^\alpha_s(C)$ эту оценку нельзя улучшить.*

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

*Для нормы $\|R_N[f]\|_{E^\alpha_s}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле справедливо равенство*

$$\|R_N[f]\|_{E^\alpha_s} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha|M,\vec{\rho}). \tag{6}$$

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [7], в работе [2] дано следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E^\alpha_s$.

Определение 3. *Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E^\alpha_s$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x})\in E^\alpha_s$ и $f(\vec{x})\notin E^\beta_s$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса $E_s$ принадлежит бесконечному показателю.*

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 4. *Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования* $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *периодических функций из класса* $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^{\alpha}$ *ненасыщаемый типа* $(\gamma, \lambda)$, *если для любой периодической функции* $f(\vec{x})$ *конечного показателя* $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ *и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство*

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^{\gamma} N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right). \tag{7}$$

Теорема 3. *Множество* $\mathbb{D}^*(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *всех обратимых рядов Дирихле из алгебры* $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.*

Теорема 4. *Множество* $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ *целых рядов Дирихле является мультипликативной группой.*

Теорема 5. *Для любого* $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)).$$

Теорема 6. *Для любого* $\vec{m} \in \mathbb{N}^s$ *справедливо равенство*

$$M(Q_{sp}(\Lambda(\vec{m}))) = Q_{sp}(\Lambda(\vec{m})).$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. : Наука, 1986.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сб. 2008. — Т. 9, вып. 1 (25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. — С. 185–223.

3. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

4. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, “О числе точек решетки в гиперболическом кресте”, Матем. заметки, 63:3 (1998). С. 363–369.

5. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196

7. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус"1995

8. Чудаков Н. Г. Введение в теорию $L$-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

---

УДК 511.9

# Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II[1]

**А. В. Михляева (Россия, г. Оренбург)**
Оренбургский государственный университет
*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

# Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets[1]

**A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)**
Orenburg state University
*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где $p$ — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$. В работе [3] эти исследования были продолжены и была найдена форма функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$, которая позволяет её вычислять за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций.

В данной работе рассматривается общий случай квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где дискриминант поля $d$ — произвольное бесквадратное натуральное число больше 1, или как иногда говорят $d$ — радикал.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля $F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа. Теория показывает, что здесь имеются два принципиально различных случая: $d = 2$ или $d \equiv 3 \pmod 4$ и другой случай, когда $d \equiv 1 \pmod 4$.

Рассмотрим произвольную двумерную целочисленную решётку $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$. Пусть она имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (a, b)$ и $\vec{\lambda}_2 = (c, d)$ с детерминантом $N = \det \Lambda = |ad - bc| > 1$. Следующая лемма отвечает на вопрос, когда решётка $\Lambda$ будет решёткой решений линейного сравнения $\Lambda(n, N) = \{(y, x) | x + ny \equiv 0 \pmod N\}$.

Лемма 1. *Пусть $a > c > 0$, $(a, c) = 1$ и $N = ad - bc > 1$, тогда $\Lambda = \Lambda(n, N)$, где $n = (-1)^l (Q_{l-1} b - P_{l-1} d)$ и $P_{l-1}$ — числитель, $Q_{l-1}$ — знаменатель $l-1$-ой подходящей дроби для разложения дроби $\frac{a}{c}$ в цепную дробь:*

$$\frac{a}{c} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_l}}} = \frac{P_l}{Q_l}.$$

Рассматривая первый случай для дискриминанта с соответствующими выкладками, получим следующий ряд теорем.

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

[1]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(d))$, также как в работе [2], можно использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(d))) = \frac{9}{2P_mQ_m}\sum_{n=0}^{2Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

которую будем называть функцией качества.

Положим $N_m = 2P_mQ_m$ и целое $a_m$ зададим равенством

$$a_m = \begin{cases} 2P_mQ_{m-1}-1, & \text{при } m\text{— нечётном} \\ 2P_m(Q_m-Q_{m-1})-1, & \text{при } m\text{— чётном.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Справедливо равенство $M(\Lambda_m(d)) = M(a_m, N_m)$, где параллелепипедальная сетка $M(a_m, N_m)$ задаётся равенством*

$$M(a_m, N_m) = \left\{\left(\frac{n}{N_m}, \left\{\frac{a_m n}{N_m}\right\}\right)\middle| \, n = 0, \ldots, N_m - 1\right\}.$$

В работе [1] для величин $H_k$, заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k}\sum_{n=0}^{Q_k-1}\left(1-2\frac{n}{Q_k}\right)^2\left(1-2\left\{\frac{P_kn}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1+\frac{4}{5Q_k^2}\left(10+5k+\sum_{\lambda=1}^{k}q_\lambda^2-\frac{3(P_k^2+Q_{k-1}^2)}{Q_k^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{Q_k}\left(2\sum_{\lambda=1}^{k}q_\lambda(Q_\lambda T_{k,\lambda+1}+Q_{\lambda-2}T_{k,\lambda+1}+Q_{\lambda-2}T_{k,\lambda-1})-10\sum_{\lambda=1}^{k-1}Q_{\lambda-1}T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

Теорема 3. *Для функции качества $H(M(\Lambda_m(d)))$ справедливо равенство*

$$H(M(\Lambda_m(d))) = 1+\frac{4}{5N_m^2}\left(10+5l+\sum_{\lambda=1}^{l}q_{\lambda,m}^2-\frac{3(P_{l,m}^2+Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{Q_{l,m}}\left(2\sum_{\lambda=1}^{l}q_{\lambda,m}(Q_{\lambda,m}T_{l,\lambda+1}^*+Q_{\lambda-2,m}T_{l,\lambda+1}^*+Q_{\lambda-2,m}T_{l,\lambda-1}^*)-10\sum_{\lambda=1}^{l-1}Q_{\lambda-1,l}T_{l,\lambda+1}^*\right)\right),$$

*где $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$ — $\lambda$-ая подходящая дробь к числу $\frac{a_m}{N_m}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$, $T_{l,\nu}^* = [q_{\nu+1,m}, \ldots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$.*

Рассматривая второй случай для дискриминанта с соответствующими выкладками, получим следующий ряд теорем.

Теорема 4. *Пусть для разложения дроби $\frac{P_m+Q_m}{2Q_m}$ в цепную дробь:*

$$\frac{P_m+Q_m}{2Q_m} = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_l}}} = \frac{P_l'}{Q_l'}.$$

*Для второго случая дискриминанта для решётки $\Lambda_m(d)$ справедливы следующие равенства:*

*в первом случае, когда $P_m$ и $Q_m$ — числа разной четности,*

$$N_m = 4Q_mP_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

*где $n_m = (-1)^l(Q'_{l-1}(Q_m - P_m) - P'_{l-1}2Q_m)$;*

*а во втором случае, когда $P_m$ и $Q_m$ — оба нечетные числа,*

$$N_m = Q_mP_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

*где $n_m = (-1)^l(Q'_{l-1}\frac{Q_m-P_m}{2} - P'_{l-1}Q_m)$.*

*Здесь $P'_{l-1}$ — числитель, $Q'_{l-1}$ — знаменатель $l-1$-ой подходящей дроби.*

Для функции качества сетки $M(\Lambda_m(d))$ имеем:

в первом случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$
$$= \frac{9}{4P_mQ_m}\sum_{n=0}^{4Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n(P_m-Q_m)}{4P_mQ_m}+\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n(P_m+Q_m)}{4P_mQ_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

а во втором случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$
$$= \frac{9}{2P_mQ_m}\sum_{n=0}^{2Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n(P_m-Q_m)}{2P_mQ_m}+\frac{k}{P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n(P_m+Q_m)}{2P_mQ_m}-\frac{k}{P_m}\right)\right)^2.$$

Теорема 4 позволяет, как и в первом случае дискриминанта, вычислять функцию качества для второго случая за $O(N_m)$ арифметических операций.

Теоремы 3 и 4 позволяют это сделать за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций.

Основной момент заключался в том, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой.

На тот факт, что сетка $M(\Lambda_m(d))$ является параллелепипедальной, и что во втором случае дискриминанта надо рассматривать два случая для числителя и знаменателя подходящей дроби обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. Монография под редакцией Н. М. Добровольского. — Тула, 2012, 193 с.

2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 241–256.

3. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 307–312.

УДК 511.3

# Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток[1]

**Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
*e-mail: rarova82@mail.ru*

# Trigonometric sums of nets of algebraic lattices

**E. M. Rarova (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
*e-mail: rarova82@mail.ru*

Рассматриваются: единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A\,|\vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s}), \ldots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки $A$ задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки $\Lambda$ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.*

*Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество*

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка $r$ с константой $B$ называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = -1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \ \textit{при}\ \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \textit{при} \quad \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \textit{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left( t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \ldots, m) | m \in \mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$ $\quad (k = 1 \ldots N)$ называется *сеткой* $M$ из $N$ узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Лемма 1. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 - (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}. \tag{6}$$

*Тогда для любого действительного числа $\sigma$ и интеграла*

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^{1} \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

*выполняется оценка*

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{7}$$

*и функция* $\rho_r(x)$ *— весовая функция порядка* $r+1$ *с константой* $B(r)$, *где*

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r} \sup_{|\sigma|>1} \left| \left(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\right) - \int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx \right|,$$

*и при* $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ *имеем:*

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu}P_\nu(x),$$

*где*

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_{\nu+1}(x) = \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0,\ldots,r-2),$$
$$P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2}(r-1+\nu-k)x^\nu,$$

*и при* $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ *имеем:*

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1}(-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1}(r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu} =$$
$$= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),$$
$$P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N}\rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{8}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(t)} \left( \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки* $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ *и произвольной весовой функции* $\rho(\vec{x})$ *справедливо равенство*[1]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}}' \int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})}d\vec{y}, \tag{9}$$

*где*

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

[1]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального $t$ справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{10}$$

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ определим вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leqslant B(r)\begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{11}$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34-39.

3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356-359.

4. Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.


---

УДК 511.32

# Метрическое пространство решёток и гладкое многообразие одномерных решёток

**Е. Н. Смирнова (Россия г.Оренбург)**
Оренбургский государственный университет
e-mail:helenash@mail.ru

# The metric space of lattices and the smooth manifold of one-dimensional lattices

**E. N. Smirnova (Russian, Orenburg)**
Orenburg State University
e-mail:helenash@mail.ru

Важность рассмотрения множества всех решёток как метрического пространства видна из работ [1, 4], [5] — [9].

Рассмотрим пространство $PR_1$ всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}, a_{1\,1} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом $(\lambda)$, $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{1\,1}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{1\,1}|\lambda)$.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток $\Lambda$ является *открытой $\mu$-окрестностью* решётки $M$, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица $A$ удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких $\mu$ все матрицы $A = (a_{1\,1})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{1\,1} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Нетрудно записать окрестность $\mathbb{L}_\mu(M)$ для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом $(\lambda)$.

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} | (1-\mu)\lambda < \lambda_1 < (1+\mu)\lambda\}.$$

Лемма 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu)-\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1+\mu) > \lambda_1(1-\nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

Лемма 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \,|\, \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой $\mu$-окрестностью решётки $M$ при $M = M\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.*

Легко видеть, что имеется следующее гомеоморфное отображение

$$\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$$

при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda)),$$

а числу $\theta \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_{\mu}(M).$$

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества $X$ открытых $\mu$ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что таким образом на $PR_1$ задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где $\tau_1$ — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех $\mu$-окрестностей рациональных решёток $M$ с рациональными $\mu$, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество $PQ_1$ всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

Лемма 3. *Топология $\tau_1$ инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования $A$ пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

Как известно (см. [3], стр. 165), множество всех $s$-мерных решёток $PR_s$ является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \tag{4}$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma = A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda = B \cdot \Gamma} \|B - I\|,$$

Применительно к $PR_1$ имеем, если $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma = A \cdot \Lambda$, $A = \left(\gamma\lambda^{-1}\right)$, $\Lambda = B \cdot \Gamma$, $B = \left(\gamma^{-1}\lambda\right)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \gamma$, тогда $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$, $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$ и $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta = \gamma\lambda^{-1}$, тогда $0 < \theta < 1$ и $2 - \theta < \theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda))$.

Теперь можно записать как выглядит "симметричный отрезок" решёток длинной $2\rho$ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда $h$ пробегает числовой отрезок $[-\rho; \rho]$, то $\Lambda(e^{h}\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Топологическое пространство $PR_1$ является хаусдорфовым, так как для любых двух решеток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые $\mu$-окрестности $\mathbb{L}_{\mu}(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_{\mu}(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток $PR_1$ гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является

$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$$

при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$

а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in PR_1.$$

Отсюда следует, что пространство одномерных решёток $PR_1$ локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [10], стр. 13) пара $(U, \varphi)$, где $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая $\mu$-окрестность, решётка $M = M(\lambda)$, а $\varphi$ — гомеоморфное отображение $U$ на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ называется системой координат, $\varphi$ — координатным отображением. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка $M$ является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [2], стр. 205) интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ является картой открытой $\mu$-окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$.

Лемма 4. *Для любых двух открытых пересекающихся $\mu$-окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ гомеоморфные отображения $\varphi_\nu$ окрестностей $U_\nu$ на интервалы $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$ для любого $\theta$ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \bigcap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2))$.*

Лемма 5. *Гомеоморфное отображение*

$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$$

*при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка*

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$

*а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка*

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \mathbb{Z} \in PR_1$$

*переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} (\ln((1-\mu_x)\lambda_x); \ln((1+\mu_x)\lambda_x)). \tag{5}$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.

3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.(второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

5. Скубенко Б. Ф. О произведении $n$ линейных форм от $n$ переменных // Труды МИАН СССР. № 158. 1981. С. 175 — 179.

6. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ // Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

7. Скубенко Б. Ф. Циклические множества чисел и решёток// Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 160. 1987. С. 151–158.

8. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

9. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени $n$ от $n$ переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

10. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.

---

УДК 511.3

# Теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

**А. В. Родионов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

# Number-theoretic methods for solving partial differential equations

**A. V. Rodionov (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [7] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s),$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \ldots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{3}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \ldots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \ldots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса $E_s^\alpha$ $(\alpha > m(Q) + 1)$.[1]

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{4}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}. \tag{5}$$

[1] Условие на $\alpha$ гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)\varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [4] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса $E_s^\alpha$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \tag{6}$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \tag{7}$$

$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_s) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_s) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1-x_1) \cdot \ldots \cdot x_s(1-x_s) = 0. \tag{8}$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})\,|_{\partial G_s} = 0, \qquad G_s = [0;1)^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ приближенного решения указанной задачи Дирихле на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$. Необходимость приближенного решения обусловлена тем, что, как правило, явного вида ряда Фурье неизвестно, а потому, точное решение имеет только теоретическое значение.

Наш вариант обобщения метода В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными на случай использования произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток для целочисленных решеток состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{Z}^s \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_n \supset \ldots$ — бесконечная последовательность целочисленных решеток в $\mathbb{R}^s$. Ей соответствует бесконечная последовательность обобщенных параллелепипедальных сеток:

$$\{\vec{0}\} = M(\mathbb{Z}^s) \subset M(\Lambda_1) \subset M(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M(\Lambda_n) \subset \ldots$$

в единичном кубе $G_s = [0;1)^s$ и бесконечная последовательность конечных множеств целочисленных векторов $\vec{m}$ — минимальных гиперболических полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки $\Lambda_\nu$:

$$\{\vec{0}\} = M^*(\mathbb{Z}^s) \subset M^*(\Lambda_1) \subset M^*(\Lambda_2) \subset \ldots \subset M^*(\Lambda_\nu) \subset \ldots.$$

При соответствующих условиях на последовательность решеток для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s^\alpha$ $(\alpha > 1)$ для последовательности интерполяционных многочленов $I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x})$ будет иметь место достаточно быстрая сходимость

$$\lim_{\nu \to \infty} I_{\Lambda_\nu} f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

В статье [2] рассмотрен вопрос о решении дифференциального уравнения с частными производными в пространстве $M_s^\alpha$ периодических функций многих переменных, соответствующих моноиду $M$ натуральных чисел, у которого множество номеров экспонент, входящих в комплексный ряд Фурье, задается этим мультипликативным моноидом натуральных чисел.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В.,Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 122 — 143.

2. Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Родионов А. В. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–178.

3. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

5. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2 изд. М.: МЦНМО, 2004.

6. Родионов А. В. О методе В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 3.

7. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232 — 237.

---

# Секция 9. История математики

УДК 669:53.097

## История и перспективы развития электроэрозионного способа переработки металлоотходов с целью получения композиционных микро- и наноматериалов

**Е. В. Агеева (Россия, г. Курск)**
Юго-Западный государственный университет
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
**Е. В. Агеев (Россия, г. Курск)**
Юго-Западный государственный университет
e-mail: ageev_ev@mail.ru
**О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)**
Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru

## The history and prospects of development of an electroerosive method for processing metal waste in order to obtain composite micro- and nanomaterials

**E. V. Ageeva (Russia, Kursk)**
Southwestern state University
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
**Y. V. Ageev (Russia, Kursk)**
Southwestern state University
e-mail: ageev_ev@mail.ru
**O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)**
Russian state University of justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru

В конце XVIII века английским ученым Джоном Пристли было описано явление эрозии металлов под действием электрического тока. Было замечено, что при разрыве электрической цепи в месте разрыва возникает искра или более продолжительная электрическая дуга. Причем искра или дуга оказывает сильное разрушительное воздействие на контакты разрываемой цепи, называемое электрической эрозией. Электрической эрозии подвержены контакты реле, выключателей, рубильников и других подобных устройств.

Много исследований было посвящено устранению или уменьшению такого разрушения контактов. Электрическое разрушение металла наблюдал академик В.В. Петров в его известных опытах с электрической дугой. В работах Фарадея также описывается явление разрушения металла при электрическом разряде. В конце XIX и начале XX веков был опубликован ряд работ, специально посвященных электрическому разрушению металлов.

Во второй половине XX века к электрической эрозии возник особый практический интерес, с одной стороны, в связи с широким внедрением контактных реле, с другой стороны, в связи с изобретением в СССР Б.Р. Лазаренко и Н.И. Лазаренко [1, 2] и независимо от них В.Н. Гусевым [3] электроэрозионных методов обработки металлов, получивших широкое распространение и активно применяемых в наше время [4].

Поместив электроды в жидкий диэлектрик и размыкая электрическую цепь, Б.Р. Лазаренко и Н.И. Лазаренко заметили, что жидкость мутнела уже после первых разрядов между контактами. Они установили, что это происходит потому, что в жидкости появляются мельчайшие металлические шарики, которые возникают вследствие электрической эрозии электродов.

Ученые решили усилить эффект разрушения и попробовали применить электрические разряды для равномерного удаления металла. С этой целью они поместили электроды (инструмент и заготовку) в жидкий диэлектрик, который охлаждал расплавленные частицы металла и не позволял им оседать на противолежащий электрод. В качестве генератора импульсов использовалась батарея конденсаторов, заряжаемых от источника постоянного тока; время зарядки конденсаторов регулировали реостатом. Так появилась первая в мире электроэрозионная установка. Электрод-инструмент перемещали к заготовке. По мере их сближения возрастала напряженность поля в межэлектродном промежутке. При достижении определенной напряженности поля на участке с минимальным расстоянием между поверхностями электродов, измеряемым по перпендикуляру к обрабатываемой поверхности и называемым минимальным межэлектродным зазором, возникал электрический разряд (протекал импульс) тока, под действием которого происходило разрушение участка заготовки. Продукты обработки попадали в диэлектрическую жидкость, где охлаждались, не достигая электрода-инструмента, и затем осаждались на дно ванны. Через некоторое время электрод-инструмент прошил пластину, причем контур отверстия точно соответствовал профилю инструмента.

Так, явление, считавшееся вредным, было применено для размерной обработки материалов. Изобретение электроэрозионной обработки имело выдающееся значение. К традиционным способам формообразования (резанию, литью, обработки давлением) прибавился совершенно новый, в котором непосредственно использовались электрические процессы.

Первые исследования по применению электрической эрозии металла для получения порошков относятся к 40-м годам прошлого столетия. В 1943 году был предложен эффект электрической эрозии для получения высокодисперсных порошков [5].

Несмотря на достаточно высокую производительность порошкообразования, дисперсность порошка, возможности регулирования гранулометрического состава и степени охлаждения, а так же относительно невысокие энергетические затраты и экологическую чистоту процесса, в отличие от других способов получения порошка из отходов твердых сплавов, способ получения металлического порошка методом электроэрозионного диспергирования не нашёл широкого применения в промышленности. Это связано с недостаточной изученностью строения и свойств порошков, а также закономерностей процессов порошкообразования при электроэрозионном диспергировании отходов твердых сплавов.

В связи с этим последующие десятилетия были посвящены развитию физических исследований, которые были продолжены в СССР такими известными учеными как Б.Н. Золотых [6], А.Д. Верхотуров [7], К.К. Намитоков [8] и др. В зарубежной литературе США [9], Англии, Японии, Чехословакии, Германии и др. [10] опубликован ряд исследований, которые продолжаются и в настоящее время.

Перспективность метода ЭЭД обусловлена его преимуществами:

– возможность получения особо чистых ультра- и нанодисперсных металлопорошков, полного исключения загрязнения в процессе диспергирования, в том числе оксидами, так как рабочим органом является искровой разряд, а инертная среда предотвращает его окисление; возможность пассивации порошков оксидной пленкой в процессе диспергирования путем введения в состав инертного газа контролируемого количества кислорода;

– возможность диспергирования металлов и сплавов с критическими химическими и физическими свойствами (тугоплавкость, твердость, хрупкость, радиоактивность, химическая активность и т.д.);

– возможность регулирования дисперсности порошков в широких пределах (от 3 нм до 5 мкм) — размер образующихся частиц зависит от электрических параметров элементарных разрядов, конструкции реактора и среды диспергирования;

– возможность получения порошков сферической формы с аморфной, стеклообразной и мелкокристаллической структурой частиц, с высокоразвитой поверхностью (уникальные магнитные свойства, высочайшая химическая активность и сорбционная способность);

– возможность (в случае изменения свойств рабочей среды) осуществления в процессе диспергирования химических реакций и получение порошковых оксидов, гидроксидов, нитридов, карбидов, шпинелей и т.д.;

– возможность протекания высокотемпературных процессов под воздействием плазмы искровых разрядов при температуре рабочей среды, близкой к комнатной;

– экологическая чистота — отсутствие стоков, газовых и пылевых выбросов (в методе ЭЭД реагенты, как правило, не используются — в отдельных случаях возможно выделение водорода);

– низкая удельная энергоемкость процесса (1,5–3,0 кВт для производства 1 кг порошка);

– компактность технологического оборудования (0,8–1,0 м2 на одну установку) и др.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазаренко Б. Р. Современный уровень электроискровой обработки и некоторые научные проблемы в этой области // Электроискровая обработка металлов. 1957. Вып. 1. С. 9–37.

2. Лазаренко Б. Р., Лазаренко Н. И. Электрическая эрозия металлов. — Л.: Госэнергоиздат, 1944. 28 с.

3. Гусев В. Н. Анодно-механическая обработка металлов – М.: Машгиз, 1952. 321 с.

4. Киселев М. Г., Ляшук Ю. Ф., Габец В. Л. Электроэрозионная обработка материалов: учебно-методическое пособие. – М.: Технопринт, 2004. 112 с.

5. А.с. 70000 СССР, B 22f, 09/00 Способ получения порошков и устройство для его осуществления / Б. Р. Лазаренко, Н. И. Лазаренко (СССР). № 1371/321510; заявл. 01.04.1943; опубл. 23.09.1964, Бюл. № 22. 2с.

6. Золотых Б. Н., Мельдер Р Р. Физические основы электроэрозионной обработки. – М.: Машиностроение, 1977. 42 с.

7. Верхотуров А Д. Физико-химические основы процесса электроискрового легирования металлических поверхностей. – Владивосток: Дальнаука, 1992. 180 с.

8. Намитоков К. К. Электроэрозионные явления. – М.: Энергия, 1978. 456 с.

9. Berkowitz A. E., Walter J. L., Wall K. F. Magnetic properties of amorphous particles produced by spark erosion // Physical revive. 1981. Vol. 46. № 12. P. 1484–1487.

10. Lin J-C., Lin J-Y., Jou S-P. Selective Dissolution of the Cobalt Binder from Scraps of Cemented Tungsten Carbide in Acids Containing Additives // Hydrometallurgy. 1996. № 43. P. 46–71.

---

УДК 51(091)

# Из истории теории графов

**В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)**
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

# From the history of graph theory

**V. G. Alyabieva (Russia, Perm)**
Perm State University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

Основополагающей идеей для возникновения теории графов была идея Лейбница о «геометрии положения», идея о новом геометрическом анализе, свободном от метрики, идея об Analysis Situs, сыгравшая исключительную роль в развитии геометрии и всей математики. *Analysis Situs* — специальный раздел математики, в котором основным отношением между элементами является отношение взаимного расположения. Рассмотрим путь формирования понятия графа от идеи Лейбница до первого учебника, путь длиною более 200 лет. На этом пути мы обнаружим влияние идей и исследований, производимых в «чистой» математике, и влияние задач, решаемых в так называемой математике для развлечений.

Свою идею Лейбниц излагал в переписке во своими корреспондентами.

В письме к Х. Гюйгенсу от 8 сентября 1679 г. Лейбниц охарактеризовал свой замысел так: «Я полагаю, что нам нужен ещё иной, чисто геометрический или линейный, анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm), как Алгебра выражает величину (magnitudinem)» [1]. В развитие своей идеи Лейбниц предпринял попытку определить некоторые геометрические места точек в пространстве, однако пользовался метрическим понятием конгруэнции.

В письме Монмору от 17 января 1716 г. Лейбниц делится своими представлениями о применении «анализа положений» в игре солитер: «Среди игр, которые полностью зависят от чисел, встречаются такие, в которых большое значение имеет расположение, как триктрак, шашки, особенно шахматы. Вместо того, чтобы по правилам игры не допустить расположения шашек, при котором одной шашкой ходим через другую на свободное место и забираем ту шашку, через которую ходим, я держу за лучшее строить то расположение, из которого выводится перепрыгивание шашкой. Этим способом можно изобразить любую фигуру».

Вслед за Лейбницем геометрией на шахматной доске занимались Л. Эйлер (1758) и Ш. А. Вандермонд (1771). Эйлер решал задачу обхода конем всех клеток шахматной доски, при котором конь должен побывать в каждой клетке точно один раз. Вандермонд (Charles Auguste Vandermonde, 1735–1796) [2] так описывает задачу и её решение: «Пусть конь обходит все клетки шахматной доски, не посещая дважды одно и то же поле, в результате определится след коня на шахматной доске; или же, предположив, что в центре каждого квадрата закреплена булавка, определяет курс верёвка, обёрнутая вокруг каждой булавки один раз в соответствии с законом, в котором мы будем искать выражение» [2]. Найденный обход Вандермонд изобразил в виде схемы, на которой позиция булавки изображена кружочком, а ходу коня соответствует прямолинейный отрезок. В будущем задача о ходе коня привела к гамильтоновым графам.

Статья Л. Эйлера о кёнигсбергских мостах «Решение одной задачи, связанной с геометрией положения» (*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) [3] считается самой первой

работой, относящейся к *analysis situs*, ранней и самой знаменитой публикацией и по теории графов, и по топологии.

Свою статью Эйлер начинает следующим образом:

«1. В дополнение к той части геометрии, которая имеет дело с количеством, и которая всегда возбуждала особый интерес, существует другая — фактически всё ещё неизвестная — часть, которую впервые упомянул Лейбниц, и которую он назвал *геометрией положения*. Эта часть геометрии занимается именно тем, что может быть определено только положением, а также исследованием свойств положения. Однако виды задач, относящиеся к этой геометрии положения, и методы, используемые для их решения, были недостаточно точно определены ... Поэтому я решил объяснить здесь метод, который разработал для решения задач подобного вида, как пример геометрии положения.

2. Эта задача, как мне сказали. довольно хорошо известна, и связана вот с чем. В городе Кёнигсберге, в Пруссии, есть остров, называемый Кнайпхоф, река, окружающая его, делится на два рукава. Рукава этой реки пересекают семь мостов $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ и $g$. В связи с этим был поставлен вопрос: можно ли совершить по ним прогулку так, чтобы пройти по каждому из этих мостов, причём по одному разу». Эйлер обозначил области суши буквами $A$, $B$, $C$, $D$. Путь по трём мостам из $A$ затем в $D$, затем в $C$, затем в $A$, он записывал в виде последовательности четырёх букв $ADCA$. Если участки суши $A$ и $C$ соединяют два моста, то пара AC встретится в соответствующей последовательности 2 раза. Тогда путь по 7 мостам записывается в виде последовательности, содержащей 8 букв. Задача сводится к тому, чтобы выяснить, можно ли их четырёх букв $A$, $B$, $C$, $D$ составить последовательность длины 8, в которой пары будут встречаться необходимое число раз. Эйлер рассмотрел обобщения этой задачи на случай разного количества мостов и указал, когда задача имеет решение. Для случая семи мостов Кёнигсберга Эйлер доказал, что задача не разрешима. Обратим внимание, что в статье Эйлера нет схем, нет фигур, напоминающих современные изображения графа. Всё это появилось позже.

В своей статье Эйлер сообщает следующие результаты о возможности пройти по семи кёнигсбергским мостам:

1. если существует более двух областей, к которым ведёт нечетное число мостов, то такое путешествие невозможно;

2. если существует ровно две области, к которым ведёт нечётное число мостов, то путешествие возможно, если оно начинается в любой из этих двух областей;

3. если нет областей, к которым ведёт нечетное число мостов, то требуемое путешествие можно осуществить, начиная с любого участка.

Доказательство Эйлер дал только для первого результата. Строгое обоснование двух других результатов было дано в посмертной статье Hierholzer C. (*Hierholzer* C. Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren // Mathematische Annalen. 1873. Bd. 6. S. 30–32).

Свою статью Эйлер презентовал в Академии наук 26 августа 1735 года. Статью поместили в *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* за 1736 год. Опубликованы *Commentarii* лишь в 1741 году. Между презентацией статьи и её реальным появлением в печати прошло 6 лет.

*Commentarii* рассылались в европейские академии наук, поэтому академической общественности в XVIII в. статья Эйлера была знакома, хотя не вызвала заинтересованных откликов. Задача появилась в XIX веке в книгах, посвящённых *развлекательной математике*. В XIX в. статья Эйлера была переведена на французский язык двумя авторами: Coupy E. (1851) [4] и Lucas E. (1882) [5]. Эти переводы позволили познакомиться со статьёй Эйлера более

широкой аудитории. Эдуард Люка (1842–1891) — французский математик, профессор, работал в лицее Луи-де-Гран в Париже. Основные работы относятся к теории чисел. С 1882 г. по 1894 г. были опубликованы 4 тома «Математические развлечения» Люка (последний том опубликован посмертно). Практически одновременно в конце XIX — в начале XX в. появились книги, относящиеся к математическим развлечениям на английском и немецком языках: англичанина У. Болла (Walter William Rouse Ball, 1850–1925) [6] и немца В. Аренса [7] (Wilhelm Ahrens, 1872–1927). В этих книгах рассматривалась и комментировалась задача о кёнигсбергских мостах. Болл первый заметил связь между задачами о мостах с задачами на уникурсальные кривые, которые нужно вычертить «одним росчерком пера». Он пишет: «Проблема Эйлера состоит в том, чтобы определить, может ли данная геометрическая фигура быть описана точкой, движущейся так, чтобы пройти по каждой линии один и только один раз» и продолжает: «Фигура может быть представлена линиями, изогнутыми или извилистыми, соединяющими ряд заданных точек, или модель может быть построена путем взятия ряда стержней или кусков веревки, снабженных на каждом конце крючком, чтобы можно было использовать любое их количество будучи соединенными вместе в одной точке. Теория таких фигур включена как частный случай в предложения, доказанные Листингом в его Топологии».

Из задач, рассмотренных в книгах по развлекательной математике, и вошедших в первый учебник по теории графов, были задачи об обходе сторон и диагоналей семиугольника, о расположении в ряд домино, задача о лабиринтах, задача о мостах. Авторы книг сопровождали решения задач соответствующими диаграммами. Некоторые из них замечали, что, например, задача о домино сводится к задаче об обходе семиугольника, однако, не предоставляли общую диаграмму для решения обеих задач. Последнее удалось Гастону Тарри (Gaston Tarry, 1843–1913) [8, 9]. Тарри также заметил, что задача об обходе лабиринтов сводится к задаче о мостах, однако ему не удалось создать диаграммы, общие для решения одновременно этих четырёх задач. Это удалось Кёнигу в книге 1936 г.

Датой окончательного становления теории графов как самостоятельной математической отрасли можно считать 1936 год, когда профессор Политехнического университета в Будапеште Денеш Кёниг (Dénes Kőnig, 1884–1944) опубликовал монографию «Теория конечных и бесконечных графов» [10]. Книга содержит основные результаты, полученные в теории графов к этому моменту. В предисловии к своей книге Кёниг обсуждает, является ли теория графов ветвью топологии или ветвью комбинаторики? Он утверждает, что, скорее всего, «*... это ветвь комбинаторики: главным образом потому, что мы не относим к элементам графа вершинам и ребрам никакого геометрического содержания. Вершины являются произвольными различимыми элементами, а ребра нечто иное, как объединение их двух конечных точек. Эта абстрактная точка зрения, которую Сильвестр подчеркнул в 1873 году, будет строго соблюдаться в нашем представлении*».

Книга Кёнига явилась основным фактором роста интереса к теории графов во всем мире. В 1950 году она была переведена на английский язык.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leibnizens mathematische Schriften, Bd.2, S. 17–25.

2. Vandermonde A. T. Remargues sur les problèmes de situation // Histoire de l'Academie royale des sciences, année, 1772. P. 566–574.

3. Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Opera Omnia: Series 1, Volume 7, pp. 1–10. (Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 8, 1736 (1741), p. 128–140).

4. Coupy, E. Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation, par Euler // Nouvelles annales de mathématiques. 1851, Vol. 10. P. 106–119.

5. Lucas E. Récréations mathématiques, Vol. I. Gauthier-Villarset fils, imprimeurs-libraires. Paris. 1882.

6. Ball W.W.R. Mathematical Recreations and problems of past and present times. Macmillan, London. 1892.

7. Ahrens W. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. B. G.Teubner, Leipzig. 1901.

8. Tarry G. Le problème des Labyrinthes // Nouvelles Annales de Mathématiques. 1895. 14 (3). P. 187–190.

9. Tarry G. Géométrie de situation: Nombre de manieres distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées // Comptes Rendus Assoc. Franc. Avance. Sci. 1886. 15 (2). P. 49–53.

10. Kőnig D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akademische Verlagsgesellschaft M. R. H., Leipzig, 1936.

---

УДК 51(091)

## О работе Гюйгенса «Относительность движения и несуществование абсолютного пространства»

**П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)**
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru

## On Huygens' work "La relativité du mouvement et la non-existence d'un espace absolu"

**P. N. Antonyuk (Russia, г. Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru

На первых страницах «Математических начал натуральной философии», в Поучении, Ньютон пишет об абсолютном пространстве и относительном пространстве, об абсолютном движении и относительном движении – это фундаментальные понятия механики Ньютона. Абсолютное и относительное – противоположные по смыслу и сопряженные философские категории. Читая «Начала» Ньютона, Христиан Гюйгенс (1629-1695) выбирает относительное и отрицает абсолютное. Этому посвящена его краткая заметка (всего полторы страницы), написанная на латыни [1]. Смысл и содержание заметки точно сформулированы в ее названии, написанном на французском языке.

Гюйгенс всегда считал движение относительным. В своей работе «О движении тел под влиянием удара» Гюйгенс рассматривает соударение двух шаров одновременно относительно лодки и относительно берега, вдоль которого она плывет. Относительное движение шаров позволило Гюйгенсу доказать ряд важных законов соударения шаров.

Не нужно думать, что Ньютон недооценивал относительное движение. В тех же «Началах», в Следствии V из трех законов движения, Ньютон формулирует принцип относительности, заканчивая его словами: «Все движения на корабле совершаются одинаково, находится ли он в покое, или движется равномерно и прямолинейно». Эти слова указывают на то, что Ньютон взял принцип относительности у Галилея, который на примере корабля впервые описал этот принцип в «Диалоге о двух главнейших системах мира птолемеевой и коперниковой». Ньютон формулирует принцип в более краткой форме, чем Галилей, и включает его в число важнейших утверждений механики.

Гюйгенс был моложе Галилея на 65 лет и старше Ньютона на 14 лет. Поэтому труды Гюйгенса в области механики занимают промежуточное положение между «Диалогом» и «Беседами» Галилея и «Началами» Ньютона. Гюйгенс был лично знаком с Ньютоном, они хорошо знали работы друг друга. Ньютон несколько раз ссылается на работы Гюйгенса в своих «Началах».

Другой взгляд Гюйгенса на движение и пространство, не такой как у Ньютона, доказывает, что он хорошо понимал принцип относительности, сформулированный Галилеем и Ньютоном. Понимал ту основу, на которой в 1905 году Эйнштейном и Пуанкаре была построена специальная теория относительности.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huygens Ch. La relativité du mouvement et la non-existence d'un espace absolu // Christiaan Huygens. Oeuvres completes. Tome 21 (Cosmologie) 1944. P. 507-508.

---

УДК 51(91)

# Геометрическая аксиоматика в трактате Н. Туси "Изложение Евклида"[1]

**А. А. Бабаев (Азербайджан, г. Баку)**
**Институт математики и механики НАН Азербайджана**
**e-mail: ali_babaev@inbox.ru**

# Geometric axiomatic basis in the treatise Nasir-at-Tusi "The Statement of Euclid"

**A. A. Babaev (Azerbaijan, Baku)**
**Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan NAS**
**e-mail: ali_babaev@inbox.ru**

Великий ученый и мыслитель Насиреддин Туси родился 17 февраля 1201 года в городе Тусе (нынешний Мешхед на востоке Ирана). Полное имя Туси - Мухаммед ибн Мухаммед ибн Хасан "Насиреддин"("опора веры") это имя - прозвание, которое он получил по окончании курса религиозных наук. Но именно оно стало "главным" именем Туси.

Предположительно, Н.Туси является автором более 150-и трудов по математике, астрономии, логике, философии, физики, а также в области права и морали.В библиографическом

[1]Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант №EIF/1-2016-1(26)-71/11/5

труде Г.П. Матвиевской и Б.А. Розенфельда [1] приводятся названия и места хранения 27-и рукописей Туси по математике, 21-ой рукописи по астрономии, а также 4-х - по физике, 5-и - по логике и философии и по одной рукописи - по экономике, музыке, минералогии, поэзии.

Один из самых известных трудов Туси - "Изложение Евклида". Существуют два варианта этого трактата. Первый вариант был опубликован в начале1594 г. на арабском языке в Риме, а потом в 1657 г. на латыни в Лондоне. Второй вариант- 1881 г.- издан на арабском языке в Тегеране.

Стиль "Изложения" характеризуется приведением текстов "Начал" и комментариев к ним, начинающихся фразой "Я говорю". В этих комментариях Туси или уточняет или упрощает или дает альтернативное доказательство. Таких комментарий в "Изложения" более 400.

Исследование комментариев Туси к геометрическим понятиям, положениям и теоремам Евклида приводит к выводу, что ко времени написания "Изложения Евклида" изменился характер геометрической мысли.

Если геометрия Евклида, по мнению переводчика и комментатора "Начал" Д.Д. Мордухай-Болтовского, имела "конструктивный характер то "геометрия Туси это уже геометрия идеальных сущностей, хотя он и придерживается Евклида. Если существование по Евклиду - это возможность "построить пусть и с помощью "идеализированногоциркуля и линейки то у Туси существование имеет логически-выводимый идеальный характер.

Об этом говорят следующие положения, предпосылаемые Туси постулатам Евклида ("Замечание к понятиям").

"Я говорю. Прежде всего необходимо принять, что

1. Точка, прямая, плоскость и поверхность существуют, и круг существует.
2. На любой линии и на поверхности мы можем определить точку.
3. На любой поверхности мы можем предположить линию.
4. Как бы ни была расположена точка, мы можем предположить линию, проходящую через эту точку.
5. Любая точка, отрезок прямой и плоскостная поверхность наложимы на свой аналог.
6. Пересечение двух линий-это точка ,а двух поверхности-это линия."[2]

С современной точки зрения - это аксиомы существования (1), принадлежности (2-4), конгруэнтности (5). Что касается аксиомы существования, то она отражает философско-логические воззрения Туси, излагаемые им в различных трактатах. Так в третьей главе известного логического труда "Асас-ал иктибас которая посвящена суждениям,Туси пишет: "то, что не существует, о нем ничего утверждать нельзя, но отрицать можно все" [3]. Таким образом, прежде чем что-то доказывать о геометрических фигурах, надо сначала принять их существование.

Важность этой аксиомы в своей книге "Основания геометрии" отмечает Д.Гильберт. Процитируем высказывание Гильберта "Здесь обычно исходят из предположения о существовании всех элементов, то есть заранее предполагают, что существуют 3 системы вещей, а именно точки, прямые и плоскости, а затем, в существенном, по примеру Евклида, устанавливают между этими элементами взаимоотношения, посредством известных аксиом". [4]

Аксиомы принадлежности спустя почти 600 лет впервые встречаются у Паша. Далее Н.Туси приводит шесть постулатов и семь аксиом Евклида. "Принятые (первоначальные) принципы.

1. Мы можем провести прямую линию между всякой парой точек;

2. Продлить ограниченную прямую линию в направлении;
3. Начертить круг от всякой точки и на любом расстоянии;
4. Все прямые углы равны;
5. Две прямые лини не охватывают поверхность;
6. На любых двух прямых линиях, на которых лежит [третья] прямая линия и оба внутренние углы в одном из направлений меньше двух прямых углов, они пересекутся в том же направлении, если их продолжить".[2]

Насиреддин Туси говорит: "это то, что показано в оригинале книги.

Я говорю: последнее утверждение не из числа аксиом и не из тех, что рассматривается вне геометрии ... я внесу ясность по существу там где надлежит. А в замене той (имеется ввиду 6-го постулата) я внес другоеутверждение. Оно заключается в следующем: прямые линии находящиеся на [одной] плоской поверхности, если они расходятся друг от друга в [одном] направлении, то они не могут сходиться в том же направлении. В противном случае они пересекаются".[2]

Далее Туси приводит аксиомы, он их называет общепринятыми (общеизвестными) знаниями:

- Вещи равные одной и той же вещи равны между собой;
- Если увеличить равные или уменьшить их на равное, в результате остаются равные между собой;
- Если увеличить неравные или уменьшить их на равное, в результате остаются неравные между собой;
- Те, которые, если увеличить их или уменьшить на равное, и в результате остаются равные, они равны между собой;
- Те, которые составлены из одинаковогочисла равных частей, равны между собой;
- Вещи, соответствующие друг другу без увеличения и уменьшения [их размеров] (дифференциации), равны между собой;
- Целое больше своей части.

В XI книге, посвященной стереометрии, Евклид не приводит никаких аксиом. Считается, что первые стереометрические аксиомы были сформулированы лишь в XVII веке итальянским математиком Джованни Борелли. В комментариях Мордухай - Болтовскогок XI книге читаем: "Клавий, как и Евклид, не давал стереометрических аксиом, но их дает Борели, выдвигающий следующие стереометрические аксиомы:

1. Две плоскости не имеют общей части.
2. Сечение двух плоскостей - прямая.
3. Первое предложение книги XI "Начал" Евклида".[5]

Н.Туси в своих комментариях к XIкниге после определений пишет: "Я говорю это были определения, теперь нам надлежит принять" и приводит 3 стереометрические аксиомы:

1. Через любую прямую можно провести плоскость.

2. Через любую прямую и (лежащую вне ее точку можно) провести (только одну) плоскость.

3. Две плоскости не охватывают пространства.[2]

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Матвиевская Г.П., Розенфельд Б.А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII-XVIIвв.), // т.2 - г. Москва, Изд-во Наука, 1983, 650 с.

2. Насиреддин Туси ТахриркитабУсул ал-хандаса ли-Уклидис // Рукопись, Санкт-Петербург РНБ, фонд Ханыкова, 141,Image_0001- Image_0080.

3. Насиреддин Туси Асас ал-иктибас // Тегеран, Изд-во Тегеранского Университета, 1947, 600 с.

4. Гильберт Д. Основания геометрии // ОГИЗ, Москва, 1948, 491 с.

5. Начала Евклида // книги XI-XV. Пер. с греч. Д.Д.Мордухай-Болтовского, Москва-Ленинград, Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950, 330 с.


---

УДК 51 (091)

## Об истории геометрических методов нелинейного анализа[1]

**Е. М. Богатов (Россия, г. Губкин; г. Старый Оскол)**
Филиал Национального Исследовательского Технологического Университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области;
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального Исследовательского Технологического Университета «МИСиС»
e-mail: embogatov@inbox.ru

## On the history of geometric methods of nonlinear analysis

**E. M. Bogatov (Russia, Stary Oskol; Gubkin)**
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology;
Gubkin Branch of f National Research University of Science and Technology “MISIS”
e-mail: embogatov@inbox.ru

Настоящая работа является продолжением исследований автора по истории нелинейного функционального анализа [1]-[2].

Цель работы - достичь понимания того, каким образом простые геометрические соображения (например, теорема о том , что невозможно причесать свернувшегося клубком ежа так, чтобы у него не торчала ни одна иголка) могли трансформироваться в полноценные математические инструменты для качественного исследования нелинейных уравнений.

**1. Конечномерный случай.**

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.

