

## О КРУГОВЫХ СЕЧЕНИЯХ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Селиверстов А. В.<sup>1</sup>, кандидат физико-математических наук, ✉ [slvstv@iitp.ru](mailto:slvstv@iitp.ru)

<sup>1</sup>Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Большой Каретный переулок, д. 19 стр. 1, 27051, Москва, Россия

### Аннотация

Дан краткий обзор истории конических сечений. Рассмотрены круговые сечения эллипсоидов и гиперboloидов плоскостями, проходящими через центр поверхности. В общем случае существуют две такие секущие плоскости. Обобщая возникшее в механике твёрдого тела понятие, проходящую через центр эллипсоида прямую назовём осью Галуа, если ортогональная плоскость пересекает этот эллипсоид по окружности. Рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через промежуточную главную ось трёхосного эллипсоида. Каждое сечение эллипсоида такой плоскостью — это эллипс, одна из осей которого совпадает с промежуточной главной осью эллипсоида. При повороте секущей плоскости вокруг промежуточной главной оси эллипсоида длина другой оси эллипса непрерывно меняется, принимая значения между длинами малой и большой осей эллипсоида. Поэтому некоторое такое сечение — это окружность, диаметром которой служит промежуточная главная ось эллипсоида. У трёхосного эллипсоида таких сечений два. Они переходят друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости, проходящей через промежуточную и другую главные оси эллипсоида. Обе оси Галуа ортогональны промежуточной главной оси трёхосного эллипсоида, а для отличного от сферы эллипсоида вращения обе оси Галуа совпадают с одной осью и ортогональны другим главным осями эллипсоида. Предложен метод построения осей Галуа по известным главным осям эллипсоида. Это построение служит одним из естественных примеров геометрических задач. Кроме того, ось Галуа может быть корректно определена не только для эллипсоида (для которого она была введена изначально), но и для некоторых других классов центрально симметричных поверхностей, включая гиперboloиды.

**Ключевые слова:** *круговое сечение, конус, эллипсоид, гиперboloид, ось Галуа, история.*

**Цитирование:** Селиверстов А. В. О круговых сечениях поверхности второго порядка // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 59–68. doi: 10.32603/2071-2340-2020-4-59-68

**Благодарности:** *Автор благодарен Семёну Ф. Адлаю и Александру Л. Хейфецу за многочисленные замечания.*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель этой работы в том, чтобы описать круговые сечения поверхности второго порядка — эллипсоида или гиперboloида — плоскостями, инцидентными центру

поверхности. А также описать прямые, называемые осями Галуа [23], и установить связь с известными историческими результатами о круговых сечениях квадрики. Обсуждаемые построения связаны с геометрической подготовкой, необходимой для изучения механики твёрдого тела [9]. Но вначале кратко опишем близкие результаты о конических сечениях [6, 12, 25]. Их изучение привело к одному из самых важных достижений математики Древней Греции, наряду с описанием правильных многогранников [1, 13].

## 2. КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

В IV веке до н.э. Менехм использовал конические сечения для решения задачи об удвоении куба. Также о конических сечениях писали Аристей, Евклид и Конон Самосский, но эти сочинения до нас не дошли и известны лишь по упоминаниям в других работах [6, 12]. Известно, что Конон был моложе Архимеда, но умер раньше, то есть не позднее 212 г. до н.э., когда римляне захватили Сиракузы, а Архимед был убит. К сожалению, история геометрии остаётся недостаточно исследованной. В частности, признано, что Начала Евклида включают работы многих предшественников. Однако можно предполагать, что некоторые фрагменты Начал были добавлены позднее при компиляции анонимными комментаторами, но не были известны самому Евклиду [29].

Известно сочинение Архимеда О коноидах и сфероидах, где доказано, что эллиптический конус обладает круговыми сечениями. Следовательно, наклонный (или косой) круговой конус обладает плоскостью симметрии, которая проходит через вершину конуса и некоторую ось эллипса, лежащего в сечении конуса. Также известны семь из восьми книг Конических сечений, которые написал Аполлоний Пергский, собрав и значительно обогатив работы своих предшественников. В частности, он показал, что наклонный круговой конус обладает и существенно другим, то есть непараллельным основанием, круговым сечением. Эти круговые сечения возникают при стереографической проекции. Окружность на плоскости проекции служит образом окружности на сфере. И обе эти окружности лежат на одном конусе, вершина которого лежит на сфере.