Мотивированный поиском подходов к решению пятой проблемы Гильберта, Л. Брауэр представил программу развития топологии (1909), частью которой являлось изучение семейства непрерывных биекций множества на себя [3]. Кроме того, он поставил себе целью решение проблемы размерности [4, §11] и на этом пути он получил несколько новых результатов, быстро ставших классическими. На начальном этапе (1909-10) Брауэр исследовал особые точки (сингулярности) непрерывных векторных полей (ВП) и доказал теорему о существовании неподвижной точки (НТ) отображения сферы в себя. В процессе доказательства он выделил класс непрерывных ВП с конечным числом сингулярностей, которые (т.е. поля) можно преобразовывать в себя непрерывным образом (класс *гомотопных* векторных полей). Это дало возможность обобщить теорему о НТ на $n$-мерный случай. Здесь Брауэр перешёл от использования индекса Пуанкаре, связанного с особой точкой ВП поверхности $S$, к кратности покрытия $S$ её образом $S' = f(S)$ с учётом ориентации, что привело к новому понятию - *степени отображения* $f$ $deg\, f = p - q$, где $p$ - число прообразов выделенного произвольного фрагмента $S' = f(S)$, имеющих положительную ориентацию; $q$ - число прообразов с отрицательной ориентацией [2, §2].

В качестве одного из важнейших приложений степени отображения была теорема о неподвижной точке [5, с.115 ]:

Теорема 1. *Если $deg\, f \neq (-1)^{n+1}$, то непрерывное отображение сферы в себя имеет неподвижную точку.*

Исследования Брауэра были продолжены Х. Хопфом, который исходил из того, что для изучаемых задач язык векторных полей $\mathbf{v}(p) = \{v_1(p), v_2(p), \ldots, v_n(p)\}$, заданных в $R^n$ будет более удобным, чем язык отображений. Хопф развил теорию, позволившую обобщить известную теорему Эйлера-Пуанкаре о связи числа вершин, рёбер и граней выпуклого $n$-мерного многогранника, на многообразия. Хопф также выявил необходимое и достаточное условие гомотопности отображений сферы $S^n$ в себя [6]:

*Два непрерывных отображения сферы $S^n$ в себя гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же степень отображения.*

Новый подход к доказательству теорем о НТ был связан с именами К. Борсука и С. Мазуркевича: каким свойством должно обладать *множество*, чтобы при *любом непрерывном его преобразовании в себя существовала НТ*? Ответом на вопрос стала теория ретрактов [7, с. 153; 159]:

$Y$ - *ретракт* множества $X$, $Y \subset X$ если существует непрерывное отображение $f : X \to Y$, оставляющее неподвижной каждую точку множества $Y$ (тогда $f$ - ретракция)
и доказана следующая теорема о неподвижной точке:

*Неретрагируемость области $\Omega$ на свою границу равносильно наличию свойства неподвижной точки.*

Множество $M$ обладает *свойством неподвижной точки*, если при любом непрерывном отображении этого множества в себя существует неподвижная точка.

Одним из применений теории ретрактов явилось доказательство теоремы *Борсука-Улама* (1933) [8, с. 177]:

*Если функция $f$ непрерывна на $n$-мерной сфере $S^n$ и нечётна, то на этой сфере найдётся точка $P_0$, в которой эта функция обращается в ноль.*

Эта является следствием из следующего утверждения о покрытии сферы:

*В любом замкнутом покрытии сферы $S^n$, состоящем из множеств $\{M_1, \ldots, M_{n+1}\}$, по крайней мере одно из этих множеств содержит пару антиподальных точек,*
которое было доказано ранее Л.А. Люстерником и Л.Г. Шнирельманом (1930) в [9, с. 30].

Их основным мотивом явилось получение топологического инварианта многообразия $M$, с помощью которого можно было бы оценивать число геометрически различных критических

точек функции[1] или функционала, заданных на $M$. Этот инвариант был назван Люстерником и Шнирельманом *категорией* множенства $A$ ($cat_M A$). Категория $A$ определялась, как минимальное число замкнутых множеств, в сумме покрывающих $A$, каждое из которых сводимо к точке путём непрерывной деформации в $M$.

Центральным результатом теории категорий явилась теорема об оценке числа $k$ критических точек функции $f$ через $cat\, M$ ($k \geq cat\, M$), а также применение этой теоремы к оценке числа геодезических на поверхности рода 0 [9, Гл. IV, §1].

**2. Бесконечномерный случай.**

Обобщение перечесленных выше результатов на случай бесконечномерных пространств представляло собой значительные трудности, так как бесконечномерная картина зачастую *качественно* отличается от конечномерной.

Тем не менее, используя некоторые идеи Дж. Биркгофа и О. Келлога [1, §3], Ю. Шаудеру удалось обобщить теорему Брауэра о неподвижной точке (1927):

Теорема 2. *Если в банаховом пространстве с базисом непрерывный оператор $A$ переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то у него существует неподвижная точка $y$: $Ay = y$ .*

С помощью этой теоремы Шаудер доказал разрешимость квазилинейных уравнений математической физики (как, например, квазилинейное уравнение Пуассона $\Delta u = f(x, y, u, u'_x, u'_y)$), сведя их предварительно к интегральным уравнениям Гаммерштейна.

Наиболее подходящими отображениями, удовлетворяющими теореме 2 и сохраняющими свойство полноты образов, оказались *вполне непрерывные операторы*. Их выбор определил развитие нелинейного функционального анализа на многие десятилетия вперёд (в теории линейных операторов большее значение имеют непрерывные (но не обязательно вполне непрерывные) операторы. Вполне непрерывные операторы $A : U \to E$ хорошо аппроксимируюся конечномерными операторами, для них возможно определить степень отображения $Deg(I - A, U, z)$ через степень отображения Брауэра. Этот шаг был сделан Ж. Лере и Ю. Шаудером (1934) [10]. Выбирая (произвольно) конечномерное подпространство $E_n \subset E$, они определили степень отображения $\Phi = I - A$ для области $U \subset E$ и точки $z \in U$, как *локальную* степень отображения Брауэра, определённую для сужения $\Phi$ на $E_n$ (подробности см., например, в [1, §7]:

$$Deg[\Phi, U, z] \stackrel{def}{=} deg[\Phi|_{E_n}, U \cap E_n, z].$$

Новая степень отображения унаследовала все свойства конечномерной степени, в том числе принцип неподвижной точки:

*Пусть $A : U \to U$ - вполне непрерывный оператор, такой, что $\Phi = I - A$ не имеет нулей на $\partial U$. Тогда, если $Deg[\Phi, U, 0] \neq 0$, то $\exists y \in U : Ay = y$.*

Этот принцип (прицип Лере-Шаудера) позволил доказывать теоремы существования решений целого семейства нелинейных уравнений с параметром: $Ay = \lambda y$.

В 1938 г. Э. Роте сделал первый шаг в придании геометрического смысла степени отображения Лере-Шаудера. Он определил *порядок* $\Gamma$ точки $z$ для вполне непрерывного "сдвигового" отображения $\Phi = I + A$ шаровой области $B^\infty \subset E$ с границей $S^\infty$ по правилу

$$\Gamma(\Phi, S^\infty, z) \stackrel{def}{=} (\Phi_n, B^n, z), \tag{1}$$

где $\Phi_n = \Phi|_{B^n}$; $\partial B^n = S^n$; $S^n = S^\infty \cap E_n$; $E_n$ - конечномерное подпространство $E$ .

Опираясь на свойства порядка (1), Роте доказал теорему о неподвижной точке следующего вида

[1] Для оценки числа *аналитически* различных критических точек к тому времени уже научились использовать числа Бетти (в рамках теории М. Морса).

*Пусть оператор $A : B^\infty \to E$ – вполне непрерывен, причём $A(\partial B^\infty) \subset B^\infty$. Тогда существует неподвижная точка: $Ax{=}x$.*

Вернёмся к теории категорий. Её использование помогло оценить количество критических точек чётных однородных функционалов $F$ на сферах $S^\infty$ гильбертова пространства $H$ (Люстерник, 1939; [11]). Свойство чётности дало возможность перейти к исследованию $F$ на проективных пространствах, полученных отождествлением антиподальных точек $S^\infty$. Этот результат был усилен М.А. Красносельским в 1952 г. [12], который доказал, что

*гладкий чётный функционал $F$ ($F\varphi \geq 0, \quad \varphi \in B^\infty \subset H$) имеет на сфере $S^\infty$ не менее, чем счётное число различных критических точек, которым соответствуют различные критические значения.*

В основу доказательства легли свойства нового топологического инварианта, введённого Красносельским - *рода множества*. Компакт $F \subset S^\infty$ - *множество 1-го рода*, если любая связная компонента $F \cup F^*$ не содержит ни одной пары симметричных точек $\{x, -x\}$. $F \subset S^\infty$ – *множество n-го рода*, если оно покрывается не менее, чем $n$ множествами 1-го рода.

Геометрический подход Роте к определению степени отображения был обобщён М.А. Красносельским (1954). Он связал степень $\Phi = I - A$ при отображении области $U \subset E$ , с вращением соответствующего векторного поля $\mathbf{\Phi}$ на её границе $\partial U$ :

$$Deg(\Phi, U) \stackrel{def}{=} \gamma(\mathbf{\Phi}, \partial U), \tag{2}$$

где правая часть равенства (2) также определась через вращение суженного на произвольное подпространство $E_n$ поля $\mathbf{\Phi}$ [13]. Введённая Красносельским степень отображения имела, в отличие от степени Лере-Шаудера, *нелокальный* характер.

Используя определение (2), Красносельский показал, что

*Для существования неподвижной точки вполне непрерывного поля $\mathbf{\Phi}$ внутри области $G$ банахова пространства $E$ достаточно, чтобы вращение этого поля на границе $G$ было отлично от нуля (принцип неподвижной точки Красносельского).*

**Заключение.**

Несмотря на некоторую неполноту охвата (в доклад не вошла теория конусов и положительных операторов) представленные выше геометрические методы анализа образовали "скелет" теории, которая позволила в 1960-х гг. найти подход к решению значительного количества нерешённых ранее задач нелинейного естествознания (см., например, [14]).

Автор выражет признательность профессору Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСиС) за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатов Е.М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.) // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 30–55.

2. Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Том 27, № 1. С. 96–114.

3. Freudenthal H. The cradle of modern topology, according to Brouwer's inedita // Historia Mathematica. 1975. Vol. 2, Iss. 4. P. 495-502.

4. Charatonik J. J. History of continuum theory // Handbook of the history of general topology. – Springer Netherlands, 1998. P. 703-786.

5. Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Mathematische Annalen. 1911. Vol. 71. P. 97-115.

6. Hopf H. Abbildungklassen $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Mathematische Annalen. 1926. Vol. 96. S. 209-224.

7. Borsuk K. Sur les rétractes // Fundamenta Mathematicae. 1931. Vol. 17.1. P. 152-170.

8. Borsuk K. Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Mathematicae. 1933. Vol. 20.1. P. 177-190.

9. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. — М.: Исследовательский ин-т математики и механики при 1-м МГУ, 1930. 68 с.

10. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1934. Vol. 61. P. 45-73.

11. Люстерник Л. А. Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве // Известия РАН. Серия математическая. 1939. Т. 3, №. 3. С. 257-264.

12. Красносельский М.А. Об оценке количества критических точек функционалов // Успехи математических наук. 1952. Том 7, Вып. 2 (48). С. 157–164.

13. Красносельский М.А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи математических наук. 1954. Том 9, Вып.3 (61). С. 57-114.

14. Ziedler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. IV: Applications to Mathematical Physics. — Springer-Verlag, New York. 1988, 993 p.

---

УДК 51 (091)

## О ранней истории нелинейных интегральных уравнений[1]

**Е. М. Богатов (Россия, г. Губкин; г. Старый Оскол)**
Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области;
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
e-mail: embogatov@inbox.ru
**Р. Р. Мухин (Россия, г. Старый Оскол)**
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
e-mail: mukhiny@mail.ru

## On the early history of nonlinear integral equations

**E. M. Bogatov (Russia, Stary Oskol; Gubkin)**
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISIS"
Gubkin Branch of f National Research University of Science and Technology "MISIS"
e-mail: embogatov@inbox.ru
**R. R. Mukhin (Russia, Stary Oskol)**

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.

Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISIS”
e-mail: mukhiny@mail.ru

Интегральные уравнения составляют обширную и активно разрабатываемую область современной математики. Они сыграли решающую роль в формировании функционального анализа. Самостоятельное место в теории интегральных уравнений занимают нелинейные уравнения. Их значение особенно усилилось во второй половине XX в., когда нелинейные системы стали привлекать пристальное внимание. Нелинейные интегральные уравнения (НИУ) составляют ядро нелинейных операторных уравнений, исследование которых в немалой степени придаёт математике ее современный вид.

По всей видимости, первое (линейное) интегральное уравнение возникло в 1743 г. в работе А. Клеро [1] по теории фигуры Земли. В модели неоднородной вращающейся жидкости это уравнение содержало зависимость плотности $\rho(r)$ сердцевины планеты в форме сфероида $S$ от функции сжатия её слоёв $\alpha(r)$ ($r$ - средний радиус $S$):

$$\alpha\int_0^r \rho r^2 dr - \frac{1}{5r^2}\int_0^r \rho d(r^5\alpha) - \frac{r^3}{5}\rho d\alpha = \frac{r^3\varphi}{2}\int_0^1 \rho r^2 dr, \tag{1}$$

где $\varphi$ - отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе планеты.

В своих исследованиях формы Земли, Р. Радо преобразовал дифференциальное уравнение Клеро (следствие из (1)) [2, с. 158] и пришёл к интегральному уравнению (1885)

$$r^5\sqrt{1+\eta}D = \int_0^r \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left(1+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta^2}{10}\right)dr, \tag{2}$$

где $D = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho dr^3$; $\eta = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}$.

Уравнение (2) является, по-видимому, *первым нелинейным интегральным уравнением*. Отметим, что это уравнение использовал А. Пуанкаре в своих лекциях по фигурам равновесия жидкой массы (1900).

Другая линия развития НИУ восходит к нелинейным краевым задачам. В 1890 г. Э. Пикар свёл задачу Дирихле для уравнения Лиувилля:

$$\Delta u = ke^u; \quad u = u(x,y), \quad (x,y)\in\Omega\subset R^2, \quad k = Const$$

к интегральному уравнению

$$u(x,y) = -k\int_\Omega e^{u(\xi,\eta)}G(\xi,\eta,x,y)d\xi d\eta, \tag{3}$$

где $G(M(\xi,\eta),N(x,y))$ - функция Грина уравнения Лапласа в области $\Omega$ [3]. Пикар построил рекуррентную последовательность, сходящуюся к решению уравнения (3).

Подход Пикара к исследованию НИУ развивали в дальнейшем ряд его учеников (Г. Брату, Т. Лалеску и др. [4, §4]).

Специфика НИУ заключается в возможной неединственности их решений. Уравнение вида (3) является частным случаем уравнения

$$u = F(u,k),$$

где нелинейный оператор $F$ зависит от числового параметра $k$.

Особый интерес представляют критические значения $k$, когда разветвляются или слипаются несколько решений. Указанная специфика в работах цитированных выше авторов была отражена слабо. В полной мере она была раскрыта в работах А.М. Ляпунова по теории фигур

равновесия вращающейся жидкости [5]. Этой теме Ляпунов посвятил девять работ, вышедших в 1903 – 1916 гг, в которых, в частности, было приведено доказательство существования неэллипсоидальных форм равновесия и дано решение сложнейшего вопроса об устойчивости грушевидной фигуры равновесия [4, §2].

В основе теории Ляпунова лежало уравнение вида

$$R\zeta - \int_S \frac{\zeta' d\sigma}{D} = W(\zeta, \rho), \tag{4}$$

$\zeta = \zeta(\theta, \varphi)$ - искомая функция, характеризующая отклонение поверхности фигуры равновесия от исходного эллипсоида $E_0$, соответствующего $\zeta = 0$; $R = R(\rho, a)$; $D$ - расстояние между точками $\zeta(\theta, \varphi)$ и $\zeta'(\theta', \varphi')$ на эллипсоиде $E_0$; $S$ - поверхность единичной сферы; $d\sigma$ - элемент её площади; $W = \sum\limits_n W_n(\zeta)$ - интегростепенной ряд.

Математический аппарат теории ветвления малых решений НИУ был развит учеником Д. Гильберта Э. Шмидтом (1908). Он рассмотрел более общий (близкий к операторному) вариант уравнений вида (4)

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

простейший пример которых можно представить так:

$$u(x) + \int\limits_a^b K(x, y)u(y)dy = v(x) + \sum_{m+n>1} a_{mn} u^m(x) v^n(x), \tag{6}$$

где $v(x)$ - заданная непрерывная функция [6].

В общем виде вместо степенного ряда в правой части (6) стоит интегро-степенной ряд (детали см., например, в [4, §3]).

Для исследования разрешимости уравнений вида (6) при малых $v(x)$ Шмидт рассмотрел его как уравнение с известной правой частью и применил теорию линейных уравнений Фредгольма. Это дало возможность использовать идею принципа обращения ряда, разработанную Х. фон Кохом в 1899 г. В случае, когда единица не является собственным значением линейного интерального оператора, представленного вторым слагаемым в левой части (6), Шмидт представил решения (5) в виде

$$u(x) = \sum_{n+m\geq 1} \xi^n V_n^m \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $V_n\binom{x}{v}$ - интегро-степенная форма степени $n$ относительно функции $v$; $\xi$ - параметр.

Для определения возможных значений $\xi$ Шмидт получил *конечномерное* алгебраическое нелинейное уравнение $m-$й степени ($m \geq 2$), которое было им названо *уравнением разветвления.* С помощью (7) и уравнения разветвления можно получить иформацию о числе и виде всех малых решений *бесконечномерного* уравнения (5) .

В 1918 г. к НИУ обратился П.С. Урысон [7]. Опираясь на возможность перехода от нелинейных краевых задач к интегральным уравнениям, Урысон рассмотрел уравнение общего вида

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, s, y(s))ds, \quad \lambda > 0 \tag{8}$$

интересуясь его положительной разрешимостью и исследовал его спектральные свойства, заложив новое направление качественного анализа НИУ [8].

Частным случаем уравнения Урысона явилось уравнение А.И. Некрасова, полученное им при моделировании течения жидкости вокруг препятствия (1921) [9, с.255]

$$h(\theta) = F(\theta) + \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - e^{-h(\varepsilon)}\right) K(\varepsilon, \theta) d\varepsilon. \tag{9}$$

Опираясь на результаты Т. Леви-Чивиты (1907) и А. Вилла (1911), Некрасов также вывел уравнение волны установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости, подобное уравнению (9) (1921) и предложил сходящийся алгоритм его решения [9, с.35-51] (до Некрасова в подобных задачах отбрасывались нелинейные члены, что оставляло открытым вопрос *о самом существовании* установившихся волн).

Для исследования (9) и его аналогов Некрасов разработал самостоятельную теорию интегральных уравнений вида

$$f(x) = \lambda \int\limits_a^b f(y) K(x, y) dy + \varepsilon\lambda \int\limits_a^b R[\lambda, y, f(y)] K(x, y) dy, \tag{10}$$

с симметричной функцией $K(x, y)$, доказал их разрешимость и показал наличие ветвления их малых решений [9, с.79-91].

Ещё один важный частный случай уравнения Урысона (8) был исследовани А. Гаммерштейном (1931) (см. позицию 94 списка литературы в [4]):

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, s) f(s, y(s, y(x)) ds. \tag{11}$$

Такие уравнения имеют большое значение в теории нелинейных краевых задач.

Гаммерштейн доказал разрешимость (11) "в целом" , используя вариационныей метод В. Ритца (1909); изучил ветвление его решений, а также выявил ряд условий на функцию $f(s, y)$, при которых уравнение (11) имеет единственное решение. Одним из таких условий является условие монотонного неубывания функции $f(x, y)$ по $y$ $\forall x \in [a, b], y \in \mathbf{R}$.

Все упомянутые выше авторы (кроме Гаммерштейна) использовали методы математического анализа, выполняя поиск решения НИУ в виде ряда и доказывая его сходимость, либо строя рекуррентную последовательность, сходящуюся к решению НИУ. На смену этих методов должен был прийти подход, позволяющий работать со всем множеством решений одновременно. Реализация этого подхода стала возможной благодаря функционально-аналитическому методу сжимающих отображений, восходящего к С. Банаху (1922). Одним из первых её осуществил Л. Лихтенштейн в работе [10] (1931), который стал рассматривать интегро-степенные формы, как функционалы. Это позволило ему снять ограничения на равномерную сходимость ряда в правой части (6) и рассмотерть более общие случаи (системы НИУ, интегро-дифференциальные уравнения и проч.)

В докладе также будет представлен вклад в развитие НИУ советского математика Н.Н. Назарова и его иностранного коллеги Р. Иглиша, а также проведён сравнительный анализ достижений отечественной и западной науки в указанной области с начала XX в. до конца 1930-х гг.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clairaut A. C. Théorie de la figure de la Terre: tirée des principes de l'hydrostatique. – chez David Fils, libraire, 1743. – v. 668 , 305 p.

2. Radau R.R. Remarques sur la théorie de la figure de la Terre // Bulletin astronomique, t. II (1885), p. 157-161.

3. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1890. – V. 6. – p. 145-210.

4. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. № 2. С. 77-114.

5. Ляпунов А.М. Собрание сочинений., Т. III. М.-Л. Издательство АН СССР, 1959г. 379 с.

6. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösing der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Mathematische Annalen, **65** (1908), s. 370-399.

7. Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник, 31:2 (1923), с. 236–255.

8. Богатов Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского // Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика, Физика. 2020. Т. 52, № 2, с. 105-127.

9. Некрасов А. И. Собрание сочинений, Т. 1. Отв. ред. Я.И. Секерж-Зенькович. М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 444 с.

10. Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen / Julius Springer, Berlin, 1931. 164 p.

---

УДК 51(092)

## Пути развития математического анализа в ТГПУ им. Л. Н. Толстого

**И. В. Денисов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: den_tspu@mail.ru
**Е. В. Манохин (Россия, г. Тула)**
Тульский филиал Финуниверситета
e-mail: emanfinun@mail.ru

## Ways of developing mathematical analysis at TSPU

**I. V. Denisov (Russia, Tula)**
Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University
e-mail: den_tspu@mail.ru
**E. V. Manokhin (Russia, Tula)**
Tula branch of the Financial University
e-mail: emanfinun@mail.ru

Осенью 1939 года на факультет удалось пригласить молодых ученых-математиков, специалистов в области математического анализа и дифференциальных уравнений. Ими были супруги П.В. Соловьев и В.М. Гущина.

Павел Васильевич Соловьев был назначен деканом физико-математического факультета. В 1941 году П.В. Соловьев добровольцем ушел на фронт, погиб в 1943 году. Научные интересы П.В. Соловьева были связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, поэтому он неразрывно связан с развитием математического анализа на факультете.

В 1941 году деканом факультета становится Валентина Михайловна Гущина, которая проработала на этом посту 20 лет. Валентина Михайловна не только смогла вырастить и поставить на ноги своих дочерей, но и по-матерински заботиться о факультете. Именно она обеспечила не только развитие, но и расцвет факультета на годы вперед.

С 1950 года начинается история математического анализа в Тульском государственном педагогическом институте, когда единственная кафедра физико-математического факультета была разделена и появились две математические кафедры: кафедра математического анализа (зав. кафедрой С.П. Слугинов) и кафедра геометрии и алгебры (зав. кафедрой Н.П. Петрушкин). На кафедре математического анализа работало 8 человек.

В 1950 г. на кафедре математического анализа сменился заведующий, им стал доцент В.Д. Подсыпанин. Была открыта аспирантура, однако ее становление связано с приходом в июне 1951 года в качестве заведующего кафедрой известного ученого в области теории функций, доктора физико-математических наук, профессора В.И. Левина. С.Н. Лёвина стала первой выпускницей аспирантуры кафедры, успешно защитившей диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Учениками профессора В.И. Левина были многие выпускники института, впоследствии работавшие на кафедре: Н.С. Ефимова, В.С. Аристова (Зотова), И.С. Есипова, В.М. Чернов, Л.В. Исаева (Пестун) и др.

До 1966 года название кафедры менялось с «математического анализа» на «высшую математику» и обратно. С 1956-1957 учебного года на факультете были образованы три математические кафедры. Кафедру математического анализа возглавила В.М. Гущина. В 1964 году физико-математический факультет был разделен на два факультета: математический и физико-технический.

В 1960-х годах укрепилась научная и педагогическая составляющая кафедры математического анализа. На кафедру пришли доценты В.И. Антропова (1964), В.И. Рыбаков (1969) и А.С. Симонов (1971). Выросло мастерство питомцев В.М. Гущиной – В.С. Аристовой (Зотовой), Н.С. Ефимовой и Л.В. Исаевой (Пестун). Почти все преподаватели кафедры вели кружки и читали спецкурсы. В эти годы под руководством старшего преподавателя кафедры математического анализа В.Е. Зубарева была создана математическая школа для старшеклассников, которая продолжается и поныне.

С 1976 года после ухода В.М. Гущиной на пенсию и сменой декана приоритет отдается алгебраической школе проф. М.Д. Гриндлингера. Это способствовало подготовке большого числа квалифицированных кадров. Специализация в области математического анализа, геометрии и методики преподавания математики была возможна только в других городах.

В 70-ые годы началась смена поколений: на освободившееся в 1976 году место В.М. Гущиной пришел А.Г. Луценко. В 1977 г. после окончания института приступил к работе И.В. Денисов. В 80-ые годы коллектив кафедры стал пополняться молодыми преподавателями – талантливыми выпускниками: 1986 г. - В.А. Шулюпов, 1987 г. - Исаева Н.М., 1988 г. - Ребров Д.Э. (проработал до 1995 года), 1990 г. - Е.В. Манохин (проработал до 2009 года). Были приняты также В.М. Чернов (1982 г.) и А.Г. Пашковская (1982 г.). Штатное расписание увеличилось до 14 ставок, приходилось вести совместительство. Преподаватели кафедры математического анализа всегда отличалась активной гражданской позицией, что, несомненно, способствовало развитию факультета.

Однако в конце 90-х годов начались сокращения штатов. 1 декабря 2008 года была поставлена последняя точка в истории кафедры математического анализа на факультете: в результате очередной реорганизации все математические кафедры объеденены в одну.

Вспоминая атмосферу кафедры до начала 2000-х годов, бывшие преподаватели отмечают дружелюбный настрой среди преподавателей. Застолья не практиковались, но все основные события отмечались: часто дарили книги по математике и разные мелочи. В двухтысячных годах традиции стали куда-то уходить, возможно этому способствовала обстановка в стране.

---

УДК 51-74

## Применение высокоскоростных моделей деформирования для моделирования процесса разрушения композиционных конструкций

**Г. М. Журавлёв (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: technology@tsput.ru
**В. Г. Теличко (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: katranv@yandex.ru
**Н. С. Куриен (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный университет
e-mail: kyrien@mail.ru
**А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
**О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)**
ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**В. Ю. Кузовлев (Россия, г. Москва)**
Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя

## The application of high-speed deformation models for modeling the process of destruction of composite structures

**G. M. Zhuravlev (Russia, Tula)**
Tula state University
e-mail: technology@tsput.ru
**V. G. Telichko (Russia, Tula)**
Tula state University
e-mail: katranv@yandex.ru
**N. S. Kurien (Russia, Tula)**
Tula state University
e-mail: kyrien@mail.ru
**A. E. Gvozdev (Russia, Tula)**
Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)**
Russian state University of justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**V. Yu Kuzovlev (Russia, Moscow)**
Moscow University of the Ministry of internal Affairs of Russia named after V. Ya. Kikotya

На сегодняшний день существует риск разрушения для большого количества зданий от различных аварийных ситуаций, в связи с развитием взрывоопасных отраслей промышленности, что выдвигает ответственную и сложную задачу охраны населения, обслуживающего персонала и окружающей среды от аварий [1]. Современная нормативная база проектирования и эксплуатации зданий, содержит многолетний опыт, анализа причин обрушения, учитывает большое количество воздействий на конструкции (динамические нагрузки, климатические воздействия, временные и постоянные) в течение всего срока службы. Однако возрастающее количество аварий, с разной степенью разрушений, как отдельных частей, так и всего строения, говорит о том, что воздействие, вызвавшее разрушение, не было учтено в нормативных документах, на основании которых был спроектирован объект. Первостепенное значение приобретает анализ возможных отклонений от нормальных эксплуатационных режимов на данных производствах и тщательное изучение возможного развития различных аварийных ситуаций, приводящих к динамическим воздействиям на сооружения [2].

Стратегия борьбы с взрывами и реализация мер по смягчению последствий взрыва требуют внимания и решения, начиная с этапов планирования и проектирования опасного производственного объекта.

В настоящий момент существуют два пути уменьшения последствий воздействия взрыва: разработка взрывоустойчивой конструкции зданий и сооружений на вновь проектируемых или реконструируемых объектах; создание универсального защитного устройства, способного эффективно снизить интенсивность падающей ударной волны и удовлетворить требованиям по его размещению в условиях существующей плотной застройки на опасных объектах [3, 4]. В обоих случаях для строительства конструкции, устойчивой к взрывам, изначально необходимо определить величину взрывной нагрузки, которую может выдержать конструкция.

Методы, доступные для прогнозирования эффектов взрыва, можно сгруппировать по трем основным категориям: эмпирические (или аналитические), полуэмпирические и численные (первого порядка). Динамическое поведение материалов при этом выражено эмпирическими зависимостями, полученными на основе экспериментов, проведенных на этих материалах [5]. Под эту категорию подпадают методы: конечных элементов (англ. Finite Element Method), конечных разностей (англ. Finite difference Method) и граничных элементов (англ. Boundary Element Method) [6, 7].

В связи с этим нахождение условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с использованием метода, доступного для прогнозирования эффектов взрыва, в контексте с применением современных программных комплексов основанных на методе конечных элементов (КЭ) представляет собой актуальную задачу, особенно в прикладном плане.

В работе для описания прочности конструкции использована модель прочности RHT (Riedel-Hiermaier-Thoma) [8], разработанная специально для высокоскоростного деформирования железобетона. Данная модель является модульной и описывает поведение упругопластического тела с упрочнением и широко применяется в современных комплексах САПР [9].

Поверхность разрушения, то есть предел прочности бетона, формируется из параметров материала, включая прочность бетона на сжатие, растяжение и сдвиг.

RHT модель использует модель объемного уплотнения. Разгрузка происходит по текущей упругой жесткости и приведет к постоянной объемной деформации при нулевом давлении, последующий новый этап загружения происходит по кривой разгрузки. Когда давление до-

стигает давления закрытия пор, материал считается полностью уплотненным ($\alpha = 1$) и будет описываться обычными уравнениями состояния для бетона.

В модели RHT часть сдвиг и давление связаны, причем давление описывается в форме уравнения Ми-Грюнейзена [4] с полиномиальной кривой Гюгонио и отношением уплотнения $p$-$\alpha$. Для модели уплотнения определяется переменная, представляющая собой пористость $\alpha$, которая меняется в диапазоне от 0 до 1. Эта переменная является текущей долей плотности между материалом матрицы и пористым бетоном, и будет уменьшаться с увеличением давления [8]. Формула пористости:

$$\alpha(t) = \max\left(1, \min\left(\alpha_0, \min_{s \leqslant t}\left(1 + (\alpha_0 - 1)\left[\frac{P_{comp} - p(s)}{P_{comp} - p_{el}}\right]^N\right)\right)\right), \tag{1}$$

где $p(t)$ — величина давления, $t$ — время, $p_{el}$ — начальное давление закрытия пор, $p_{comp}$ — давление уплотнения, $N$ — экспоненциальный показатель пористости.

Для дальнейшего использования, учитывая данные [8], необходимо знать предельное давление, или текущее давление закрытия пор материала:

$$p_c = p_{comp} - (p_{comp} - p_{el})\left[\frac{\alpha - 1}{\alpha_0 - 1}\right]^{1/N}. \tag{2}$$

Для описания прочности на сдвиг необходимо учитывать давление:

$$p^* = p/f_c, \tag{3}$$

где давление нормализовано с параметром прочности на сжатие.

Упрочнение описывается линейно по отношению к пластической деформации:

$$\varepsilon_p^* = \min\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p^h}, 1\right), \tag{4}$$

$$\varepsilon_p^h = \frac{\sigma_y(p^*, s, \varepsilon_p, \varepsilon_p^*)(1 - F_e F_c)}{\gamma 3 G^*} \tag{5}$$

Здесь $G^* = \xi G$, где $G$ — модуль сдвига исходного материала, а $\xi$ — понижающий фактор, отражающий упрочнение.

Когда упрочнение достигает предела прочности бетона на поверхности разрушения, повреждения накапливаются при дальнейшем неупругом нагружении, контролируемой пластической деформацией. Пластическая деформация при разрушении, учитывая данные [8], определяется следующим образом:

$$\varepsilon_p^f = \begin{cases} D_1(p^* - (1 - D)p_t^*)^{D_2} \\ \varepsilon_p^m \end{cases} \tag{6}$$

Параметр повреждения при пластическом деформировании определяется в соответствии с формулой:

$$D = \int\limits_{\varepsilon_p^k}^{\varepsilon_p} \frac{d\varepsilon_p}{\varepsilon_p^f}. \tag{7}$$

Для демонстрации работы, приведенной модели, была решена задача о расчете взрывозащитного сооружения. Решение выполнено на базе LS-DYNA из пакета ANSYS [10], где реализована модель RHT. Материалом конструкции принимался бетон с прочностью 35 МПа, величина заряда 1,4 кг в тротиловом эквиваленте.

Воздействия на сооружения, вызванные динамическими нагрузками, возникают сравнительно редко, однако учитывать их необходимо, поскольку многие из них могут быть причиной разрушения или повреждения зданий и сооружений, влиять на сохранность оборудования и угрожать здоровью и жизни людей.

Нахождение условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с учетом критерия прочности RHT позволяет прогнозировать, возникающее напряженно-деформированное состояние элементов железобетонной конструкции, динамику ее изменения во времени, что дает возможность прослеживать образование и развитие участков разрушения.

Применением современных программных комплексов LS-DYNA в сочетании с моделью бетона RHT, в отличие от существующих теоретических моделей позволяет легко и эффективно учитывать различные дополнительные факторы, такие как армирование и физическую нелинейность материалов, а также сложную конфигурацию сооружений и расположение внешней нагрузки.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бирбраер А. Н., Роледер А. Ю. Экстремальные воздействия на сооружения. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 594 с.

2. Методика оценки последствий аварийных взрывов топливно-воздушных смесей: рук. по безопасности: приказ Ростехнадзора от 31 марта 2016 г. № 137. Сер. 27. Вып. 15. М.: ЗАО НТЦ ПБ, 2016. 44 с.

3. Методы обоснования взрывоустойчивости зданий и сооружений при взрывах топливно-воздушных смесей на опасных производственных объектах: рук. по безопасности: приказ Ростехнадзора от 13 мая 2015 г. № 189. Сер. 27. Вып. 17. М.: ЗАО НТЦ ПБ, 2016. 78 с.

4. Uddin N. Blast Protection of Civil Infrastructures and Vehicles Using Composites. – New York, 2010. 488 p.

5. Баженов Ю. М. Бетон при динамическом нагружении. – М.: Стройиздат, 1970. 271 с.

6. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

7. Дегтярев Д. В., Лисанов М. В., Сумской С. И., Швыряев А. А. Количественный анализ риска при обосновании взрывоустойчивости зданий и сооружений // Безопасность труда в промышленности. 2013. № 6. С. 82–89.

8. Riedel W., Thoma K., Hiermaier S. Schmolinske E. Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500. Numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes. Proceeding of 9th international symposium on interaction of the effects of munitions with structures. Berlin, 1999. Pp. 315-322.

9. Агапова Е. А., Дегтярев Д. В., Лисанов М. В. Сравнительный анализ российских и зарубежных методик и компьютерных программ по моделированию аварийных выбросов и оценке риска // Безопасность труда в промышленности. 2015. № 9. С. 71–78.

10. Журавлев Г. М., Куриен Н. С. Постановка задачи математического моделирования взрывостойкости и гарантированного разрушения пластин взрывной нагрузкой // Научно-технический журнал. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии Изд-во ОГУ им. И.С. Тургенева. – Орел, 2017. № 2. С. 56–63.

---

УДК 51(092)

# Возникновение теории B-функции в работах Л. Эйлера

**И. В. Игнатушина (Россия, г. Оренбург)**
Оренбургский государственный педагогический университет
e-mail:streleec@yandex.ru

# The emergence of the $B$-function theory in the works of L. Euler

**I. V. Ignatuhhina (Russia, Orenburg)**
Orenburg state pedagogical University
e-mail: streleec@yandex.ru

Важнейшими, после элементарных, являются специальные функции. В настоящее время они широко используются при решении многих задач естествознания и техники. К числу таких функций относится и бета-функция.

B-функция[1]- это функция от двух переменных $a$ и $b$, обозначаемая $B(a,b)$ и определяемая с помощью интеграла (эйлерова интеграла 1-го рода)

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \tag{1}$$

где $Rea > 0$, $Reb > 0$.

Если аргументы $a$ и $b$ являются натуральными числами, то

$$B(a,b) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} = \frac{1}{aC_{a+b-1}^{b-1}} = \frac{1}{bC_{a+b-1}^{a-1}}.$$

Задачи, приводящие к эйлерову интегралу 1-го рода, возникли ещё во второй половине XVII в. Так, в своей "Арифметике бесконечных"(1656) Валлис (1616-1703) в поисках, как он выражался, "истинной квадратуры круга в числах"использовал по существу интегралы вида

$$\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx, \tag{2}$$

которые при подстановке $x = y^p$ преобразуются в

$$p\int_0^1 (1-y)^q y^{p-1}dy = pB(q+1,p).$$

С помощью неполной индукции Валлис установил, что при $p$ и $q$ натуральных обратные значения для интеграла (2) выражаются фигурными числами различных порядков[2] , т.е. числами сочетаний

[1]Такое название было предложено в 1839 г. Ж. Бине (1786-1856).

[2]Фигурные числа 1-го порядка - это натуральные числа, т.е.$C_n^1$ ; фигурные числа 2-го порядка - треугольные, т. е. $C_n^2$ , а третьего порядка - пирамидальные, т. е. $C_n^3$ . Вообще фигурные числа $k$-го порядка суть суммы чисел $(k-1)$ - го порядка и равны $C_n^k$.

Впервые теорию фигурных чисел разработали ученые школы Пифагора (VI в. до н. э.). Связь между фигурными числами и биномиальными коэффициентами знали Отред (1574 -1660) и Валлис; Б.Паскаль (1623-1662) её строго доказал [1, т.II, с.153].

$$\frac{1}{\int\limits_0^1 (1-x^{1/p})^q dx} = \frac{(p+1)(p+2)...(p+q)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} = C_{p+q}^q = C_{p+q}^p.$$

Здесь же он привел таблицы фигурных чисел и их обобщений для $p = 1/2$ и $q = 1/2;\ 3/2;\ 5/2;\ 7/2; ...$

Схожий результат имеется и в "Началах видовой геометрии"(1659) Менголи (1625-1686), где он произвел квадратуру кривых $y = x^p(1-x)^q$ для натуральных $p$ и $q$, что соответствует равенству

$$\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{1}{p+q+1} : C_{p+q}^p.$$

Однако появлению $B$-функции и разработке основ её теории наука обязана Леонарду Эйлеру (1707-1783). К введению в математику этой функции его привело исследование трех проблем.

Первой из них является *задача об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов,* определяемых формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{если n и m - натуральные.}$$

Требуется найти конечное выражение для общего члена этой последовательности, если $n$ и $m$ являются действительными положительными числами. Другими словами, нужно обобщить понятие биномиального коэффициента на случай непрерывно изменяющихся положительных аргументов $n$ и $m$.

К решению этой задачи Эйлер вплотную подошел в мемуаре E19 ("О трансцендентных рядах, т.е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически"[3]) , сданном в печать в 1729г. и опубликованном в 1738г. Ею он продолжал заниматься на протяжении всей жизни. Об этом свидетельствуют записные книжки ученого и его поздние мемуары, например, E768 ("De unciis potestatum binomii earumque interpolatione"[4]) , появившийся в печати только в 1824г.

Другая проблема, приведшая к введению в математический анализ $B$-функции, связана с *исследованием вопроса об интегрируемости в конечном виде биномиального дифференциала*

$$x^m(\alpha+\beta x^n)^p dx, \tag{3}$$

где $\alpha$ и $\beta$ - произвольные постоянные, отличные от нуля, а показатели $m, n, p$ - рациональные числа. Это видно из первого тома "Интегрального исчисления"(1768г.) Эйлера [2], где отмечается, что интегралы от биномиальных дифференциалов в общем случае зависят от одной и той же трансцендентной функции. Если рассмотреть определенный интеграл на отрезке $[0;1]$ от выражения (3) при условии, что $\alpha = 1$ , $\beta = -1$, то этой трансцендентной функцией будет $\frac{1}{n}B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)$.

И, наконец, третья задача связана с *поиском решения дифференциального уравнения вида*:

$$\frac{\partial^q y}{\partial x^q} = q! x^{p-q}, \tag{4}$$

где $p$ и $q$ могут быть и нецелыми числами. Исследованию этой задачи Эйлер посвятил мемуар E681("Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus earumque integrationis"[5]),

сданный в печать в 1781 г. Здесь получено решение дифференциального уравнения (4) в следующем виде:

$$y = q\int\limits_0^1 x^{p-q}(1-x)^{q-1}dx,$$

что соответствует $qB(p-q+1;q)$.

В своих исследованиях Эйлер рассматривал функцию, которая определяется следующим интегралом

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}dx. \tag{5}$$

Для её обозначения он ввел специальный символ $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Если $n=1$, то функция $\left(\frac{p}{q}\right)$ совпадает с $B(p,q)$.

Эйлеру принадлежит открытие многих свойств интеграла (5), а следовательно, и $B$-функции. На основе этих свойств он разработал алгоритм нахождения значений $B$-функции, который позволяет выражать эйлеровые интегралы 1-го рода через комбинации наименьшего числа основных видов.

У Эйлера их три: 1. $\left(\dfrac{n}{p}\right)$; 2. $\left(\dfrac{n-p}{p}\right)$; 3. $\left(\dfrac{n-(p+1)}{p}\right)$.

Значения интегралов первого и второго вида находятся по соответствующим формулам:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p};$$

$$\left(\frac{n-p}{p}\right) = \left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

Вычисление значений третьего вида интегралов Эйлер сводит к нахождению сумм рядов, которые получаются в результате разложения подынтегральных выражений по формуле бинома Ньютона и последующего их почленного интегрирования.

В мемуаре E768 Эйлер сформулировал утверждение, которое по сути является критерием сходимости интегралов 1-го рода.

Все работы Эйлера, связанные с вопросами теории $B$-функции, можно условно разделить на две группы. В первую входят мемуары 1729-1768 гг., где выражение (5) рассматривается только в качестве интеграла 1-го рода, устанавливаются различные соотношения между такими интегралами и тем самым накапливаются отдельные факты, которые затем легли в основу теории B-функции. Основные результаты, касающиеся теории $B$-функции, полученные им в этот период, Эйлер опубликовал в "Интегральном исчислении". Во второй период (после 1768 г.) выражение (5) выступает уже как аналитический способ задания особого рода функции, которая тесным образом связана с $B$-функцией. В это время Эйлер не только получил все основные положения теории $B$-функции в действительной области, но и распространил её на случай комплексной области. Об этом свидетельствует мемуар E745 ("De fractionibus continuis Wallisii"[6]), представленном в 1780г., но опубликованном лишь в 1815г.

Теория $B$-функции послужила для Эйлера своеобразным фундаментом, на котором им была построена теория другой важной трансцендентной функции, а именно функции $\Gamma(x)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.II. Математика XVII столетия. // Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука,1970. 299с.

2. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т.1.// Пер. с лат. С.Я.Лурье и М.Я. Выгодского, предисловие М.Я. Выгодского. М., Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1956. 414 с.

3. Euler L. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraici dari nequent// Opera omnia. I. 14. (E19).

4. Euler L. De unciis potesta binomii earumque interpolatione // Opera omnia. I. 16 (E 768).

5. Euler L. Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus earumque integrationis // Opera omnia. I. 23 (E681).

6. Euler L.De fractionibus continuis Wallisii // Opera omnia. I. 16 (E745).


---

УДК 51-74

# Математические расчёты в термодинамическом анализе процессов образования кластеров углерода и графитизации в металлических сплавах на основе железа в различных условиях и состояниях[1]

**А. В. Маляров (Россия, г. Тула)**
инженер, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
**С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)**
к.п.н., доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
**О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)**
к.т.н., доцент, доцент, ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**И. В. Тихонова (Россия, г. Тула)**
к.т.н., доцент, ФГБОУ ВО Тульский государственный университет
**А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)**
доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

[1]Работа выполнена по проекту №11.6682.2017/8.9

# Mathematical calculations in thermodynamic analysis of processes of formation of carbon clusters and graphitization in metal alloys based on iron in various conditions and statuses

**A. V. Malyarov (Russia, Tula)**
engineer, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy
**S. N. Kutepov (Russia, Tula)**
candidate of pedagogics, associate Professor, Tolstoy Tula state pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
**O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)**
candidate of technical Sciences, associate Professor, associate Professor, Russian state University of justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**I. V. Tikhonova (Russia, Tula)**
PhD, associate Professor, Tula state University
**A. E. Gvozdev (Russia, Tula)**
doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

## Основной текст тезисов.

В различных условиях и состояниях металлические системы (металлы, стали, чугуны, цветные сплавы), например, при термоциклической обработке (ТЦО) в состоянии предпревращения проявляют экстремальные эффекты прочности пластичности, нестабильность различных фаз и химических соединений и их физико-механических свойств, зависящих от дисперсности и формы структурных фрагментов [1, 2, 3].

Рассмотрим это на примере процессов ТЦО углеродистых сталей вблизи температуры $A_0$ [4].

Полученные результаты имеют важное научное и прикладное значение при анализе поведения металлических сплавов и соединений в различных условиях и состояниях, например, цементита. Авторами научных работ при исследовании процессов распада цементита и анализе процессов структурных и фазовых превращений при ТЦО углеродистых сталей вблизи $A_0$ установлена возможность образования кластеров углерода в феррите при температурах выше $170^\circ$ $C$ [5]. Кроме этого, в работах [6, 7, 8] исследованы, в частности, процессы распада цементита в сталях марки 08, 15, 20, 25, 60, У8А, У10, У12, которые подвергали ТЦО по разным температурным режимам. Установлены основные причины развития процесса графитизации при низких температурах (ТЦО вблизи $A_0$).