Пересечение специально подобранных конических сечений позволяет решать кубические уравнения и, следовательно, геометрические задачи, которые сводятся к решению этих уравнений. Этот метод, известный ещё Менехму и развитый Архимедом, впоследствии широко использовали учёные стран ислама [6]. Одна из задач, решаемых таким методом, — трисекция угла — рассмотрена в книге Архимеда Леммы, сохранившейся только в арабском переводе, который выполнил багдадский учёный Сабит ибн Корра (836–901), уроженец сирийского города Харрана. Также в его переводе сохранилась книга Архимеда о семиугольнике. Построение вписанных в данную окружность правильных семи- и девятиугольников также сводится к пересечению конических сечений. Три из восьми книг Аполлония «Конические сечения» также сохранились в переводе Сабита ибн Корры. Позднее многие работы, написанные на арабском языке, стали известны в Европе [24, 25].

Ещё одна задача, связанная с кубическим уравнением и решаемая с помощью пересечения конических сечений, состоит в делении шара плоскостью на два сегмента с данным отношением объёмов. Эта задача была решена Архимедом. Во второй половине II века н.э. решение этой задачи вновь было найдено Диоклом, не знавшим о решении Архимеда. Наконец в X веке н.э. эту задачу вновь решил Абу Джафар ал-Хазин (900–971), видимо, не зная о решении этой задачи Архимедом и Диоклом. Отметим, что прикладное значение имеют также близкие задачи о пересечении сферы и цилиндра [26, 27].

Конусы и их сечения, лежащие в трёхмерном пространстве, а не на плоскости, рассматривались геометрами древности как полноценные геометрические объекты, чьё

существование очевидно. Аполлоний дал описание конических сечений как геометрических мест на плоскости. Но нам известно, что многие задачи, которые были решены с помощью пересечения конических сечений, не могут быть решены построениями на плоскости только циркулем и линейкой. В древности этот факт не умели доказывать, но, по сути, знали из опыта. Однако построение циркулем и линейкой не было принципиальным для учёных, создавших используемые на практике машины, как это делал Архимед. С другой стороны, круговые сечения выделяются тем, что они могут быть легко построены на секущей плоскости.

Исследование конических сечений интенсивно продолжалось в XIX веке, в частности, в работах Эудженио Бельтрами (Eugenio Beltrami) [30]. Ещё одним интересным продолжением исследований конических сечений служит метод построения сфер Данделена (Dandelin), получивший развитие в других работах [18, 20].

### 3. ОСИ ГАЛУА ЭЛЛИпсоИДОВ

Задача о сечениях эллипсоидов менее известна, хотя существование круговых сечений показано, например, в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [3, с. 26]. Геометрическое построение круговых сечений приведено в работе А. Л. Хейфеца и Ю. К. Барского [19]. Это построение круговых сечений основано на теореме о двойном касании квадрик [21]. Круговые сечения эллипсоида деформации рассмотрены при обсуждении механизма образования тектонических трещин [4]. Также круговые сечения эллипсоидов возникают в оптике. Однако недавно была обнаружена связь этой задачи с приложениями в теоретической механике, что объясняет интерес к ней. Изначально осью Галуа названа прямая, проходящая через центр эллипсоида Мак-Куллага (MacCullagh) и ортогональная плоскости, также проходящей через центр и пересекающей этот эллипсоид по окружности. Для тела с осевой симметрией ось Галуа совпадает с осью симметрии, но в общем случае осей Галуа две и ни одна из них не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции. Ось Галуа не имеет выделенного направления. Положение осей Галуа относительно твёрдого тела определяется независимо от его вращения. Важная роль этого понятия иллюстрируется тем, что ось Галуа равномерно и устойчиво вращается в случае перманентного вращения твёрдого тела относительно его промежуточной главной оси инерции [23]. При этом вращение самого тела вокруг промежуточной главной оси инерции неустойчиво при любой угловой скорости вращения. Анализ этого вращения интересен, в частности, для вычисления траектории полёта и ориентации в пространстве космического аппарата, хотя сам Эварист Галуа (Évariste Galois) не занимался такой задачей [22, 28]. Обобщая возникшее в теоретической механике понятие, проходящую через центр эллипсоида прямую назовём осью Галуа, если ортогональная плоскость, также проходящая через центр эллипсоида, пересекает этот эллипсоид по окружности. Ось Галуа служит осью симметрии того кругового сечения эллипсоида, о котором говорится в её определении, хотя эта ось не лежит в плоскости сечения. Поэтому её иногда называют обобщённой осью симметрии.

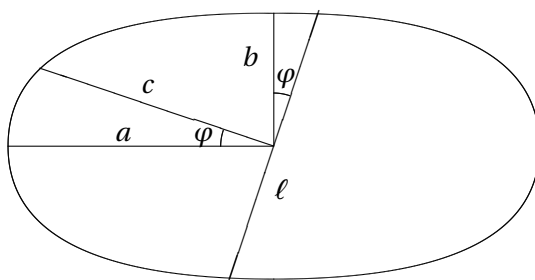
Сечение сферы плоскостью — окружность. С другой стороны, если сечением эллипсоида вращения (или сфероида) служит окружность, то секущая плоскость ортогональна оси симметрии. Рассмотрим трёхосный эллипсоид, то есть отличный от сфероида, не имеющий оси симметрии. Следуя [3, с. 26], рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через промежуточную главную ось эллипсоида. Каждое сечение эллипсоида такой плоскостью — эллипс, одна из осей которого совпадает с промежуточной главной осью эллипсоида. При повороте секущей плоскости вокруг промежуточной главной оси эллипсоида

длина другой главной оси эллипса непрерывно меняется, принимая значения между длинами малой и большой главных осей эллипсоида. Поэтому некоторое такое сечение — это окружность, диаметром которой служит промежуточная главная ось эллипсоида. У трёхосного эллипсоида таких сечений два. Они переходят друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости, проходящей через промежуточную и другую главные оси эллипсоида.

Круговые сечения эллипсоида получаются как пересечение эллипсоида и сферы, диаметр которой равен промежуточной главной оси, а центр совпадает с центром эллипсоида. В общем случае пересечение двух поверхностей второго порядка — это пространственная кривая четвёртого порядка. В случае пересечения трёхосного эллипсоида и сферы с тем же центром, диаметр которой равен промежуточной главной оси эллипсоида, эта кривая распадается на две пересекающиеся окружности. В случае эллипсоида вращения, отличного от сферы, получается двойная окружность, по которой эллипсоид и сфера касаются друг друга.

При данном построении видно, что обе оси Галуа ортогональны промежуточной главной оси трёхосного эллипсоида, а для отличного от сферы эллипсоида вращения обе оси Галуа совпадают с одной осью и ортогональны другим осями эллипсоида. И только у сферы бесконечно много осей Галуа. Это позволяет сказать, что сфера одновременно служит примером самой простой и самой сложной поверхности второго порядка.

Рассмотрим подробнее построение круговых сечений и осей Галуа для трёхосного эллипсоида по его главным осям. Обозначим через  $a > c > b$  длины полуосей этого эллипсоида. Поскольку центр искомого сечения совпадает с центром эллипсоида, а промежуточная главная ось эллипсоида служит диаметром кругового сечения, они известны заранее. Нужно лишь найти угол  $\varphi$  между малой главной осью эллипсоида и осью Галуа. Эта задача сводится к поиску точки пересечения окружности радиуса  $c$  и эллипса с полуосями, равными большой  $a$  и малой  $b$  полуосям эллипсоида, когда центры окружности и эллипса совпадают. Угол  $\varphi$  равен углу между большой осью эллипса и радиусом окружности, проведённым в точку пересечения окружности с эллипсом, рис. 1.