Комплекс выполненных исследований свидетельствует о том, что основными факторами, ускоряющими распад $Fe_3C$ при ТЦО сталей вблизи точки Кюри цементита, являются следующие: исходное состояние цементита, на которое оказывает влияние предварительная (перед ТЦО) термическая обработка; наличие в стали элементов, способствующих графитизации (кремний, алюминий); наличие мест предпочтительного зарождения фазы с повышенным удельным объёмом (зона пластической деформации в образцах, подвергнутых усталостных испытаниям, микротрещины, неметаллические включения). Нестабильность решетки цементита в состоянии предпревращения перед фазовым переходом II рода инициирует фазовое превращение I рода – образование графита.

С ростом числа циклов процесс распада сопровождается появлением все более мелких включений, в то время как ранее образовавшиеся частицы практически не изменяют свои размеры. Выявленные структурные изменения при ТЦО стали марки 08 вблизи $A_0$ приводят к существенному падению плотности образцов.

Необходимо отметить, что в этих условиях большое значение отводится математическим расчетам, применяемым в термодинамическом анализе процессов графитизации протекающих в структуре металлических сплавов на основе железа [5].

Термодинамическое обоснование возможности процесса графитизации при температурах ниже $Ac_1$ проведён на сталях марок 10, 20, 60 и У8 [4, 5].

Фазовый состав сталей в равновесном состоянии — феррит ($\alpha$) + цементит ($Fe_3C$). Свободную энергию Гиббса сталей рассчитывали, суммируя свободную энергию феррита и цементита, учитывая объемные доли каждой фазы:

$$\triangle G(\alpha + Fe_3C) = n\cdot \triangle G(\alpha) + (1-n)\cdot \triangle G(Fe_3C), \tag{1}$$

где $\triangle G(\alpha)$ — свободная энергия феррита; $\triangle G(Fe_3C)$ — свободная энергия цементита; $n$ — количество феррита в стали.

Значения свободных энергий феррита и цементита при разных температурах взяты из [4, 5]. Затем по формуле (1) рассчитывали свободную энергию смеси ($\alpha + Fe_3C$) при разных температурах.

Далее в предположении, что весь углерод, содержащийся в сталях всех исследуемых марок, находится в виде графита, рассчитывали свободную энергию смеси феррит + графит:

$$\triangle G(\alpha + \text{Гр}) = m\cdot \triangle G(\alpha) + (1-m)\cdot \triangle G^{\text{Гр}}, \tag{2}$$

где $\triangle G(\alpha)$ — свободная энергия феррита; $\triangle G^{\text{Гр}}$ — свободная энергия графита; $m$ — количество феррита в смеси.

В таблице 1 представлены рассчитанные соотношения феррита ($m$) и графита ($1-m$) при разных температурах [4, 5]. В качестве примера приведены значения для стали У8.

Таблица 1: Доля феррита $m$ и графита $(1-m)$ в стали марки У8 при разных температурах

| Температура, $^\circ C$ | $m$ | $1-m$ |
|---|---|---|
| 200 | 0,9812 | 0,0188 |
| 350 | 0,9813 | 0,0187 |
| 400 | 0,9814 | 0,0186 |
| 425 | 0,9815 | 0,0185 |
| 450 | 0,9816 | 0,0184 |

Значения свободных энергий феррита и графита при разных температурах взяты из [4, 5]. По формуле (2) рассчитывали свободную энергию смеси ($\alpha$ + Графит) при разных температурах. По полученным данным построены графики температурных зависимостей свободных энергий смесей ($\alpha$+$Fe_3C$) и ($\alpha$ + Графит) для сталей исследуемых марок. На рис. 1 приведены зависимости для стали У8.

Из представленного примера (рис. 1) видно, что во всем диапазоне исследованных температур свободная энергия смеси ($\alpha$ + Графит) ниже свободной энергии смеси ($\alpha$ + $Fe_3C$). Отмеченная разница является термодинамическим стимулом для развития процесса графитизации в сталях при температурах ниже $A_1$.

На рис. 2 представлено влияние содержания углерода на разницу свободных энергий смесей $\triangle G(\alpha+Fe_3C)$ и $\triangle G(\alpha+\text{Гр})$ при температуре 200° $C$ (473 К). С ростом содержания углерода увеличивается термодинамический стимул к распаду цементита. На наш взгляд, этот вывод подтверждают и следующие полученные в данном разделе результаты: чем больше в стали углерода, тем при более низких температурах свободная энергия смеси ($\alpha$+Гр) становится отрицательной. Например, для стали марки 10 свободная энергия смеси ($\alpha$+Гр) меняет знак на минус выше 672 К, для стали марки 20 — выше 640 К, для стали марки 60 — выше 615 К,

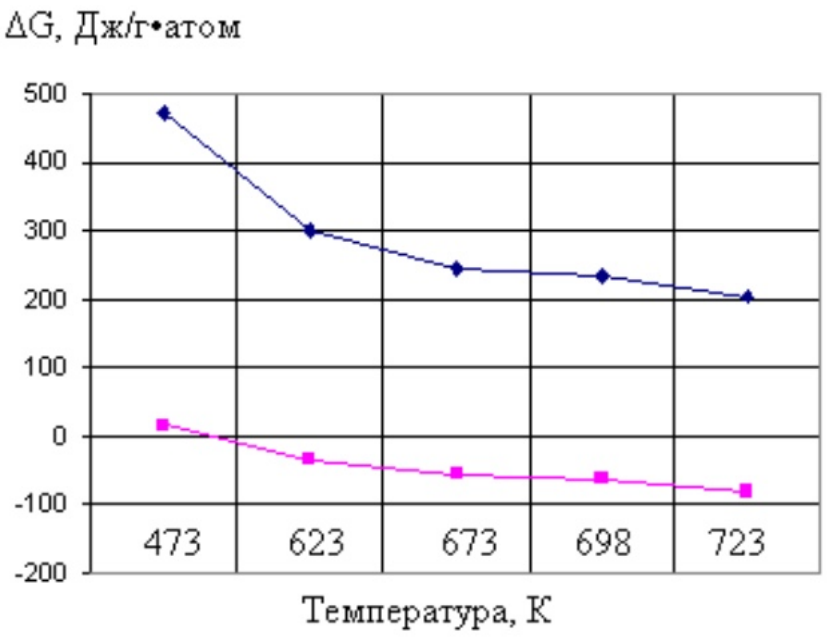



Рис. 1: Температурные зависимости свободных энергий $\triangle\ G(\alpha + Fe_3C)(1)$ и $\triangle\ G(\alpha + \text{Гр})(2)$ для стали марки У8[4, 5]

для стали марки У8 — выше 505 К.

Необходимо также отметить, что большое значение в рассмотренных процессах имеют форма и дисперсность образованных фрагментов структурных составляющих и фаз в сталях после ТЦО в окрестности точки $A_0$ [1, 2]. Таким образом, математические расчеты в термодинамическом анализе имеют определяющую роль в других важных теоретических и прикладных науках о материалах [9].

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов и технологий обработки конструкционных и инструментальных материалов с применением новых нанокомпозиционных смазок и покрытий в различных условиях и состояниях металлических систем и учетом рекомендаций работ [10].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шоршоров М.Х. Металловедение сварки стали и сплавов титана. М.: Изд-во Наука, 1965. 336 с.

2. Шоршоров М.Х., Манохин А.И. Теория неравновесной кристаллизации плоского слитка. М.: Изд-во Наука, 1992. 112 с.

3. Гвоздев А.Е. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 477 с.

4. Структурные и фазовые превращения при термоциклической обработке углеродистых сталей вблизи А0: монография / А.В.Маляров, И.В.Тихонова, О.В. Пантюхин, С.В. Сапожников, Н.Е.Стариков, А.Е.Гвоздев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. 146 с.

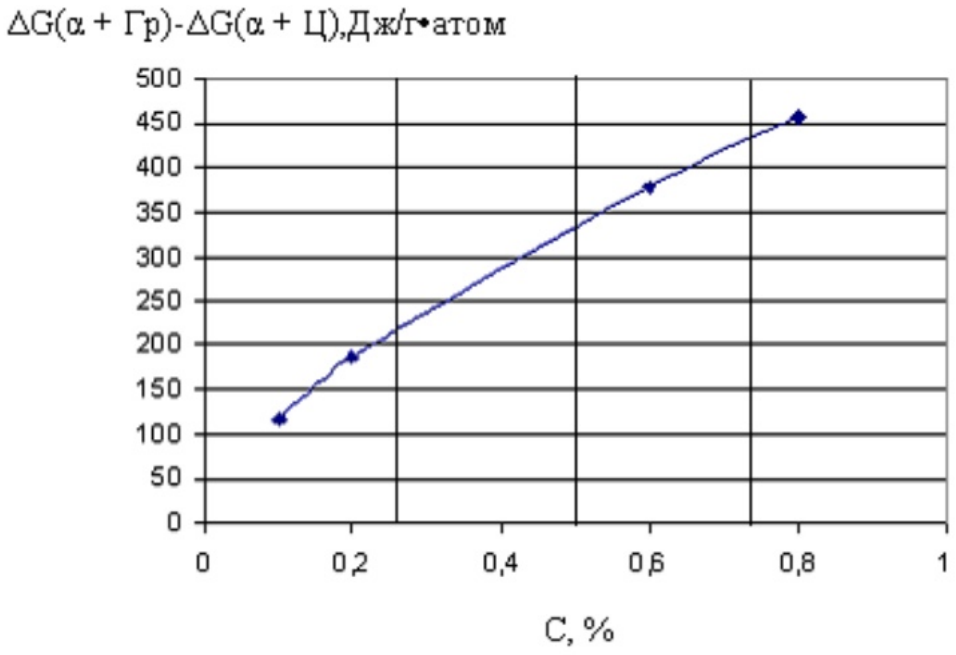



Рис. 2: Влияние содержания углерода на разницу свободных энергий смесей $\triangle\, G(\alpha + Fe_3C)$ и $\triangle\, G(\alpha + \text{Гр})$ при температуре $200^\circ\ C$ [4, 5]


5. Маляров А.В., Тихонова И.В., Гвоздев А.Е., Пантюхин О.В. Распад цементита в углеродистых сталях при термоциклической обработке вблизи $A_0$: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 129 с.

6. Тихонова И.В., Маляров А.В., Кузовлева О.В., Гвоздев А.Е., Стариков Н.Е.Влияние содержания углерода на распад цементита в углеродистых сталях при термоциклической обработке // Производство проката. 2009. № 5. С. 29-31.

7. Тихонова И.В., Маляров А.В., Гвоздев А.Е., Стариков Н.Е. Влияние температурного диапазона термоциклической обработки на распад цементита в углеродистых сталях // Заготовительные производства в машиностроении. 2010. № 10. С. 39-41.

8. Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Маляров А.В., Сергеев Н.Н., Тихонова И.В. Гетерогенное зарождение графита в углеродистых сталях при распаде цементита в процессе ТЦО вблизи точки $A_0$ // Материаловедение. 2013. № 10. С. 48-52.

9. Mechanism of the hydrogen cracking of metals and alloys, part I (review) / N.N. Sergeev, A.N. Sergeev, S.N. Kutepov, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2019. Т. 10. № 1. P. 24-31.

10. Новые конструкционные материалы: учеб. пособие / А.Е. Гвоздев, Н.Е. Стариков, В.К. Зеленко, О.В. Кузовлева, А.Н. Сергеев, В.Ю. Кузовлев, А.А. Калинин, А.В. Маляров / под общ. ред. проф. А.Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 296 с.

УДК 51(092)

# Ф. Е. Орлов — основатель кафедры «Теория механизмов и машин» в Императорском Московском Техническом Училище

**Д. А. Мкртычян (Россия, г. Москва)**
МГТУ им. Н.Э.Баумана
e-mail: dmkrtychyan@mail.ru

# F. Orlov — founder of the Department «Theory of mechanisms and machines» at the Imperial Moscow Technical School

**D. Mkrtychian (Russia, Moscow)**
BMSTU
e-mail: dmkrtychyan@mail.ru

Федор Евплович Орлов (1843-1892) родился в селе Великом, Новгородской губернии в семье военного врача. Орлов закончил Ярославскую Гимназию с золотой медалью и в 1859 г. поступил на математический факультет Московского Университета, был учеником Н.Д. Брашмана [1].

По окончании курса в 1863 г., Орлов был оставлен в университете на кафедре чистой математики.

В 1869 г. защитил магистерскую диссертацию «О взаимности -дифференциальных уравнений».

После смерти А.С.Ершова кафедра практической механики оставалась вакантной (с 1867 г. по 1872 г. данный предмет в должности стороннего преподавателя вел Д.Н.Лебедев, выпускник Московского университета) и в 1869 г. Совет университета ходатайствовал перед Министерством просвещения о посылке за границу одного из молодых ученых для подготовки к преподаванию этого предмета в Московском университете; А.Ю.Давидов предложил Орлову командировку за границу для приготовления к занятию кафедры практической механики. В задачу Орлова входило ознакомление с практической механикой, постановкой ее преподавания в лучших технических заведениях Европы, приобретение курсов лекций и материалов для ведения практических занятий.

С 1869-1872 г. Ф.Е. Орлов находился в заграничной командировке [2]. Он посетил учебные заведения, фабрики, заводы, научные базы в Берлине, Франкфурте, Цюрихе, Льеже, Париже. Прослушал лекции именитых европейских ученых: профессора прикладной механики Густава Цейнера (Gustav Zeuner), профессора Ф.Рело (поступил слушателем в Gewerbe-Academie, директором которого был Рело), Вейерштрасса, Кронекера и Куммера, Филипса и Гатона де Гупильера в центральной школе мануфактур и искусств , лекции Бресса в Национальной школе дорог и мостов, посещал Сорбонну и слушал лекции знаменитых парижских математиков той эпохи -Бертрана, Бонне, Пюизе и Шаля [2 стр. 125] .

Курс Ф.Рело по кинематике произвел глубокое впечатление на молодого Орлова. Позднее он даже, воспользовался курсом для своей вступительной лекции в Московском университете, а также неоднократно развивал кинематические методы, которые он воспринял у Рело.

Посещением фабрик и заводов Франции окончилась заграничная поездка Орлова.

Осенью 1872 г. Орлов вернулся в Россию и прочитал свою первую вступительную лекцию в Московском университете «О машинах» [3] и в Императорском Московском Техническом Училище (далее ИМТУ) по элементарной математике) в должности профессора.

Орлов начал преподавание практической механики в Московском университете в должности стороннего преподавателя. Приказ об избрании Орлова на должность доцента был издан 5 ноября 1873 г.

В Московском Университете Орлов вел преподавание технического черчения и проектирования элементов машин и кранов [4, стр. 529]. В его курс входили следующие предметы: начертательная геометрия, теория механизмов, общая теория машин , термодинамика с приложением к теории тепловых и паровых двигателей, теория сопротивления материалов, гидравлика и теория турбин. Кроме того, он вел практические занятия по читаемым курсам.

В 1874 г. Федор Евплович побывал в Московской, Нижегородской и Владимирской губерниях с целью исследования местной фабричной и заводской промышленности;

в 1876 г. - на Филадельфийской выставке для обозрения всех усовершенствований технического дела в Соединенных Штатах С. Америки ;

в 1878 г. - на Парижской всемирной выставке, «с которой привез обширный материал, оставшийся , к сожалению, не напечатанным»[1, стр.16]. Но вероятнее всего, все впечатления -от командировок Орлова выразились в его работе «Экономическое значение машин», опубликованной в 1879 г.

В 1884 г. Орлов был утвержден экстраординарным профессором кафедры теоретической и практической механики Московского Университета.

В 1886 г. был избран вице-президентом Политехнического общества.

Лето 1891 года Орлов провел в Звенигороде и осенью бодрым и повеселевшим вернулся в Москву. Но в Москве опять нашло мрачное расположение духа и 20 января скончался от воспаления легких.

Работы Ф.Е.Орлова

1) О взаимности дифференциальных уравнений [5], 1868 г. Диссертационная работа по чистой математике. Содержит 17 страниц. Затронут вопрос преобразования дифференциальных уравнений, основанном на теории огибания. Работа ограничена простейшим видом образующей функции.

2) Дневник заграничной командировки [2], датирован с 16 сентября 1869 г по 3 мая 1872 г, содержит 325 страниц. Весьма живописное чуткое изложение.

3) "О машинах"[3], 1872 г. - вступительная лекция в Московском Университете и в ИМТУ. Она включала в себя развитие идеи Рело о кинематической паре и цепях, которые на тот момент в России являлись новостью. На этой лекции впервые в ИМТУ Орлова услышал Жуковский.

4) Лекции по прикладной механике [6], издание литографическое, несколько раз переиздавалось и дополнялось. В МГТУ в музее есть переизданный курс 1885 г. Курс состоит из четырех глав : общая теория машин; сопротивление материалов; гидравлика; термодинамика. «Практическая механика, по определению Ф.Е. Орлова, есть наука о машинах». Учебник освещает практически все необходимые сведения для будущего специалиста во всех областях применения прикладной механики.

5) «Экономическое значение машин», 1878 г.. Работа раскрывает личность ученого не просто как профессора механики, но и как человека, чуткого к проблемам социальным.

6) "Теория механизмов"[8], 1887 г. Учебник состоит из 2 частей: Кинематика точки и Теория механизмов. Теория механизмов"являлась практическим руководством для студентов, прослушавших курс прикладной механики.

Орлов начал читать лекции в Московском Университете и ИМТУ одновременно. В 1868 г. произошло преобразование Ремесленного учебного заведения (РУЗ) в ИМТУ и нужен был высокий уровень подготовки учащихся по практической механике. Профессору Летникову пришла идея пригласить Орлова на эту должность.

Впервые в 1872 году в курсе "Прикладная механика"был выделен раздел "Теория механизмов который объединял теоретические посылы и расчеты механизмов всех известных к тому времени машин, использовавшихся как на российских, так и на зарубежных заводах. В 1872 г. Орлова начал читать лекции не только в общих классах, но и в специальных. На лекциях

Ф.Е.Орлова излагались основные законы движения и работы машин и принципы, которыми необходимо руководствоваться при их проектировании. Курс служил хорошим фундаментом для освоения последующих дисциплин.

Из кабинета учебных моделей механизмов Ф.Е.Орлов сделал весьма ценное учебное пособие, которое он широко использовал при чтении лекций, демонстрируя работу всевозможных механизмов и устройств, что также способствовало лучшему усвоению материала лекций. Для кабинета было приобретено много новейших механических демонстрационных устройств (моделей парораспределителей, центробежных регуляторов, соединительных устройств, зубчатых передач, различного рода паровых машин, водяных колес, направляющих механизмов и пр.). Усилиями Ф.Е.Орлова удалось собрать в кабинете более 400 моделей, которые сохранялись в строгом порядке и работоспособном состоянии. Подавляющее большинство из них сохранилось до 1950-1955 годов. Часть этих демонстрационных моделей после 1955 года были переданы в Политехнический музей Москвы, музей МГТУ им. Н.Э.Бамана, музей Н.Е. Жуковского, музей ЦАГИ и другим организациям. До 1900 года некоторые модели кабинета неоднократно демонстрировались на всемирных и российских промышленных выставках.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Жуковский Н. Е. Некролог и очерк ученой деятельности Ф.Е. Орлова. Памяти Федора Евпловича Орлова. Политехническое общество, состоящее при Имперском технической училище. -М., 1892 г., стр. 9-17.

2. Орлов Ф. Е. Дневник заграничной командировки (1869 – 1872 гг.). – М.:Тип. Г. Лисснера и А. Гешиля, 1898 г.

3. Орлов Ф. Е. О машинах //Мат.сб., 1872-73 гг., т.3, отд.2, стр. 47-63.

4. Тюлина И. А. Развитие механики в Московском университете в VIII и XIX веках.// Историко-математические исследования. М.: Наука. Вып.8. 1955, стр.528-529.

5. О взаимности дифференциальных уравнений: Дис. Ф. Орлова, напис. для получения степ. магистра чистой математики. - М.: Тип. А. И. Мамонтова, 1868. - [4], 47 с.; 22 см. - Отт. из "Мат. сб."1868, т. 3

6. Орлов Ф. Е. Лекции по прикладной механике. – М.: 1873/74 г.

7. Орлов Ф. Е. Экономическое значение машин. Речь профессора ИМТУ Ф.Е. Орлова// «Отчет Императорского Московского Технического Училища» за 1878 г.

8. Орлов Ф. Е. Теория механизмов (Литография)., М., 1887 г.


---

УДК 511.32

# Алгебраические методы в математике XIX века

З. А. Кузичева (Россия, Москва)
МГУ, мехмат ф-т
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

# Algebraic methods in mathematics of the XIX century

**Z. A. Kuzicheva (Russia, Moscow)**
MSU, Department of Mechanics and Mathematics
e-mail: zakuzicheva@mail.ru

В тезисах к конференции 2018 года [1] мною кратко изложен процесс приспособления методов алгебры к объектам логики. В настоящих тезисах предлагается рассмотреть на некоторых примерах введение методов алгебры в другие разделы математики. Определять понятие «алгебраический метод» не предполагается, есть надежда, что смысл его прояснится в процессе изложения.

Заметим, что более ранним, чем рассмотренный в упомянутых тезисах, выразительным примером использования методов алгебры, относящимся к XVII веку, может служить создание аналитической геометрии (название «алгебраическая» для геометрии, тем самым, было сохранено на будущее). Следует, однако, иметь в виду, что для появления мысли о таком шаге, как представление уравнениями объектов геометрии, в самой алгебре должны были произойти важные события. В данном примере возможность для обращения к алгебре в геометрии создалась решением Ф. Виета обозначать буквами не только неизвестные, но и параметры. Этот шаг перевел алгебру на принципиально новый уровень общности ее методов. Виет воспользовался своим открытием, создав первую общую теорию алгебраических уравнений. Для создания аналитической геометрии требовалось ввести координаты на плоскости, чтобы иметь возможность свести задачи геометрии к алгебре.

Несколько ранее в итальянской школе были решены уравнения до четвертой степени включительно, и встала проблема решения уравнений более высоких степеней. Использование символических обозначений не только для неизвестных, но и для параметров позволило сформулировать эту проблему в общем виде, как решение уравнений в радикалах. Как известно, проблема эта оказалась чрезвычайно сложной, о попытках ее мы не предполагаем говорить, скажем лишь, что усилия, направленные к ее решению, привели в итоге к появлению понятия *группы*, а затем и *теории групп*, нового объекта алгебры – *алгебраической системы*.

Здесь естественно было бы перейти к примерам того, какую роль играли группы в различных разделах математики заявленного в заголовке периода. Достаточно с этой целью обратиться к творчеству Ф. Клейна, например, к его речи при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета, т. е. к Эрлангенской программе [2]. Однако правильнее было бы рассмотреть с этой точки зрения все его творчество. Недаром Г. Вейль отмечал, что понятие группы является организующим и цементирующим началом всех математических произведений Ф. Клейна [3]. Ясно, что это грандиозная тема, и мимоходом затрагивать ее невозможно.

Что касается новых объектов, относящихся к алгебр, то они возникали не только в алгебре. Не являясь продуктами развития непосредственно алгебры, некоторые из них впоследствии были названы алгебрами, например, алгебра Клиффорда, алгебра Грассмана и др. Впрочем название "алгебра" для подобных систем стало появляться после выхода в свет в 1898 году первого тома трактата А.Н. Уайтхеда "Универсальная алгебра" [4]. С этой точки зрения в трактате рассматриваются, например, булева алгебра и теория кватернионов Гамильтона. Воспользовавшись упоминанием булевой алгебры, приведу еще один пример взаимодействия алгебры и логики. Подготовленный событиями в науке XIX века, пример этот относится к XX веку.

К концу XIX века булева алгебра в трудах Х.Мак-Колла была переработана в исчисление высказываний (Фреге сформулировал такое исчисление исходя из иных соображений), которое теперь называют классическим. В начале следующего столетия, критика классической математики коснулась исчисления высказываний. Противников ее не устраивали свойства

материальной импликации, позволявшие получать в этом исчислении формулы вида

$$A \to (B \to A)$$

Смысл ее: если $A$ - истинно, то оно истинно, какое бы мы ни добавляли условие. В обычном исчислении из лжи следует все, что угодно:

$$A \supset (\overline{A} \supset B)$$

Появились попытки "исправить" импликацию так, чтобы такие формулы не были выводимыми в исчислении. Одно из исчислений, в котором вводится импликация, отличная от материальной импликации, принадлежит В. Аккерману [5].

Рассмотрим, какой помощью алгебры воспользовалась С.А. Яновская в изложении исчисления В. Аккермана в 1956/57 учебном году в своем общем курсе математической логики на философском факультете МГУ. Она решила сравнить структуры (теперь мы говорим решетка) классического исчисления высказываний и исчисления строгой импликации (С.А. предлагала называть ее сильной) Аккермана. Она доказала, что классическое исчисление высказываний является импликативной решеткой с отрицанием, в то время, как исчисление Аккермана - лишь дистрибутивной решеткой с отрицанием. Известно, что всякая конечная дистрибутивная решетка является импликативной. Но поскольку исчисление Аккермана не является импликативным, она не может быть конечной. Следовательно, и исчисление Аккермана не может быть полностью представлено посредством конечной таблицы.

Не стоит удивляться, что логические исчисления одновременно являются и алгебраическими, ведь они в своих "предках" имеют *алгебру* логики.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузичева З. А. Алгебра и математическая логика – история взаимодействия. // Сб. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова (Тула 28 – 31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 337 – 339.

2. Klein F. Vergleichende Betrachtungen über geometrische Forschungen. Erlangen Programm. Erlangen, 1872. Перев. на русск. яз. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). // Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей, М.: ГИТТЛ, 1956. С. 399 — 434.

3. Вейль Г. Феликс Клейн и современная математика. // Герман Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984. С. 383 – 395.

4. Whitehead A. N. A treatise on universal algebra with applications. Cambridge: At the University Press, 1898.

5. Ackermann W. Begründung einer strengen Implikation. // J. of Symb. Logic. V. 21, № 2. P. 113 – 128.

УДК 51-74

# Математический анализ процессов взаимодействия газолазерного излучения с металлическими сплавами на основе железа

**И В. Минаев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
**С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
**И. В. Тихонова (Россия, г. Тула)**
ФГБОУ ВО Тульский государственный университет
**О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)**
ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

# Mathematical analysis of the interaction of laser radiation with metal alloys based on iron

**I. V. Minaev (Russia, Tula)**
Tolstoy Tula state pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
**S. N. Kutepov (Russia, Tula)**
Tolstoy Tula state pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
**I. V. Tikhonova (Russia, Tula)**
Tula state University
**O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)**
Russian state University of justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**A. E. Gvozdev (Russia, Tula)**
Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Исследованы процессы газолазерной обработки и резки металлических листов из конструкционных и инструментальных сталей различных марок. Выполнены комплексные исследования шероховатости поверхности листов после газолазерной резки (ГЛР) — $R_Z$; строения и свойств зоны газолазерного термического влияния (ЗГЛТВ) — $L$; ортогональности поверхности ГЛР — $\alpha$. Получены систематические данные значений указанных показателей и выполнен их статистический анализ: рассчитаны средние значения, дисперсии, средние квадратичные отклонения, проведена проверка гипотезы о равенстве дисперсий и оценена равноточность измерений. Выполнено сравнение средних значений нормально распределенных совокупностей для установления различий значений шероховатости в зонах поверхности ГЛР.

С использованием пакетов прикладных программ разработаны математические модели показателей качества процессов ГЛР стальных листов в зависимости от мощности лазерного излучения, давления вспомогательного газа, скорости лазерного воздействия, фокусного расстояния, химического состава металлического сплава. Проверена адекватность математических моделей. Оценена значимость числовых коэффициентов неизвестных параметров моделей. Вычислены коэффициенты детерминации, которые составляют: для модели $R_Z$ — 98,4 %, для модели $L$ — 99,2 %, для модели $\alpha$ — 94 %.

Установлены закономерности изменения показателей качества ГЛР в различных условиях и состояниях и определены оптимальные режимы газолазерных процессов и обработок для обеспечения требуемых показателей качества. Методом металлографического анализа с использованием оптической и электронной микроскопии и количественной металлографии исследованы структура и свойства приповерхностных слоев стальных листов с различной дисперсностью фазовых и структурных составляющих после ГЛР, включающих зону ГЛТВ. Созданы новые способы газолазерного получения деталей из листов углеродистых сталей и металлических сплавов на железной основе, защищенные патентами на изобретение [1]-[7].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels / A. E. Gvozdev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov, I. V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. Т. 6. № 1. С. 41-44.

2. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets / A. E. Gvozdev, I. V. Golyshev, I. V. Minayev, A. N. Sergeyev, N. N. Sergeyev, I. V. Tikhonova, D. M. Khonelidze, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2015 Т. 6. № 4. С. 305-310.

3. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting / A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, I. V. Minayev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeyev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. С. 148-152.

4. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых и слитковых металлических систем / Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский, С. В. Сапожников, А. А. Калинин // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 2 (70). С. 542-565.

5. Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure / N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, I. A. Tsyganov, I. V Tikhonova., E. S. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki // Steel in Translation. 2018. Т. 48. № 5. С. 313-319.

6. Способ формирования упрочненного поверхностного слоя в зоне лазерной резки деталей из легированных конструкционных сталей: патент на изобретение № 2707374 Российская Федерация / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Г. Колмаков, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, И. В. Голышев; заявитель и патентообладатель ООО «МЕТАЛЛИКА71» — № 2019115250; заявл. 17.05.2019; опубл. 26.11.2019.

7. Способ формирования упрочненного приповерхностного слоя в зоне лазерной резки деталей: патент на изобретение № 2695715 Российская Федерация / И. В. Минаев, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, Е. С. Алявдина; заявитель и патентообладатель ООО НПП «ТЕЛАР» — № 2018140047; заявл. 14.11.2018; опубл. 25.07.2019.

---

УДК 51(091)

# О лузинских учебниках по математическому анализу

**С. С. Петрова (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: spetr33@mail.ru

# About Luzin textbooks on differential and integral calculus

**S. S. Petrova (Russia, Moscow)**
M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: spetr33@mail.ru

Судя по всему, к преподаванию математического анализа Н. Н. Лузин приступил лишь в период своей работы в Иваново-Вознесенском политехническом институте, открывшемся в 1919 г., когда в разгар Гражданской войны, спасаясь от голода и холода, царивших в Москве, он с группой учеников переехал в провинциальный Иваново-Вознесенск. К тому времени его собственный опыт преподавания сводился к чтению лекций по теории множеств и теории функций действительного переменного, то есть, говоря привычным нам языком, к чтению спецкурсов для студентов математического отделения Московского университета, желавших приобщиться к новейшим теориям своего времени. К этому следует присовокупить еще собственный опыт, приобретенный в студенческую пору, когда он только знакомился с основами исчисления. Для становления Лузина-преподавателя, автора собственного курса дифференциального исчисления этот опыт оказался тем более важным, что овладевал его основами он в значительной степени самостоятельно или, как говаривал он сам, автодидактом. Вот что он писал об этом в письме конца 1931 – начала 1932 г. М. Я. Выгодскому [1, с.135]:

«... *я не знал ни Goursat, ни Jordan'a*, а воспитывался на старинных курсах Анализа: Lacroix и других. Самым новым для меня был 7-томный курс Laurent'a («Traité d'Analyse»). В нем автор гордился, что он – ученик Cauchy. Теория множеств и теория функций действительного переменного пришли ко мне лишь в момент окончания Университета, вернее при стадии оставления при Университете. Такое старинное воспитание было обусловлено *чистою случайностью*, так как когда я был в Университете (1901–1908), курс Goursat был уже в полном ходу за границей и у нас в кругах, близких к профессорским; я же его не знал, и читал все автодидактом. Такое «старинное» воспитание, вернее: самовоспитание, которое я получил, и обусловливает мое своеобразие и свободу в отношении математических взглядов. Во всяком случае, когда я проходил Университет, у меня не было дисциплинирующих курсов Д. Ф. Егорова, ни Goursat, ни логически непреклонного Vallée-Poussin'a; был же хаос, может быть, и творческого характера. Теория пределов вошла в меня механически, грубо, не утонченно, а скорее полицейски-принудительно, по формуле: «замолчи, я тебе говорю!»

Совсем иное дело ивановская аудитория, состоявшая преимущественно из молодых людей, особенными математическими способностями не обладавших и становиться профессиональными математиками не собиравшихся. Целью такого курса было ознакомить будущих инженерно-технических работников и учителей с азами исчисления и научить их решать типовые задачи. Все. Но, как это известно каждому начинающему преподавателю, добиться этой цели отнюдь непросто.

Вспоминая собственный студенческий опыт вхождения в курс анализа, о котором он поведал в процитированном выше письме Выгодскому, а также уроки, почерпнутые у старших

коллег (своими учителями в преподавании анализа он считал Ж. Таннери, лекции которого начал посещать еще в свой первый визит в Париж в 1906 г., и И. И. Жегалкина, старшего коллегу по Московскому университету [2]), он здраво оценивал сложность стоявшей перед ним задачи. Для заметной части студентов, не обладавших математическими дарованиями и зачастую даже не получивших должной математической подготовки в средней школе (таковы были времена!), понимание такого курса виделось неразрешимой проблемой.

Понимая это, Лузин искал среди имевшихся руководств такое, которое, будучи ориентированным на заурядного студента, помогло бы по возможности безболезненно войти в курс исчисления. В качестве такого учебника он избрал опубликованный в 1912 г. перевод книги американского автора В. Грэнвиля (William Anthony Granville, 1863–1943) «Elements of the Differential and Integral Calculus», осуществленный Н. Н. Маракуевым ([3]). Существенно переработав и значительно дополнив текст первого издания, Лузин выпустил его в 1922 в двух выпусках [4]. В последующие годы он продолжал работать над текстом, внося в него изменения и дополнения. В этом ему помогал Н. П. Тарасов. В 1924–1930 вышли 3-е – 10-е издания. Доля лузинского участия в тексте учебника стала столь велика, что, начиная с 11-го издания (1931), он стал выходит под двойным авторством – Грэнвиля и Лузина. А с 12-го издания поменялось и название книги – «Курс дифференциального и интегрального исчислений». Учитывая ее существенно изменившийся характер и объем, Лузин посчитал издание 1934 года по существу новой книгой [5], а не 14 изданием старой. Следующее ее издание, которое появилось в том же году, обозначено не как 15-е, но как 2-е. За ним последовали 3-е и 4-е (оба – в 1935), 5-е и 6-е (1937, 38 гг.) и, наконец, 7-е (1942). В итоге учебник и по содержанию и объему стал мало походить на книгу Грэнвиля и в следующем вновь существенно переработанном издании 1946 года вышел под авторством одного Лузина [6, 7]. Впоследствии учебник неоднократно (в 1949, 1952, 1953, 1955, 1958, 1960, 1961, 2017) переиздавался. Принимая во внимание, как правило, большие тиражи этих изданий, можно сказать, что руководство Лузина оказалось в высшей степени востребованным и в 30-е – 40-е годы служило одним из наиболее распространенных учебников для советской высшей школы.

В ходе более чем 20-летней работы над учебником проявились основные черты Лузина – педагога и методиста. Приступая к работе над курсом дифференциального и интегрального исчисления для технических вузов, Лузин видел своей главной задачей примирить в нем два, казалось бы, взаимоисключающих начала – свести такой курс к минимуму необходимых для будущего инженера сведений из области анализа и не вступить в противоречие с современной их трактовкой. Во главе угла для него всегда оставалась доступность изложения материала – читатель должен понимать излагаемое. Причем речь идет не об «идеальном читателе» – абстрактном читателе, наделенном беспредельными внимательностью, понятливостью, догадливостью и сообразительностью, но реальном, ход мыслей которого сопровождают сомнения, недоумения и заблуждения. Именно таким студентом был он сам, и именно с такими студентами жизнь столкнула его в Иваново-Вознесенске. И если он сам, будучи одаренным математическим талантом, мог придти к пониманию премудростей анализа самостоятельно, то требовать этого от среднего студента было нельзя. И его задачей, как автора, стала необходимость следить за развитием мысли такого читателя, приходить ему на помощь на опасных поворотах, предупреждать о трудностях и скрытых опасностях. Этому и служат многочисленные дополнения и разъяснения, делаемые автором по ходу изложения, тщательный разбор специально подобранных примеров.

Центр внимания автора при таком изложении переносился с предмета изложения на самого читателя. Это оказалось очень важным для 30-ых – 40-ых годов – периода, который в большой математике отмечен зарождением и развитием Советской математической школы, а в отечественном математическом образовании – созданием советской системы математического образования, программ и учебников (прежде всего – школьных), на которых выросла

страна, впоследствии создавшая мощную атомную и космическую индустрию. И пока такая система только формировалась (прежде всего в начальные 30-е годы) необходимость таких учебников, как лузинские, учитывающих в среднем низкую подготовку выпускников средних учебных заведений, а также пестроту в их представлениях об основных понятиях элементарной математики, была в высшей степени острой.

Впоследствии, в 50-е – 60-е годы, когда положение в математическом образовании стабилизировалось, на смену им стали приходить учебники другого типа, авторы которых сосредоточивали свое внимание на предмете изложения, ориентируя его на «идеального читателя». Значительную роль в этом процессе «смены вех» сыграли также изменения идеологического климата в большой математике, связанные с началом эпохи доминирования бурбакизма, положившего конец ориентации математической литературы на читателя и поставившего в центр внимания сам текст.

Сейчас, как нам кажется, исторический маятник, как это обыкновенно случается, качнулся в другую сторону (см. [8]), но это уже иная история. Мы же вернемся к Лузину и его методико-математическим воззрениям, которые как справедливо заметил В. Л. Минковский [9, с. 65] , требуют тщательного изучения. И хотя написано об этом еще в 80-е годы, однако, до сих пор к их изучению так и не приступили. В значительной мере так случилось потому, что это совсем непростая задача. Изучая и анализируя характерные ошибки учащихся, Лузин старался выявить особенности процесса восприятия математических понятий и методов неискушенным в научных тонкостях интеллектом, то есть процесса выявления их сущности. Насколько он продвинулся на этом направлении может установить лишь тщательное изучение созданных им учебных текстов. Как нам кажется, для решения такой задачи не жаль потратить время и силы.

В заключение обратим внимание на обнаруженный Г. С. Смирновой в Архиве РАН проект Лузина программы курса математического анализа для педагогических институтов. Судя по всему [10, с. 387] , этот проект готовился Лузиным в рамках развернутой в 30-е годы кампании по реорганизации педагогического образования в СССР. Предлагаемая им программа рассчитана на 4 года и кроме основ анализа включает семестровые курсы дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, дескриптивной теории функций, метрической теории функций и теории аналитических функций. Столь основательной мыслил Лузин подготовку будущих школьных учителей.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому. Публикация и примечания В. А. Волкова и С. С. Демидова // Историко-математические исследования. 2-я серия. 1997. Вып. 2(37). С. 133 – 153.

2. Лузин Н. Н. Предисловие к книге: Грэнвиль В. Элементы дифференциального и интегрального исчисления. Под ред. Н. Н. Лузина. 8-е изд. Перераб. и доп. Ч.1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление. — М.: Гос. Изд-во. 1930.

3. Колягин Ю. М., Саввина О. А. Звездная судьба «вредительского» учебника Грэнвиля-Лузина // Сборник трудов Всероссийской конференции по истории математики и математического образования, посвященная 130-летию со дня рождения Н. Н. Лузина. 9 – 10 декабря 2013 г. — Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина. С. 56 – 69.

4. Грэнвиль В. Элементы дифференциального и интегрального исчислений для технических учебных заведений и самообразования. Под ред. Н. Н. Лузина. 2-е изд. Ч.1. Дифференциальное исчисление; Ч.2. Интегральное исчисление. — М.: Гос. Изд-во. 1922. 288-222 с.

5. Грэнвиль В., Лузин Н. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Ч.1. Дифференциальное исчисление; Ч.2. Интегральное исчисление. — М.-Л.: Гос. техн.-теорет. изд-во. 1934. 445-302 с.

6. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. — М.: Сов. наука. 1946. 461 с.

7. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. — М.: Сов. наука. 1946. 379 с.

8. Костенко И. П. Слово о Лузине // Математическое образование. 2003. Вып. 4 (27). С. 2–8.

9. Минковский В. Л. О методико-математических воззрениях Н.Н. Лузина (к 80-летию со дня рождения) // Математика в школе. 1983. № 6. С. 65–68.

10. Смирнова Г. С. Н. Н. Лузин о преподавании математических дисциплин в педагогических институтах // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. Конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 385–387.

---

УДК 378.096

## Из истории физико-математического факультета МОПИ-МПУ-МГОУ

**И. А. Пинчук (Россия, Москва)**
Московский государственный областной университет
e-mail: irenepin@yandex.ru
**С. Б. Забелина (Россия, Москва)**
Московский государственный областной университет
e-mail: zabelina_sb@mail.ru

## From the history of the faculty of physics and mathematics of MOPI-MPU-MRSU

**I. A. Pinchuk (Russia, Moscow)**
Moscow Region State University
e-mail: irenepin@yandex.ru
**S. B. Zabelina (Russia, Moscow)**
Moscow Region State University
e-mail: zabelina_sb@mail.ru

История становления и развития физико-математического факультета ныне существующего Московского государственного областного университета начинается в 30-е годы двадцатого столетия. В те годы Московский областной педагогический техникум имени Профинтерна был реорганизован в Московский областной индустриально-педагогический институт, приоритетной задачей которого становилась подготовка педагогических кадров с учётом потребностей индустриализации общества. День 14 декабря 1931 года считается особой датой для физико-математического факультета, поскольку было принято решение об учреждении первых двенадцати кафедр института, в том числе кафедры математики, явившейся основоположницей

современных математических кафедр. Уже в 1939-1940 гг. появляются кафедра математического анализа, кафедра геометрии, кафедра высшей алгебры и элементарной математики, которые продолжают свою работу и сегодня [1].

В разное время на математических кафедрах работали выдающиеся учёные-математики и педагоги: Гочаров В.Л., Базылев В.Т., Бахвалов С.В., Темляков А.А., Баврин И.И., Мантуров О.В., Луканкин Г.Л., Латышев А.В. и др. Многие из них оставили заметный след в истории факультета, оказали большое влияние на подготовку педагогический кадров для системы образования Московской области и Москвы.

В настоящих заметках нам хотелось немного подробнее вспомнить тех замечательных ученых и педагогов, которые способствовали становлению и развитию кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, одной из ключевых кафедр факультета.

Более сорока лет кафедрой высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики заведовал выдающийся математик-методист Заслуженный деятель науки РСФСР, член-корреспондент АПН РСФСР, профессор Иван Козьмич Андронов. И.К. Андронов был среди тех, кто являлся инициатором создания института, факультета, кафедры, использовал весь свой авторитет и влияние для успешной реализации задуманного. Основные научные интересы И.К. Андронова были связаны с проблемами методологии, истории математики и педагогики математики. Результаты его научной и педагогической деятельности послужили фундаментом процесса становления и развития системы математического образования в советской школе и в педагогических институтах. Иван Козьмич воплотил идеи единого курса математики для школ и техникумов, мировоззренческой и практической направленности обучения математике. Несколько лет он читал лекции по общей и частной методике высшей математики на механико-математическом факультете Московского университета для студентов старших курсов и для преподавателей, проходивших ускоренную аспирантскую подготовку по математике по специальности втузов. Иван Козьмич является автором серии монографий, в которых представлена целостная теоретико-множественная концепция учения о числе [2,3]. Научное и методическое наследие Ивана Козьмича продолжает жить в его опубликованных работах, в опыте его учеников, преподавателей, учителей математики, образованию и воспитанию которых он посвятил всю свою жизнь.

Среди организаторов Московского областного педагогического университета другой заметной фигурой был доктор педагогических наук, профессор, автор одного из первых учебников по педагогике Шимбирёв Павел Николаевич. Но мы вспоминаем его не только из-за этого, а потому, что вся жизнь его дочери, Шимбирёвой Елены Павловны, была самым тесным образом связана с кафедрой высшей алгебры.

После окончания механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова и аспирантуры по кафедре алгебры МГУ Елена Павловна пришла на работу в МОПИ на кафедру высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, где проработала до ухода на пенсию в 1984 году. Научные исследования Е.П. Шимбирёвой были посвящены вопросам теории частично упорядоченных групп и проводились под руководством А.Г. Куроша. Итогом этого исследования явилась кандидатская диссертация, защищенная в 1946 году и опубликованная в журнале Математический сборник [4]. В диссертационном исследовании формулируются основные свойства частично упорядоченных групп и их подгрупп, устанавливаются достаточные критерии для возможности выполнить однокомпонентное частичное упорядочение группы. В работе также получены результаты о прямых разложениях частично упорядоченных групп и полных прямых разложениях однокомпонентных частично упорядоченных групп с отмеченными подгруппами [5]. В частности, доказывается теорема о том, что любые два прямых разложения однокомпонентной частично упорядоченной группы имеют общее продолжение. Утверждение о том, что все максимальные упорядочения абелевой

группы без кручения линейны, названо А.Г. Курошем теоремой Шимбирёвой [6]. На работы Е.П. Шимбирёвой много ссылок и в монографии Л.Фукса о частично упорядоченных алгебраических системах [7].

Говоря о Елене Павловне Шимбирёвой, нельзя не поделиться личными впечатлениями о ней как о преподавателе. Курс алгебры, который она много лет читала на математическом факультете, отличался глубиной и строгостью изложения. Лекции Елены Павловны всегда были безупречны. Несмотря на внешнюю сдержанность, Елена Павловна заражала своей преданностью и любовью к математике, и особенно к алгебре.

Творчески развивая научное и педагогическое наследие ученых-педагогов прошлого, сегодня кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета расширяет круг решаемых задач, связанных с совершенствованием математического образования в средней и высшей школе на основе интеграции образования с наукой, с подготовкой учителя математики, нацеленной на формирование инновационных компетенций, отвечающих актуальным и перспективным потребностям системы образования Московской области.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энциклопедия просвещения: развитие с опорой на традицию: к 85-летию Московского государственного областного университета. - Москва: Диона, 2016. 492 с.

2. Андронов И. К., Окунев А. К. Арифметика рациональных чисел. - Москва: Просвещение, 1971. 399 с.

3. Андронов И. К. Арифметика: Развитие понятия числа и действий над числами. - Москва: Учпедгиз, 1959. 360 с.

4. Шимбирёва Е.П. К теории частично упорядоченных групп.// Мат. Сб. 20 (1947), с. 145-178.

5. Шимбирёва Е.П. О прямых разложениях частично упорядоченных групп.// Уч. зап. Московск. Обл. Пед. Ин-та им. Н.К. Крупской, 110, матем., в. 7 (1962), с. 347-350.

6. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – Москва: Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., 1962. 396 с.

7. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.-Москва: Мир, 1965. 342 с.

---

УДК 51(091)

# Некоторые приложения математической логики к арифметике на рубеже 19-20 вв в работах представителей Одесской математической школы

**М. А. Подколзина (Россия, Москва)**
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: maress@mail.ru

# Some applications of mathematical logic to arithmetic at the turn of the 19th-20th centuries in the works of scientists of the Odessa school of mathematics

**M. A. Podkolzina (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: maress@mail.ru

Математическую логику можно отнести к числу довольно молодых областей математики, результаты, теперь составляющие ее классический базис, в основном были получены в первой половине двадцатого века. Но уже в конце девятнадцатого века к математической логике было приковано внимание многих математиков. В 80-ые годы XIX в. появился целый ряд работ, заставивший усомниться в незыблемости оснований математики, и именно математическая логика была призвана для борьбы с открывающимися парадоксами.

Так, в 1882 г. вышла работа М. Паша (Паш Мориц, 1843-1930) "Лекции о новой геометрии"[1], в которой он впервые привел теорему, не имеющую доказательства, исходя из постулатов Евклида. Тем самым впервые была показана неполнота аксиоматики Евклида. В той же работе М. Паш предложил собственную аксиоматику, содержащую в том числе и ныне широко известную аксиому Паша.

Одновременно с этим велись бурные споры вокруг Канторовской теории множеств. Напомним, что в 1879-1884 гг. вышли статьи Г. Кантора (Кантор Георг, 1845-1918) с результатами исследований бесконечных точечных множеств, о равномощности континуумов разного числа измерений. Появился метод трансфинитной индукции. А в конце XIX-начале XX вв. были открыты многочисленные парадоксы теории множеств.

В 1891 г. Джузеппе Пеано (1858-1932) предложил свою систему аксиом не только для геометрии, но и для арифметики, создав аксиоматику натурального ряда. В 1894 г. он начал работу над изданием "Formulaire de mathematiques"("Формуляр математики") [2], в котором все математические дисциплины представлялись в форме логического исчисления. Именно Пеано сформулировал задачу применения символьной логики с целью дедуктивно-аксиоматического построения всей математики.

В 1893 г. профессор Новороссийского университета И. В. Слешинский (Слешинский Иван Владиславович, 1854-1931) написал статью "Логическая машина Джевонса"[3], целью которой было пробудить интерес широкой публики в России и коллег по Новороссийскому университету к вопросам математической логики в целом и алгебры логики в частности. Позже, в 1909 г. И.В. Слешинский перевел с французского "Алгебру логики"Л.Кутюра. Не считая работ П.С.Порецкого (Порецкий, Платон Сергеевич, 1846-1907) эта книга стала первым системным изложением математической логики на русском языке.

Таким образом, в конце XIX-начале XX вв. в Одессе сформировалась группа математиков, исследования которых относились к вопросам математической логики и оснований математики.

Наиболее интересные результаты были получены Е.В.Буницким в работах 1896-1898 гг. и С.О.Шатуновским в работах 1896 - 1917 гг.

Евгений Леонидович Буницкий (1874-1952), как до него и И. В. Слешинский, окончил сперва Ришельевскую гимназию в Одессе, а в 1896 г. – физико-математический факультет Новороссийского университета, после чего был оставлен стипендиатом при университете на два года. Именно в эти два года Буницкий и написал свои работы по математической логике. Также в сферу его интересов попадали вопросы оснований геометрии, а после двухлетней командировки в Гёттинген, где он работал в лаборатории Гильберта – теория интегральных уравнений, теория интерполяции и др.

В 1896 г. Буницкий написал две работы: "Некоторые приложения математической логики к арифметике"[5] и "Число элементов в логическом многочлене"[6], а в 1898 г. работу "Некоторые приложения математической логики к теории общего наибольшего делителя и наименьшего кратного"[7].

Первая из вышеперечисленных работ [5] начинается с определений многообразия или класса, логического нуля, универсума (впрочем, у самого Буницкого такого названия не встречается), равенства и отрицания для классов, логической суммы и логического произведения. Далее приводятся свойства логических сложения и умножения, отмечаются сходства и различия логических и алгебраических формул, причем, по сути, эта часть работы представляет собой пересказ статьи Слешинского [3]. Затем, пользуясь индукцией, Буницкий доказывает кажущееся сейчас нам общим местом утверждение, что число элементов в логической сумме двух непересекающихся классов равно сумме элементов в каждом из этих классов, а затем обобщает это утверждение на случай классов, имеющих общие элементы. Затем эти логические формулы Буницкий применяет для вывода "любопытных арифметических тождеств".

Гораздо более интересны полученные результаты, позволяющие определять число попарно неэквивалентных элементов в сложном классе, составленном с помощью логических сложения и умножения классов, число элементов в каждом из которых заранее известно.И наконец, Буницкий получает аналогичную формулу, но для случая, когда к операциям логических сложения и умножения добавляется операция отрицания.

В работе [7] Буницкий рассматривает логический класс, элементами которого являются простые, не обязательно различные, числа. В соответствие каждому такому классу он ставит число, полученное с помощью арифметического произведения всех различных чисел этого класса. При этом оказывается, что логической сумме классов соответствует число, равное наименьшему общему кратному соответствующих чисел, а логическому произведению – их наибольший общий делитель.Далее делается вывод, что: "в*сякая логическая операция над рядом классов A, B, C, ... приводит к некоторому предложению из области теории наименьшего общего кратного или наибольшего общего делителя чисел"*[7].После чего Буницкий показывает, как с помощью указанного метода можно получить аналог некоторых арифметических теорем для логических классов. В частности, изучается природа симметрических функций в логическом исчислении.

Самуил Осипович Шатуновский (1859-1929) обращался к проблемам оснований математики и математической логики во многих своих работах. Так, он написал вторую часть работы "Этюды по основаниям геометрии"(автор первой части — В.Ф. Каган), в которой разбирался вопрос возможности вычисления площадей и объемов без применения закона исключенного третьего.

В 1911 г. выходит его статья "Учение о величине. О постулатах, лежащих в основании понятия о величине"[8]в которой он определяет понятие отношения, в котором могут находиться некоторые предметы. Для отношений вводится понятие транзитивности, а затем Шатуновский формулирует восемь постулатов количественных сравнений (иначе: постулатов скалярного расположения) и, исходя из них, доказывает ряд теорем об этих отношениях. Непротиворечивость своих утверждений он доказывает с помощью рассмотрения таблиц, похожих на классические таблицы истинности (но все же это не они). Однако в этой работе Шатуновский не определяет понятие "величина".

Та же тема, о понятии величины и соответствии логических, арифметических и алгебраических объектов, продолжается у Шатуновского и в его диссертационной работе "Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям"[9]. В ней он вновь, как и в своих работах по основаниям геометрии, говорит о недопустимости формального применения закона исключенного третьего к бесконечным множествам и процессам. Закон исключенного третьего по Шатуновскому применим только в том случае, когда "*предмет A является индивидуумом (а*

*не переменным объектом) по отношению к B, "логической единицей"для этого B"* [9].

Работы представителей одесской математической школы по математической логике не стали поворотными для этой области математики, но вложили свой вклад в общее развитие тематики.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Pasch Moritz, Vorlesungen uber neuere Geometrie // Leipzig: B.G.Teubner, 1882
2. Peano Giuseppe, Formulaire de mathematiques //Torino, 5 v., 1895-1905
3. И.В.Слешинский, Логическая машина Джевонса // Вестник опытной физики и элементарной математики, Одесса, 1893 г., вып.№175, стр. 145-154
4. Л. Кутюра, Алгебра логики // пер. с прибавлениями И.В.Слешинского, Одесса: изд-во матезис, 1909, 134 с.
5. Е.Л.Буницкий, Некоторые приложения математической логики к арифметике // ВОФЭМ, вып.247, с.173-180, вып. 248, с. 197-203. Одесса, 1896
6. Е.Л.Буницкий, Число элементов в логическом многочлене // ВОФЭМ, вып.249, с.241-246 Одесса, 1896
7. Е.Л.Буницкий, "Некоторые приложения математической логики к теории общего наибольшего делителя и наименьшего кратного"// ВОФЭМ, вып.274, с.249-253 Одесса, 1898
8. С.О.Шатуновский, Учение о величине. О постулатах, лежащих в основании понятия о величине // Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. - Т. 1 - СПб.: тип. "Север 1913. с. 276-281.
9. С.О.Шатуновский, Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям // Одесса, 1917. - 205 с.


---

УДК 51(091) + 51:37

# Очерк истории топологического образования в Нижнем Новгороде[1]

**Г. М. Полотовский (Россия, г. Нижний Новгород)**
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
e-mail: polotovsky@gmail.com

# Essay on the history of topological education in Nizhni Novgorod

**G. M. Polotovskiy (Russia, Nizhni Novgorod)**
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
e-mail: polotovsky@gmail.com

Рис. 1: Участники Горьковской топологической школы 1964 года.

Решение о включении курсов по топологии в программы математических специальностей ВУЗов было принято в СССР в 1974 году, тогда как необходимость такого образования ощущалась в различных местах гораздо раньше. В докладе описывается процесс становления топологического образования в Нижнем Новгороде.

Ключевыми фигурами этого процесса были известный тополог Соломон Иосифович Альбер и Дмитрий Андреевич Гудков – профессор Нижегородского университета, решивший в 1969 году задачу о топологической классификации неособых вещественных проективных кривых степени 6, включённую Д. Гильбертом в его знаменитую 16-ю проблему.

Первым важным моментом, усилившим интерес к топологии в Нижнем Новгороде, стала проведённая 17 – 28 июня 1964 года в доме отдыха "Волга" под Горьким (так тогда назывался Нижний Новгород) "Горьковская топологическая школа", одним из основных организаторов которой был С.И. Альбер, в то время – доцент Горьковского университета. Школа была очень сильной – об этом свидетельствуют как отчёт о её работе, опубликованный в журнале "Успехи математических наук" (см. [1]), так и малоизвестная фотография участников школы (см. рис. 1), среди которых много выдающихся математиков – Д.В. Аносов, С.П. Новиков, Я.Г. Синай, М.Л. Громов и другие. Благодаря консультациям с многими действующими математиками удалось установить фамилии около 90% сфотографировавшихся участников школы.

Второй важный шаг был сделан Д.А. Гудковым: в 1974 г. он начал читать в Горьковском университете спецкурс по топологии по студенческим записям лекций В.А. Рохлина, читавшихся им в Ленинградском университете. Гудкову принадлежит и заслуга постановки в Горьковском университете обязательного курса топологии.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М. И., Новиков С. П., Постников М. М. Горьковский математический семинар по гомотопической топологии // УМН. 1964. Том 19, №6(120). С. 237–238

---

УДК 51(091)+(092)

# Василий Ильич Нечаев. К 100-летнему юбилею[1]

**И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

# Vasily Ilyich Nechaev. To the 100th anniversary

**I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

11 января 2020 года исполнилось сто лет со дня рождения Василия Ильича Нечаева — известного советского математика, доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института имени В. А. Стеклова Академии наук СССР (РАН), заведующего кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета (МПГУ) с 1978 по 1999 годы.

Его деятельность как педагога, ученного и организатора науки и высшего педагогического образования была многогранна.

В нашем докладе мы остановимся на одном её аспекте — роль В. И. Нечаева в возрождении Тульской школы теории чисел.

Определенные научные связи с Тульской школой теории чисел у Василия Ильича Нечаева установились ещё 55 лет тому назад, когда В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский выступали с докладами по результатам своих исследований по полиномам Туэ и матричным разложениям алгебраических иррациональностей на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел МГУ под руководством член-корреспондента АН СССР А. О. Гельфонда в 1965 году. Он давал доброжелательные комментарии и справки во время их выступления.

Развитие этих связей было продолжено уже в 1986 году, когда Василий Ильич согласился взять к себе соискателем В. С. Ванькову, преподавателя Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого.

Профессор М. Д. Гриндлингер в 1981–1983 годах позволил Н. М. Добровольскому в аспирантуре продолжать заниматься теорией чисел по тематике профессора Н. М. Коробова в области теоретико-числового метода в приближенном анализе. Профессор Н. М. Коробова в рамках своего научного семинара в МГУ им. М. В. Ломоносова, который он вёл совместно с Д. А. Митькиным, продолжил руководить научными исследованиями Н. М. Добровольского. Профессор В. И. Нечаев согласился сотрудничать в области подготовки специалистов по теоретико-числовому методу приближенного анализа с Тульским государственным педагогическим институтом им. Л. Н. Толстого и МГУ имени М. В. Ломоносова. Благодаря этим профессорам в Туле после десятилетнего перерыва начала возрождаться теоретико-числовая научная школа, основанная В. Д. Подсыпаниным в 1949 году.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

У всех тульских аспирантов Василия Ильича остались самые теплые воспоминания о домашних консультациях, которые он ежемесячно проводил для них. На этих консультациях Василий Ильич прежде всего сосредотачивал свои усилия на тщательной подготовке аспирантов по программе кандидатского экзамена по специальности. Огромное впечатление на тульских аспирантов производила научная библиотека профессора, в которой он быстро находил нужную справку по любому научному вопросу, возникавшему в процессе занятий.

Со стороны МПГУ это сотрудничество осуществлялось профессорами: В. И. Нечаевым, Д. А. Митькиным, С. М. Ворониным, В. Г. Чирским, А. В. Жмулевой. Благодаря этому сотрудничеству были подготовлены кандидатские диссертации по теории чисел:

- В. С. Ванькова "Многомерные теоретико-числовые сетки" (МПГУ, 1992 г. рук. В. И. Нечаев);
- А. Л. Рощеня "Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решеток" (МПГУ, 1998 г. рук. В. И. Нечаев);
- И. Ю. Реброва "Пространство решеток и функции на нем (МПГУ, 2000 г. рук. В. И. Нечаев, Н. М. Добровольский);
- О. В. Родионова "Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения" (МПГУ, 2000 г. рук. Д. А. Митькин, Н. М. Добровольский);
- Г. Т. Вронская "Квадратичное отклонение плоских сеток" (МПГУ, 2005 г. рук. Н. М. Добровольский);
- Л. П. Добровольская "Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов" (МПГУ, 2009 г. рук. В. Н. Чубариков);
- А. С. Герцог "Чисто-вещественные биквадратичные алгебраические поля и их приложения" (МПГУ 2012 г. рук. Н. М. Добровольский);
- Е. Д. Ребров "Некоторые теоретико-числовые методы приближенных вычислений" (МГУ, 2013 г. рук. Н. М. Добровольский).

Отметим один интересный факт. На семинаре под руководством Н. М. Коробова в МГУ в 1992 году в процессе обсуждения диссертации В. С. Ваньковой Василий Ильич вместе с Николаем Михайловичем сформулировали задачу получения асимптотических формул для плоских сеток. Эта задача стала известна как задача Коробова-Нечаева. Её удалось решить Г. Т. Вронской в своей кандидатской диссертации.

Сотрудничество между кафедрой теории чисел МПГУ и кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии ТГПУ им. Л. Н. Толстого по подготовке аспирантов успешно продолжается и сейчас.

Другое важное направление научного сотрудничества связано с организацией и проведением научных конференций сначала по теории чисел, а потом по алгебре и теории чисел. Василий Ильич Нечаев активно участвовал в организации и проведении этих Международных конференций. Прежде всего надо отметить активную совместную работу профессоров С. Б. Стечкина и В. И. Нечаева по организации первой Международной конференции по теории чисел в Туле в 1993 году.

В. И. Нечаев успел лично принять участие в трёх первых конференциях. На каждой из этих конференций он настаивал на необходимости организации специализированного журнала по теории чисел. К сожалению, ему не удалось дожить то того момента, когда по решению IV-ой Международной конференции, которая проходила в Туле в 2001 году, его мечта была осуществлена и был организован Чебышевский сборник. В настоящее время журнал вошёл в 3-ю квартиль Scopus и уверенно развивается.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

2. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

3. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

4. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

5. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.

6. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83—90.

7. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

8. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции " Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. 2001. Т. 1. С. 40–49.

9. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 105–128.


---

УДК УДК 51-74

# Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях

**А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)**
доктор педагогических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
**С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)**
к.п.н., доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

**О. В. Кузовлева (Россия, г. Москва)**
к.т.н., доцент, доцент, ФГБОУ ВО Российский государственный университет правосудия
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)**
к.т.н., доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
**Д. С. Клементьев (Россия, г. Тула)**
аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

## Mathematical planning and modeling of processes of behavior of metal systems in extreme conditions and statuses

**A. N. Sergeev (Russia, Tula)**
doctor of technical Sciences, Professor, Professor, Tolstoy Tula state pedagogical University
**S. N. Kutepov (Russia, Tula)**
candidate of pedagogics Sciences, associate Professor, Tolstoy Tula state pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
**O. V. Kuzovleva (Russia, Moscow)**
candidate of technical Sciences, associate Professor, associate Professor, Russian state University of justice
e-mail: kusovleva@yandex.ru
**A. E. Gvozdev (Russia, Tula)**
doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
**D. S. Klementyev (Russia, Tula)**
graduate student, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy

Использование оптимального планирования и математического моделирования в процессах исследования структуры, свойств и ресурса слитковых, порошковых и нанокомпозиционных металлических материалов имеет большое значение [1, 2]. Это обусловлено тем, что, во-первых, применение оптимального планирования с использованием оптимальных планов эксперимента не стандартных видов позволяет сократить количество дорогостоящих и трудоемких экспериментов и повысить их точность. Во-вторых, построение адекватных математических моделей, разработанных на основе полученных экспериментальных результатов, позволяют установить закономерности изменения характеристик механических, структурных, эксплуатационных свойств, и ресурса металлических систем в экстремальных условиях и состояниях [3].

Рассмотрим применение методики математического планирования и моделирования на примере выявления влияния легирования на закономерности изменения физико-механических свойств арматурной низколегированной стали марки 09Г2С, применяемой в качестве волокнистых наполнителей в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях, работающих в агрессивных средах в экстремальных условиях [4].

Анализ экспериментальных результатов металлургических плавок позволил установить, что по величине предела текучести опытные плавки стали 09Г2 можно разделить на три группы [5]:

1. $\sigma_T = 380 \ldots 400$ МПа — плавки № 1, 4, 5, 7;

2. $\sigma_T = 430 \ldots 440$ МПа — плавки № 3 и 6;

3. $\sigma_T = 510 \ldots 540$ МПа — плавки № 2 и 8.

По пределу текучести с учетом значимости коэффициентов получено следующее уравнение регрессии:

$$\sigma_T = 435 + 33Ni + 30Cu - 28Zr, \text{МПа} \tag{1}$$

из которого следует, что при выбранных интервалах варьирования металлы никель и медь в равной мере способны упрочнять нормализованную сталь данного состава. Проверка уравнения на адекватность показала, что оно неадекватно и не может быть использовано для следующих этапов планирования.

Для оценки сопротивления опытных плавок стали 09Г2 хрупкому разрушению исследовали ударную вязкость $a_H$ и работу развития трещины $a_P$ с определением доли волокна в изломе ударных образцов. После статистической обработки получены уравнения регрессии для параметров оптимизации $T_{50}$ и $T_{aP2}$, которые имеют следующий вид:

$$T_{50} = -19 + 8Cr - 19Nb + 13Cu - 15Zr, \tag{2}$$

$$T_{aP2} = -28 + 7Ni - 13Nb + 5Cu - 10Zr. \tag{3}$$

Статистический анализ этих уравнений на адекватность показал, что они адекватны, т.е. могут быть использованы для поиска оптимума. Из приведенных уравнений следует, что положительное влияние на критическую температуру стали в хрупкое состояние оказывают сильные карбидообразующие элементы, такие как ниобий и цирконий, способствующие измельчению зерна (до № 10...11 в сравнении с № 9 для плавок без этих элементов).

Установлено что при этом одновременно наблюдается отрицательное влияние хрома, никеля и меди, что можно связать с получением после термической обработки — нормализации мелкодисперсных игольчатых структур повышенной прочности.

Как следует из полученных результатов, более высоким температурным уровнем ударной вязкости ($a_{HIV-40} > 5,5$ МДж), работы развития трещины ($a_{P-40} > 3$ МДж) и порогом хладноломкости (ниже $-45°C$) обладают плавки № 3 и № 7, модифицированные ниобием и цирконием и содержащие до 1,70% никеля.

Склонность стали к водородному охрупчиванию оценивали по потере пластичности наводороженных образцов и времени перехода от обратимой водородной хрупкости к необратимой. Для определения потери пластичности образцы, находящиеся под растягивающим напряжением $\sigma_Э = 0,9\sigma_T$, катодно наводороживали током плотностью 5 мА/см$^2$ в течение 2 ч. 15 мин., затем доводили до разрушения растяжением при скорости деформации $10^{-3}$ сек$^{-1}$.

Потерю пластичности характеризовали величиной критерия:

$$F_\Psi = ((\Psi_0/\Psi)/\Psi_0) \times 100\%, \tag{4}$$

где $\Psi_0$ и $\Psi$ — поперечное сужение ненаводороженного и наводороженного образцов.

Для определения времени перехода от обратимой хрупкости к необратимой ($\tau_{H2}$) образцы под напряжением $\sigma_Э = 0,8\sigma_T$ катодно наводороживали током плотностью 100 мА/см$^2$. Затем образцы обезводороживали при температуре $200°C$ в течение 3 ч., далее образцы разрывали в низкотемпературной среде (жидкий азот) со скоростью деформирования $10^{-1}$ сек$^{-1}$.

Установлено что, большая скорость и низкая температура испытаний способствовали выявлению начальной стадии образования дефекта, возникшего в процессе наводороживания и характеризующего переход от обратимой хрупкости к необратимой. При этих условиях дефект приводит к столь резкой потере пластичности в низкотемпературной среде, что состояния до появления и после появления дефекта в образце легко различимы. После возникновения дефекта потеря пластичности составляет 100%.

По склонности к водородному охрупчиванию исследованные варианты легирования существенно различаются. Как и при оценке перехода в хрупкое состояние, наилучшими оказались варианты № 3 и № 7.

Для параметра $F_\Psi$ было найдено уравнение регрессии, которое с учетом значимости коэффициентов имеет вид:

$$F_\Psi = 64,9 + 22,6Cr - 16,9Nb - 14,4Zr. \quad (5)$$

Статистический анализ уравнения показал его адекватность. Из полученного уравнения следует, что хром увеличивает, а ниобий и цирконий уменьшают потерю пластичности.

Для параметра $\tau_{H2}$ с учетом значимости коэффициентов уравнение регрессии имеет вид:

$$\tau_{H_2} = 8 - 3,6Ni - 6Cr + 6,9Nb + 2,7Cu + 6,1Zr + 3,8Sb + 2,9Sn. \quad (6)$$

Статистический анализ уравнения показал его адекватность. Анализ уравнения показывает, что на параметр $\tau_{H2}$ влияет каждый из рассмотренных легирующих элементов: хром и никель — отрицательно, карбидообразующие элементы и цветные примеси — положительно.

При испытаниях на длительную прочность в условиях заметно меньших напряжений процесс охрупчивания более локализован, поэтому изменения числа и распределения этих дефектов при переходе от образца к образцу может отразиться как на зарождении, так и на распространении трещин, а, следовательно, и на воспроизводимость результатов.

Исходя из этого, можно предположить, что величина $F_\Psi$ характеризует потенциальные возможности материала, поскольку она менее чувствительна к наличию случайных дефектов в образце, особенно в условиях низких скоростей деформирования. Указанное обстоятельство может привести к тому, что не во всех случаях будет наблюдаться соответствие между длительной прочностью и величиной $F_\Psi$. В то же время испытания на длительную прочность в большей мере соответствуют реальным условиям работы стали. В этом аспекте время перехода от обратимой хрупкости к необратимой является на наш взгляд, полезной характеристикой, т.к. речь идет о фиксации начальных стадий появления водородного дефекта в тех же условиях, что и при определении длительной прочности при водородном охрупчивании [6].

Для определения стойкости в среде сероводорода цилиндрические образцы диаметром 6 мм испытывали на длительную прочность в водном насыщенном сероводородном растворе, подкисленном уксусной кислотой до pH = 2,8...3,0 при постоянном напряжении $\sigma_Э$ = 350 МПа.

При испытаниях на сероводородное растрескивание наилучшую стойкость показали плавки № 3 и № 7, которые обладали наиболее высоким комплексом характеристик вязких свойств и показали наименьшую склонность к водородному охрупчиванию при катодном наводороживании.

Для параметра стойкости стали в среде $H_2S$ было получено уравнение регрессии, которое с учетом значимости коэффициентов имеет вид:

$$\tau_{H_2S} = 53,5 - 33,3Cr + 34,6Nb + 33,4Zr. \quad (7)$$

Статистический анализ показал, что это уравнение адекватно. Из него следует, что при легировании хромом стойкость стали к сероводородному растрескиванию, понижается, а при легировании сильными карбидообразующими элементами значительно повышается, что согласуется с вышеприведенными результатами испытаний на водородное охрупчивание.

Анализ всех полученных математических моделей показал, что степень влияния рассмотренных легирующих элементов, оцененная по величине и знаку коэффициентов уравнений на характеристики стойкости стали типа 09Г2 против коррозионно-механического разрушения ($\tau_{H_2S}$, $\tau_{H_2}$ и $F_\Psi$) и характеристики хладостойкости ($T_{50}$ и $T_{aP}$) примерно одинакова. Это свидетельствует о наличии корреляционной связи между указанными характеристиками. Таким

образом, на основании анализа полученных результатов, можно предположить, что свойства ферритной матрицы и, в частности, ее сопротивление разрушению во многом определяют стойкость низколегированных сталей типа 09Г2 к коррозионно-механическому разрушению.

Это показывает важность использования математического моделирования в процессах исследования поведения металлических систем в различных условиях и экстремальных состояниях материалов различных фазовых и химических составов [2, 4, 7].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шоршоров М.Х., Манохин А.И. Теория неравновесной кристаллизации плоского слитка. М.: Изд-во Наука, 1992. 112 с.

2. Гвоздев А.Е. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 477 с.

3. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.

4. Основы повышения долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в водородсодержащих средах: монография / Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 348 с.

5. Влияние комплексного легирования на физико-механические и коррозионные свойства низколегированной стали 09Г2 / Н.Н. Сергеев, В.В. Извольский, А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, А.Е. Гвоздев, Е.В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2019. Т. 9. № 1 (30). С. 6-18.

6. Извольский В.В., Сергеев Н.Н. Коррозионное растрескивание и водородное охрупчивание арматурных сталей железобетона повышенной и высокой прочности. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2001. 163 с.

7. On the Influence of Internal and External Factors on the Processes of Corrosion-Mechanical Fracture of High-Strength Low-Alloy Steels / N.N. Sergeev, A.N. Sergeev, S.N. Kutepov, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, D.S. Klementyev // Journal of Materials New Horizons. 2020. Vol. 1. Issue 1. P. 1-13.

---

УДК 51(091)

# Историко-математический анализ одной редкой письменной системы средневековых славян

**Р. А. Симонов (Россия, г. Москва)**
Научный центр исследований книжной культуры РАН
e-mail: rem.simonov@yandex.ru

# Historical and mathematical analysis of one rare written system of medieval Slavs

**R. A. Simonov (Russia, Moscow)**
Scientific Center for Book Culture Research RAS
e-mail: rem.simonov@yandex.ru

Изложена гипотеза о неизвестном применении «однословиц» – оригинальных обозначений дней недели, встречавшихся в кириллической книжности с XIV в. на Руси и соседних странах, например, Сербии.

В славяно-русской рукописной и первопечатной книжности (главным образом календарного назначения) встречается следующая система средневековых обозначений - НПВРЧТС. Большинство из соответствующих знаков совпадает с начальными буквами кириллических названий дней недели. Но в двух случаях указываются вторые по счету согласные (с учетом, что «воскресенье» тогда именовалось «неделей», а все остальные дни недели уже имели современные или близкие к ним наименования):

Н – воскресенье («**Н**еделя»),
П – понедельник («**П**онеделникъ»),
В – вторник («**В**торокъ»),
Р – среда («с**Р**еда»),
Ч – четверг («**Ч**етвергъ»),
Т – пятница («пя**Т**окъ»),
С – суббота («**С**убота»).

Знаки ряда НПВРЧТС в древнерусской традиции под называнием «однословиц» встречаются в заголовке статьи «Помятуй же день однословицю», содержащейся в составе рукописных «Святцев» (РНБ - Российская Национальная библиотека, собр. Михайловского, Q 6. Третья четв. XVI в. Л. 578 об.-579), на что было указано д.и.н. А.А. Романовой [1] (с. 367). В книговедческом отношении “однословицы” изучались в связи с вопросом формирования справочного аппарата славяно-русских книг [2]. Традиция «однословиц» в кириллической книжной традиции у других славянских народов имеется в сербской кириллической книжности, в которой (как и в древнерусской) использовалась в «седмочисленниках». В них однословицы служили основой изложения календарной информации. Как отмечала А.А. Романова, наиболее ранний образец такого «седмочисленника» представлен в сербской рукописи XIV в. (РГБ - Российская гос. библиотека, фонд 270. II. 27. Последняя четверть XIV в. Л. 2) [1] (с. 45, прим. 86).

В древнерусской книжности появление «однословиц» также относится к XIV в. Они указаны в одном рукописном Служебнике (РНБ, F. n. I. № 73. XIV в. Л. 394). Текст имеет историко-математическое значение, так как содержит воспроизведение «ручного календаря» для расчета Пасхи, в виде двух рук (открытых ладоней). Календарные руки имеют свои названия на запястьях: правая рука - «Богосдовля», левая - «Жидовска». Над рисунком «Богословлей» руки воспроизводятся «однословицы» в виде ряда НПВРЧТС, поделенного на две части НПВР и ЧТС. Первая часть знаков НПВР точно размещена над кончиками четырех вертикально идущих пальцев левой ладони (большой палец слегка отставлен влево, расположен ниже остальных пальцев, и над ним нет знака). Вторая часть знаков ЧТС как бы опущена в пространство между «Богословлей рукой» и расположенной рядом с ней «Жидовской рукой» (пасхальных полнолуний). С помощью этих двух «рук» и таблицы солнечных регуляров, записанных в данном случае под «Богословлей рукой», на Руси рассчитывали дату Пасхи [3]. Трехтабличных пасхальных комплексов с «руками» выявлено в календарной историографии довольно много, но другие случаи с «однословицами» неизвестны. Можно предположить, что в древнерусском Служебнике XIV в. «однословицы» играют какую-то неизвестную науке роль. Попробуем разобраться в этом вопросе.

При трехтабличном календарном комплексе Служебника № 73, под «рукой» пасхальных полнолуний, имеется запись летописно-информационного характера: «От Адама до крщньіа Русскиіа земи лет 6496. От крщньіа до взятьіа Рязани от татаръ лет 259» (в подлиннике числа записаны в древнерусской «буквенной» нумерации, в тексте настоящей статьи они «переведены» на современный цифровой язык). Запись свидетельствует, что ее древнерусский автор сообщал о важных исторических событиях — о крещении Руси в 988 г., а также о захвате и разорении татаро-монголами Рязани в 1237 г. - причем не прямым текстом, а математически зашифрованным. Подчеркнем очевидную вещь — он был достаточно хорошо математически подкован (для своего времени). Значит, и точное расположение «однословиц» над кончиками пальцев «Богословлей руки» может иметь определенное значение математического характера. Какое именно — может подсказать источник, введенный недавно в научный оборот.

Речь идет о статье «Сиа седмь рук», встречающейся в рукописях XVI-XVII вв. Недавно начальная часть статьи была издана А.А. Романовой по списку конца XVI – начала XVII вв. (РНБ, Соф. 1161) фототипически и наборной кириллицей в книге, посвященной творчеству Кирика Новгородца [4]. Статья «Сиа седмь рук» предназначалась для расчета дня недели каждой из семи групп церковных христианских праздников (выделенных из 113 дат, в которые включались и «памяти великих святых»). Святочные памяти сгруппированы у «рук» так, что хотя они приходятся в данном году на разные даты (день, месяц), но все имеют один и тот же день недели. Расчеты осуществлялись на основе восьми (а не семи – как заявлено в заголовке) календарных «рук». Однако только семь «рук» заполнены «однословицами», восьмая соответствует типичной «Богословлей руке» (левой), какой она известна на Руси с XIV в., обычно встречаясь в паре с “Жидовской рукой” (правой) пасхальных полнолуний. В данном случае нас будут интересовать семь “рук” с “однословицами”, главным образом - последняя седьмая “рука”. Внешне седьмая “рука” отличается от остальных тем, что является правой “рукой”, а не левой.

Заполнение всех семи “рук” велось однотипно. Все “руки”-это таблицы одинаковой вместимости, содержащие 28 клеток, образующих 7 рядов по 4 клетки ($7 \times 4 = 28$). Клетки предназначались для календарных знаков – солнечных эпакт; их было семь (АВГДЕЅЗ). Наборы солнечных эпакт вносились в “руку”-таблицу последовательно друг за другом, начиная с нижнего левого угла “руки”-таблицы. Они указывали день недели начала (или другой значимой календарной даты) любого юлианского года (простого в 365 и високосного в 366 суток). При переходе на високосный год в перечнях солнечных эпакт 5 раз осуществлялись пропуски эпакт: одной эпакты (в 3-х случаях) и двух эпакт (в 2-х случаях); три перечня по 6 знаков составляли 18 знаков ($6 \times 3 = 18$), два перечня по 5 знаков составляли 10 знаков, итого 28 эпакт.

Для заполнения “однословицами” семи «рук»-таблиц нужно было иметь некую общую идею соответствующей счетной операции. Она обнаруживается в процессе анализа структуры заполнения “однословицами” всех семи «рук»-таблиц. При заполнении 1-й «руки»-таблицы за исходный брался воскресный вариант однословиц НПВРЧТС, который делился на две части НПВР и ЧТС. Первая часть НПВР заполняла нижний ряд 1-й «руки»-таблицы, из второй части удалялся знак Ч по соображениям високосности, а оставшиеся знаки ТС вписывались в начало второй строки. За знаками ТС располагалась следующая группа “однословиц” из воскресного варианта и т. д. Заполнение первой строки 1-й «руки»-таблицы знаками НПВР подобно в своей основе схеме введения/расположения однословиц в Служебнике № 73 XIV в., что может свидетельствовать о том, что вышеизложенный способ заполнения «Богословлей руки» “однословицами” существовал на Руси уже в XIV в. Для заполнения “однословицами” остальных «рук»-таблиц (2-7) надо было преобразовать исходный ряд значений и последующие перечни знаков, каждый раз перенося первый знак на последнее место — в этом заключалась общая идея счетного преобразования однословиц:

НПВРЧТС (1-я «рука»-таблица, исходный вариант - воскресный),
ПВРЧТСН (2-я «рука-таблица, исходный вариант),
ВРЧТСНП (3-я «рука»-таблица, исходный вариант),
РЧТСНПВ (4-я «рука»-таблица, исходный вариант),
ЧТСНПВР (5-я «рука»-таблица, исходный вариант),
ТСНПВРЧ (6-я «рука»-таблица, исходный вариант),
СНПВРЧТ (7-я «рука»-таблица, субботняя, исходный вариант).

Обобщая сказанное, заключаем: в 7-й "руке", возможно, впервые явно используется субботний ряд "однословиц" СНПВРЧТ в последовательном пятикратном повторении. Именно этот ряд (субботний) мог являться первоначальным (исходным). Дело в том, что при переборе всех возможных перестановок знаков только в субботнем ряду СНПВРЧТ соблюдается правило неповторения начальних букв названий дней недели (при неизбежности повтора берется следующая согласная). Если бы первоначальным был воскресный ряд однословиц, то он при соблюдении указанного правила имел бы вид НПВСЧТБ, а не НПВРЧТС. Однако широкое распространение в славянской календарной практике получил воскресный ряд однословиц НПВРЧТ. На Руси он известен с XIV в. по Служебнику № 73. Более ранний по своему возникновению субботний ряд до сих пор как будто бы никогда и нигде не фиксировался в качестве самостоятельной знаковой системы. И вот теперь этот факт обнаружен в древнерусской статье «Сиа седмь рук».

Кроме того получен еще один результат по 7-й «руке», предвидеть который было сложно. А именно: первая колонка 7-й «руки» являет собой примечательный ряд «однословиц» (в направлении снизу вверх): СЧВНТРП. Есть источник, свидетельствующий, что на Руси каждая «однословица» соотносилась с определенным днем недели и планетой по определенному правилу: С–суббота (Сатурн), Ч–четверг (Юпитер), В–вторник (Марс), Н–воскресенье (Солнце), Т–пяТница (Венера), Р–сРеда (Меркурий), П–понедельник (Луна) (РГБ, фонд 439, картон 21, ед. хр. 3. Л. 227 об. Текст-таблица без названия кон. XVII – нач. XVIII вв.). Можно заметить астрономическую обусловленнось этого (субботнего) ряда «однословиц» СЧВНТРП, состоящую в том, что соответствующие ему планеты расположены строго по степени удаленности от земного наблюдателя. В средневековой науке указанное расположение планет имело название «халдейского» ряда, использующегося в расчетной астрологии на Руси [5, 6]. Таким образом, 7-я «рука» служит «инструментом», посредством которого последовательное пятикратное применение субботнего ряда «однословиц» СНПВРЧТ дает «халдейский» ряд СЧВНТРП.

Можно заключить, что неизвестное ранее использование «однословиц», как средства, соединяющего в себе источники календарного и сокровенного характера в некое научное единство (по средневековым меркам), свидетельствует о его распространении не во всем славянском мире, а только на Руси. Этот результат следует считать предварительным, нуждающимся в дальнейшем подтверждении новыми источниками.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романова А. А. Древнерусские календарно-хронологические источники XV-XVII вв. — СПб.: Изд-во Дмитрий Буланин, 2002. 430 с.

2. Симонов Р. А. К вопросу о формировании справочного аппарата славяно-русских книг: однословицы в Служебнике второй половины XIV в. (РНБ, F. n. I. № 73. Л. 394) // Книжная культура. Опыт прошлого и проблемы современности. Материалы V Международной научной конференции (Москва, 24-26 октября 2012 г.). В 2 т. — М., 2012. Т. 1, ч. 1. С. 439-444.

3. Климишин И. А. Календарь и хронология, 3-е изд. — М.: Изд-во Наука, 1990. С. 368-372.

4. Романова А. А. «Сия седмь рук» // Мильков В.В., Симонов Р.А. Кирик Новгородец: ученый и мыслитель. — М.: Изд-во Кругъ, 2011. С. 328-334.

5. Симонов Р. А. Русская астрологическая книжность: XI — первая четверть XVIII века. 2-е издание, испр. — М.: Изд-во ЛЕНАНД, 2019. С. 33-115.

6. Герасимова И. А., Мильков В. В., Симонов Р. А. Сокровенные знания Древней Руси. — М.: Изд-во КНОРУС, 2015. 680 с.

---

УДК 51(091)

## История математики в Коммунистической академии

**Г. С. Смирнова (Россия, г. Москва)**
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: gsmirn@mech.math.msu.ru

## History of Mathematics at the Communist Academy

**G. S. Smirnova (Russia, Moscow)**
M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: gsmirn@mech.math.msu.ru

В ходе выполнения решений XII съезда РКП(б) в самом конце 1924 г. при Коммунистической академии была создана Секция естественных и точных наук, первым руководителем которой был назначен профессор, математик О. Ю. Шмидт. На первом заседании секции (протокол № 1 от 7 февраля 1925 г.) вместе со Шмидтом профессор теоретической физики Московского университета А. К. Тимирязев (1880–1955) и экономист Л. Н. Крицман (1890–1938) утвердили План работы на 1925 г. В этом документе излагаются цели и задачи, поставленные перед новым подразделением: «*Секция Естествознания и Точных наук учреждена для борьбы за строго материалистическую науку. Ее задачей должны быть в равной мере отражение нападок на материализм и содействие построению материалистической науки, для которой в современной, общераспространенной (т.е. буржуазной) науке имеются элементы, искажаемые идеалистической идеологией... конкретные задачи следующие: ...в) Детальная работа по выяснению истории развития науки как подготовка к построению марксистской истории науки...*» [1].

В первое время штатных сотрудников было немного: «*текущая работа ведется заведующим Секцией и постоянными штатными сотрудниками (в первый год 3 – физик, биолог и невролог).*». Однако сразу Шмидт предлагает «*просить Президиум Академии в число членов Секции включить следующих лиц: Б. М. Завадовского, М. М. Завадовского, С. Г. Навашина, Баха, И. А. Черданцева, В. А. Костицына, М. С. Навашина, А. А. Максимова*». А через месяц, 14 марта 1925 г., принимается решение поручить профессору Костицыну руководство работой по истории математики. Костицын «*выразил согласие с осени широко поставить* (эту – Г. С.) *работу*» и, как отмечается в протоколе секции № 11 от 27 апреля 1925 г., в числе первых шагов предложил «*обработать имеющийся в Ленинской библиотеке математический папирус (т.н. папирус Голенищева), привлекши к этому египтолога Авдиева*». Таким образом первым руководителем работ по истории математики в Коммунистической академии стал **Костицын Владимир Александрович** (1883–1963) – математик и физик, человек уникальной

биографии, в 1928 г. выехавший в научную командировку в Париж и, узнав о планируемом аресте, решивший не возвращаться на родину. В 2017 г. были опубликованы его воспоминания и дневники с подробной вступительной статьей В. Л. Гениса [2]. Однако нигде до настоящего времени не упоминается об участии Костицына в деятельности Коммунистической академии. К сожалению, заявленная работа по изучению Московского математического папируса была осуществлена лишь пять лет спустя и другими учеными [3].

Также в марте 1925 г. в качестве внештатных сотрудников Шмидт привлекает к исследовательской работе по марксистской проработке истории античной математики слушателей Института красной профессуры С. А. Яновскую (1896–1966) и своего аспиранта М. Я. Выгодского (1898–1965), которые в 1929 г. становятся штатными сотрудниками. В мае 1925 г. в математический раздел секции приняты математики Л. А. Люстерник (1899–1981) и Л. М. Лихтенбаум (1900–1968). Осенью 1929 г. приходят А. О. Гельфонд (1906–1968) и А. П. Юшкевич (1906–1993) [4]. Первыми темами историко-математических исследований стали:

а) в 1924–27 гг. Яновская готовила доклады о методе и теории познания Спинозы, о геометрии Декарта, об основах евклидовой геометрии. Сохранился рукописный текст объемного доклада об естествознании и технике древнего Востока с пометками А. А. Максимова – научного руководителя Яновской. Также в Архиве РАН в материалах ИКП сохранилась объемная машинопись из 55 стр. работы Яновской «Реальный смысл доказательств непротиворечивости арифметики. (К вопросу об отношении математики к формальной логике с точки зрения математической диалектики)» [5].

б) Выгодский во время обучения в ИКП особенно интересовался греческой наукой. Сохранилась его рукопись-черновик от 26 декабря 1924 г. «История греческой геометрии (6й век до Р.Х., 6й век после Р.Х.). В своей анкете от 2 марта 1930 г. он перечисляет первые научные труды: «Платон как математик» (опубл. в «Вестнике Коммунистической академии» в № 16 за 1926 г.); «Понятие числа в его развитии» («Естествознание и марксизм», 1929 г. № 2); «О работах Мордухай-Болтовского» («Естествознание и марксизм», 1929 г. № 3); о книге Комарова («Естествознание и марксизм», 1929 г. № 4) [6]. Интересно, что в личном деле Выгодского 1933–1938 гг., хранящемся в документах Института истории науки и техники АН СССР, в разделе о партвзысканиях находим, что в 1924 г. он получил выговор за отрыв от массовой работы, а в 1929 г. комиссия по чистке вынесла ему строгий выговор «за политическую ошибку, выразившуюся в несогласованности выступления на беспартийном собрании с докладчиком, членом партии; за небрежность, выразившуюся в незнакомстве с брошюрой Бухарина «Политическое завещание Ленина»» [7].

В самом конце 1927 г. при Секции естественных и точных наук создается Кабинет по истории естествознания. Заведующим становится М. Л. Левин (1885–1937), немецко-русский коммунист, лидер Баварской советской республики, биолог по образованию. Математику в кабинете представляют Выгодский и Гельфонд. Первыми шагами сотрудников кабинета стали составление каталога создаваемой библиотеки и работа с первоисточниками: выяснялось, какие переводы важнейших сочинений на русский язык уже существуют, и какие необходимо сделать в первую очередь. 13 января 1928 г. Выгодскому была поручена разработка темы «Методология «Начал» Евклида» и проведение переговоров с Яновской о привлечении ее к исследованию «Истории принципов анализа бесконечно малых». Планировалось привлечь к работе по истории теории вероятностей профессора А. Я. Хинчина. Выгодскому в первую очередь рекомендовалось обратить внимание на работу Якоба Бернулли «*Ars Conjectandi*» [8]. В числе первых сочинений по математике для перевода на русский язык планировалась «Новая стереометрия винных бочек» Иоганна Кеплера, изданная затем в 1935 г. в переводе и с предисловием Г. Н. Свешникова и вступительной статьей Выгодского [9].

В марте 1928 г. принимается предложение Выгодского перевести работы Коперника "*De revolutionibus orbium coelestium*" и Галилея "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due*

*nuove scienze*". Первая из этих работ увидела свет в русском переводе лишь в 1964 г. [10]. Вторая в 1934 г. под общей редакцией И. И Агола, С. И. Вавилова, М. Я. Выгодского, Б. М. Гессена, М. Л. Левина. А. А. Максимова, А. А. Михайлова, И. П. Роцена, А. Я. Хинчина вышла в переводе С. Н. Долгова и в редакции, с предисловием и примечаниями А. Н. Долгова [11]. Интересно, что изначально в мае 1928 г. планировалось «*заключить соглашение с В. И. Гливенко на перевод одиннадцати первых листов*» [12]. Позже руководство кабинета просило С. И. Вавилова стать научным редактором по физическим вопросам [13]. Тогда же в мае 1928 г. [12] было решено «*переговорить с В. Ф. Каганом о возможностях перевода на русский язык книги "Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik im 19. Yahrhundert" в течение летних месяцев*», но лишь в 1937 г. замечательные лекции Клейна вышли в русском переводе [14].

Один борцов со старыми «реакционными» научными обществами А. А. Максимов (1891–1976) был привлечен к работе в секции еще весной 1925 г., но в 1927–28 гг. провел год в научной командировке в Западной Европе, собирая материал по истории и философии естествознания. С мая 1928 г. в число сотрудников секции был введен Э. Я. Кольман и вместе Максимовым они развернули деятельность по реорганизации Московского математического общества и др., история которой уже освещалась ранее, например, в [4]. Накануне «революции» в Московском математическом обществе из секции по собственному желанию уволились Юшкевич и Выгодский, и вскоре центр историко-математических исследований переместился в Московский университет и в организованный в 1932 г. Институт истории науки и техники АН СССР (ныне Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. АРАН. Ф. 351. Оп. 1. Д. 1. Л. 1–1об.

2. Костицын В. А. «Мое утраченное счастье...»: Воспоминания, дневники. Т. 1–2. М., Новое литературное обозрение, 2017. 784 с. + 440 с.

3. Struve W. W., Turajeff B. A. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. – Berlin: Julius Springer, 1930. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung A. Quellen 1).

4. Смирнова Г. С. На Московском математическом фронте: из истории реорганизации Московского математического общества в 1930 г. // Вопросы истории естествознания и техники. 2020. Т. 41. С. 280–310.

5. АРАН. Ф. 364. Оп. 4. Д. 20. Л. 1–55.

6. АРАН. Ф. 350. Оп. 3. Д. 286. Л. 241–242.

7. АРАН. Ф. 154. Оп. 2. Д. 10. Л. 18–19.

8. АРАН. Ф. 351. Оп. 1. Д. 38. Л. 1–1об.

9. Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. М.-Л., ГТТИ, 1935. 360 с.

10. Коперник Н. О вращениях небесных сфер = De revolutionibus orbium coelestium : [пер. с лат.] ; Малый комментарий = Commentariolus ; Послание против Вернера = Epistola contra Vernerum ; Упсальская запись / Пер. проф. И. Н. Веселовского ; Ст. и общ. ред. чл.-корр. АН СССР А. А. Михайлова. М., Наука, 1964. 646 с.

11. Галилей Г. Математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению. Москва–Ленинград, ГИТТЛ, 1934.

12. АРАН. Ф. 351. Оп. 1. Д. 38. Л. 11.

13. АРАН. Ф. 596. Оп. 2. Д. 36. Л. 1.

14. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. Подготовлено к печати Р. Курантом и О. Нейгебауером. Пер. с немецкого Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича, Л. Тумермана. Вступит. статья М. Я. Выгодского. М.–Л., ГОНТИ, 1937. 432 с.

---

УДК 51

## К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета

**А. Е. Устян (Россия, г. Тула)**
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

## To the history of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University and the Faculty of Mathematics

**A. E. Ustyan (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru

В становлении и развитии Тульского государственного педагогического института им. Л.Н.Толстого и математического факультета существенный вклад внёс кандидат физико-математических наук, доцент, Николай Павлович Петрушкин.

Рис. 1: Петрушкин Н. П.

Петрушкин Николай Павлович родился 2.1.1912 г.в с. Виски Ненецкого национального округа Архангельской области, кандидат физико-математических наук, доцент. В 1936 г. окончил Ленинградский государственный педагогический институт им. А.И. Герцена. Работал учителем школы. Осенью 1940 года Николай Павлович Петрушкин прибыл на математический факультет.

В 1940-1941 и 1945 г. и 1945-1987 гг.преподаватель ТГПИ им. Л.Н. Толстого. Участник ВОВ. Награждён орденом Красной Звезды, Отечественной войны 1-й степени., медалями. В 1964-1972гг.проректор ТГПИ по учебной и научной работе. В 1972- 1985 гг заведующий кафедрой геометрии.

Им опубликованы статьи:

1. О дуальных числах гипербалического типа.//Ученые запискиТГПИ им. Л.Н. Толстого.-Тула, 1960.вып. 7.

2. О линейных поверхностях в эллиптическом пространстве// Ученые записки ТГПИ им. Л.Н. Толстого.-Тула, 1960.вып. 7.

3. Совершенствование подготовку будущих учителей математики. Тула, 1975.

4. Практикум по решению задач.Чась 2(геометрия).-Тула, 1975.

Умер Николай Павлович Петрушкин в Туле 20.1.1991.

Большую роль в развитии факультета сыграл Классен Валерий Петрович.

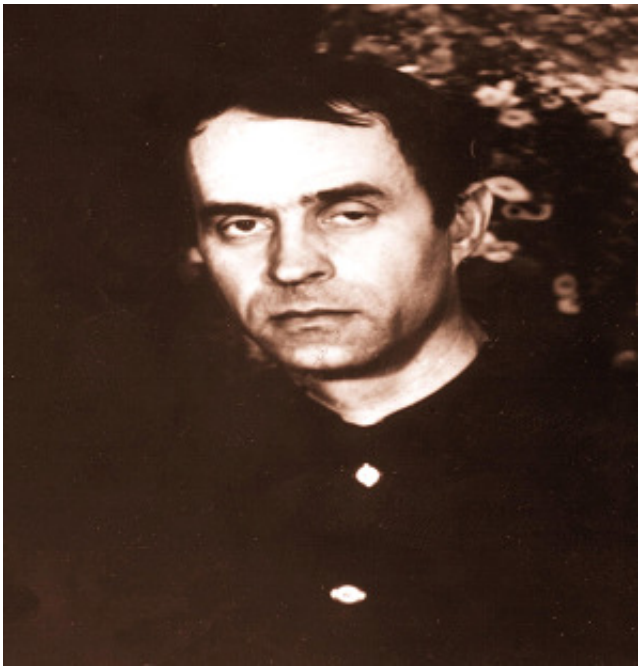


Рис. 2: Классен В. П.

Благодаря Классену Валерию Петровичу в Тульский пединститут был пригашен М. Д. Гриндлингер, с именем которого связано создание в Туле алгебраической школы и подготовка через эту школу педагогических кадров для вузов России.

Классен Валерий Петрович родился 6 июля 1939 г.в г. Ленинграде. Родители окончили Ленинградский государственный ветеринарный институт и были направлены в Коми АССР.

Рис. 3: Гриндлингер М. Д.

В 1947г они переехали в п. Епифань Тульской области. Валерий Петрович в 1956 году окончил Епифанскую СШ. В 1977 г. поступил ТГПИ на математический факультет. Окончил в 1962г получил специальность преподаватель математики и черчения. В 1962 г.был принят в аспирантуру по специальности теория чисел при кафедре высшей математики ТГПИ (научный руководитель Подсыпанин Владимир Дмитриевич) который окончил в 1965 г. С 1965 г. Валерий Петрович работал старшим преподавателем кафедры алгебры. За время работы в институте он прявил себя как способный педагог.Лекции и практические занятия, проводимые им отличались высокой научностью и идейностью. Постоянно работал над повышением своих научно-теоретических знаний.

После смерти Подсыпанина Владимира Дмитриевича(1968г) Валерий Петрович вел научно-исследовательскую работу под руководством Гриндлингера Мартина Давидовича. Научное направление: алгоритмические проблемы в группах:проблема вхождения полупрямого произведения конечной абелевой группы и группы с разрешимой проблемой вхождеия для некоторого класса групп. Им была подготовлена и защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 14 мая 1980 г. решением Совета Московского госпединститута им. В.И. Ленина от 21 янвапя 1980 г Классену В.П. была присвоена уч. степень кандидата физико-математических наук. ВАК при Совете министров СССР 14 мая 1980 выдала диплом к.ф.м.н.

Велики заслуги профессора Сорокина Николая Антоновича в развитии ТГПИ им. Л. Н. Толстого Родился 12 декабря 1913 года в городе Гродно в семье учителя. После окончания средней школы учился в Воронежском государственном университете. Окончив университет в 1940 году, работал преподавателем химии, заместителем директора химико-технологического техникуме города Кинешмы Ивановской области. В 1954-1957 годах работал инспектором школ Владимирского областного отдела народного образования. В 1957-1963 годах заведовал кафедрой педагогики Тамбовского педагогического института. В 1963 году переехал в Тулу, вплоть до 1989 года работал на кафедре педагогики и психологии Тульско-

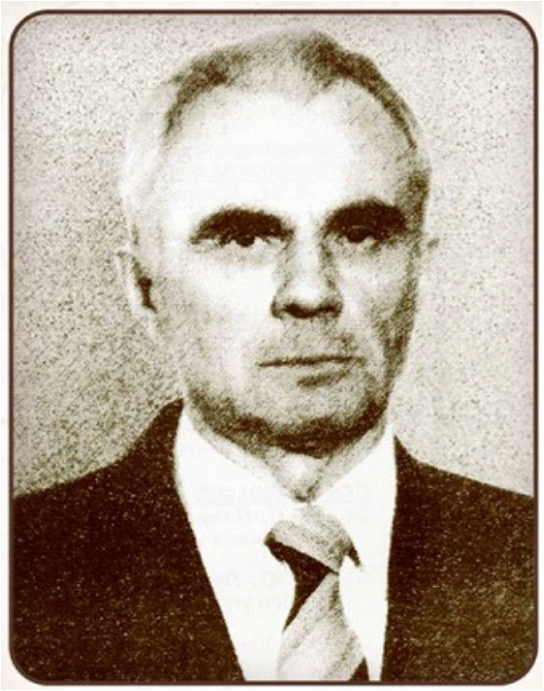


Рис. 4: Сорокин Н. А.

го государственного педагогического института имени Л.Н. Толстого. В 1963-1972 годах был проректором по учебной работе, а в 1972-1975 годах – проректором по научной работе. В 1976 году Н.А. Сорокин возглавил кафедру педагогики и психологии, которой руководил до 1981 года, а затем до 1989 года был профессором этой же кафедры. Н.А. Сорокин много и глубоко разрабатывал теоретические основы педагогики, её тесную связь с психологией, уделял большое внимание межпредметным связям в учебном процессе. Им подготовлено и опубликовано много научных работ, в том числе несколько учебных пособий.

Кандидат педагогических наук. Награждён медалью К.Д. Ушинского. Почётный гражданин города Тулы (16.12.1993). Умер 18 июля 2001 года. Похоронен на Смоленском кладбище в Туле.

Гордостью университета, несомненно, является Алексамндр Андремевич Орлов советский и российский педагог, доктор педагогических наук, профессор, академик Российской академии образования.

Александр Андреевич Орлов родился 1 октября 1938 года в городе Севастополь, Крым. В 1962 году окончил историко-филологический факультет Крымского педагогического института. Работал в школах Крыма. В 1968 году был приглашен на кафедру педагогики Крымского педагогического института. В 1970-1973 годах учился в аспирантуре Института общей педагогики АПН СССР. С 1977 года работает в Тульском педагогическом институте. В 1985 году защитил докторскую диссертацию «Управление учебно-воспитательной работой в школе». В 1980 годы он был инициатором открытия в Туле и области первых педагогических классов. Указом Президента РФ в 1995 году ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки РФ». В 2003 году награжден медалью К.Д.Ушинского. В 2013 году награжден серебряной медалью «За особый вклад в развитие Тульской области» и золотой медалью Российской академии образования «За достижения в науке». В 2016 году 21 апреля избран академиком Российской академии образования, член-корреспондент РАО с апреля 2001 года. Профессиональные интересы сосредоточены в области педагогики, методологии педагогики и

Рис. 5: Орлов А. А.

управления образованием, философии и теории педагогического образования. Александр Орлов - член Бюро Отделения философии образования и теоретической педагогики РАО. Член редакционного совета научно-теоретического журнала Российской академии образования «Педагогика», член редколлегии журнала "Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование"и электронного журнала «Письма в Эмиссия. Офлайн», включенных в перечень ВАК РФ. Председатель объединенного совета по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Д 999.009.03 на базе федерального ГБОУ высшего образования «Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н.Толстого», федерального ГБОУ высшего образования «Брянский государственный университет имени академика И.Г.Петровского», федерального ГБОУ высшего образования «Курский государственный университет» Им подготовлены 33 кандидата и 4 доктора педагогических наук. Он опубликовал более 270 научных и научно-методических работ, в числе которых 6 монографий, более 10 учебных и учебно-методических пособий, статьи в журналах «Педагогика», «Народное образование», «Преподаватель» и других.

---

УДК 514.9

## Владимир Николаевич Безверхний — руководитель научной школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп"

**А. Е. Устян (Россия, г. Тула)**
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

**И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)**
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
**А. С. Угаров (Россия, г. Тула)**
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

## Vladimir Nikolaevich Bezverkhny - head of the Tula algebraic school

**A. E. Ustyan (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru
**I. V. Dobrynina (Russia, г. Moscow)**
Academy of civil protection of EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
**A. S. Ugarov (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

27 декабря 1967 года в Тульский государственный педагогический институт им. Л.Н. Толстого приходит профессор М. Д. Гриндлингер. С самого начала своей трудовой деятельности он показал себя как выдающийся организатор науки: сначала создал математический кружок, который со временем перерос в научный семинар по теории групп и полугрупп. В настоящее время научная школа по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп известна не только в нашей стране, но и за рубежом.

В ноябре 1968 года в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого поступил Владимир Николаевич Безверхний, научный руководитель — профессор М. Д. Гриндлингер.

В. Н. Безверхний активно поддерживал и всячески содействовал изданию в ТГПИ им. Л. Н. Толстого математических сборников научных трудов, тесно сотрудничая с их главным редактором М. Д. Гриндлингером, причем с 1983 года был его заместителем, а в 1994-2001 годах — главным редактором. Под руководством М. Д. Гриндлингера и В. Н. Безверхнего выпущены:

- Ученые записки математических кафедр (под общей редакцией М. Д. Гриндлингера, 1970 год, 310 стр.).
- Вопросы теории групп и полугрупп (1972 год, 200 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (Межвузовский сборник научных трудов, 1981 год, 133 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложения (1983 год, 120 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1986 год, 124 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1990 год, 183 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1991 год, 162 стр.)

- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1994 год, 132 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний)

- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (2001 год, 200 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний)

В 1974 году В. Н. Безверхний защитил кандидатскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп"в Ленинградском государственном педагогическом институте им. А. И. Герцена.

В 1988 году стал руководить научным семинаром и научной школой по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп, а в 1993 году - аспирантурой по специальности 01.01.06. – математическая логика, алгебра и теория чисел. По его инициативе появилась традиция приглашать в комиссию по приёму кандидатских экзаменов у аспирантов профессора МГУ А. Л. Шмелькина, что существенно поднимало планку требовательности и качество знаний.

В 1999 году В. Н. Безверхний защитил докторскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп" в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. В 2004 году ему присуждено ученое звание профессора.

Владимир Николаевич установил тесные научные контакты с алгебраистами МГУ им. М. В. Ломоносова, Московского педагогического государственного университета, Ленинградского педагогического университета им. А. И. Герцена, Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, Ивановского государственного университета. Благодаря В. Н. Безверхнему, к чтению лекций для студентов и аспирантов на математический факультет приглашали известных учёных, докторов наук и профессоров, таких как А. Л. Шмелькин, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, М. М. Глухов и других.

Наиболее крупные научные результаты, полученные школой В. Н. Безверхнего [1] - [15]:

- доказана разрешимость проблемы вхождения в $HNN$-расширениях и свободных произведениях групп;

- решена проблема сопряженности подгрупп в свободных группах, свободных произведениях групп, $HNN$-расширениях с конечными ассоциированными подгруппами;

- доказана неразрешимость проблемы вхождения и сопряженности подгрупп в свободных произведениях свободных групп с объединением по подгруппам ранга 4;

- решена проблема Комерфорда: доказана разрешимость проблемы сопряженности и степенной сопряженности слов в свободном произведении групп с одним определяющим соотношением с кручением, объединенных по циклической подгруппе;

- описаны классы гиперболических групп, исследованы свойства Хаусона и $SQ$-универсальности в группах с одним определяющим соотношением;

- решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением; получено обобщение теорем Магнуса и Гриндлингера об изоморфизме групп;

- исследована проблема вхождения в неприводимых группах Артина конечного типа;

- доказана разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина конечного типа, группах Артина и Кокстера большого типа, группах с условием $C(p)\&T(q)$;

- доказана неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группах крашеных кос $R_n(n > 4)$;
- доказана разрешимость проблемы сопряженности и обобщенной сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа;
- решена проблема степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа;
- доказана разрешимость проблемы сопряженности подгрупп, исследовано свойство Хаусона и указан алгоритм, выписывающий образующие пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой;
- доказана разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов в группах с условием $C(p)\&T(q)$;
- доказана разрешимость проблемы сопряженности слов в классе полугрупп Артина большого (экстрабольшого) типа;
- доказана разрешимость проблем равенства и сопряжённости слов в группах Артина с $m$-угольной структурой ($m > 3$);
- обобщен результат С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением: решена проблема степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением;
- решена проблема ширины в свободных произведениях групп с объединением.

Под руководством В. Н. Безверхнего защищены: докторская диссертация [6]:

- Добрынина Ирина Васильевна "Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера"(ЯрГУ, 2010);

кандидатские диссертации [7] - [14]:

- Добрынина Ирина Васильевна "О подгруппах в группах крашеных кос и группах Артина конечного типа"(МПГУ, 1997),
- Паршикова Елена Владиславовна "Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)\&T(4)$"(МПГУ, 2001),
- Новикова Ольга Александровна "Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами"(МПГУ, 2002),
- Безверхняя Наталия Борисовна "Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением"(МПГУ, 2002),
- Инченко Оксана Владимировна "Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой"(МПГУ, 2010),
- Кузнецова Анна Николаевна "Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа"(МПГУ, 2010),
- Платонова Оксана Юрьевна "Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой"(ЯрГУ, 2013).

- Логачева Елена Сергеевна "Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп"(ЯрГУ, 2015)

В настоящее время Владимир Николаевич плодотворно занимается наукой. Он выступал с пленарными и секционными докладами на XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 23-29 сентября 2019 года), XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 13-18 мая 2019 года), с секционным докладом на Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, МГУ, 27-29 мая 2019 года), руководит грантом РФФИ и Правительства Тульской области по исследованию алгоритмических проблем в группах Артина и Кокстера, активно публикуется, руководит аспирантурой по комбинаторной теории групп.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Безверхний В. Н. "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп": дисс ... д. физ.-мат. наук. Тула. 1997

2. Безверхний В. Н., Устян А. Е., “О полугруппах Артина” // Фундамент. и прикл. матем., 2019, 22:4, 39–49.

3. Безверхний В. Н., Логачева Е. С., “Проблема степенной сопряжённости слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением” // Фундамент. и прикл. матем., 2019, 22:4, 29–37.

4. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., “Решение проблемы равенства и сопряжённости слов в некотором классе групп Артина” // Фундамент. и прикл. матем., 2019, 22:4, 9–27.

5. Безверхний В. Н., Устян А. Е., “Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера” // Чебышевский сб., 2013, 14:3, 20–33.

6. Добрынина И. В. "Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера": дисс. . . . д. физ.-мат. наук. Ярославль. 2010

7. Добрынина И. В. "О подгруппах в группах крашеных кос и группах Артина конечного типа": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 1997.

8. Паршикова Е. В. "Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)\&T(4)$": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2001.

9. Новикова О. А. "Решение алгоритмических проблем для свободного произве-дения с коммутирующими подгруппами": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.

10. Безверхняя Н. Б. "Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые дру¬гие свойства групп с одним определяющим соотношением": дис. . . . канд. физ.-мат. наук.. Тула.2002.

11. Инченко О. В. "Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порож¬денных группах Кокстера с древесной структурой": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.

12. Кузнецова А. Н. "Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.

13. Платонова О. Ю. "Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2013.

14. Логачева Е. С. "Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ярославль. 2015.

15. Добрынина И. В., Устян А. Е., Трубицын Ю. Э., “К 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Безверхнего Владимира Николаевича” // Чебышевский сб., 2015, 16:1, 291–300.

---

УДК 51(091)

## О создании аэродинамической лаборатории в Кучино

**В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)**
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

## On the creation of an aerodynamic laboratory in Kuchino

**V. N. Chinenova (Russia, Moscow)**
Lomonosov Moscow State University
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

В Архиве Академии наук мною обнаружено дело, которое проливает свет на создание Аэродинамической лаборатории в Кучино. Это авторизованная машинопись 1928 года Л.С. Лейбензона «Основатели русской авиации – Сергей Сергеевич Неждановский и Николай Егорович Жуковский» [1].

Л.С. Лейбензон начинает свою статью словами: «Воспоминания наши относятся к эпохе 1904 года, когда неудачно протекавшая русско-японская война дала толчок к ряду механических изобретений, которые по мысли своих авторов должны были повернуть колесо истории в пользу России» [1, с.1].

Основные методы аэродинамического эксперимента и первые конструкции аэродинамических труб в нашей стране были созданы под непосредственным руководством Н.Е. Жуковского. Он первым указал на применения теоретической и экспериментальной аэродинамики к задачам расчета летных характеристик самолета.

В 1902 г. Николаю Егоровичу Жуковскому, наконец, удалось построить аэродинамическую трубу, осуществив свое давнейшее желание. В университете была сделана квадратная труба сечением 75x75 см, которая являлась одной из первых всасывающих труб в Европе. В этой трубе исследовалась подъемная сила пластин и крыльев различной формы. Жуковский работал над определением положения центра парусности, над устойчивостью крыльев, исследовал геликоптеры, винты и различные модели. Николай Егорович составлял проекты моделей и приборов, принимал деятельное участие в проведении опытов. Многие студенты стремились принять участие в этих опытах, и Жуковский требовал от них выполнения наблюдений с максимальной аккуратностью и точностью. Оборудование лаборатории университета было недостаточно полным. Николаю Егоровичу никогда не хватало отпускаемых на кабинет средств. Он постоянно добавлял свои деньги, и счета, которые он получал от Трындина[1] или

[1]Магазин физических и оптических приборов Трындиных помещался на Б. Лубянке.

из других магазинов точных механических приборов, по большей части оставались в его ящике, оплаченные его собственными средствами. На опыты и книги Н.Е. Жуковский никогда не жалел денег, будучи сам очень бережлив и ведя самый скромный образ жизни.

Результатом этих опытов Николая Егоровича явилась его работа «О полезном грузе, поднимаемом геликоптером», напечатанная в 1904 г. в журнале «Воздухоплаватель» [2, с.232]. Там же напечатан ряд статей его ученика и помощника Бориса Михайловича Бубекина по вопросам воздухоплавания, главным образом, об аэростатах.

Весной 1904 г. богатый московский купец Д.П. Рябушинский[2], только что окончивший Московскую Практическую академию коммерческих наук[3], где преподавал Н.Е. Жуковский, обратился к Николаю Егоровичу по вопросу об организации постройки самолета. Поводом к этому обращению, по-видимому, послужили появившиеся в газетах сообщения о первых полетах братьев Райт.

Первоначально Николай Егорович предполагал, что Рябушинский предоставит средства на организацию аэродинамической лаборатории в стенах Московского университета, для чего Жуковский думал пристроить четвертый этаж над «новым зданием» Университета (против памятника Ломоносову). Однако Рябушинский не согласился с этим (недаром он был кандидатом коммерции). После ряда совещаний с Николаем Егоровичем, было решено построить в Кучино в имении братьев Рябушинских опытную аэродинамическую станцию для проведения экспериментов перед постройкой самолета.

Н.Е.Жуковский и его ученики спроектировали и построили в Кучино двухэтажное здание аэродинамической лаборатории с пятиэтажной башней на одном конце. Постройка ее производилась летом 1904 г. ассистентом Жуковского инженером К.А. Есиповым. По указанию Николая Егоровича его ученик (позднее академик) Л.С. Лейбензон[4] спроектировал и изготовил аэродинамическое оборудование этой лаборатории. Была построена большая аэродинамическая труба длиной 14,5 м и диаметром 1,2 м. Поток воздуха в этой трубе создавался вентилятором «Сирокко». Для того чтобы получить равномерный, не закрученный поток в аэродинамической трубе, на всасывающем конце трубы был установлен цилиндрический колпак [3, с.121].

В качестве консультанта по научным вопросам Николай Егорович рекомендовал Рябушинскому своего ученика по Московскому университету и по Высшему техническому Училищу Сергея Сергеевича Неждановского (1850-1940), который был, по отзыву Жуковского, большим знатоком воздухоплавания.

С.С. Неждановский тотчас указал, что самым рациональным способом постройки аэроплана является применение коробчатых змеев Харгрейва[5]. По его инициативе уже в конце лета 1904 г. были построены такого рода змеи, и они пускались в имении Рябушинского, измерялась сила тяги и угол наклона троса, поддерживающего змей, причем определялась тяга в зависимости от скорости ветра. Таким образом, был получен ряд материалов, дающих возможность построить самолет.

---

[2]Дмитрий Павлович Рябушинский (1882–1962) представлял новое поколение промышленников России конца XIX–начала XX веков.

[3]Московская Практическая академия коммерческих наук. (Покровский бульвар, 11. Усадьба Дурасовых (с 1844 по 1918)). Это учебное заведение готовило кадры для торгово-промышленных предприятий России.

[4]Леонид Самуилович Лейбензóн (1879-1951) — русский и советский учёный-механик, профессор МГУ, академик АН СССР, специалист в области гидродинамики, теории упругости, теории фильтрации газа и нефти. В 1901 году окончил физико-математический факультет Московского университета. Работал в Кучинском аэродинамическом институте под руководством Н. Е. Жуковского и одновременно учился в Императорском Московском техническом училище, которое окончил в 1906 году.

[5]Коробчатый воздушный змей был разработан в 1892 г. австралийским изобретателем Лоуренсом Харгрейвом (Lawrence Hargrave). Чрезвычайно удачная конструкция змеев, сочетавшая в себе легкость и прочность, при хорошей устойчивости и большой подъемной силе, вызвала множество подражаний, а в начале XX в. послужила прототипом для первых бипланов (Блерио, Вуазена, Сантос-Дюмона, Фармана и других).

В этой трубе начались первые систематические наблюдения над подъемной силой и сопротивлением различных аэродинамических профилей. Одновременно по указанию Николая Егоровича был спроектирован и построен станок для испытания винтов, работающих на месте. На этом станке в декабре 1904 г. был испытан в искусственном потоке воздуха ряд деревянных винтов.

Лаборатория была обставлена по последнему слову техники. Под руководством Николая Егоровича начались серьезные опытные работы. С 1905 г. начал издаваться «Бюллетень аэродинамической лаборатории», в котором печатались работы Н. Е. Жуковского, студентов-лаборантов и Д.П. Рябушинского; по отзыву Николая Егоровича последний был недурным математиком [2, с.126].

Изучив на этих полетах необходимую силу тяги, Неждановский предложил постройку аэроплана, снабдив такой коробчатый змей мотором и хвостовым оперением. Для разбега предполагалось устройство шасси на велосипедных колесах. Таким образом, был готов проект аэроплана из двух рядом расположенных (одна направо, другая налево) коробок Харгрейва с рулем глубины и хвостовым оперением. Тяга должна была даваться деревянным винтом конструкции С.С. Неждановского. Причем величина этой тяги была заранее измерена на опыте со змеем, который превращался в аэроплан, и на опыте было определено хвостовое оперение и определена мощность мотора. Подобный аппарат был построен во Франции в 1907-1908 гг. С. Дюмоном и Г. Вуазеном.

С.С. Неждановский предложил оригинальный двигатель, в котором винт и мотор были соединены в одном целом. По его проекту бензин сгорал вместе с воздухом в особой камере, и оттуда поток горячих газов устремлялся через канал в оси винта и поступал в каналы в обеих лопастях винта, из которых вытекал через специальные отверстия, и реакция вытекающих струй должна была вращать винт. Однако этим изобретениям не суждено было осуществиться.

В самом начале 1905 года Д.П. Рябушинский отказался работать совместно с Н.Е. Жуковским, Лейбензоном и Неждановским – «ему казалось, что Неждановский идет по неправильному пути в деле постройки аэроплана. Он пригласил новый состав работников в Аэродинамический институт и пошел своим собственным путем. Так было сорвано почти готовое дело построения вполне пригодного и управляемого аэроплана в России в самом начале 1905 г. и выдающийся конструктор и изобретатель С.С. Неждановский был отброшен от этого дела» [1, с.3].

Д.П. Рябушинский[6] впоследствии, когда система Неждановского получила свое осуществление во Франции, в конструкции Г. Вуазена, сожалел о своем разрыве с С. Неждановским. Из-за этого было задержано дело развития авиации в России на несколько лет. «Таким образом, С.С. Неждановский является истинным изобретателем биплана Вуазеновского типа, к которому он пришел независимым и естественным путем, идя от опытов с коробчатым змеем Харгрена» [1, с.3].

С.С. Неждановский составил себе элементарную теорию гребных винтов и пользовался ею для своих конструкций. Интересно, что первый гребной винт был построен им из цельного куска дерева в ноябре 1904 г., но позже он стал их делать склеенным из специальной фанеры. Он построил несколько винтов довольно хорошего действия и был на пути к разработке методики построения рациональных винтов.

Любопытно, что именно в это время (около 1904г.) у Н.Е. Жуковского родилась идея построить геликоптер из двух винтов, поставленных на вертикальных осях и укрепленных на тележке на велосипедных колесах. К тележке прикреплялся горизонтальный винт, приводившийся в движение специальным мотором. В этом можно видеть первообраз автожира

[6]Революция помешала дальнейшим разработкам Дмитрия Павловича в России. Вскоре после прихода новой власти Рябушинский уехал в Данию, а оттуда в Париж. Во Франции научная деятельность Д.П. Рябушинского продолжалась: он стал членом Парижской академии наук, писал научные статьи и читал лекции по механике.

испанского инженера Хуана де ла Сиерва. В конце 1903 г. в Comptes Rendus появилась статья французского воздухоплавателя Ш. Ренара, в которой он излагал результаты своих многолетних опытов с геликоптерным винтом. Николай Егорович тотчас показал, на основании результатов Ренара, что гораздо выгоднее построить многовинтовой геликоптер. Он показал, что воздушный поток, направленный перпендикулярно к оси вращающегося винта, увеличивает его подъемную силу.

Л.С. Лейбензон пишет: «С этого времени Николай Егорович уже всецело отдался авиации, и началось построение аэродинамики – новой науки, созданной, главным образом, работами Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина в России, гораздо раньше нежели в Западной Европе. Интересно прибавить, что при проектировании аэроплана системы С.С. Неждановского впервые встал перед Н.Е. вопрос об устойчивости аэропланов. Николай Егорович тогда же предложил исследовать его по методу малых колебаний, что должно было в первом приближении дать соотношение между главными элементами аэроплана; а с другой стороны – у него вырисовывалась идея возможности приложения метода метацентрической кривой, подобно тому, как это делается в теории корабля. Это было осуществлено впоследствии Бриллюеном во Франции» [1, с.7].

Практический опыт создания аэродинамических труб в МГУ, ИМТУ и Кучино и проводившиеся в этих лабораториях исследования послужили фундаментом для развития авиационной науки в России.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. АРАН. Ф1505, оп. 1, №2

2. Домбровская Е.А. «Николай Егорович Жуковский. 1847-1921. Воспоминания и материалы к биографии.» М.-Л. Изд-во: ГИОП. 1939. 248 с.

3. Космодемьянский А.А. «Николай Егорович Жуковский. 1847-1921.» М. Изд-во: Наука. 1984. 192 с.

## Секция 10. Алгебраическая теория чисел

УДК 511.32

# О значениях гипергеометрических функций с целыми параметрами в алгебраических точках

**В. В. Волчков (г. Донецк)**
Донецкий национальный университет
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
**Вит. В. Волчков (г. Донецк)**
Донецкий национальный университет
e-mail: volna936@gmail.com

# On values of hypergeometric functions with entire parameters in algebraic points

**V. V. Volchkov (Donetsk)**
Donetsk National University
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
**Vit. V. Volchkov (Donetsk)**
Donetsk National University
e-mail: volna936@gmail.com

В работе приводится эффективная нижняя оценка вырожденной гипергеометрической функции с целыми параметрами в алгебраических точках.

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $c > 0$. Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(a, c; z)$ определяется равенством

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c}\,\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\,\frac{z^2}{2!} + \dots$$

и является целой функцией переменной $z \in \mathbb{C}$ (см., например, [1, гл. 6]). В случае, когда $c \in \mathbb{N}$ и $-a \in \mathbb{N}$, функция $\Phi(a, c; z)$ выражается через многочлен Лагерра. Для этого случая авторами получена следующая оценка снизу для $|\Phi(a, c; z)|$ при алгебраических $z$.

**Теорема.** *Пусть $c \in \mathbb{N}$ и $\alpha$ – алгебраическое число степени $d$ и высоты $h$. Тогда существует эффективная постоянная $m_0 = m_0(\alpha, c) > 0$ такая, что при всех натуральных $m > m_0$ выполнено неравенство*

$$|\Phi(-m, c; \alpha)| \geqslant \frac{1}{h^{md}} \left(\frac{(c-1)!}{6^m\,(c+m-1)!}\right)^{d-1}.$$

Отметим, что это неравенство может не выполняться для некоторого алгебраического $\alpha$ степени $d$ при некоторых $c \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant d+1$. Кроме того, арифметические требования на величины $m$, $c$, $\alpha$ в теореме являются существенными. А именно, асимптотика функции $\Phi(a, c; z)$ при $a \to -\infty$ показывает, что при любых фиксированных $c > 0$ и $\alpha > 0$ равенство $\Phi(a, c; \alpha) = 0$ выполняется для бесконечной последовательности отрицательных чисел $a$, стремящейся к $-\infty$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 1. — М.: Наука, 1973. 296 с.

---

УДК 511.32

# Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0[1]

**С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)**
Санкт-Петербургский государственный университет,
*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*
**И. Б. Жуков (Россия, г. Санкт-Петербург)**
Санкт-Петербургский государственный университет
*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*
**О. Ю. Иванова (Россия, г. Санкт-Петербург)**
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

# Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0

**S. V. Vostokov (Russia, St. Petersburg)**
Saint Petersburg State University
*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*
**I. B. Zhukov**
Saint Petersburg State University
*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*
**O. Yu. Ivanova**
Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

Пусть сперва $K$ — произвольное поле характеристики $p > 0$. Хорошо известно, что циклические расширения $L/K$ степени $p$ можно задавать при помощи уравнений Артина-Шрайера, а циклическое расширения степени $p^n$ для произвольного $n > 1$ — при помощи векторов Витта. А именно, в последней ситуации мы имеем $L = K(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$,

$$(x_0^p, x_1^p, \ldots, x_{n-1}^p) -_W (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — некоторые элементы поля $K$, а знаком $-_W$ обозначено вычитание в кольце векторов Витта длины $n$ над алгебраическим замыканием $K$.

Менее известна конструкция Инабы [2], позволяющая задавать любые конечные $p$-расширения Галуа поля $K$. Она состоит в следующем. Пусть $A$ — унипотентная матрица $n \times n$ над $K$, то есть верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Пусть $X$ — унипотентная матрица $n \times n$ над алгебраическим замыканием $K$, удовлетворяющая уравнению вида $X^{(p)} = AX$, где $X^{(p)}$ обозначает матрицу, полученную из $X$ возведением каждого

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

элемента в степень $p$. Тогда присоединение к $K$ всех элементов $X$ задаёт $p$-расширение Галуа поля $K$, и любое конечное $p$-расширение Галуа может быть получено при помощи этой конструкции. (Мы можем получить даже любые конечные расширения Галуа, если опустим условие унипотентности, см. [3].)

Пусть теперь $K$ — полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с произвольным (не обязательно совершенным) полем вычетов характеристики $p > 0$; через $e$ будем обозначать его абсолютный индекс ветвления: $e = v_K(p)$. Пусть $L/K$ — вполне разветвлённое расширение Галуа степени $p$; хорошо известно, что его скачок ветвления $s = s(L/K)$ удовлетворяет условию

$$0 < s \leqslant \frac{pe}{p-1}.$$

Как было показано в [4], если $s < \frac{pe}{p-1}$, то $L/K$ может быть задано при помощи уравнения Артина-Шрайера, т. е. $L = K(x)$, где $x^p - x = a \in K$, причём можно выбрать элемент $a$ с $v_K(a) = -s$. (См. оригинальное доказательство в [1, Ch. III, (2.4)] и другое доказательство при помощи формальных групп Любина-Тэйта в [6].) Можно отметить, что случай $s = \frac{pe}{p-1}$ возможен, только если $K$ содержит первообразный корень степени $p$ из 1; при этом $L/K$ будет задаваться уравнением $x^p = \pi$ для некоторого $\pi \in K$ с $v_K(\pi) = 1$.

Далее, конструкция Витта также «работает» в характеристике 0. Заметим прежде всего, что не любое циклическое расширение $L/K$ степени $p$ может быть погружено в циклическое расширение $M/K$ степени $p^2$, однако это заведомо так для расширений с $s(L/K) < \frac{e}{p-1}$. В [7, §6] (см. также [5]) было показано, что при выполнении немного более сильного условия $s(L/K) < \frac{pe}{p^2-1}$ такое $M/K$ может быть задано с помощью двух уравнений Артина-Шрайера, идентичных уравнениям, возникающим из векторов Витта в характеристике $p$. В [8] предложена модификация этих уравнений, задающая $M/K$ при исходном условии $s(L/K) < \frac{e}{p-1}$.

Настоящее исследование посвящено возможности задания $p$-расширений Галуа поля $K$ с малыми скачками ветвления при помощи конструкции Инабы. Сформулируем основной результат из [9] (теорема 3.1).

Пусть $K$ — как выше, $\Omega$ — его алгебраическое замыкание, $n$ — натуральное число, $\alpha < 0 < 1/(n-1)$. Пусть $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что $v_K(A[i,j]) \geqslant -i\alpha e_K$ при всех $j$, где $A[i,j]$ обозначает элемент матрицы на пересечении $j$-го строки и $i+j$-го столбца. Обозначим через $X$ любую унипотентную матрицу из $M_n(\Omega)$ такую, что

$$X^{(p)} = AX. \tag{1}$$

Тогда расширение поля $K$, полученное присоединением всех элементов матрицы $X$ — конечное $p$-расширение Галуа.

Мы предполагаем, что все $p$-расширения Галуа с достаточно малыми скачками ветвления могут быть получены при помощи уравнения Инабы, но пока не проверили этого.

Эта конструкция позволяет доказывать разрешимость некоторых задач погружения для $p$-расширений полных дискретно нормированных полей, при условии, что скачки ветвления исходного расширения достаточно малые. В частности, рассмотрим простейший случай погружения абелева расширения в неабелево, а именно расширения с нециклической группой степени $p^2$ в расширение степени $p^3$ с группой $U_3$, представляющую собой группу унипотентных матриц $3 \times 3$ над полем из $p$ элементов. Имеет место следующий результат ([9, следствие 3.2]).

Пусть $L/K$ — вполне разветвлённое расширение с нециклической группой Галуа порядка $p^2$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят $e/2$, где $e = e_K > 3$. Тогда $L/K$ можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной $U_3$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Fesenko I. B., Vostokov, S.V. Local fields and their extensions. A constructive approach/ I. B. Fesenko and S. V. Vostokov// Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.

2. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p/ E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1961 Vol. 12, P. 26-36.

3. Inaba, E. On generalized Artin-Schreier equations/ E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1962 Vol. 13, № 2, P. 1-13.

4. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero/ R. E. MacKenzie, G. Whaples // Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.

5. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields/ I. Zhukov,//in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs, 2000 Vol. 3, P. 117–122.

6. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. 1990, Т. 2, № 4. С. 91-118.

7. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для p-адических полей/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков// Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995, Т.3, С. 194-214.

8. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени $p^2$ полного поля/ И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко//Зап. научн. сем. ПОМИ 2017, Т. 455, С. 52-66.

9. Востоков, С. В., Жуков И. Б., Иванова, О. Ю. Расширения Инабы для полных полей характеристики 0/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышевский сб., Т. 20:3 (2019), С. 124–133.


---

УДК 511.6

# О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями[1]

**В. П. Платонов (Россия, г. Москва)**
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: platonov@niisi.ras.ru
**М. М. Петрунин (Россия, г. Москва)**
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: petrushkin@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту N 0065-2019-0011.

**В. С. Жгун (Россия, г. Москва)**
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
e-mail: zhgoon@mail.ru

## On the problem of the periodicity of expansions into a continued fraction of $\sqrt{f}$ for cubic polynomials over number fields

**V. P. Platonov (Russia, Moscow)**
Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences
Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences
e-mail: platonov@niisi.ras.ru
**M. M. Petrunin (Russia, Moscow)**
Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences
e-mail: petrushkin@yandex.ru
**V. S. Zhgoon (Russia, Moscow)**
Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences
e-mail: zhgoon@mail.ru

Рассмотрим свободный от квадратов многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени $2g+1$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики отличной от 2. Для нас особенный интерес представляет случай, когда $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел. Предположим, что $f(x)$ не делится на $x$, и $f(0)$ — полный квадрат в поле $\mathbb{K}$, таким образом, нормирование $\nu_x$, соответствующее униформизующей $x$, имеет два продолжения: $\nu_x^+$, $\nu_x^-$ в поле $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$. При этих предположениях существует вложение $\sqrt{f(x)}$ и тем самым поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$ в поле формальных рядов Лорана $\mathbb{K}((x))$, что позволяет рассмотреть разложение этого элемента или любого другого элемента поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f(x)})$ в непрерывную дробь (подробнее, см. [1]). Пусть $\mathcal{C}$ — гладкая компактификация гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$. Рассмотрим вложение точки $P = (0, \sqrt{f(0)})$ в якобиан кривой $\mathcal{C}$, переводящее $P$ в класс $P - \infty$. В случае, когда класс $P - \infty$ имеет конечный порядок в якобиане, существует класс элементов поля $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$, для которых разложение в непрерывную дробь периодично. Эти разложения обладают интересными свойствами, о которых можно узнать из работ [2],[3].

Отметим, что некоторые элементы при указанных предположениях на пару $(\mathcal{C}, P)$ заведомо периодичны: например $\sqrt{f(x)}/x^g$ и $\sqrt{f(x)}/x^{g+1}$. В свою очередь, сам элемент $\sqrt{f(x)}$ периодичен не всегда, что является существенным отличием от случая разложения в непрерывную дробь в $\mathbb{K}((1/x))$. В связи с этим в работе [3] была поставлена проблема описания всех многочленов $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени $2g+1$ для различных классов полей алгебраических чисел $\mathbb{K}$ с квазипериодическим разложением $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь. Там же она была полностью решена для кубических многочленов над полем рациональных чисел. Рассуждения основывались на следующих соображениях. Первое — ограниченность порядка точки эллиптической кривой (полученное Мазуром [4]), второе — рациональность соответствующих модулярных кривых $X_1(N)$, отвечающих порядкам $N$ из теоремы Мазура. Напомним, что $\mathbb{K}$-точки аффинной кривой $Y_1(N)$ определенной над $\mathbb{Q}$ отвечают множествам пар $(\mathcal{C}, P)$, определенных над $\mathbb{K}$ и состоящих из эллиптической кривой $\mathcal{C}$ и точки $P$ конечного порядка $N$ на ней (через $X_1(N)$ обозначается гладкая компактификация $Y_1(N)$). Это дает для данных значений $N$ так называемую рациональную параметризацию множества таких пар $(\mathcal{C}, P)$ (см. [5]) в зависимости от параметра $t$ или иными словами многочленов $f(x,t)$, где $P$ соответствует $x = 0$. И последний этап — вычисление непрерывной дроби для $\sqrt{f(x,t)}$ в зависимости от параметра $t$, и применение критерия периодичности $\sqrt{f(x,t)}$, который формулируется в виде неравенства

на нормирования для числителя и знаменателя дроби, представляющей наилучшее приближение, и по сути является обращением в нуль некоторого коэффициента при степени $x$ (см. подробнее [2, 3]).

При попытке обобщения этого результата на более общие числовые поля $\mathbb{K}$ мы сразу сталкиваемся со следующими проблемами: полное описание порядков точек кручения (аналог теоремы Мазура) известно только для квадратичных полей (см. [6]), а оценка на кручение, полученная Мерелем (см. [7], а также [8]), более чем велика для текущего состояния вычислительных инструментов. Более того, кривые $X_1(N)$ перестают быть рациональными. В работах [9], [10] было исследовано на периодичность разложение $\sqrt{f(x)}$ в предположениях ограничивающих его период, что достигалось ограничением порядка точки кручения (что эквивалентно ограничению степени фундаментальной $S$-единицы). В последних двух работах были исследованы многочлены $f$, соответствующие эллиптическим кривым с точками кручения порядка $N \leqslant 12$, $N = 14, 16, 18$. Тем самым для полного описания периодических элементов $\sqrt{f}$ над квадратичными расширениями $\mathbb{Q}$ оставалось рассмотреть порядки кручения 13 и 15, что являлось нетривиальной вычислительной задачей. В [9], [10] периодичность $\sqrt{f(x)}$ переформулировалась в терминах решения сложной системы уравнений, включающей коэффициенты $\sqrt{f(x)}$ и дополнительные переменные. На самом деле, эта система отвечает за квазипериодичность, но для элементов вида $\sqrt{f}/x^n$ их периодичность является следствием квазипериодичности (см. [2]).

В настоящем докладе мы предлагаем обобщение метода работы [3]. Наш метод позволяет полностью решить проблему периодичности $\sqrt{f}$ для квадратичных числовых полей, а именно, мы получаем полное описание периодических разложений пар, состоящих из квадратичного числового поля и периодического элемента $\sqrt{f}$ (что, в частности, доказывает гипотезу из работы [10]), а также доказываем теорему конечности для кубических и квартичных расширений $\mathbb{Q}$. Ключевым замечанием, позволившим добиться продвижения в решении этих задач, является то, что рациональность кривых $X_1(N)$ хоть и упрощает ситуацию, но не является существенной.

Поскольку периодичность разложения $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь равносильна периодичности $\sqrt{f^\sigma(x)}$, где $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, а также периодичности $\sqrt{a^2 f(bx)}$ для любых $a, b \in \mathbb{K}^\times$, мы будем рассматривать многочлены с точностью до указанной эквивалентности.

Основные результаты работы [11] и доклада мы сформулируем в виде следующих теорем:

Теорема 1. *Число классов эквивалентности свободных от квадратов кубических многочленов $f \in \mathbb{K}[x]$, отличных от вида $cx^3 + 1$, над полем $\mathbb{K}$ степени $d \leqslant 4$ над $\mathbb{Q}$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь над $\mathbb{K}$, — конечно, и в случае $d \leqslant 2$ исчерпывается следующими представителями:*

$$12x^3 - 8x^2 + 4x + 1, \quad 12x^3 - 5x^2 + 2x + 1, \quad -120x^3 + 25x^2 + 2x + 1,$$

$$6\left(9\sqrt{21} - 41\right)x^3 - 4\left(3\sqrt{21} - 13\right)x^2 + 4x + 1, \text{для } \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{21}).$$

Эта теорема является следствием следующей более технической теоремы.

Теорема 2. *Число классов эквивалентности свободных от квадратов кубических многочленов $f \in \mathbb{K}[x]$ над произвольным $\mathbb{K}$ отличных от вида $cx^3+1$, для которых точка $(0, \sqrt{f(0)})$ соответствующей эллиптической кривой имеет порядок $3 \leqslant N \leqslant 22, N = 24$, а разложение $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь периодично — конечно.*

Имеет место также следующее простое следствие нашего метода, которое было совершенно не очевидно с позиции работ [3],[9],[10]. Множество решений систем аналогичных построенным в работах [9],[10] не более чем одномерно, поскольку пространство решений является алгебраическим подмножеством в модулярной кривой $Y_1(N)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // Успехи математических наук. 2014. Т. 69:1, № 415. С. 3–38.

2. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302, С. 354–376.

3. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 4. С. 54–94.

4. Mazur B. Rational points on modular curves // Modular Functions of one Variable V / Ed. by Jean-Pierre Serre, Don Bernard Zagier. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg. P. 107–148.

5. Kubert Daniel Sion. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math. Soc.(3). 1976. Vol. 33, no. 2. P. 193–237.

6. Kenku Monsur A, Momose Fumiyuki. Torsion points on elliptic curves defined over quadratic fields // Nagoya Mathematical Journal. 1988. Vol. 109. P. 125–149.

7. Merel Loïc. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. // Invent Math. 1996. Vol. 124, no. 1. P. 437–449.

8. Mazur, B. (with an appendix by Goldfeld, D.). Rational isogenies of prime degree // Invent Math. 1978. Vol. 44. P. 129–162.

9. В. П. Платонов, В. С. Жгун, М. М. Петрунин, Ю. Н. Штейников. О конечности гиперэллиптических полей со специальными свойствами и периодическим разложением $\sqrt{f}$ // ДАН. 2018. Т. 483, № 6. С. 603–608.

10. Платонов В. П., Петрунин М. М., Штейников Ю. Н. О конечности числа эллиптических полей с заданными степенями $S$-единиц и периодическим разложением $\sqrt{f}$ // ДАН. 2019. Т. 488, № 3. С. 9–14.

11. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями // Доклады Российской Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы Управления. 2020. Т. 493. С. 33–38.


---

УДК 511.32

## Интегральная теорема Коши для двумерных локальных полей

**С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)**
доктор физико-математических наук, профессор
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
**Т. Ю. Шашков (Россия, г. Санкт-Петербург)**
студент Санкт-Петербургского Государственного Университета, бакалавр математики
e-mail: 7197163@mail.ru

# Cauchy's integral theorem for two-dimensional local fields

**S. V. Vostokov (Russia, Saint Petersburg)**
Doctor of Physics and Mathematics, Professor
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
**T. Yu. Shashkov (Russia, Saint Petersburg)**
Student of Saint Petersburg State University, Bachelor of Mathematics
e-mail: 7197163@mail.ru

Задача исследования возникла из потребности изучения зависимостей, которые присутствуют между функциями и алгебраическими числами. Интегральная теорема Коши, один из ключевых фактов теории функций комплексного переменного, имеет аналог для одномерного локального поля характеристики. Отсюда возникает естественный вопрос существует ли обобщение аналога Интегральной теоремы Коши для случай двумерных локальных полей. Авторами доклада было получено, что ответ на поставленный вопрос - положительный: интеграл Шнирельмана допускает обобщение на случай двумерных локальных полей и существует теорема-аналог интегральной теоремы Коши в указанном случае. Как простое следствие явной формулы для символа Гильберта и интегральной теоремы Коши, была получена связь между символом Гильберта и интегралом Шнирельмана. Ниже приведены определение интеграла Шнирельмана, а также формулировка интегральной теоремы Коши и следствия из нее.

Определение 1. *Последовательность многочленов $g_1(X), ..., g_n(X), .... \in \mathbb{Z}[X]$ называется допустимой, если выполняются следующие 6 свойств:*

1. *Для любого $j$ многочлен $g_j(X)$ не имеет кратных корней в $\mathbb{Q}_p^{alg}$.*
2. $g_j(X) = X^{n_j} + c_{j,1}X^{n_{j,1}} + ... + c_{j,\mu}X^{n_{j,\mu}} + c_0$, *где $c_{j,i}$ и $c_0 \in \mathbb{Z}$.*
3. $|n_j|_p = 1$.
4. $|c_0|_p = 1$.
5. $n_j - n_{j,1} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$.
6. $n_{j,\mu} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$.

Определение 2. *Интеграл Шнирельмана функции $f(X) : U \to \overline{K^{alg}}$ ($U$ - некоторое подмножество в $\overline{K^{alg}}$) с центром в $x_0 \in \overline{K^{alg}}$ и радиусом $r \in \overline{K^{alg}}$ определяется следующей формулой:*

$$\int_{x_0,r,g} f(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i),$$

*где сходимость понимается в смысле топологии двумерного локального поля,*

*а $\alpha_i$ — корни многочлена $g_j$ (их ровно $n_j$ в силу того, что многочлен рассматривается в алгебраическом замыкании и у него нет кратных корней), лежат в $\mathbb{Q}_p^{alg}$.*

Пусть $x_0, r \in K$.

Теорема 1. *Пусть $P(X) \in K[[X]]$ сходится на множестве $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$, а многочлен $Q(X) \in K[X]$ не имеет корней на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$.*

*Тогда:*

1. $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *корректен не зависит от последовательности допустимых многочленов* $g_j$.

2. $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *равен сумме вычетов функции* $\frac{P(X)}{Q(X)}$ *по всем полюсам внутри множества* $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$

3. *Пусть* $P(X)$ *- многочлен с условиями, указанными выше, а* $Q(X) = X^m(1 - R(X))$, *где* $R(X) \in K[[X]]$, *такой, что* $\nu(R(x)) > 0$ *для любого* $x \in \{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$. *Кроме того, предположим, что* $\nu(r) > 0$.

*Тогда для функций вида* $\frac{P(X)}{Q(X)}$ *будут также верны утверждения теоремы Коши (1-2 утверждения теоремы).*

Следствие 1. *Таким образом, определенный ранее интеграл Шнирельмана для "хороших" функций определен корректно и не умаляя общности можно считать, что* $g_j = X^{n_j} - 1$ $(n_j, p) = 1$, $n_j \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$.

Следствие 2. *Пусть* $K = E\{\{t\}\}$, $E$ *- конечное расширение поля* $p$ *- адических чисел* $\mathbb{Q}_p$, $K$ *содержит корень* $(\zeta)$, $q$ *- ой степени из* 1, *где* $p$ *- нечетное простое число, а* $q = p^m$.
$(\cdot,\cdot)_q : k_q^M(K) \times K^*/(K^*)^q \to \mu_q$ *- символ Гильберта, а* $\mu_q$ *- группа корней степени* $q$ *из 1.*
*Тогда* $(\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \zeta^{tr(\int\int lim_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,y)}{s})}$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, y$ *- ненулевые элементы поля* $K$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Востоков С. В., Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, том 49, выпуск 2, 283–308

2. Востоков С. В. ,Иванов М. А. , Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, том 154, книга 2, 73–82

3. Иванов М. А., Произведение символов $p^n$-х степенных вычетов как абелев интеграл, Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 2, 120–129

4. Zhukov, I., Geometry & Topology Monographs Volume 3: Invitation to higher local fields Part I, section 1, pages 5–18

5. Востоков С. В.,Жуков И. ,Б.,Фесенко И. Б. , К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, Алгебра и анализ, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118

6. Паршин А. Н. Поля классов и алгебраическая $K$-теория.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 253—254.

7. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1288—1321.


---

УДК 511.6

# Об оценке длин периодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля[1]

**Г. В. Федоров (Россия, г. Москва)**
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

# An estimate of the period lengths of continued fractions elements of hyperelliptic field

**G. V. Fedorov (Russia, Moscow)**
Moscow State University
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Пусть $f(x) \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен над полем $K$ характеристики отличной от 2. В классическом случае рассматривается гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, где у многочлена $f$ степени $2g+2$, $g \geqslant 1$, старший коэффициент является полным квадратом в мультипликативной группе $K^*$ поля $K$. Вопрос о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}$, построенной в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$, связан с многими математическими проблемами. Одной из первых таких проблем стала проблема интегрируемости в элеметарных функциях псевдоэллиптических интегралов, рассмотренная в работах Абеля и Чебышева. Современные результаты о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}$ и эквивалентных условиях изложены в [1]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{f}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $y^2 = f(x)$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из $K^*$. Для непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, построенных в $K((1/x))$, справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В эллиптическом случае $\deg f = 4$ над полем констант $K = \mathbb{Q}$ в [2] был поставлен вопрос о возможной длине периода непрерывной дроби $\sqrt{f}$, построенной в $K((1/x))$. Согласно теореме Мазура для эллиптических кривых, если класс дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ имеет конечный порядок $m$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(\mathcal{L})$, то $2 \leqslant m \leqslant 10$ или $m = 12$. Используя этот результат и параметризацию Куберта, в [3] показано, что длина периода $n$ непрерывной дроби $\sqrt{f}$ принимает одно из значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 18, 22\}$, причем для каждого $n$ из этого множества существует бесконечная серия соответствующих примеров неизоморфных эллиптических кривых. Для квадратичного поля констант $K$ и $\deg f = 4$ в [4] доказано, что длина периода $n$ непрерывной дроби $\sqrt{f}$ может принимать одно из значений $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 26, 30, 34\}$.

Пусть теперь $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен произвольной степени, причем младший коэффициент является полным квадратом в поле $K^*$. Элемент $\alpha \in L = K(x)(\sqrt{f})$ разлагается в поле формальных степенных рядов $K((x))$ в степенной ряд вида $\alpha = \sum\limits_{j=s}^{\infty} u_j x^j$, где $u_j \in K$. Если $\alpha \in L \setminus K(x)$, то $\alpha$ можно представить в виде формального степенного ряда в $K((x))$ двумя способами, которые соответствуют нормированиям $v_x^-$ и $v_x^+$. Чтобы каждый

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант №19-71-00029).

элемент поля $L$ имел однозначное разложение в $K((x))$, мы без ограничения общности фиксируем одно из вложений поля $L$ в $K((x))$, соответствующее нормированию $v_x^-$. Для $\alpha \in L \setminus K(x)$ обозначим $\overline{\alpha}$ — сопряженный элемент к $\alpha$.

В статьях [5]-[7] отмечалось, что элементы вида $\sqrt{f}/x^s$ для различных $s \in \mathbb{Z}$ играют особую роль для поиска фундаментальных $S$-единиц и изучения их свойств в гиперэллиптическом поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. В статье [5] получены оценки сверху и снизу на длину квазипериода непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/x^g$ и $\sqrt{f}/x^{g+1}$ в случае, когда $\deg f = 2g+1$.

В теореме 2 [8] при данном некотором $s \in \mathbb{Z}$ найдены достаточные условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot x^s \in L \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g+1$ достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g+2$ найденные достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 в статье [8]. Одним из наглядных признаков случая, когда для элементов $\alpha$ и $\alpha \cdot x^s$ достаточные условия не являются необходимыми, является значительное отличие длин квазипериодов (и периодов) непрерывных дробей элементов $\alpha$ и $\alpha \cdot x^s$. Так, в примере 4 статьи [8] найден свободный от квадратов многочлен $f$ степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/x^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot x^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной $S$-единицей степени 4, где $S = \{v_x^-, v_x^+\}$.

В статье [9] дано уточнение теоремы 2 статьи [8]. А именно, в теореме 2 [9] для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g+2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/x^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические.

В статье [10], опираясь на результаты статьи [9], доказаны оценки сверху на возможные длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов поля $L$ над полем рациональных чисел. В статье [10] доказано, что, если длина периода непрерывной дроби элемента вида $\sqrt{f}/x^s$ конечна, то она не превосходит $12m$, где $m$ есть степень фундаментальной $S$-единицы поля $L$. При более сильных условиях найдены более точные оценки на возможную длину периода. Приведены новые примеры элементов рассматриваемого вида с периодами, достигающими некоторые из приведенных оценок.

Мы высказываем предположение, что длины периодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем алгебраических чисел $K$ ограничены сверху постоянной, зависящей только от порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой и степени расширения $[K : \mathbb{Q}]$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.

2. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // Acta Arith. 1960/1961. Vol. 6. P. 393-413.

3. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. Periodic continued fractions in elliptic function fields // International Algorithmic Number Theory Symposium. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. P. 390-404.

4. Sadek M. Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields // Journal of Symbolic Computation. 2016. Vol. 76. P. 200-218.

5. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, №5. С. 537-541.

6. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №3. С. 279-294.

7. Федоров Г. В. Об S-единицах для нормирований второй степени в гиперэллиптических полях // Известия РАН. 2020. Т. 84, №2. С. 197-242.

8. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.

9. Платонов В. П., Федоров Г. В., Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №1. С. 246-258.

10. Федоров Г. В. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №4. С. 321-334.

# Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 514.76

## Почти контактные метрические многообразия постоянного типа

**О. Е. Арсеньева (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет
e-mail: oe.arseneva@mpgu.su
**А. Р. Рустанов (Россия, г. Москва)**
Московский педагогический государственный университет
e-mail: aligadzhi@yandex.ru
**С. В. Харитонова (Россия, г. Оренбург)**
Оренбургский государственный университет
e-mail: hcb@yandex.ru

## Almost contact metric manifolds of constant type

**O. E. Arseneva (Russia, Moscow)**
Moscow State Pedagogical University
e-mail: oe.arseneva@mpgu.su
**A. R. Rustanov (Russia, Moscow)**
Moscow State Pedagogical University
e-mail: aligadzhi@yandex.ru
**S. V. Kharitonova (Russia, Orenburg)**
Orenburg State University
e-mail: hcb@yandex.ru

Определение 1. *[1] Почти контактной метрической структурой на многообразии $M$ называется четверка $(\eta, \xi, \Phi, g)$ тензорных полей на этом многообразии, где $\eta$ — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, $\xi$ — векторное поле, называемое характеристическим, $\Phi$ – эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый струк-турным эндоморфизмом, $g = \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ – риманова структура. При этом*

$$1)\ \eta(\xi) = 1;\ 2)\ \eta \circ \Phi = 0;\ 3)\ \Phi(\xi) = 0;\ 4)\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi;$$
$$5)\ \langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Определение 2. *[2] Почти контактные метрические многообразия, характеризуемые тождеством*

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

*называются обобщенными многообразиями Кенмоцу (короче, GK-многообразиями).*

Определение 3. *[3] Q-алгеброй называется тройка $\{V, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, *\}$, где $V$ – модуль над коммутативным ассоциативным кольцом $\boldsymbol{K}$ с (нетривиальной) инволюцией; $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ – невырожденная эрмитова форма на $V$; $*$ – бинарная операция ($* : V \times V \longrightarrow V$), антилинейная по каждому аргументу, для которой выполняется аксиома Q-алгебры*

$$\langle\langle X * Y, Z\rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, X * Z\rangle\rangle} = 0, \quad X, Y, Z \in V.$$

Если $\mathbf{K}$=C, то Q-алгебра V называется комплексной.

Определение 4. *[4] Q-алгебра V называется:*
*- абелевой, или коммутативной Q-алгеброй, если*

$$X * Y = 0, \quad X, Y \in V;$$

*- K-алгеброй, или антикоммутативной Q-алгеброй, если*

$$X * Y = -Y * X, \quad X, Y \in V;$$

*- A-алгеброй, или псевдокоммутативной Q-алгеброй, если*

$$\langle X * Y, Z\rangle + \langle Y * Z, X\rangle + \langle Z * X, Y\rangle = 0, \quad X, Y, Z \in V.$$

Напомним [5], что в $C^\infty(M)$-модуле $\mathcal{X}(M)$ гладких векторных полей на почти контактном метрическом многообразии M естественно вводится структура Q-алгебры $\Re$ над кольцом комплекснозначных гладких функций с операцией

$$C * Y = T(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y\}, \ X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

и метрикой

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, \Phi Y\rangle, \ X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Эта Q-алгебра называется присоединенной.

Теорема 1. *GK-структура имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Следствие 1. *SGK-многообразия I рода и многообразия Кенмоцу имеют абелеву присоединенную Q-алгебру.*

Следствие 2. *SGK-многообразия II рода имеют антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Следствие 3. *Многообразия Кенмоцу имеют абелеву присоединенную Q-алгебру.*

Определение 5. *[6] Комплексная K-алгебра $\Re$ называется K-алгеброй постоянного типа, если*

$$\exists c \in C \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad \langle\langle X, Y\rangle\rangle = 0 \Rightarrow \|X * Y\|^2 = c\|X\|^2\|Y\|^2.$$

Определение 6. *GK-многообразие M называется многообразием точечно постоянного типа, если его присоединенная K-алгебра имеет постоянный тип в каждой точке многообразия M. Функция c, если она существует, называется постоянной типа GK-многообразия. Если c = const, то M называется GK-многообразием глобально постоянного типа.*

Теорема 2. *GK-многообразие M является многообразием точечно постоянного типа c тогда и только тогда, когда*

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad \langle\langle X, Y\rangle\rangle = 0 \Rightarrow \|C(X, Y)\|^2 = c\|X\|^2\|Y\|^2.$$

Рассмотрим 4-форму $\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = \langle\langle X * Y, Z * W\rangle\rangle = \langle\langle C(X, Y), C(Z, W)\rangle\rangle$, обладающую свойствами:

1) антилинейность по первой паре аргументов

$$\sqrt{-1}\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{C}(\Phi X, Y, Z, W) = -\mathcal{C}(X, \Phi Y, Z, W);$$

2) линейность по второй паре аргументов

$$\sqrt{-1}\mathcal{C}(X,Y,Z,W) = \mathcal{C}(X,Y,\Phi Z,W) = \mathcal{C}(X,Y,Z,\Phi W);$$

3) кососимметричность по первой и второй парам аргументов

$$\mathcal{C}(X,Y,Z,W) = -\mathcal{C}(Y,X,Z,W) = -\mathcal{C}(X,Y,W,Z);$$

4) эрмитовость

$$\mathcal{C}(X,Y,Z,W) = \overline{(\mathcal{C}(Z,W,X,Y))}, \quad X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M);$$

Теорема 3. *GK-многообразие является многообразием точечно постоянного типа c тогда и только тогда, когда выполнено*

$$\mathcal{C}(X,Y,Z,W) = \langle\langle C(X,Y), C(Z,W)\rangle\rangle = c(\langle\langle W,Y\rangle\rangle\langle\langle Z,X\rangle\rangle - \langle\langle W,X\rangle\rangle\langle\langle Z,Y\rangle\rangle).$$

Теорема 4. *Пусть M – GK-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
*1) M – GK-многообразие точечно постоянного типа c;*
*2) первый структурный тензор GK-многообразия удовлетворяет тождеству*

$$\langle\langle C(X,Y), C(Z,W)\rangle\rangle = c\{\langle\langle W,Y\rangle\rangle\langle\langle Z,X\rangle\rangle - \langle\langle W,X\rangle\rangle\langle\langle Z,Y\rangle\rangle\};$$

*3) на пространстве присоединенной G-структуры справедливо соотношение*

$$C^{abh}C_{hcd} = \frac{c}{2}\delta^{ab}_{cd}.$$

Теорема 5. *Класс GK-многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом многообразий Кенмоцу. Класс GK-многообразий ненулевого постоянного типа конциркулярным преобразованием переводятся в почти контактные метрические многообразия локально эквивалентные произведению шестимерного собственного NK–многообразия на вещественную прямую.*

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: «Печатный Дом», 2013. 458 с.

2. Умнова С. В. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 2002. 88 с.

3. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geom. Dedicata. 1994. Vol. 51. P. 75–104.

4. Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф. Q-алгебры основных типов почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий // Праці Міжнародного геометричного центру. 2013. Том 6, № 4, С. 34-43.

5. Кириченко В. Ф. Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Том 260, № 4, С. 795-799.

6. Кириченко В. Ф. K-алгебры и K-пространства постоянного типа с индефинитной метрикой // Математические заметки. 1981. Том 29, № 2. С. 265-278.

---

УДК 512.772, 515.165.4

# О топологии вещественных распадающихся кривых степеней 7 и 8[1]

**И. М. Борисов (Россия, г. Нижний Новгород)**
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
e-mail: i.m.borisov@mail.ru
**В. А. Горская (Россия, г. Нижний Новгород)**
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru
**Г. М. Полотовский (Россия, г. Нижний Новгород)**
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
e-mail: polotovsky@gmail.com

# On the topology of real decomposable curves of degrees 7 and 8

**I. M. Borisov (Russia, Nizhni Novgorod)**
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
e-mail: i.m.borisov@mail.ru
**V. A. Gorskaya (Russia, Nizhni Novgorod)**
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru
**G. M. Polotovskiy (Russia, Nizhni Novgorod)**
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
e-mail: polotovsky@gmail.com

Задача о топологии неособых вещественных проективных кривых и поверхностей составляет содержание первой части 16-й проблемы Гильберта. В первом нетривиальном случае – для кривых степени 6 – она была решена Д.А. Гудковым в [1]. В предисловии к [1] Гудков поставил задачу топологической классификации кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых сомножителей. Эта задача (при естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей) была решена Г.М. Полотовским в [2]. В последующие годы в работах (индивидуальных и в соавторстве) А.А. Бинштейн, М.А. Гущина, А.Н. Коробейникова, А.Б. Корчагина, С.Ю. Оревкова, Г.М. Полотовского, С. Фидлер-Ле Туз, Е.И. Шустина (ссылки см. в [3]) было предпринято исследование аналогичного вопроса для кривых степени 7, которое в настоящее время почти завершено. Изучался также случай, когда число сомножителей больше двух: для степени 6 в [4] рассмотрены все варианты наборов степеней сомножителей, а для степени 7 в [5] – [7] найдена классификация взаимных расположений двух прямых и $M$-квинтики. В настоящем докладе излагаются новые результаты о топологии кривых степени 8, распадающихся на два неособых сомножителя, и о кривых степени 7, распадающихся на три неособых сомножителя, частично опубликованные в [3] и [8].

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

## 1. О взаимных расположениях коники и секстики

Рассматривается задача топологической классификации троек вида

$$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_8, \mathbb{R}C_2), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}P^2$ – вещественная проективная плоскость, $C_m$ – однородный многочлен степени $m$ с вещественными коэффициентами от однородных координат $(x_0, x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}C_m$ – множество точек в $\mathbb{R}P^2$, удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$. При этом предполагается выполнение следующих требований ("максимальности и общего положения") (i) – (v):

(i) $C_8(x_0, x_1, x_2) = C_2(x_0, x_1, x_2) \cdot C_6(x_0, x_1, x_2)$;

(ii) *$C_2$ и $C_6$ являются $M$-кривыми*[1];

(iii) *множество $\mathbb{R}C_2 \bigcap \mathbb{R}C_6$ состоит из 12 попарно различных точек ($12 = 2 \cdot 6$ – максимально возможно по теореме Безу)*;

(iv) *все точки множества $\mathbb{R}C_2 \bigcap \mathbb{R}C_6$ лежат на одном овале кривой $C_6$*;

(v) *при некотором выборе направлений обхода овала коники и пересекающего его овала кривой $C_6$ точки пересечения этих овалов лежат на них в одинаковых порядках.*

Теорема 1. *Топологическим следствиям теоремы Безу удовлетворяют 323 попарно топологически различных троек вида (1). Из них 6 троек, показанных на рис. 1, реализуются распадающимися кривыми степени 8, получающимися при построениях методом Гильберта*[2]. *Среди оставшихся 317 троек применявшийся нами вариант метода запрета подходит для 245, из которых для 231 доказана нереализуемость их кривыми степени 8*, а для оставшихся 14 , *показанных на рис. 2, вопрос о реализуемости открыт.*

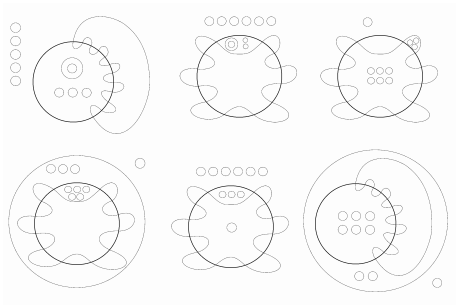


Рис. 1: Расположения, реализуемые как объединения коники и секстики.

## 2. О взаимных расположениях двух коник и кубики

*Постановка задачи здесь аналогична постановке задачи из п.1: найти топологическую классификацию вещественных проективных кривых кривых степени 7, распадающихся на кубику и две коники, т. е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$, предполагая выполнение следующих условий максимальности и общего положения:*

(a) *$C_3$, $C_2$ и $\tilde{C}_2$ являются $M$-кривыми*[3];

[1] Кривая $C_m$ степени $m$ называется $M$-кривой, если $\mathbb{R}C_m$ имеет максимально возможное по теореме Харнака число $(m-1)(m-2)/2+1$ компонент связности; в данном случае, поскольку степени кривых чётные, каждая компонента связности является овалом, т. е. двусторонне вложенной в $\mathbb{R}P^2$ топологической окружностью.

[2] О методе Гильберта см., например, [9]; коника на рисунках показана "жирной" окружностью.

[3] Напомним, что $M$-кривая степени 3 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из одного овала и нечётной ветви (топологической окружности, вложенной в $\mathbb{R}P^2$ односторонне).

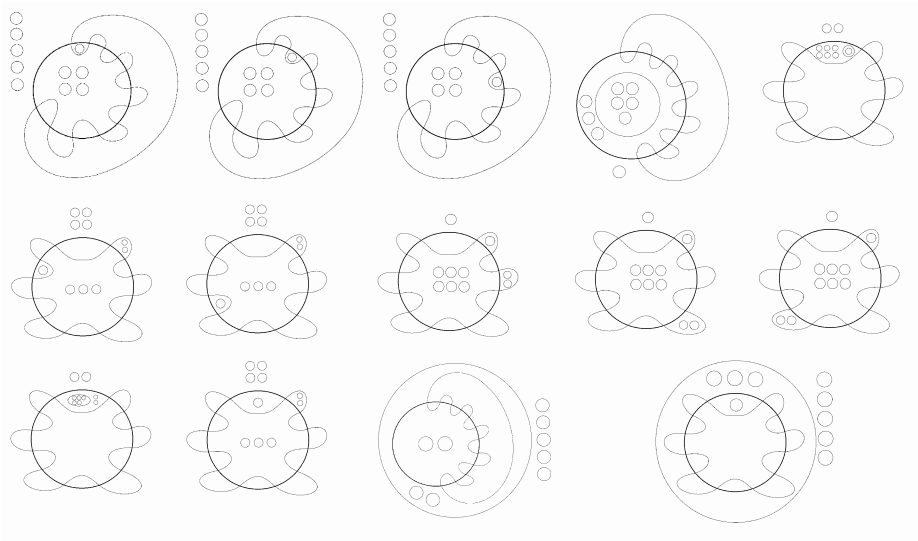


Рис. 2: Расположения, вопрос о реализуемости которых открыт.

(b) *каждые две из указанных в* (a) *кривых пересекаются без касания в максимально возможном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е.* $\sharp(\mathbb{R}C_3 \bigcap \mathbb{R}C_2) = \sharp(\mathbb{R}C_3 \bigcap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6, \sharp(\mathbb{R}C_2 \bigcap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$;

(c) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \bigcap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \varnothing$, *т. е. нет общих точек всех трёх кривых-сомножителей*;

(d) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики*;

(e) *для каждой из коник* $C_2$, $\tilde{C}_2$ *все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники*;

(f) *точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не перемежаются, т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй.*

Теорема 2. *Существуют* 57 *попарно различных топологических моделей, удовлетворяющих условиям* (a) – (f) *и топологическим следствиям теоремы Безу. Из них* 4 *модели, показанные на рис.* 3, *реализуются кривыми степени* 7. *Из остальных моделей* 51 *не может быть реализована кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости двух моделей, показанных на рис.* 4, *остаётся открытым*[4].

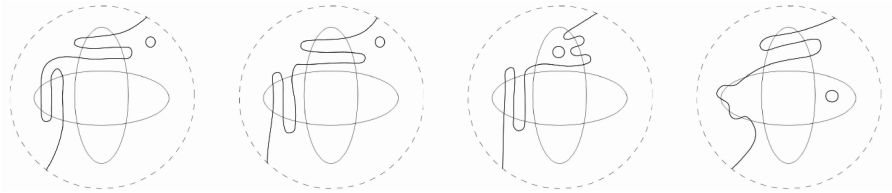


Рис. 3: Расположения, реализуемые как объединения двух коник и кубики.

[4]На рис. 3 и 4 кривые нарисованы на модели вещественной проективной плоскости, т. е. диаметрально противоположные точки каждой пунктирной окружности считаются отождествлёнными.

Рис. 4: Расположения, вопрос о реализуемости которых открыт.

## 3. О методах доказательства

*Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [3] и [8] соответственно. Сначала перечисляются топологические модели кривых, удовлетворяющие наложенным условиям. Доказательства реализуемости моделей из полученных списков состоят в построении алгебраических кривых с помощью различных вариантов метода малого параметра, доказательства нереализуемости – с помощью метода Оревкова, основанного на применении теории кос и зацеплений. Основополагающая работа с изложением этого метода и некоторых его применений – статья [10].*

## 4. Дальнейшие исследования

Изучение кривых указанных в заглавии видов продолжается. Так, В.А. Горская и студентка магистратуры ВШЭ А.С. Пухова рассматривают расположения двух неособых коник и $M$-кубики, для которых условие (f) заменено на его отрицание, студентка ВШЭ И.М. Соколова занимается расположениями, в которых условие (e) заменено на другое условие распределения общих точек нечётной ветви кубики и коник между дугами коник. Н.Д. Пучкова, студентка магистратуры Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, рассматривает один класс взаимных расположений пары $M$-квартик (т. е. $M$-кривых степени 4), овал одной из которых пересекается с овалом второй в 16 точках. В качестве примера полученных ей результатов на рис. 5 слева показана топологическая модель реализуемого расположения, а справа – модель расположения пересекающихся овалов двух $M$-квартик, которая не может быть реализована кривой степени 8 ни при каком распожении остальных (свободных от точек пересечения) овалов этих $M$-квартик.

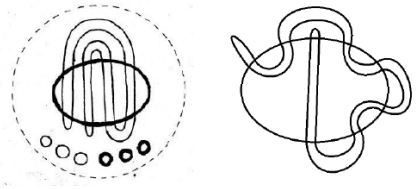


Рис. 5: Модели реализуемого и нереализуемого расположений двух $M$-квартик.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Ученые записки Горьковского ун-та. 1969. Вып. 87. С. 1–214.

2. Полотовский Г. М. Каталог $M$-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Том 236. № 3. С. 548–551.

3. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. 2020. Том 176. С. 3–18.

4. Kuzmenko T. V., Polotovskiĭ G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations, Ser. 2. 1966. T. 173. P. 165-–177.

5. Korchagin A. B., Polotovskii G. M. On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines // Communications in Contemporary Mathematics. 2003. T.5. №1. P. 1–24.

6. Оревков С. Ю. Расположения $M$-квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. Том 19. № 4. С. 174–242.

7. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. Том 21. №2. С. 92–112.

8. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. 2020. Том 22, № 1. С. 24–37.

9. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // Усп. мат. наук. 1974. Том 29. № 4 (178). С. 3–79.

10. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. T. 38. P. 779–810.

---

УДК 512.772

## Отношения для точек перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой

**Л. Н. Ромакина (Россия, г. Саратов)**
Саратовский государственный университет
e-mail: romakinaln@mail.ru

## Rations for inflection points of a cubic curve with a node or an acnode

**L. N. Romakina (Russia, Saratov)**
Saratov State Unisersity
e-mail: romakinaln@mail.ru

При исследовании аналогов замечательных кривых в неевклидовых плоскостях была обнаружена тесная связь между кубическими кривыми с узловой точкой и кубическими кривыми с изолированной точкой [1, 2, 3], такие кривые будем называть соответственно *крунодальными* и *акнодальными кубиками*. Попытка уточнить классификацию алгебраических кривых третьего порядка и придать ей более наглядный (обозримый) вид, пригодный для использования в различных неевклидовых геометриях, привела, в частности, к следующим, также общим для крунодальных и акнодальных кубик, результатам.

Теорема 1. *Каждые две точки перегиба крунодальной (акнодальной) кубики проективной плоскости $P_2$ находятся в эквиангармоническом отношении с расположенными на содержащей их прямой вещественными (мнимо сопряженными) точками касательных данной кривой в ее узловой (изолированной) точке.*

Теорема 2. *Пусть на проективной плоскости $P_2$ кривая $\sigma$ — крунодальная (акнодальная) кубика с двойной точкой $O$, а $F_1$, $F_2$, $F_3$ — отличные от $O$ точки перегиба этой кривой. Вещественные (мнимо сопряженные) точки пересечения прямой точек перегиба с касательными к $\sigma$ в точке $O$ обозначим $K_1$, $K_2$. Тогда каждое из сложных отношений $(F_iK_sF_jF_k)$, где $i,j,k=1,2,3$, $i\neq j\neq k\neq i$, $s=1,2$, является корнем уравнения $x^2-x+1=0$.*

Напомним, что *эквиангармоническим отношением* четырех точек прямой называют их сложное (в других терминах, двойное или ангармоническое) отношение $\alpha$ в том случае, когда $\alpha$ является корнем уравнения $x^2+x+1=0$ [4, с. 104].

Унимодулярные комплексные числа $\left(\varepsilon_1+i\varepsilon_2\sqrt{3}\right)/2$, где $\varepsilon_1=\pm1$, $\varepsilon_2=\pm1$, корни уравнений $x^2-\varepsilon_1x+1=0$, назовем *константами перегиба* кубической кривой с двойной точкой.

При доказательстве теорем 1, 2 использованы известные факты о кривых третьего порядка, обоснования которых можно найти по ссылкам в справочной литературе (см., например, [4, с. 96, 111], [5, с. 57], [6, с. 88]) или провести самостоятельно. В рассуждениях использован особым образом связанный с крунодальной или акнодальной кубикой проективный репер $R$, уравнение кубики в котором имеет соответственно вид

$$\begin{gathered}k^2x_1^3+(1+2vq)x_1x_2^2+vk^2x_1^2x_3-vx_2^2x_3=0,\\ k^2x_1^3-(1+2vq)x_1x_2^2+vk^2x_1^2x_3+vx_2^2x_3=0,\\ kv\neq0,\quad vp+1\neq0,\quad 2vq-vp+1\neq0.\end{gathered}\tag{1}$$

Вторая вершина $A_2$ репера $R$ совмещена с вещественной точкой перегиба исследуемой кубики, а третья вершина $A_3$ — с двойной точкой этой кривой. Первая вершина расположена на прямой, гармонически сопряженной с прямой $A_2A_3$ относительно пары касательных к кубике в ее двойной точке. Способ присоединения репера $R$ к кубике описан в работе [3] при обосновании алгоритма построения на проективной плоскости $P_2$ кубических кривых с узловой точкой, адаптированного также на евклидовой плоскости, в частности, для построения замечательных кривых.

Отметим, что непосредственно из теоремы 1 работы [3] следует, что семейство $\Theta_1$ всех крунодальных кубик плоскости $P_2$, определенных с точностью до проективного преобразования, зависит от двух параметров[1]. Рассуждая аналогично, можно показать, что семейство $\Theta_2$ всех акнодальных кубик плоскости $P_2$, определенных с точностью до проективного преобразования, также зависит от двух параметров. Закономерности, сформулированные в теоремах 1, 2, характеризуют каждую кривую семейств $\Theta_1$, $\Theta_2$.

Приведем некоторые интересные следствия теоремы 1.

Теорема 3. *Если циклические точки евклидовой плоскости являются точками перегиба циркулярной кубической кривой с узловой точкой, то касательные этой кривой в узловой точке образуют угол величиной $\pi/3$.*

Теорема 4. *Если кубическая кривая расширенной гиперболической плоскости $\overline{H}^2$ в ее изолированной точке имеет общие с абсолютом плоскости касательные, ортогональные к прямой $l$ точек перегиба, то точки перегиба данной кривой делят прямую $l$ на три равные части.*

В качестве примера циркуляной кривой, удовлетворяющей условиям теоремы 3, приведем трисектрису Маклорена (см, например, [4, с. 206], [5, с. 85]). Семейство $\Phi$ кривых, удовлетворяющих условиям теоремы 4, зависит от одного параметра. Каждая кривая этого семейства в каноническом репере плоскости $\overline{H}^2$ может быть задана вторым уравнением из (1) при условиях $k=1$, $vq-1=0$. Кривые семейства $\Phi$ при $v=\pm1$ трижды касаются абсолюта, при условии $|v|<1$ ($|v|>1$) кривые из $\Phi$ имеют с абсолютом шесть общих вещественных (мнимых) точек.

[1] В работе [3] по техническим причинам в формулировке этого утверждения (см. замечание 1) была допущена ошибка.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромакина Л. Н., Котова Н.В. Исследование замечательных кривых псевдоевклидовой плоскости в системе подготовки учителей математики. // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: сб. науч.-метод. тр. — Саратов: ИЦ «Наука», 2010. Вып. 8. С. 61-64.

2. Romakina L. N., Bessonov L.V., Chernyshkova A.A. Modeling of curls of Agnesi in non-Euclidean planes // AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics. 2018. Vol 2037. P. 020022-1 – 020022-6.

3. Romakina L. N. Construction of cubic curves with a node // Beitr Algebra Geom. 2019. Vol 60, № 4. P. 761-781.

4. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. — М.: Физматгиз, 1961. 263 с.

5. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). — М.: Физматгиз, 1960. 294 с.

6. Уокер Р. Алгебраические кривые. — М.: ИИЛ, 1952. 236 с.

# Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике

УДК 537.87

## Некоторые вопросы численного моделирования пучково-плазменной неустойчивости

**Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
**В. А. Панин (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru

## Some issues of numerical modeling of beam-plasma instability

**Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)**
Tula State Teachers' University. L.N. Tolstoy
e-mail:bobylev.yu@mail.ru
**V. A. Panin (Russia, г. Tula)**
Tula State Teachers' University. L.N. Tolstoy
e-mail:panin@tspu.tula.ru

## Введение

Изучение электромагнитных волн в волноводах с плазменным заполнением является одной из важных задач теоретической плазменной СВЧ электроники [1,2]. Наиболее интересные процессы, исследуемые этим разделом физики, происходят в электродинамических системах, называемых плазменными волноводами. Описанию различных пучково – плазменных неустойчивостей, возникающих в таких системах, посвящена многочисленная литература. При этом подробно исследуется как линейная стадия этих неустойчивостей - определяются различные режимы их развития и вычисляются соответствующие инкременты, так и нелинейная стадия, в рамках которой происходит стабилизация неустойчивости, обусловленная тем или иным фактором [1, 2]. Во многих случаях описание нелинейной динамики процессов, происходящих в таких системах, основано на совместном решении бессолкновительного кинетического уравнения Власова и уравнений Максвелла и является математически весьма трудной задачей. В связи с этим приходится пользоваться различными приближёнными методами, порой значительно огрубляя используемую модель. Например, зачастую при описании одночастичного и коллективного эффектов Черенкова, обычно предполагают, что нелинейные эффекты в первую очередь важны при описании движения электронов пучка, а электроны плазмы могут быть описаны в линейном приближении, и применяют метод неполного численного моделирования [3]. Суть данного метода заключается в том, что электроны плазмы в линейном приближении описываются аналитически, а для пучка используются численные методы. Однако, несмотря на то, что теоретическое обоснование данного метода является строгим и убедительным, было бы полезным дополнительно проиллюстрировать его справедливость на каком либо примере, чему мы и собираемся посвятить настоящую работу. А именно, рассмотрим моделирование пучковой неустойчивости в нелинейной плазме, плотность которой много

превосходит плотность пучка. При этом пучок будем считать релятивистским, и проанализируем, как влияет в данных условиях степень релятивизма пучка на динамику неустойчивости. На данном вопросе ранее также внимание специально не акцентировалось.

## Основные уравнения нелинейной теории

Рассмотрим цилиндрический металлический волновод, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении полностью замагниченные продольным внешним магнитным полем плазма и релятивистский электронный пучок. Движение тяжелых ионов не учитывается. Пучок и плазма в начальном состоянии являются моноскоростными. Будем исходить из следующей системы нелинейных уравнений [1,2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 y_p}{\partial \tau^2} = -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(\nu q_n \rho_{bn} + \rho_{pn})exp(iny_p) - k.c.],\\ \frac{\partial^2 y_b}{\partial \tau^2} = -\frac{i}{2}(1 - \frac{u^2}{c^2}(\frac{dy_b}{d\tau})^2)^{3/2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}[(\nu \rho_{bn} + q_n \rho_{pn})exp(iny_b) - k.c.].\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\tau = \omega_p t$ и $y_\alpha = k_z z_\alpha$ - безразмерные время и координата ($z_\alpha$ - координаты частиц в продольном направлении волновода); $\alpha$ - сорт частиц ($\alpha = p$ - электроны плазмы; $\alpha = b$ - электроны пучка); $k_z = 2\pi/L$ - основное продольное волновое число (предполагается, что начальное возмущение в рассматриваемой системе имеет характерный продольный размер $L$); $\nu = \omega_b^2/\omega_p^2 = n_b/n_p$ ( $\omega_\alpha = \sqrt{4\pi e^2 n_\alpha/m_\alpha}$ - ленгмюровские частоты частиц сорта $\alpha$ , $n_\alpha$ - их невозмущённые плотности); $u$ - начальная скорость электронов пучка, $c$ – скорость света; $a_n$ и $q_n$ - безразмерные геометрические параметры, причём $q_n$ определяют связь пучковой и плазменной подсистем; $\rho_{\alpha n}$ - амплитуды гармоник плотностей пучка и плазмы, даваемые выражениями

$$\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} exp(-iny_\alpha)dy_0, \quad (\alpha = p, b). \tag{2}$$

Уравнения (1) дополняются следующими начальными условиями:

$$y_p(0) = y_0, \quad \frac{dy_p}{d\tau}(0) = 0, \quad y_b(0) = y_0 + b_0 cosy_0, \quad \frac{dy_b}{d\tau}(0) = \frac{k_z u}{\omega} \equiv \Delta. \tag{3}$$

Первое условие в (3) означает, что электроны плазмы в начальный момент равномерно распределены в пространстве (т.е. плазма не замодулирована); второе условие означает, что начальная скорость электронов плазмы равна нулю. Третье условие в (3) означает, что пучок промодулирован по плотности на первой гармонике, причем глубина модуляции $b_0 << 1$ . Последнее условие в соотношениях (3) означает, что в начальном состоянии все электроны пучка имеют скорость $u$ в чем легко убедиться из определений безразмерных величин $y_b$ и $\tau$.

## Результаты численного моделирования

Для численного моделирования пучка и плазмы был использован метод крупных частиц [4], при этом для каждой из компонент бралось по 800 частиц, а в суммах в (1) учитывалось по 20 гармоник. Для проведения расчётов положим $\nu = 0,01$ , а значения параметров $a_n \approx q_n = 1$. Таким образом, мы рассматриваем неустойчивость, развивающуюся в условиях, когда в черенковском резонансе с пучком находится только первая гармоника плазменных колебаний,

а более высокие нет, такая ситуация является типичной в коротковолновой области. Чтобы проанализировать зависимость динамики неустойчивости от степени релятивизма пучка, проведём решение системы (1) для случаев, когда релятивистский фактор $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ равен, соответственно, $\gamma = 1,1$ и $\gamma = 2$ . Результаты расчётов представлены на Рис.1 (для $\gamma = 1,1$ ) и Рис.2 (для $\gamma = 2$), где изображена временная динамика амплитуд первых пяти гармоник плотности: электронов пучка $|\rho_{bn}(\tau)|$ - Рис.1а и Рис.2а, и плазмы $|\rho_{pn}(\tau)|$ - Рис.1б и Рис.2б. Графики первой и второй гармоник отмечены цифрами 1 и 2.

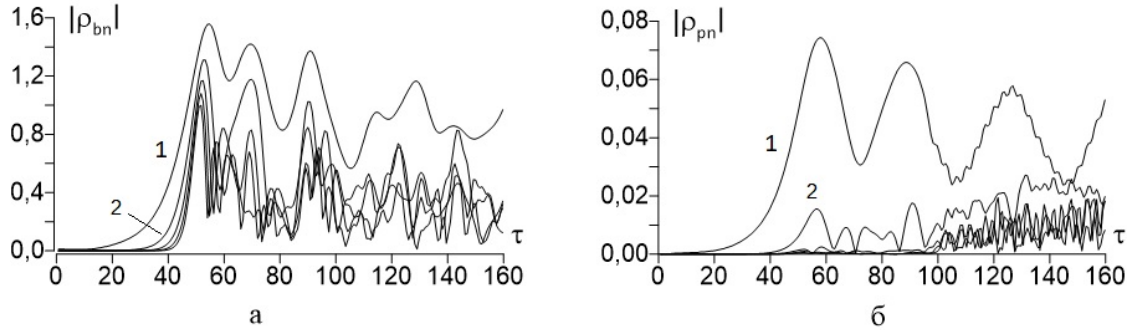



Рис. 1: Временная динамика амплитуд гармоник пучковой и плазменной волн при $\gamma = 1,1$

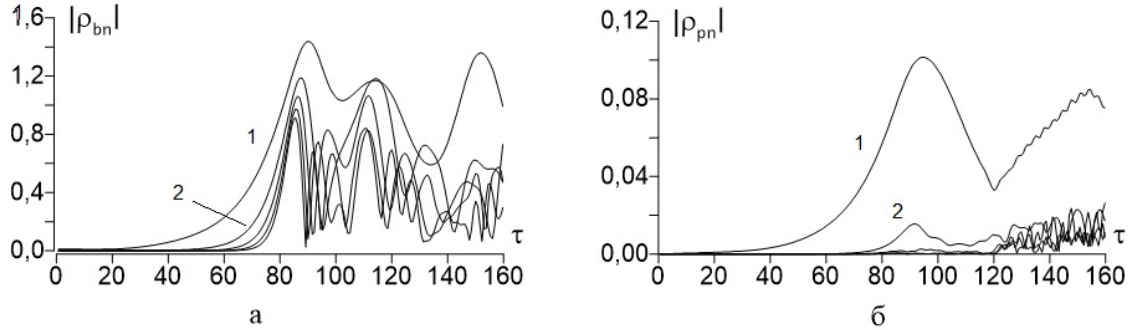



Рис. 2: Временная динамика амплитуд гармоник пучковой и плазменной волн при $\gamma = 2$

Из этих рисунков видно, что увеличение релятивизма электронного пучка приводит к росту времени развития неустойчивости, что возможно, обусловлено релятивистским увеличением массы электрона. Также на этих рисунках видно подавляющее доминирование первой (резонансной) гармоники плазменной волны. Это свидетельствует о том, плазма в течение достаточно длительного времени развития и стабилизации неустойчивости остаётся линейной, что в свою очередь является определённым обоснованием применимости в данных задачах метода неполного численного моделирования. Действительно, как видно из Рис.1б и Рис.2б, нелинейность плазмы проявляется только на поздней стадии развития неустойчивости, приводя к генерации высших гармоник её плотности.

В заключение остановимся ещё на следующем. Увеличение релятивизма пучка привносит, конечно, некоторые особенности в процесс развития и стабилизации неустойчивости [1,3], но эти особенности не являются принципиальными, качественная картина полностью сохраняется. Поэтому для получения более наглядных представлений о динамике частиц при развитии неустойчивости, приведём рисунки фазовых плоскостей электронов пучка и плазмы только для случая $\gamma = 1,1$ - Рис.3. На этом рисунке для двух моментов времени $\tau = 58$ и $\tau = 110$ приведены зависимости скоростей электронов пучка $\eta_b = dy_b/d\tau$ и плазмы $\eta_p = dy_p/d\tau$ от координаты $y$.

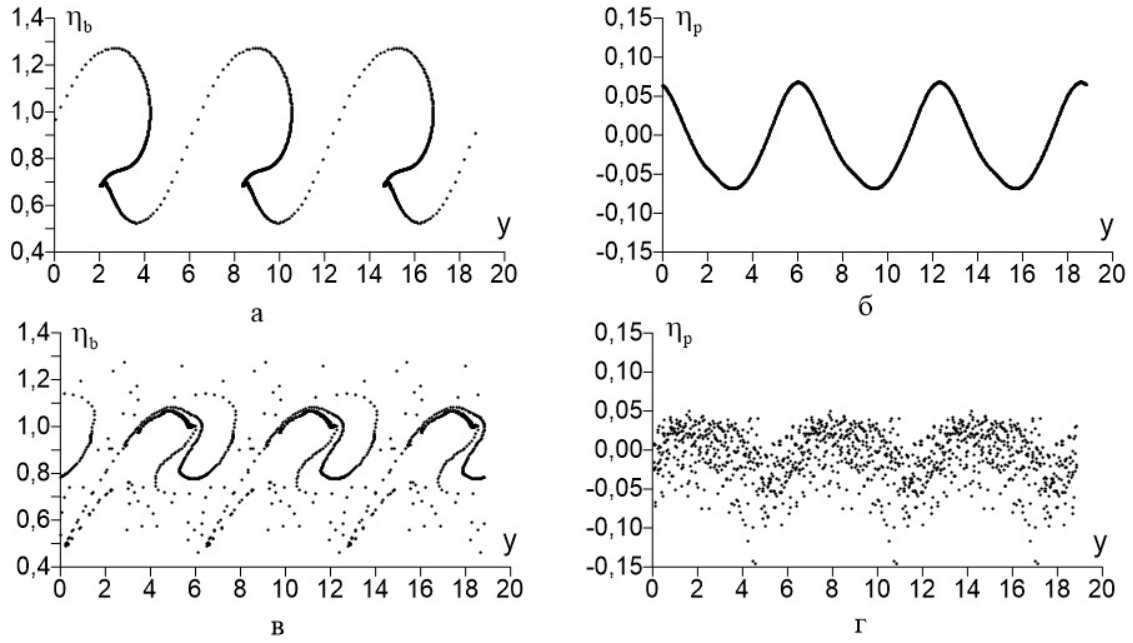



Рис. 3: Фазовые скорости электронов пучка (а и в) и плазмы (б и г) для $\tau = 58$ и $\tau = 110$ для случая $\gamma = 1,1$ .

Рис.3б служит ещё одним подтверждением того, что плазма вплоть до момента насыщения неустойчивости остаётся линейной, стабилизация же неустойчивости происходит вследствие нелинейности электронов пучка. А именно, приведённые на Рис.3 зависимости соответствуют общепринятой теории, описывающей стабилизацию пучково-плазменной неустойчивости за счёт захвата электронов пучка плазменной волной [1]. Действительно, согласно теории захвата насыщение пучковой неустойчивости при одночастичном эффекте Черенкова обусловлено разбиением пучка на сгустки, торможением сгустков до скорости равной фазовой скорости резонансной гармоники плазменной волны, захватом сгустков в потенциальных ямах поля этой гармоники. Окончание первого торможения сгустков и есть момент насыщения неустойчивости и момент стабилизации роста амплитуды резонансной гармоники плазменной волны. В дальнейшем, захваченные сгустки совершают колебания в потенциальных ямах, то, ускоряясь, то тормозясь. Именно такое поведение электронов пучка мы и наблюдаем на Рис3а и Рис.3в. Однако, в отличие от описанной картины, на каждом периоде первой пространственной гармоники имеется группа отражённых электронов. Они отражаются от «горбов» потенциала ленгмюровской волны самого пучка (самозахват) [1]. Последнее свидетельствует о том, что при выбранных для расчётов значений параметров, неустойчивость развивается в режиме коллективного эффекта Черенкова [1]. Далее, из Рис.3г видно, что после стабилизации неустойчивости, когда плазма становится нелинейной, поверх обычной модуляции на частоте первой пространственной гармоники, образуется более мелкомасштабная структура, с которой и связаны высшие гармоники плотности плазмы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. — Издательство: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 544с.

2. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике СВЧ. — М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.

3. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В. Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой. — М.: Физматлит, 2009. 456с.

4. Березин Ю. А., Вшивков В. А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. — Новосибирск: Наука СО, 1980. 96 с.

---

УДК 37.01

## Применение методов поэтапного интегрирования при описании нелинейных колебаний механических систем

**А. И. Грибков (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru
**Р. В. Романов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru
**Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru

## Applying step-by-step integration techniques to describe non-linear fluctuations in mechanical systems

**A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru
**R. V. Romanov (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru
**Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: bobylev.yu@mail.ru

В физике нередко встречаются нелинейные системы, совершающие колебательные движения, являющиеся линейными на отдельных участках. Для описания таких систем удобно использовать метод поэтапного интегрирования [1], суть которого заключается в следующем. По условию на каждом отдельном участке – этапе - дифференциальное уравнение движения системы является линейным, и поэтому его интегрирование не должно представлять существенных затруднений. Зная начальные условия, можно проинтегрировать уравнение движения на первом этапе и определить (в общем случае) обобщённые координату и скорость в конечный для первого этапа момент времени. Эти конечные значения координаты и скорости одновременно являются начальными для следующего — второго этапа. Таким образом, проведя интегрирование линейного дифференциального уравнения движения, соответствующего второму этапу, надо в качестве начальных условий использовать конечные значения координаты и скорости первого этапа. В дальнейшем этот приём следует распространить на все последующие этапы движения системы.

Описанная ситуация в случае механических колебаний имеет место, например, когда характеристика силы упругости оказывается составленной из нескольких прямолинейных отрезков [1]. Ещё одним подобным случаем является система, совершающая колебания при наличии сухого (кулоновского) трения [2]. Нужно отметить, что анализу колебаний в системах с сухим трением в вузовских курсах обычно уделяется гораздо меньше внимания по сравнению с колебаниями при наличии вязкого трения, которые рассматриваются достаточно подробно. Обусловлено это, очевидно, сложностью анализа и громоздкостью процедуры решения уравнений движения подобных систем. Восполняя этот пробел, мы подробно рассмотрим данный вопрос в настоящей работе, используя для этого численные и аналитические методы.

Будем считать, что тело массой $m$, находясь на шероховатой поверхности, совершает горизонтальные колебания относительно положения равновесия под действием упругой силы. Коэффициенты упругости и трения обозначим, соответственно, через $k$ и $\mu$ (здесь мы не делаем различий между коэффициентами трения скольжения и покоя). Силы, действующие на тело в процессе колебаний, показаны на Рис.1. Тогда исходные уравнения движения тела записываются стандартным образом в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{\text{тр}}, \tag{1}$$

и затем в проекциях на горизонтальную ось Ox

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - sign2(v_x, x)\mu mg \quad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = -sign2(v_x, x)\mu g. \tag{2}$$

Начальные условия, которые будут определять решение, имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_{0x}. \tag{3}$$

Знаковая функция в (2) уже зависит от двух переменных и определяется сложнее, чем обычно

$$sign2(v_x, x) = \begin{cases} 1, v_x > 0 \\ -1, v_x < 0 \\ -1, v_x = 0, x > 0 \\ 1, v_x = 0, x < 0 \\ 0, v_x = 0, x = 0 \end{cases} \Rightarrow sign(v_x) = \begin{cases} 1, v_x > 0 \\ 0, v_x = 0 \\ -1, v_x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Явление остановки и задержки тела в отклонённом от среднего положении, в котором действующая на него со стороны пружины сила не равна нулю, называется застоем. Условие равенства сил трения и упругости дают границы области застоя

$$|x| \leqslant a = \frac{\mu mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{4\pi^2}T^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5}$$

При решении задачи удобно перейти к безразмерным переменным и параметрам

$$\tau = \omega t, \quad X = \frac{x}{a}, \quad V_x = \frac{v_x}{v_a}, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega\frac{dX}{d\tau} = v_a V_x, \quad v_a = a\omega = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{6}$$

в которых уравнение (2) и начальные условия (3) запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} + X = -sign2(\frac{dX}{d\tau}, X), \qquad X(0) = X_0, \ \frac{dX}{d\tau}(0) = V_{0x}. \tag{7}$$

Получили обыкновенное, дифференциальное уравнение не содержащее каких либо параметров, решение которого будет определяться только начальными условиями.

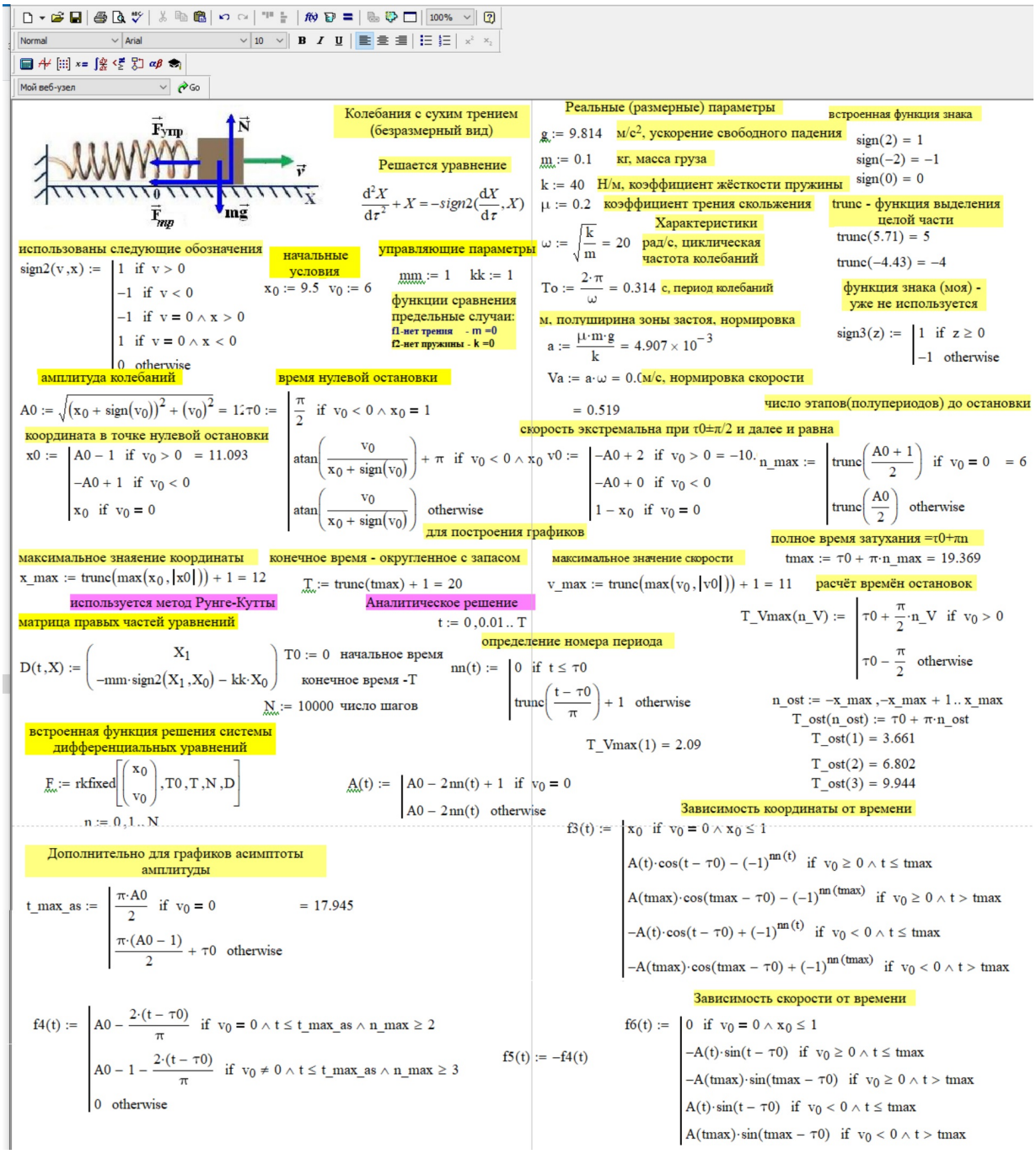



Рис. 1: Рабочий лист Mathcad с расчётными формулами численных и аналитических решений уравнения (7).

Для решения уравнения (7) будем использовать вычислительную систему Mathcad [3]. Удобство и популярность данного приложения обусловлена во многом той лёгкостью, с которой математические уравнения, текст и графика могут быть объединены в одном электронном документе, что собственно и иллюстрируется в нашем случае Рис. 1 и Рис. 2. Так на Рис. 1 приведены (в средней и нижней правой части листинга) формулы, определяющие аналитическое решение уравнения (7) для координаты и скорости тела. Вывод данных выражений для каждого этапа движения и установление общих закономерностей является достаточно громоздкой и нетривиальной процедурой, подробности которой можно найти, например, в [4].

Для проверки результатов аналитического анализа рассматриваемой задачи был использован реализованный в MathCad посредством функции rkfixed [3], алгоритм Рунге-Кутты четвёртого порядка точности. Соответствующие формулы приведены в средней левой части листинга на Рис.1. На Рис. 2 представлены графики численного и аналитического решения уравнения (7), полученные при расчётах, проведённых по алгоритмам, описанным на листинге Рис. 1. Видно, что данные зависимости на первом и втором графиках для координаты и скорости тела полностью совпадают. Здесь же на Рис. 2 даны графики, выражающие зависимость проекции безразмерной скорости от безразмерной координаты $V_x = f(X)$ - фазовая плоскость рассматриваемых нелинейных колебаний, а также зависимость полной энергии тела от времени. На последнем графике, показывающем уменьшение со временем энергии тела, видны характерные точки перегиба, соответствующие, очевидно, моментам остановки тела.

В заключении отметим, что использование численных методов в этой задаче послужило не только графической иллюстрацией искомого решения, но и явилось критерием правильности аналитических зависимостей, построение которых в данном случае оказывается достаточно непростым.

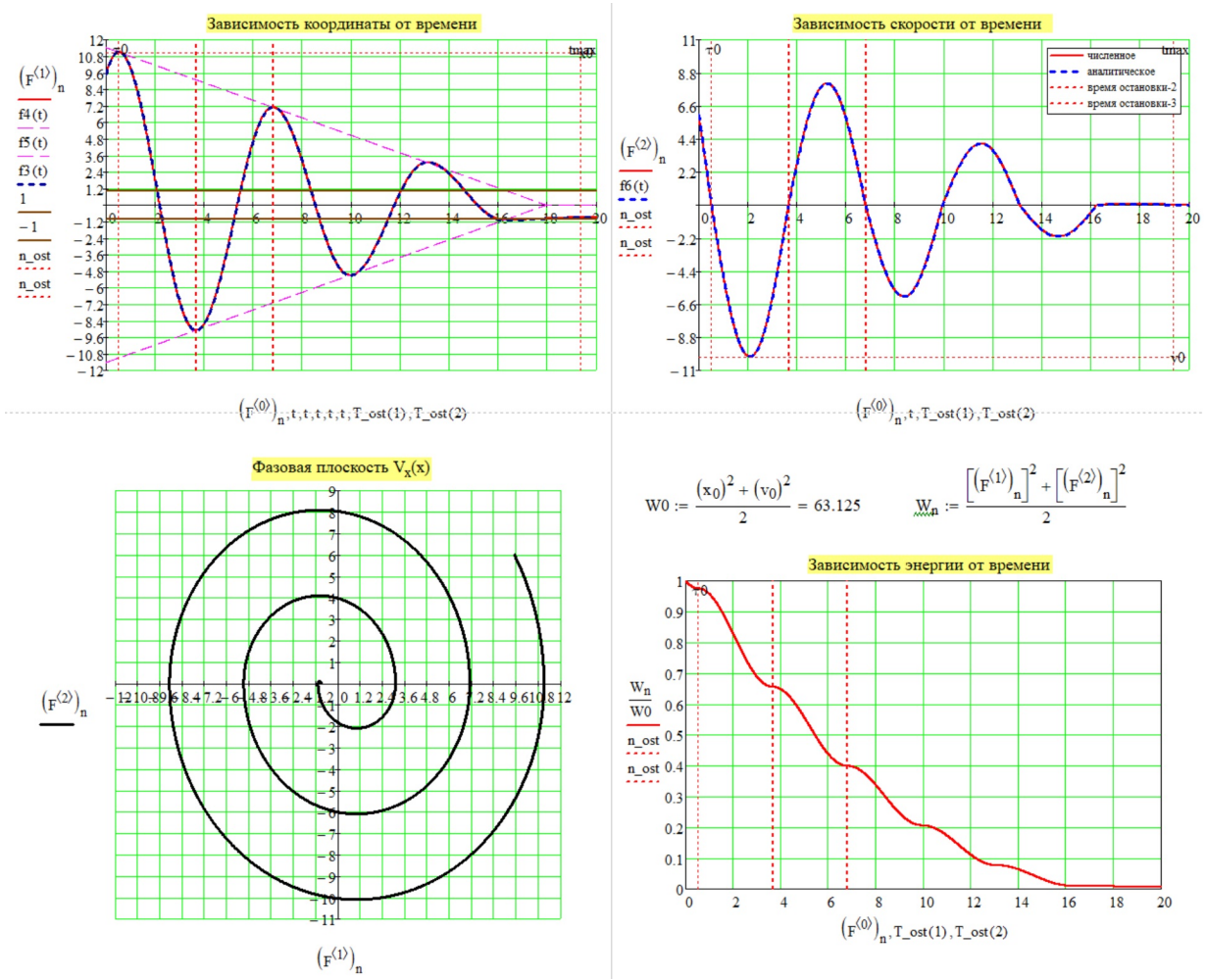



Рис. 2: Продолжение рабочего листа Mathcad, представленного на Рис.1 - результаты расчётов.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т.3. Специальные главы механики. — М.: Наука, 1973. 488с.

2. Алешкевич В. А.,Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. — Изд-во Физического факультета МГУ, 2001. 143с.

3. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432с.

4. Бобылев Ю. В., Грибков А. И., Панин В. А., Романов Р. В. Механика. Курс лекций: учебное пособие. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2014. 300с.


---

УДК 517.5

# Исследование энергетики углеродных нанотрубок безорбитальным методом в рамках теории функционала плотности

**В. Г. Заводинский (Россия, г. Хабаровск)**
Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики ДВО РАН
vzavod@mail.ru
**О. А. Горкуша (Россия, г. Хабаровск)**
Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики ДВО РАН
684bmts@rambler.ru

# Energy study of carbon nanotubes by orbital-free method in the frame of density functional theory

**V. Zavodinsky (Russia, Khabarovsk)**
Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
vzavod@mail.ru
**O. Gorkusha (Russia, Khabarovsk)**
Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
684bmts@rambler.ru

В данной работе изучена зависимость энергии связи атомов углерода в нанотрубках от величины диаметра трубок. Для вычисления энергии связи использовался безорбитальный метод моделирования, развитый нами в рамках теории функционала плотности.

Теория функционала плотности [1] основывается на представлении о том, что основное (невозбужденное) состояние квантовой системы может описано без использования волновых функций (орбиталей), с помощью единственной функции — электронной плотности $\rho$. Однако эта теория столкнулась с нерешенной и по ныне проблемой вычисления кинетической энергии как функционала плотности, и получила компромиссное развитие в виде уравнений Кона-Шэма [2], которые все-таки используют волновые функции. Подход Кона-Шэма оказался весьма эффективным и до сих пор широко применяется для моделирования многоатомных систем. Однако, в силу использования волновых функций, число которых растет с ростом

числа атомов, его вычислительные возможности весьма ограничены и к настоящему времени практически достигли своего предела — несколько сотен атомов (при использовании псевдопотенциалов) и несколько десятков атомов (в полноэлектронном варианте). В то же время, современные нанотехнологии заинтересованы в моделирования систем, состоящих из десятков и сотен тысяч атомов. В связи с этим, в течении ряда лет различные группы ученых заняты разработкой истинно безорбитального подхода, который сулит возможность моделировать системы с нужным количеством атомов.

В нашей предыдущей работе [3] изложено описание нашей версии безорбитального подхода, которая отличается от версий других авторов, во-первых, тем, что наш подход является полноэлектронным (не использует псевдопотенциалы), а во-вторых, для нахождения кинетической энергии многоатомной системы мы используем результаты расчета одиночных атомов.

Вкратце наш метод заключается в следующем. Полная энергия многоатомной системы $E$ находится путем минимизации функционала

$$E[\rho] = \int_\Omega \varepsilon(\rho)dr = \int_\Omega V(r)\rho(r)dr + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(r)\rho(r)dr + \int_\Omega \varepsilon^{ex-c}(\rho)dr + \int_\Omega \varepsilon^{kin}(\rho)dr \qquad (1)$$

при условии $\int_\Omega \rho(r)dr = N$, где $\Omega \in \mathbf{R}^3$, $V(r)$ — суммарный потенциал атомных ядер, $\phi(r)$ — потенциал Хартри, $\varepsilon^{ex-c}(\rho)$ и $\varepsilon^{kin}(\rho)$ — обменно-корреляционный и кинетический функционалы энергии.

Кинетический функционал многоатомной системы $\varepsilon^{kin}(\rho)$ находился через интегрирование кинетического потенциала $\mu_{kin}(\rho) = \frac{\delta\varepsilon^{kin}(\rho)}{\delta\rho}$, который в свою очередь определялся путем модификации кинетического потенциала одиночного атома по формуле

$$\mu_{kin}(\rho) = \mu_{kin}^{atom}(\rho) \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{(d \cdot N_v)^2}\right), \qquad (2)$$

где $\mu_{kin}^{atom}$ — кинетический потенциал одиночного атома, $N_v$ — число валентных электронов в атоме, $d$ — среднее расстояние между атомами.

Кинетический потенциал одиночного атома вычислялся с использованием полноэлектронного пакета ELK [4].

В данной работе, развитый нами полноэлектронный безорбитальный метод использован для вычисления полной энергии углеродных нанотрубок. Мы рассматривали нанотрубки конечной длины с открытыми концами типа «кресло» (armchair). Диаметр трубок $D$ варьировался от 0.68 нм до 1.50 нм, а количество входящих в них атомов изменялось от 80 до 240. Были рассмотрены два набора трубок: длина трубок в первом наборе составляла 0.87 нм, во втором - 1.36 нм. Моделирование проводилось в кубическом объеме со стороной 5 нм, который разбивался при интегрировании на ячейки с помощью трехмерной сетки $200 \times 200 \times 200$.

Для первого набора минимум энергии связи (8.50 эВ) найден при $D_{min} = 1.22$ нм, для второго набора при $D_{min} = 1.00$ нм (8.62 эВ). Эксперимент [5], проведенный с помощью Рамановского рассеяния, дал величину $D_{min} = 1.0 - 1.5$ нм.

Таким образом, нами показано, что наш безорбитальный метод позволяет описать энергетику углеродных нанотрубок в согласии с экспериментом.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hohenberg H., Kohn W. Inhomogeneous electron gas // Phys. Rev. 1964. V 136. P. B864-B871.

2. Kohn W., Sham J. L. Self-consistent equations including exchange and correlation effects //Phys. Rev. 1965. V 140. P. A1133-A1138.

3. Zavodinsky V. G.,Gorkusha O. On a possibility to develop a full-potential orbital-free modeling approach// NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2019,V 70, № 10(4), P. 402–409.

4. Полноэлектронный пакет для моделирования атомов и молекул. `http://elk.sourceforge.net`.

5. Zavodinsky V. G.,Gorkusha O. and A. P. Kuz'menko A. P. Energetics of carbon nanotubes with open edges: Modeling and experiment // NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2017,V 8, № 8(5), P. 402–409.2017.

---

УДК 537.87

## Численное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого вакуумного резонатора

**В. А. Панин (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: panin@tspu.tula.ru
**Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru

## Numerical simulation of the arousal of electromagnetic vibrations of the open vacuum resonator

**V. A. Panin (Russia, г. Tula)**
Tula State Teachers' University. L.N. Tolstoy
e-mail:panin@tspu.tula.ru
**Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)**
Tula State Teachers' University. L.N. Tolstoy
e-mail:bobylev.yu@mail.ru

## Введение

Одной из важных проблем высокочастотной электродинамики является корректная постановка и решение нестационарных задач о возбуждении открытого резонатора нестационарным внешним источником. Подобные задачи в случае стационарного гармонического внешнего источника уже давно подробно исследованы [1]. Если же внешний источник нестационарен, то задача существенно усложняется. Основной трудностью при этом является правильная постановка граничных условий излучения на открытом торце резонатора, из которого происходит излучение электромагнитных волн в окружающее пространство. Данная трудность обусловлена тем, что известные ранее условия излучения [1, 2] разрабатывались для решения стационарного уравнения Гельмгольца, описывающего установившийся колебательный процесс, и, поэтому непосредственно в качестве граничных условий излучения для нестационарной системы уравнений Максвелла использованы быть не могут. Важный шаг на пути решения

указанной проблемы был осуществлён в работе [3] и ряде последующих публикаций, а в дальнейшем обобщён в [4]. Там были сформулированы общие нестационарные парциальные граничные условия на открытом торце резонатора, позволяющие рассматривать произвольные нестационарные электромагнитные явления. В настоящей работе проводится исследование практического применения данных условий к конкретной электродинамической системе.

## Основные уравнения

Рассмотрим систему, основной частью которой является резонатор - металлический цилиндрический волновод радиуса $R$ и длиной $L$ с идеально проводящими стенками. Область $z \geqslant L$ моделирует излучающий рупор, состыкованный с резонатором. В простейшем случае такой рупор представляет собой продолжение того же волновода, тогда сечение волновода при $z = L$ является открытой границей, через которую осуществляется вывод излучения. Именно на этой границе и ставятся парциальные условия, предложенные в [3, 4]. Будем исходить из следующей системы уравнений Максвелла [1]:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial(r)}(rB_\varphi) = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j_{zd}, \tag{1}$$

описывающей аксиально-симметричные возбуждения волн E – типа, создаваемые некоторым внешним источником, плотность которого $j_{zd}(t, z, r)$ определяется выражением

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0}J_0(\frac{\mu_{01}}{R}r)\delta(z)\vartheta(t)sin(\omega t). \tag{2}$$

Здесь $\vartheta(t)$ - ступенчатая функция Хевисайда, $\delta$ - функция Дирака. Данная формула соответствует бесконечно-тонкому гармонически осциллирующему заряженному плоскому слою, расположенному в начале координат, поперечная плотность которого определяется функцией Бесселя $J_0(\frac{\mu_0}{R}r)$ , где $\mu_{01}$ - первый корень уравнения $J_0(x) = 0$ . Очевидно, что формула (2) описывает синусоидальный внешний источник, включаемый в момент времени $t = 0$ . Именно в этом включении и заключается основная сложность. Без учёта момента включения задача сводится к хорошо известной, вошедшей в учебники [1].

Представим компоненты поля в виде:

$$E_z(t, r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} E_z^{(n)} J_0(k_{\perp n}r), \quad E_r(t, r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} E_r^{(n)} J_1(k_{\perp n}r),$$
$$B_\varphi(t, r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} B_\varphi^{(n)} J_0(k_{\perp n}r). \tag{3}$$

Здесь $J_0$ и $J_1$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; $k_{\perp n} = \frac{\mu_{0n}}{R}$ (n=0, 1. ...) , где $\mu_{0n}$ - корни уравнения $J_0(x) = 0$ .

Чтобы получить уравнения для коэффициентов $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$ подставим разложения (3) в уравнения (1) и, учитывая ортогональность функций Бесселя, будем иметь:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n}E_z^{(n)} = -\frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial z} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = k_{\perp n}B_\varphi^{(n)} - J_d^{(n)}. \tag{4}$$

Здесь обозначено $\tau = ct$, $\widetilde{\omega} = \omega/c$,

$$J_d^{(n)} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}j_{d0}\delta(z)\vartheta(t)sin(\omega t); & n = 1 \\ 0; & n = 2, 3, ... \end{cases} \tag{5}$$

Система уравнений (4) дополняется нулевыми начальными и граничным условиями, а также условием излучения при $z = L$ на правом конце системы. Так как при $z = L$ уравнения (4) содержат только компоненты поля, то есть являются однородными, то, используя преобразование Лапласа, решение (4) для данного случая можно записать в виде [4]:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n} \int\limits_0^{\tau} J_1(k_{\perp n}(\tau - \tau')) \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} d\tau', \tag{6}$$

где $J_1$ функция Бесселя первого порядка. Эти соотношения, следуя [4], мы и рассматриваем как нестационарные парциальные граничные условия излучения, записанные в точке $z = L$ - левой границы излучающего устройства. Для определённости во всех дальнейших расчётах примем длину системы $L = 10$см. На выходе системы будем вычислять поток электромагнитной энергии, а также спектральный состав поля излучения, определяя их формулами

$$N = \sum_{i=1}^{n} E_r^{(n)}(\tau, L) B_\varphi^{(n)}(\tau, L) J_1^2(\mu_{0n}), \tag{7}$$

$$E_r^{(n)}(\Omega) = \int\limits_0^{\tau} E_r^{(n)}(\tau', L) exp(i\Omega\tau') d\tau', (n = 1, 2....), \tag{8}$$

В линейном приближении из (4)можно получить дисперсионное уравнение $k_{\perp n}^2 + k_z^2 - \widetilde{\omega}^2 = 0$, из которого следует, что частота отсечки $\widetilde{\omega}_{0n}$ для n-ой поперечной моды в наших обозначениях равна $\widetilde{\omega}_{0n} = k_{\perp n}$ , а продольное волновое число $k_z = \sqrt{\widetilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2}$.

## Результаты численного моделирования

Рассмотрим случай, когда в волноводе возбуждается основная мода (n=1) колебаний. При этом отличными от нуля будут только компоненты поля $E_r^{(1)}; B_\varphi^{(1)}; E_z^{(1)}$ , а минимальная частота отсечки $\widetilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \mu_{01}/R \approx 1,33$ . Рассмотрим отдельно случаи, когда частота внешнего источника $\widetilde{\omega}$ больше $\widetilde{\omega}_{01}$ и, соответственно, меньше чем $\widetilde{\omega}_{01}$ .

Пусть в начале $\widetilde{\omega}_{01} = 20$ ( $\widetilde{\omega}_{01} \approx 15\widetilde{\omega}_{01}$). Результаты расчётов для данного $\widetilde{\omega}$ представлены на Рис.1. На Рис.1а приведена зависимость потока энергии электромагнитного поля на правой границе системы от времени $\tau$ , вычисляемого по формуле (7) (где было оставлено только одно слагаемое). Из этого рисунка видно, что поток энергии для всех моментов времени положителен, что в свою очередь указывает на отсутствие волн, приходящих в систему справа – из области, где отсутствуют источники поля. Данное обстоятельство говорит о верном отражении парциальными условиями излучения (6) принципа причинности, а также о правильной реализации самих этих условий.

На Рис.1б приведён спектр колебаний системы, рассчитанный по формуле (8). Из этого рисунка видно, что в данном случае излучение происходит фактически на заданной частоте диполя $\widetilde{\omega}$ (на частоте вынуждающей силы).

На Рис.1в представлена зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau$ =30. Видно, что к этому моменту времени в системе установилось практически гармоническое распределение поля вдоль оси волновода с характерным продольным размером $\Lambda = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\widetilde{\omega} \approx 0,31$ (так как данного $\widetilde{\omega}$=20 и $k_{\perp n} \approx$ 1,33 $\longmapsto k_z = \sqrt{\widetilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} \approx \widetilde{\omega}$ ).

Пусть теперь частота внешнего источника меньше минимальной частоты отсечки $\widetilde{\omega}_{01}$=1,33 и равна $\widetilde{\omega}$=0,5 ($\widetilde{\omega} \approx$ 0,4 ). Результаты расчётов для данной частоты представлены на Рис.2, где приводятся те же зависимости, что и на Рис.1.

Из Рис.2б видно, что в данном случае в спектре отсутствует частота, соответствующая частоте диполя $\widetilde{\omega}$ - частота вынужденных колебаний. Возбуждаться в данных условиях могут только колебания с частотами большими или равными частоте отсечки $\widetilde{\omega}_{01}$ . Однако, эти колебания не носят волновой характер, что следует из Рис.2в, где видно апериодическое уменьшение поля $E_r^{(1)}$ с увеличением z. Кроме того, из Рис.2а видно, что поток энергии, выходящей из системы, на достаточно больших временах ( $\tau \sim 90$), когда электродинамические процессы в системе практически вышли на стационарный режим, на порядок меньше чем в предыдущем случае (Рис.1а). Поскольку $E_r^{(1)}$ и $B_\varphi^{(1)}$ изменяются на выходе системы с течением времени с частотой $\widetilde{\omega}_{01}$ , то поток энергии N, определяемый формулой (7), будет изменяться с частотой, равной $2\widetilde{\omega}_{01}$ , что также следует из Рис.2а, где временной период $T = (2\pi)/(2\widetilde{\omega}) \approx 2,4$ .Следует отметить, что аналогичная периодичность потока энергии N имеет место и в предыдущем случае, когда $\widetilde{\omega}$ =20. Однако вследствие очень большой частоты ( $T = (2\pi)/(2\widetilde{\omega}) \approx 0,11$ ) на Рис.1а данная периодичность чётко не отражается.

Из проведённого в работе с помощью численных методов анализа процесса возбуждения электромагнитных полей диполем в вакуумном волноводе можно сделать следующий вывод. Использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах.

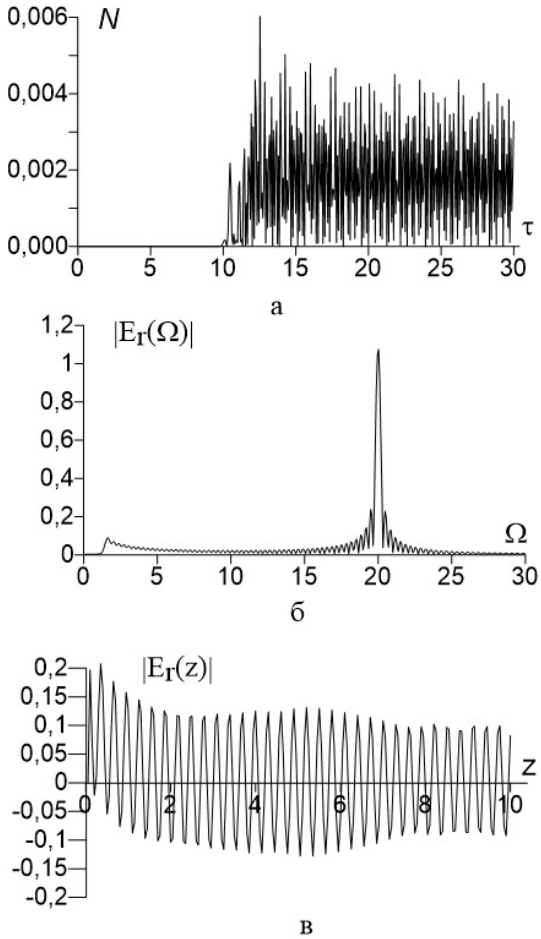



Рис. 1: Результаты интегрирования уравнений (4) при $\widetilde{\omega}$ =20.

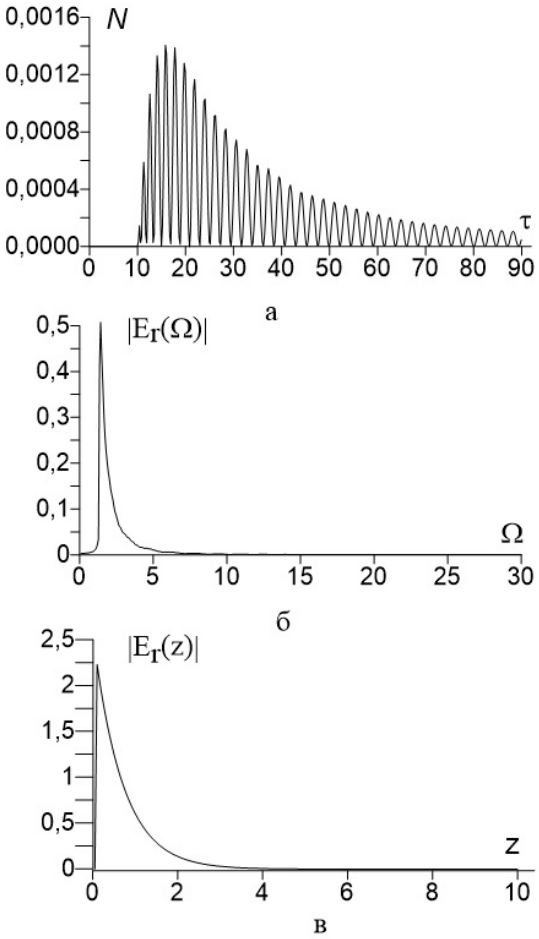



Рис. 2: Результаты интегрирования уравнений (4) при $\widetilde{\omega}$ =0,5.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 636 с.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 528 с.

3. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Статья в журнале // ЖВМ и МФ. 1985. Том 25, № 6. С. 883-894.

4. Бобылёв Ю. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Свешников А. Г. Статья в журнале // Физика плазмы. 1999. Том 25, № 7. С. 615-620.

---

УДК 519.6, 536.2

# Математическое и экспериментальное моделирование процессов теплообмена при обучении студентов физике и теплотехнике

**С. А. Радченко (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
radchenko.s.a.tula@mail.ru

# Mathematical and experimental modeling of heat transfer processes when teaching students in physics and heat engineering

**S. A. Radchenko (Russia, Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
radchenko.s.a.tula@mail.ru

Понимание и правильное использование процессов теплообмена важно для каждого человека, так как это необходимо для эффективного обеспечения теплового комфорта на работе и в быту, энергосбережения, экономии средств и решения многих других задач. Изучение процессов теплообмена в курсах физики и теплотехники является обязательным при обучении студентов многих инженерных, педагогических и других специальностей, а также всех школьников. Поэтому необходимо обеспечить хорошее понимание процессов теплообмена всеми студентами педагогических вузов соответствующих специальностей и научить их: 1 - правильно, понятно и доступно для каждого обучаемого объяснять эти очень сложные процессы за минимальное число часов, которые выделены в вузовских и школьных программах и учебных планах на их изучение; 2 - правильно применять полученные ими знания о процессах теплообмена на уроках и для обеспечения теплового комфорта на работе и в быту, энергосбережения, экономии средств и решения других задач, в том числе при выборе и использовании разного теплотехнического оборудования.

Однако быстро обеспечивать это только традиционными методами с использованием методов математического моделирования при обучении студентов и школьников за малое количество часов трудно по ряду причин, важнейшими из которых являются следующие.

Во-первых, математическое описание и моделирование процессов теплообмена очень сложное и требует много времени даже при использовании компьютеров. Например, для описания процесса теплообмена в любой момент времени в любом помещении требуется составлять и совместно решать системы из большого количества уравнений (так как их составляют для

каждого из находящихся в помещении предметов) с подстановкой в эти уравнения огромного количества экспериментальных данных, многие из которых очень трудно точно и быстро определять в реальных условиях по ряду объективных причин. Поэтому к даже настоящему времени удается достаточно точно проводить и использовать математическое моделирование только для некоторых процессов теплообмена, имеющих особенно важное значение, за счет участия в математическом моделировании многих специалистов и использования лучших компьютеров (например, для космонавтики и т.д.).

Во-вторых, для правильного изучения и использования процессов теплообмена все студенты, школьники и любые специалисты должны хорошо представлять изучаемые ими процессы теплообмена, так как без этого невозможно получить верные результаты [1-5].

Например, дифференциальное уравнение теплопроводности [4] описывает явление в самом общем виде, то есть описывает класс явлений теплопроводности. Поэтому студент должен знать, что для рассмотрения любого конкретного процесса нужно дополнительное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, которое называют условиями однозначности (единственности). Они включают: 1 - геометрическую форму и размеры тела, в котором протекает процесс: 2 - граничные условия, характеризующие физическую связь тела с окружающей средой; 3 - начальные условия распределения температур в начальный момент времени и условия протекания процесса во времени; 4 - физические свойства тела и окружающей среды, которые определяются физическими параметрами; 5 - интенсивность и распределение внутренних источников теплоты.

Студенты должны знать, что совокупность начальных и граничных условий называют краевыми условиями, и уметь правильно задать их. Начальные условия при нагреве или охлаждении тела влияют только в начальный период, а через некоторое время наступает регулярный режим, при котором распределение температур в теле определяется только граничными условиями и не зависит от начальных условий. Граничные условия задают в зависимости от способа нагрева (охлаждения), то есть от воздействия окружающей среды на тело [4]. И каждого студента надо прежде всего научить различать два возможных режима распространения теплоты в теле: а) при установившемся (стационарном) режиме, когда температурное поле тела не изменяется во времени, то есть когда температура каждой точки постоянна ($dt/dx = 0$); б) при неустановившемся (нестационарном) режиме, когда происходит нагрев или охлаждение тела, то есть когда его температурное поле изменяется с течением времени. Причем верные результаты расчетов и математического моделирования можно получить только в случае, если были верно заданы (в зависимости от конкретных условий) граничные условия первого, второго или третьего рода.

Очевидно, что большинство студентов и тем более школьников очень трудно быстро научить лишь традиционными методами понимать и использовать процессы теплообмена.

В-третьих, важную роль в обеспечении правильного исследования процессов тепло- и массообмена играет использование теории подобия, позволяющей получать из размерных физических параметров, которые характеризуют исследуемый процесс, безразмерные комплексы - критерии подобия. Это позволяет вычислять интересующий физический параметр без проведения эксперимента во многих других, но только подобных процессах, различающихся численными значениями физических параметров. То есть из обширного класса однородных с физической точки зрения процессов, описываемых одной и той же системой дифференциальных уравнений, выбирается более узкая группа процессов, в пределах которой возможно распространение результатов единичных опытов (процессы этой группы называют подобными). А чтобы из класса процессов выделить какой-либо конкретный процесс, основную систему дифференциальных уравнений дополняют (как описано выше) условиями однозначности, в которые входят данные о геометрических признаках объекта, физических параметрах участвующего в процессе вещества, а также о процессах: 1 - предшествующих изучаемому; 2 -

происходящих на границах объекта [4].

Поэтому каждый студент должен знать следующее: 1 - критерии подобия образуют как из основных уравнений, описывающих весь класс процессов, так и из уравнений, характеризующих условия однозначности; 2 - при этом критерии, полученные из условий однозначности, имеют важное значение, так как именно равенство этих критериев определяет подобие данных процессов; 3 - равенство всех других критериев является уже следствием подобия, то есть равенства критериев, полученных из условий однозначности; 4 - поэтому критерии, вытекающие из условий однозначности, называют определяющими.

Вышеизложенное показывает актуальность разработки новых методов улучшения обучения студентов, школьников и любых специалистов при изучении процессов тепло- и массообмена в курсах физики и теплотехники, которые должны обеспечивать быстрое решение следующих четырех важных задач даже при минимуме часов в учебных планах:

- во-первых, обеспечить быстрое понимание каждым обучаемым физики изучаемых процессов, чтобы он правильно выбирал самые эффективные методы их исследования;

- во-вторых, обоснованно выбирать для исследования режим тепло- и массообмена (установившийся или неустановившийся), так как изучать последний гораздо труднее;

- в-третьих, обеспечить быстрое понимание каждым обучаемым принципов действия и устройства любого теплотехнического оборудования (используя новую методику [1-2]);

- в-четвертых, научить каждого обучаемого быстро искать достоверную информацию о любом теплотехническом оборудовании и его правильном применении в сети Интернет, чтобы избежать возможного ущерба из-за его неправильного выбора или применения [6].

Такие новые методы обеспечения значительного ускорения и улучшения обучения студентов и школьников при изучении процессов тепло- и массообмена в курсах физики и теплотехники разработаны нами и уже успешно используются в учебном процессе при обучении всех студентов по дисциплине «Теплотехника и энергетические машины» на кафедре технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого [1-5]. Они основаны на разделении обучения на следующие этапы.

На первом этапе быстро обеспечивается понимание обучаемыми: 1 - что процессы теплообмена могут состоять из трех элементарных способов передачи теплоты, то есть из теплопроводности, конвекции и теплового излучения; 2 - физических процессов, которые происходят при теплопроводности, конвекции и тепловом излучении, так как их описание с помощью дифференциальных уравнений и математических формул является сложным и требует определенного уровня физико-математической подготовки обучаемых; 3 - причин и особенностей применения и выбора при расчетах процессов тепло- и массообмена установившегося или неустановившегося режима теплообмена разных формул, включая упрощенные, а также возможной точности результатов математического моделирования.

На втором этапе используется разработанная нами и описанная в [1-2] новая методика сильного повышения качества и быстроты изучения любых видов и модификаций даже сложного оборудования любыми студентами и школьниками, основанная на том, что: 1 - они учатся быстро и просто понимать устройство и принцип действия любых устройств и видов даже сложного оборудования за счет выделения в них всего нескольких важнейших элементов (которых обычно бывает от 3 до 8) и получения их простой принципиальной схемы; 2 - обучаемые затем изучают в сети Интернет образцы такого оборудования и более подробную информацию о них, находя для этого сайты его производителей [3, 5].

В результате этого в самом начале изучения любыми студентами, школьниками и специалистами процессов тепло- и массообмена любой преподаватель или учитель может обеспечить максимально быстрое и качественное получение ими базовых знаний, нужных для более тщательного изучения процессов тепло- и массообмена и любого оборудования с использованием любых методов математического и экспериментального моделирования, и получение ими бо-

лее достоверных результатов, соответствующих реальным условиям. Ведь хорошее понимание ими на стадии подготовки к математическому моделированию физической картины изучаемых процессов тепло- и массообмена и принципов действия и устройства изучаемого оборудования позволит им: 1 - правильно выбирать и использовать соответствующие поставленным задачам методики и формулы; 2 - значительно повысить точность получаемых результатов математического моделирования и их практическую ценность для решения различных технических задач за счет правильного обоснованного выбора совокупности начальных и граничных условий и использования теории подобия.

Таким образом, нами разработаны, успешно апробированы в учебном процессе и предлагаются для использования в любых вузах и школах при обучении студентов и школьников по физике и теплотехнике инновационные методы и электронные учебно-методические пособия [1-5], которые позволяют значительно улучшить: 1 - понимание любыми обучаемыми процессов теплообмена, а также устройства и принципа действия любого даже самого сложного теплотехнического оборудования; 2 - точность результатов математического моделирования процессов тепло- и массообмена за счет правильного выбора граничных условий и получения для этого различных экспериментальных данных, позволяющих реально обеспечить получение более точных количественных результатов, необходимых для их практического использования в различных отраслях науки и техники.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радченко С. А., Сергеев А. Н. Инновационные методы для улучшения обучения по технологии, физике, теплотехнике и охране труда // Школа будущего, № 6, 2017. С. 180-187.

2. Радченко С. А., Сергеев А. Н. Инновационный метод совершенствования профессионально-методической подготовки учителей технологии, физики и естествознания // Физико-математическое и технологическое образование: проблемы и перспективы развития: Матер. II Межд. научн.-метод. конференции. Ч. 2. - М.: Изд-во МПГУ, «One-book.ru», 2016. С. 271-277.

3. Радченко С. А., Сергеев А. Н. Комплекс учебных пособий по технологии, теплотехнике и охране труда для улучшения подготовки и работы учителей // Физико-математическое и технологическое образование: проблемы и перспективы развития: Материалы IV межд. научн.-метод. конф. - М.: МПГУ, 2019. С. 641-648.

4. Радченко С. А., Сергеев А. Н. Теплотехника и энергетические машины: учебное пособие // Комплекс учебных и учебно-методических материалов кафедры технологии и сервиса ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Вып. 2. Под общ. ред. д.п.н., проф. А. Н. Сергеева. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 630 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: `http://elibrary.ru/item.asp?id=24818525`.

5. Радченко С. А., Сергеев А. Н., Радченко С. С. Лабораторный практикум по курсу «Теплотехника и энергетические машины»: учебно-методическое пособие // Комплекс учебных и учебно-методических материалов кафедры технологии и сервиса ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Вып. 3. Под общ. редакцией д.п.н., проф. А.Н. Сергеева. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 570 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: `http://elibrary.ru/item.asp?id=25713384`.

6. Радченко С. А., Сергеев А. Н., Радченко С. С. Аварии систем теплоснабжения и отопления: причины, ущерб и возможности его уменьшения: монография // Комплекс учебных и учебно-методических материалов кафедры технологии и сервиса ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Вып. 4. Под общ. редакцией д.п.н., проф. А. Н. Сергеева. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 486 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: `http://elibrary.ru/item.asp?id=27626012`.

---

УДК 37.01

# Применение численных методов линейной алгебры в физике на примере детального расчёта моста Уитстона

**Р. В. Романов (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru
**Ю. В. Бобылев (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
**А. И. Грибков (Россия, г. Тула)**
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: ks7a@yandex.ru

# The use of numerical methods of linear algebra in physics on the example of a detailed calculation of the Wheatstone Bridge

**R. V. Romanov (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rom_rom_vas@mail.ru
**Yu. V. Bobylev (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: bobylev.yu@mail.ru
**A. I. Gribkov (Russia, г. Tula)**
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ks7a@yandex.ru

Развитие новых технологий и повсеместное распространение компьютеров привели к широкому использованию математических методов в самых разнообразных сферах научной и инженерной деятельности, в том числе в физике. Это обусловлено, прежде всего тем, что многие проблемы в физике и инженерной практике описываются математическими задачами, точное решение которых получить весьма сложно или вообще невозможно. В этих случаях приходится прибегать к различным численным методам, которые в настоящее время являются основными методами решения задач математики и различных её приложений. Они характеризуются тем, что сводят процесс решения математической задачи к некоторой конечной последовательности операций над числами и приводят к результатам, представленным в виде чисел, числовых векторов и матриц, числовых таблиц и т.п. При этом математическая модель рассматриваемого физического явления может иметь вид уравнения, системы уравнений, или быть выраженной в форме иных сложных математических структур или соотношений самой различной природы. Зачастую физические закономерности природных явлений выражаются дифференциальными или интегральными уравнениями, или системами таких уравнений, и для их численного решения используются соответствующие приближённые и численные методы математического анализа.

Вместе с тем большое значение во многих областях науки и техники играют вычислительные методы линейной алгебры, включающие в себя различные действия с матрицами и векторами и численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений [1]. В

частности, одним из приложений данных методов является традиционная задача по расчёту разветвлённых цепей постоянного тока [2]. Как известно, данная задача заключается в вычислении токов, протекающих в различных ветвях разветвлённой цепи при заданных значениях сопротивлений и ЭДС, включённых в эти ветви [2]. Описание такой цепи проводится посредством применения правил Кирхгофа (G. R. Kirchhoff), которые приводят к системе линейных уравнений относительно искомых токов [2]. Если разветвлённая цепь содержит много контуров, то число уравнений в такой системе становится достаточно большим, её аналитическое решение весьма затруднительно и практически никогда не проводится, заменяясь соответствующими численными расчётами.

В настоящей работе мы рассмотрим данную задачу на примере цепи, состоящей из трёх независимых контуров и представляющей собой реализацию так называемого моста Уитстона (C. Wheatstone) [2]. Такой выбор модели разветвлённой цепи обусловлен с точки зрения физики тем, что это очень известная схема, имеющая большое прикладное значение. А именно, различные разновидности моста Уитстона используются для измерения не только сопротивления, но и ёмкости, индуктивности, импеданса и других величин. Также мосты применяются в работе с кабельными линиями из металла и позволяют нейтрализовать постороннее влияние для более эффективной локализации дефектов и определения повреждённых участков кабеля. При этом гарантированы высокоточные результаты в рамках диапазона измеряемых величин. Мостовую схему используют также в конструкциях электронных весов, электронных термометров и терморезисторов. С помощью прибора Уитстона можно определить содержание газа в воздухе или другом веществе, и иные физические величины. Таким образом, измерительный мост Уитстона иллюстрирует концепцию дифференциальных измерений, результаты которых могут быть очень точными. [3].

С точки зрения математики выбор моста Уитстона в качестве модели разветвлённой цепи обусловлен тем, что аналитические решения исходной системы уравнений, описывающей эту модель, могут быть записаны в виде пусть и весьма громоздких формул, но, тем не менее, позволяющих, провести сравнение с соответствующими численными результатами.

Схема моста Уитстона приведена на Рис.1. В среднюю ветвь этого моста обычно включается гальванометр, что и показано на левой схеме Рис.1. Эта же цепь перерисована справа в более удобном для анализа и составления уравнений виде. В данной схеме заданными считаются пять сопротивлений $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_G$, а также ЭДС $\varepsilon$ с внутренним сопротивлением $r$. Требуется определить токи $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_G$, текущие на всех участках этой цепи.

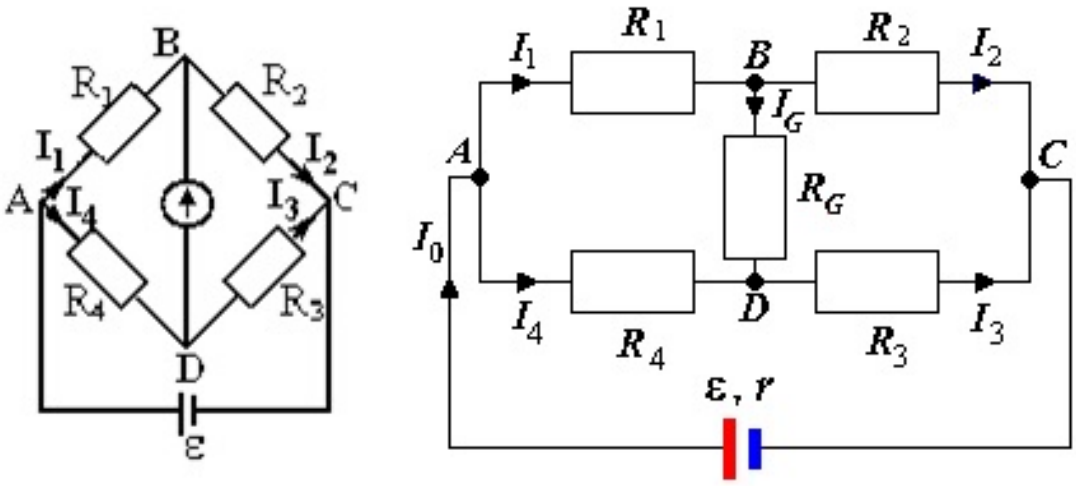



Рис. 1: Схема моста Уитстона

Первое правило Кирхгофа, записанное для узлов A, B и C, даёт следующие три соотношения для искомых токов:

$$I_1 + I_4 = I_0, \quad I_2 + I_G = I_1, \quad I_2 + I_3 = I_0, \tag{1}$$

второе правило Кирхгофа, применённое к контурам ABDA, BCDB и $\varepsilon$ ABC $\varepsilon$ (подразумевается обход по часовой стрелке), приводит к уравнениям

$$I_1R_1 + I_GR_G - I_4R_4 = 0, \quad I_2R_2 - I_3R_3 - I_GR_G = 0, \quad I_0r + I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon. \tag{2}$$

Несмотря на достаточно простой вид, решение системы шести уравнений (1)-(2) требует проведения громоздких преобразований, в результате которых для тока $I_0$ , может быть получено такое выражение

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r + \widetilde{R} - \widetilde{\widetilde{R}}}, \quad \widetilde{R} = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_1 + R_4}, \quad \widetilde{\widetilde{R}} = \frac{(R_2R_4 - R_1R_3)(R_1R_G + R_2(R_G + R_1 + R_4))}{R_G(R_2 + R_3) + (R_2 + R_3 + R_G)(R_1 + R_4)^2}. \tag{3}$$

Выражения для остальных токов определяются через $I_0$ такими же громоздкими формулами, поэтому приведём ещё только одно выражение для тока, текущего через гальванометр

$$I_G = I_0 \frac{R_2R_4 - R_1R_3}{R_G(R_2 + R_3) + (R_2 + R_3 + R_G)(R_1 + R_4)}. \tag{4}$$

Используем теперь для решения системы уравнений (1)-(2) вычислительную систему MathCad. Данное приложение, как известно, пользуется популярностью за лёгкость, с которой математические уравнения, текст, и графика могут быть объединены в одном электронном документе, что существенно упрощает составление программы расчёта [4]. Нужно сразу отметить, что использование для решения системы (1)-(2) символьного процессора MathCad оказалось неудачным, поскольку «возвращённый символьный результат слишком велик для отображения», то есть даже для такой небольшой системы уравнений реализовать заманчивую возможность получения аналитических выражений вида (3) и (4) оказалось невозможным.

Рассмотрим теперь численное решение системы уравнений (1)-(2), причём проведём его двумя способами. Для первого способа используем вычислительный блок Given/Find, а для второго – встроенную функцию Isolve. Результаты расчётов для заданных значений ЭДС и сопротивлений

$$\begin{gathered} \varepsilon = 8\,\text{В}, \quad r = 60\,\text{Ом}, \quad R_1 = 1963\,\text{Ом}, \\ R_2 = 2944,5\,\text{Ом}, \quad R_3 = 3\,\text{Ом}, \quad R_4 = 2\,\text{Ом}, \quad R_G = 1\,\text{Ом}. \end{gathered} \tag{5}$$

приведены на Рис.2 (левая страница рабочего листа MathCad). Здесь же на правой странице листинга приведены результаты расчётов токов $I_0$ и $I_G$ , проведённые по аналитическим формулам (3) и (4).

Относительно Рис. 2 дадим ещё следующие пояснения. При использовании вычислительного блока Given/Find всем неизвестным требуется присвоить некоторые начальные значения [4], что, и отражено в верхней части данного листинга, где всем токам присвоены начальные значения 1 А. При применении же встроенной функции Isolve начальные условия задавать не требуется. В этой функции запрограммирован численный метод LU – разложения (или LU – факторизации) [1, 4]. Данный метод, считающийся одним из лучших методов решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида, основан на алгоритме последовательных исключений Гаусса. Его суть заключается в преобразовании матрицы A линейной системы Ax=b к треугольному виду, то есть к форме, когда все элементы ниже главной диагонали матрицы являются нулевыми. Таким образом, для использования встроенной функции Isolve ситсема исходных уравнений (1)-(2) должна быть записана в матричной форме, а именно,

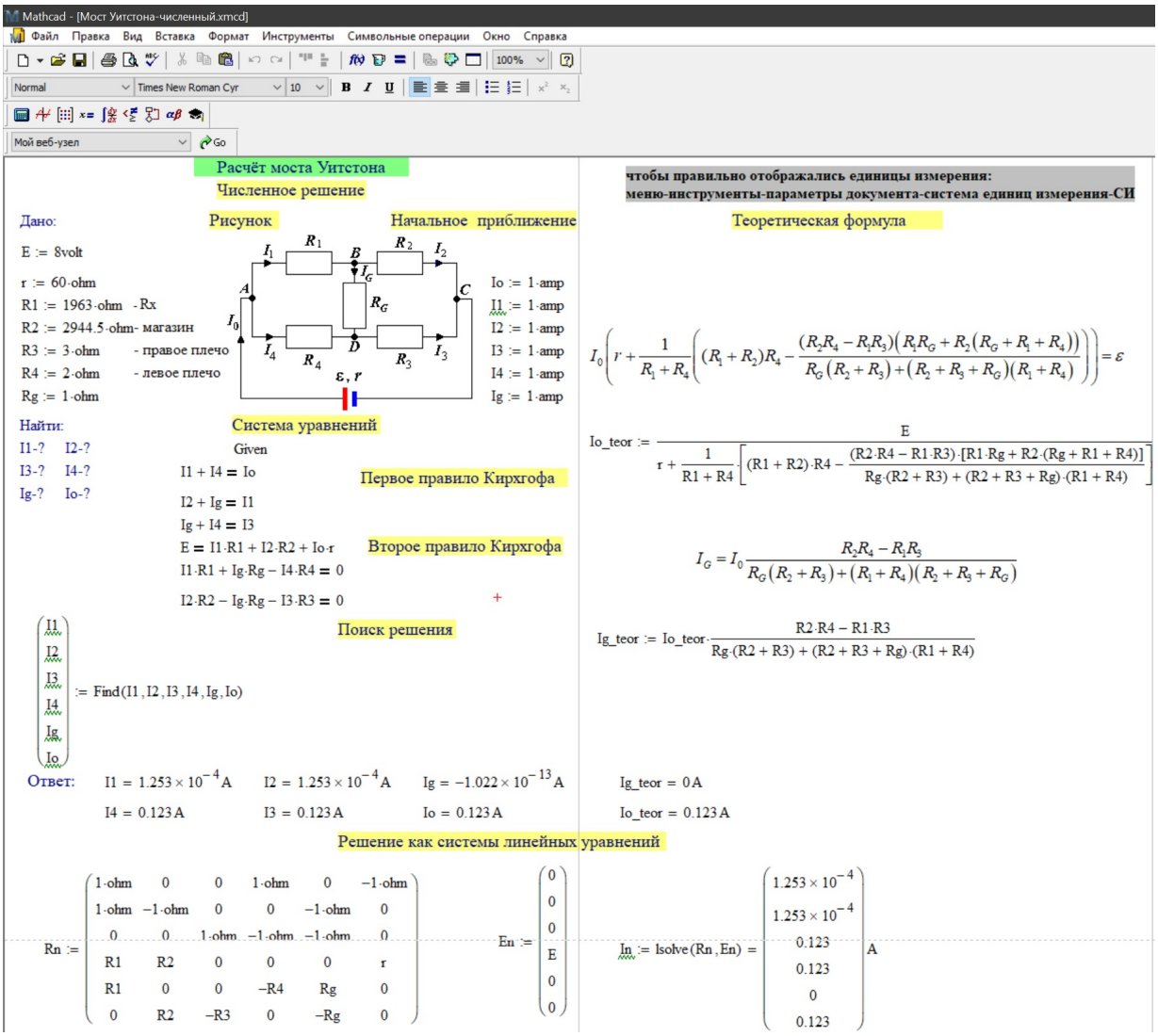



Рис. 2: Численное решение уравнений (1)-(2) относительно токов с помощью блока Given/Find, и встроенной функции Isolve (левая часть листинга) и аналитическое решение для токов $I_0$ и $I_G$ , проведённые по формулам (3) и (4).

должны быть определены матрицы коэффициентов и правых частей решаемой системы [1, 4], что также отражено в нижней части представленного листинга, в последней его строчке.

Подводя итог, на основе результатов, представленных на Рис.2, можно сделать следующий вывод. Наблюдается абсолютное совпадение численных решений, полученных в MathCad двумя разными способами, с аналитическим решением, что, собственно, и демонстрирует высокую эффективность используемых в данной работе численных методов линейной алгебры на примере расчёта мостика Уитстона.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1989. 432с.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебное пособие для вузов в 5 т. Т.III. Электричество. — М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2004. 656с.

3. Панфилов В. А. Электрические измерения. — 5-е изд., стер. — М.: Академия, 2008. 285с.

4. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432с.

---

УДК 536.758, 511.1, 514.87

## Использование методов теории чисел, фрактальной геометрии и статистической термодинамики для расчета распределений наночастиц по размерам[1]

**В. Б. Федосеев (Россия, г. Нижний Новгород)**
Институт металлорганической химии им. Г.А. Разуваева Российской Академии наук
e-mail: vbfedoseev@yandex.ru
**А. В. Шишулин (Россия, г. Нижний Новгород)**
Институт металлорганической химии им. Г.А. Разуваева Российской Академии наук
e-mail: alexsjisjulin@gmail.com

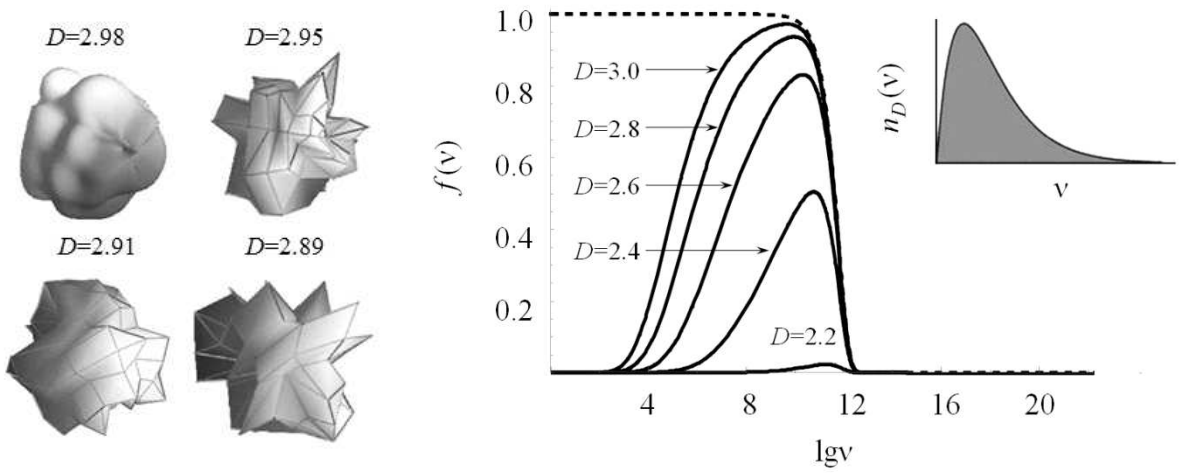
## On calculating nanoparticle size distributions by a combined usage of number theory, fractal geometry and statistical thermodynamics

**V. B. Fedoseev (Russia, Nizhny Novgorod)**
G.A. Razuvaev institute of organometallic chemistry, Russian Academy of sciences
e-mail: vbfedoseev@yandex.ru
**A. V. Shishulin (Russia, Nizhny Novgorod)**
G.A. Razuvaev institute of organometallic chemistry, Russian Academy of sciences
e-mail: alexsjisjulin@gmail.com

The science and technology of micro- and nanoscale materials have proved to be one of the most fertile fields of research [1]. Such materials are characterized by an unprecedented degree of tunability of physicochemical characteristics and phase composition which turned out to be morphology-dependent at the nanoscale. Particle morphology in such a case forms an additional "knob" which might be applied to tune a wide range of properties and performance of nanoscale functional materials. Ensembles of small-volume objects are described by size distribution functions which provide integral characteristics of the dispersed system morphology and, being supported by several materials science considerations, allow to predict the average values of morphology-dependent properties as well as the degree at which such properties are "blurred" in an ensemble. In this report, we have established a model to calculate the distribution functions for nanoparticle ensembles which correlate properties of the material and its surrounding environment and thermodynamical conditions. The predictions are illustrated by the available experimental data.

The object to be modeled is a free-dispersed system where the dispersed phase is formed by an ensemble of particles of various sizes and an irregular shape. In our report, we have shown that if the conservation conditions of matter are the only ones imposed on a dispersed system, several methods of number theory and combinatorics can be applied to describe it. If $N$ is the total number of atoms (or molecules) in the system, each possible state of the dispersed phase can be represented by one of the possible partitions of $N$. A partition of a positive integer $N$ is a way of writing $N$ as a sum of positive integers (the order of the summands is not considered). In the most general case, the

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМХ РАН, а также при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-08-01356-а).




(a) (b)

Рис. 1: Examples of structures with various fractal dimensions $D$ (a) and distribution functions $f_p$ (dashed line) and $f_D$ (solid lines) for nanoparticles with different $D$. Both dependences are plotted for ice at 273 K. The box contains the size distribution histogram for the considered case (see necessary explanations in the text).

number of partitions $p(N)$ can be calculated as a sum of a converging series but, according to the derivations of G.H. Hardy and S. Ramanujan [2], in the case of a large $N$, an asymptotic estimate can be applied: $p(N) \sim \exp\left(\pi\sqrt{2/3}\sqrt{N}\right) \Big/ 4N\sqrt{3}$. Thus, the fraction $f_p(N,\nu)$ of partitions which contain summand $\nu$ is obtained as

$$f_p(N,\nu) = \frac{N}{N-\nu}\exp\left\{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}(N-\nu)} - \sqrt{\frac{2}{3}N}\right)\right\} \cong \exp\left(-\frac{\pi\nu}{\sqrt{6N}}\right).$$

The number of partitions $p(N)$ and the fraction $f_p(N,\nu)$ can be related to the statistical sum and the probability of existence of a particle containing $\nu$ atoms ($\nu$ may also be defined as the "stoichiometric number" of a particle), respectively. Generally, regular shape of a particle is thermodynamically unstable at the nanoscale [1]: in order to describe the morphology of real irregularly-shaped particles, methods of fractal geometry have been used [3, 4]. In terms of the given approach, the shape of a nanoparticle is characterized by its fractal dimension $D$, which correlates its stoichiometric number $\nu$ and surface area $A_\nu(\nu, D)$: $A_\nu(\nu, D) = 4\pi\left(V_{mol}/N_A\right)^{2/3}\nu^{2/D}$ where $V_{mol}$ is the molar volume of the matter and $N_A$ is the Avogadro constant. For simple regular structures, $D$=3.00; for structures of an irregular shape, $D$<3.00 and can be non-integer. The classic examples of fractal objects are "*worm-like*", "*amoeba-like*" and "*porcupine-like*" particles [3, 4, 5] (some examples are given in Fig. 1a) which typically occur in various experimental routines.

In our report, we have demonstrated that in a free-dispersed system at equilibrium the size distribution $f_D(\nu, D, N)$ for particles with fractal dimension $D$ can be estimated using the partition theory and Gibbs measure as $f_D(\nu, D, N) \sim \exp\left(-(U_\nu + RT\ln f_p(N,\nu))/RT\right)$ where $T$ is the temperature, $R$ is the ideal gas constant and $U_\nu$ relates to the work of formation of the surface while the 1 mol. of matter is distributed between particles of the equal morphology: $U_\nu = \sigma A_\nu$ where $\sigma$ is the specific surface energy of the material and $A_\nu$ is the surface area of 1 mol. of substance. The distribution functions $f_p(N,\nu)$ and $f_D(\nu, D, N)$ are plotted in Fig. 1b. The size distribution histogram plotted in the box represents the characteristic view of the correlation between stoichiometric number $\nu$ of a particle and the number of particles with such $\nu$ in the

ensemble. This dependence calculated by integrating the distribution function demonstrates a good correspondence to the available experimental data. In our report, we have also shown the way how the distribution functions $f_p(N,\nu)$ and $f_D(\nu,D,N)$ may be used to estimate the average geometric characteristics of the ensemble (including average size and fractal dimension) as well as the sensitivity of the average particle morphology to the total amount of matter in the system, temperature, material properties and the surrounding environment which sets the value of $\sigma$. For example, an increase in the number of moles of the substance which forms the dispersed phase is accompanied by a nonlinear growth of the average particle volume and a decrease in the average fractal dimension. At the same time, increasing the values of $\sigma$ and $V_{mol}$ leads to its growth and a displacement of the maximum point of the size distribution to larger values of $\nu$. The same effect is expected as a result of reducing the temperature. The role of the surrounding environment has been shown experimentally by us in [6]. However, the main result of the suggested description is the fact that in the most general case, an irregular morphology is typical for dispersed systems. An example of original applications for such regularities is a set of diagnosis methods developed by our group [7] and aimed at estimating the condition of biological objects by analyzing the morphology of residues which emerge during crystallization of substances dissolved in droplets of biological fluids.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nagaev E.L. Small metal particles // Physics uspekhi. 1992. Vol. 35, №9. P. 747-782.

2. Hardy G.H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. Lond. math. soc. 1918. Vol.17. P. 75–115.

3. Shishulin A.V., Fedoseev V.B. On some peculiarities of stratification of liquid solutions within pores of fractal shape // J. mol. liq. 2019. Vol. 278. P. 363-367.

4. Shishulin A.V., Fedoseev V.B., Shishulina A.V. Melting behavior of fractal-shaped nanoparticles (the example of *Si* - *Ge* system) // Tech. phys. 2019. Vol. 64, №9. P. 1343-1349.

5. Shishulin A.V., Potapov A.A., Fedoseev V.B. Phase equilibria in fractal *core-shell* nanoparticles of the $Pb_5(VO_4)_3Cl - Pb_5(PO_4)_3Cl$ system: the influence of size and shape. In: Z. Hu, S. Petoukhov, M. He (eds.), Advances in artificial systems for medicine and education II, Springer Nature Switzerland, 2020. P. 405-413.

6. Fedoseeva E.N., Fedoseev V.B. Interaction of chitosan with benzoic acid in solution and films // Polym. sci., ser. A. 2011. V. 53, №11. P. 1040-1046.

7. Golovanova O.A., Chikanova E.S., Fedoseev V.B. On the relationship of the fractal dimension of structure with the state of drying drops of crystallizing solutions (thermodynamic and experimental modeling) // Cryst. rep. 2018. Vol. 63, №3. P. 493-499.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Пленарные доклады** . . . . . 6

А. Аллаков, Б. Х. Абраев О условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах . . . . . 6

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков Теоремы о среднем значении кратных тригонометрических сумм . . . . . 8

И. Н. Балаба, А. В. Михалёв Градуированные первичные кольца и модули . . . . . 14

В. Н. Безверхний, А. Е. Устян О равенстве и сопряженности слов в полугруппах Артина 16

С. С. Демидов Творческий путь Н. Н. Лузина в контексте европейской истории первой половины XX века . . . . . 19

Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков Борис Максимович Бредихин и его исследования в теории чисел . . . . . 22

Н. Н. Добровольский Работы Б. М. Бредихина по свободным числовым полугруппам и современная аналитическая теория моноидов натуральных чисел . . . . . 25

Н. Долбилин Локальные группы в множествах Делоне . . . . . 30

Е. А. Зайцев Галилео Галилей и Томас Гарриот: задача о полете снаряда . . . . . 34

С. В. Конягин О работах С. Б. Стечкина по теории чисел . . . . . 41

А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова Выпуклые линейные подпространства интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами . . . . . 45

В. П. Платонов, Г. В. Федоров О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях . . . . . 47

М. Б. Скопенков, А. В. Устинов Шашки Фейнмана: теория чисел в квантовой электродинамике . . . . . 50

Р. В. Скуратовский Минимальные системы образующих коммутатора силовских 2-подгрупп знакопеременной группы, ширина по коммутанту сплетения групп . . . . . 51

В. Г. Чирский Арифметические свойства некоторых гипергеометрических рядов с параметром — лиувиллевым полиадическим числом . . . . . 53

**Секция 1. Группы** . . . . . 56

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя О когерентности и проблеме вхождения в группах Артина с древесной структурой . . . . . 56

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева О централизаторе конечно порожденных подгрупп свободного произведения свободных групп с циклическим объединением . . . . . 59

В. Н. Безверхний, А. С. Угаров О сопряженности подгрупп в группах Артина . . . . . 64

Н. Б. Безверхняя О гиперболичности некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением ..... 67

А. Ф. Васильев, А. К. Фурс Распознавание конечных групп по свойствам максимальных подгрупп ..... 70

А. Ф. Васильева О канонических подгруппах конечных групп ..... 72

Ю. В. Горбатова Конечные группы с $F(G)_S$-квазинормальными $n$-максимальными подгруппами ..... 73

И. В. Добрынина, А. С. Угаров О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина ..... 75

А. К. Гутнова, В. А. Койбаев Об условиях замкнутости элементарной сети ..... 79

Д. З. Каган О бесконечности ширины вербальных подгрупп для одного типа нисходящих HNN-расширений ..... 81

М. Н. Коновалова Конечные группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами ..... 83

А. Г. Коранчук Зависимость строения конечной группы от свойств ее силовских нормализаторов ..... 84

С. П. Максаков, М. М. Сорокина О прямо разложимых $\omega$-веерных формациях конечных групп ..... 87

В. И. Мурашко Обобщенный гиперцентр конечных групп ..... 89

Д. Г. Новикова, С. В. Путилов О нормализаторах силовских 2-подгрупп в конечных группах ..... 90

И. Л. Сохор Об одном расширении $E_{\mathfrak{U}}$-групп ..... 91

А. А. Трофимук О группе, факторизуемой формационными tcc-подгруппами ..... 92

**Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры** ..... 95

Е. М. Вечтомов Полукольцо непрерывных соответствий на топологических пространствах ..... 95

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина О “простых” алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы ..... 97

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина О позитивных формулах с ограниченными кванторами на бесконечно порожденной свободной полугруппе ..... 102

Н. А. Перязев Представление алгебр мультиопераций пространственными матрицами ..... 105

В. Б. Поплавский, Д. Г. Явкаев О некоммутативности вторичных идемпотентов моноида булевых матриц ..... 109

А. Л. Расстригин Наследственность формаций унарных алгебр ..... 111

А. В. Решетников О конгруэнциях умеренно частичных алгебр ..... 112

Н. А. Щучкин Преобразования строк с помощью $n$-квазигрупп . . . . . 114

**Секция 3. Кольца и модули** . . . . . 117

К. В. Веденев Строение некоторых метациклических групповых алгебр . . . . . 117

В. А. Гайдак, Е. А. Тимошенко Об определяемости вполне разложимых групп ранга 2 группами автоморфизмов . . . . . 120

Г. С. Дерябина, А. Н. Красильников О 5-энгелевой ассоциативной алгебре, чья группа единиц не является 5-энгелевой . . . . . 122

Н. И. Дубровин Двойственность топологических пространств формальных сумм . . . . . 125

М. Н. Зонов, Е. А. Тимошенко О факторно делимых группах ранга 2 . . . . . 129

Е. И. Компанцева Кольца на сильно неразложимых группах Мерли . . . . . 131

Е. И. Компанцева, Нгуен Т. К. Ч., Фам Т. Т. Т. Почти вполне разложимые $TI$-группы . 134

**Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика** . . . . . 138

В. А. Воблый О выражении числа помеченных блоков через число помеченных связных графов . . . . . 138

А. В. Галатенко, В. А. Носов, А. Е. Панкратьев Об одном алгоритме построения правильных семейств функций . . . . . 139

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов Проверка полиномиальной полноты $n$-квазигрупп . . . . . 143

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных подквазигрупп . . . . . 147

И. И. Гарипов Об одной матрице составных чисел и её приложениях. Алгоритм генерации простых чисел на основе $T$-матрицы . . . . . 151

Н. М. Глазунов Тригонометрические суммы, квантовые вентили и квантование второго уровня . . . . . 154

А. А. Державин, Н. Н. Ефанов О применении грамматик с правым контекстом в статическом анализе исходного кода программ . . . . . 158

А. Н. Исаченков Реляционная алгебра и матроиды . . . . . 160

И. Б. Казаков Передача информации в скрытом канале блужданий по плоскости . . . . . 163

Yu. Kempner Spanoids, Greedoids, Violator Spaces and Implicational Bases . . . . . 167

В. А. Кузовихина Вложение модели невлияния в модель СВАС . . . . . 170

А. Г. Малашина, А. Б. Лось Построение и анализ моделей русского языка в связи с исследованиями криптографических алгоритмов . . . . . 173

Ф. М. Малышев Обобщённые графы де Брейна . . . . . 178

Б. Мханна Теоретико-числовые задачи в теории информации . . . . . 182

М. И. Рожков, А. В. Сорокин Аффинные функции на выходе нелинейного регистра сдвига . . . 183

А. В. Селиверстов Быстрое перечисление рациональных чисел и задачи биоинформатики 186

В. Л. Токарев Формальные модели безопасности . . . 188

**Секция 5. Аналитическая теория чисел** . . . 192

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков Об одной задаче Вирзинга . . . 192

И. Ш. Джаббаров Тригонометрические интегралы . . . 194

Д. А. Долгов О цепных дробях с рациональными неполными частными, экстремальных значениях континуантов с ограничениями на переменные и обобщении теоремы Хейльбронна . . . 198

А. А. Жукова, А. В. Шутов О четности суммы цифр в случае системы счисления, основанием которой являются знаменатели подходящих дробей . . . 202

М. А. Калугина, М. В. Ламчановская, О'Доннелл Количество комплексных сопряжённых алгебраических чисел в кругах малых радиусов . . . 204

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева Задача аналитического продолжения рядов Дирихле и некоторые проблемы теории L-функций Дирихле . . . 206

Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана . . . 208

У. М. Пачев, Т. А. Шакова О теории делимости в кватернионных порядках одного специального вида . . . 209

А. С. Самсонов Арифметические свойства элементов прямых произведений $p$-адических полей . . . 212

П. Н. Сорокин Обобщение формулы Фаа ди Бруно . . . 216

В. И. Усков Формула производной определитель-функции . . . 219

Ш. А. Хайруллоев О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения . . . 220

А. В. Шутов Теоретико-числовые задачи, связанные с разложением по линейным рекуррентным последовательностям . . . 222

Е. Ю. Юденкова Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений $F$ – рядов в полиадических лиувиллевых точках . . . 224

**Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел** . . . 228

Ю. А. Басалов О решетках наилучших совместных диофантовых приближений . . . 228

В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин Приближения нуля значениями целочисленных приводимых полиномов на комплексной плоскости . . . 232

Е. В. Гусева, Н. В. Бударина Интервалы малой длины, содержащие алгебраические числа заданной степени и высоты . . . 233

Е. В. Гусева, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова О точных значениях меры Лебега множеств комплексных чисел с заданным порядком аппроксимации . . . . . 234

П. Л. Иванков Эффективная конструкция совместных приближений для гипергеометрических функций специального вида . . . . . 236

П. Л. Иванков О приближении значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций . . . . . 237

Н. И. Калоша, А. В. Луневич, О. В. Рыкова О влиянии количества алгебраических чисел на величину дискриминантов и производных в корне . . . . . 238

О. Н. Кемеш, И. М. Морозова, Ж. И. Пантелеева О приближении значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций . . . . . 239

Д. В. Коледа Алгебраические числа одинаковой высоты на вещественной прямой . . . . . 240

В. Ю. Матвеев Арифметические свойства некоторых почти полиадических чисел . . . . . 242

А. Х. Муньос Васкес Некоторые арифметические свойства обобщенных гипергеометрических $F$ – рядов . . . . . 243

В. Х. Салихов, М. Г. Башмакова Об оценке меры иррациональности $\arctan\frac{1}{6}, \arctan\frac{1}{10}$ . 245

**Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел** . . . . . 249

Д. Ю. Волков Вариационный метод Ю. А. Волкова в теории выпуклых многогранников 249

М. М. Галламов Прямые $y = -[a_0^{\pm}; a_1^{\pm}, a_2^{\pm}, ...] \cdot x + t$ с четными $a_n^+$ и нечетными $a_n^- = a(\neq 1)$ и шахматная раскраска . . . . . 252

О. А. Горкуша Построение диаграмм трехмерных решеток . . . . . 256

А. В. Костин Задача о тени для оришаров и псевдосферические поверхности . . . . . 258

Я. В. Кучериненко, В. С. Макаров Задача М. М. Постникова о трёхмерных сферических многообразиях . . . . . 259

В. И. Субботин $RR$-многогранники: существование, полнота списка . . . . . 262

**Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и теория приближений** . . . . . 264

Т. Н. Аверина, Н. М. Добровольский Теоретико-числовые методы поиска параметров сложных эконометрических моделей Тульского региона . . . . . 264

Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин Новый метод вычисления полного эллиптического интеграла второго рода . . . . . 266

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов Константы Маркова — Бернштейна — Никольского для полиномов в $L^p$ с весом Гегенбауэра . . . . . 269

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов Оценка алгебраической константы Никольского в $L^1$ . 271

Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Актуальные задачи теоретико-числового метода в приближенном анализе . . . . . 272

А. В. Кирилина О слабой теореме универсальности ..... 278

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея-Касса-Купманса стремящийся к бесконечности степенной функции полезности ..... 281

И. С. Кончакова, А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев О математическом моделировании литейных процессов при получении отливок из сплавов черных и цветных металлов . 283

А. Н. Кормачева Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II ..... 286

Н. В. Максименко Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением ..... 291

Е. М. Рарова Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток ..... 296

А. В. Родионов Теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных ..... 304

Е. Н. Смирнова Метрическое пространство решёток и гладкое многообразие одномерных решёток ..... 300

**Секция 9. История математики** ..... 307

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева История и перспективы развития электроэрозионного способа переработки металлоотходов с целью получения композиционных микро- и наноматериалов ..... 307

В. Г. Алябьева Из истории теории графов ..... 310

П. Н. Антонюк О работе Гюйгенса «Относительность движения и несуществование абсолютного пространства» ..... 313

А. А. Бабаев Геометрическая аксиоматика в трактате Н. Туси "Изложение Евклида" ... 314

Е. М. Богатов Об истории геометрических методов нелинейного анализа ..... 317

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин О ранней истории нелинейных интегральных уравнений .... 321

И. В. Денисов, Е. В. Манохин Пути развития математического анализа в ТГПУ им. Л. Н. Толстого ..... 325

Г. М. Журавлёв, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, В. Ю. Кузовлев Применение высокоскоростных моделей деформирования для моделирования процесса разрушения композиционных конструкций ..... 327

И. В. Игнатушина Возникновение теории B-функции в работах Л. Эйлера ..... 331

А. В. Маляров, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев Математические расчёты в термодинамическом анализе процессов образования кластеров углерода и графитизации в металлических сплавах на основе железа в различных условиях и состояниях ..... 334

З. А. Кузичева Алгебраические методы в математике XIX века ..... 341

И В. Минаев, С. Н. Кутепов, И. В. Тихонова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев Математический анализ процессов взаимодействия газолазерного излучения с металлическими сплавами на основе железа ..... 343

Д. А. Мкртычян Ф. Е. Орлов — основатель кафедры «Теория механизмов и машин» в Императорском Московском Техническом Училище ..... 338

С. С. Петрова О лузинских учебниках по математическому анализу ..... 346

И. А. Пинчук, С. Б. Забелина Из истории физико-математического факультета МОПИ-МПУ-МГОУ ..... 349

М. А. Подколзина Некоторые приложения математической логики к арифметике на рубеже 19-20 вв в работах представителей Одесской математической школы ..... 351

Г. М. Полотовский Очерк истории топологического образования в Нижнем Новгороде . 354

И. Ю. Реброва Василий Ильич Нечаев. К 100-летнему юбилею ..... 356

А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях ..... 358

Р. А. Симонов Историко-математический анализ одной редкой письменной системы средневековых славян ..... 362

Г. С. Смирнова История математики в Коммунистической академии ..... 366

А. Е. Устян, К истории ТГПУ им. Л. Н. Толстого и математического факультета ..... 369

А. Е. Устян, И. В. Добрынина, А. С. Угаров Владимир Николаевич Безверхний — руководитель научной школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп" 373

В. Н. Чиненова О создании аэродинамической лаборатории в Кучино ..... 378

**Секция 10. Алгебраическая теория чисел** ..... 382

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков О значениях гипергеометрических функций с целыми параметрами в алгебраических точках ..... 382

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0 ..... 388

С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков Интегральная теорема Коши для двумерных локальных полей ..... 383

В. П. Платонов, М. М. Петрунин, В. С. Жгун О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь $\sqrt{f}$ для кубических многочленов над числовыми полями ..... 385

Г.В. Федоров Об оценке длин периодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля ..... 390

**Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии** ..... 394

О. Е. Арсеньева, А. Р. Рустанов, С. В. Харитонова Почти контактные метрические многообразия постоянного типа ..... 394

И. М. Борисов, В. А. Горская, Г. М. Полотовский О топологии вещественных распадающихся кривых степеней 7 и 8 . . . 397

Л. Н. Ромакина Отношения для точек перегиба кубической кривой с узловой или изолированной точкой . . . 401

**Секция 12. Многомасштабное математическое моделирование в физике** . . . 404

Ю. В. Бобылев, В. А. Панин Некоторые вопросы численного моделирования пучково-плазменной неустойчивости . . . 404

А. И. Грибков, Р. В. Романов, Ю. В. Бобылев Применение методов поэтапного интегрирования при описании нелинейных колебаний механических систем . . . 408

В. Г. Заводинский, О. А. Горкуша Исследование энергетики углеродных нанотрубок безорбитальным методом в рамках теории функционала плотности . . . 412

В. А. Панин, Ю. В. Бобылев Численное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого вакуумного резонатора . . . 414

С. А. Радченко Математическое и экспериментальное моделирование процессов теплообмена при обучении студентов физике и теплотехнике . . . 418

Р. В. Романов, Ю. В. Бобылев, А. И. Грибков Применение численных методов линейной алгебры в физике на примере детального расчёта моста Уитстона . . . 422

В. Б. Федосеев, А. В. Шишулин Использование методов теории чисел, фрактальной геометрии и статистической термодинамики для расчета распределений наночастиц по размерам . . . 426