**Рис. 1.** Угол  $\varphi$  между малой главной осью и осью Галуа  $\ell$  равен углу между большой главной осью и радиусом  $c$

Эта задача сводится к решению системы двух уравнений

$$\begin{cases} b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \\ x^2 + y^2 = c^2. \end{cases}$$

Здесь большая ось эллипса лежит на оси абсцисс, малая — на оси ординат, а начало координат совпадает с центром эллипса. Решением системы служат четыре точки с коор-

динатами

$$x = \pm a \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}},$$

$$y = \pm b \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Тангенс угла  $\varphi$  равен модулю отношения ординаты и абсциссы точки пересечения окружности и эллипса

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sqrt{a^2 - c^2}}{a \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Обозначим через  $f = \sqrt{a^2 - c^2}$  длину катета в прямоугольном треугольнике с длиной другого катета  $c$  и длиной гипотенузы  $a$ . Обозначим через  $g = \sqrt{c^2 - b^2}$  длину катета в прямоугольном треугольнике с длиной другого катета  $b$  и длиной гипотенузы  $c$ . Отрезки с длинами  $f$  и  $g$  легко построить, используя теорему Пифагора. Далее отрезок с длиной  $\frac{ag}{b}$  также можно построить, используя проективное преобразование прямой [11]. Угол  $\varphi$  равен углу в прямоугольном треугольнике с длинами катетов  $f$  и  $\frac{ag}{b}$ , соответственно. Следовательно, угол  $\varphi$  можно построить посредством циркуля и линейки.

Для вытянутого эллипсоида вращения с длинами полуосей  $a > c = b$  угол  $\varphi$  прямой, а ось Галуа совпадает с большой главной осью эллипсоида. Для сплюсненного эллипсоида вращения с длинами полуосей  $a = c > b$  угол  $\varphi$  обращается в нуль, а ось Галуа совпадает с малой главной осью эллипсоида.

Если некоторая плоскость пересекает эллипсоид по окружности, то параллельная плоскость, пересекающая этот эллипсоид, тоже пересекает его по окружности. Касательная плоскость пересекает эллипсоид в одной точке, которую можно рассматривать как вырожденную окружность нулевого радиуса. Точка эллипсоида называется омбилической или точкой округления, если соприкасающийся параболоид является параболоидом вращения. Это эквивалентно тому, что индикатриса Дюпена (Dupin) является окружностью. Омбилические точки на эллипсоиде служат точками пересечения этого эллипсоида с осями Галуа. В частности, на трёхосном эллипсоиде существуют ровно четыре омбилические точки, по две на каждой из осей Галуа. На эллипсоиде вращения, отличном от сферы, существуют две омбилические точки.

#### 4. ДРУГИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Никакая плоскость, проходящая через центр, не пересекает двуполостный гиперboloид по окружности. Однако такое сечение может быть мнимой окружностью, на которой нет вещественных точек. Это не является существенным препятствием, поскольку мнимые окружности эффективно применяются как для геометрических построений [2, 10], так и в компьютерной алгебре [7, 8]. В XIX веке мнимые кривые второго порядка использовал Федор Матвеевич Суворов, называвший мнимые кривые воображаемыми [17]. Если же рассматривать сечения плоскостями, не проходящими через центр гиперboloида, то среди них найдётся плоскость, пересекающая гиперboloид по вещественной окружности. Параллельная такой плоскости касательная плоскость касается гиперboloида в омбилической точке. Прямая, проходящая через две антиподальные омбилические точки на гиперboloиде, служит осью Галуа.

Аналогично доказывается существование двух круговых сечений плоскостями, проходящими через центр однополостного гиперboloида. Если однополостный гиперboloид

является поверхностью вращения, то круговые сечения совпадают. Прямые, ортогональные плоскостям этих круговых сечений, также можно назвать осями Галуа. В этом случае ось Галуа ортогональна большей из двух вещественных главных осей гиперboloида, а для гиперboloида вращения — ортогональна каждой из вещественных главных осей. Угол наклона оси Галуа вычисляется аналогично тому, как это сделано для эллипсоида. Обозначим через  $c > a$  длины вещественных полуосей гиперboloида. Наименьшим сечением (горлом) однополостного гиперboloида служит эллипс, чьи длины полуосей  $c > a$ . Тогда задача поиска оси Галуа сводится к решению системы двух уравнений

$$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2, \\ x^2 + y^2 = c^2. \end{cases}$$

Здесь через  $b$  обозначена длина мнимой полуоси гиперboloида ( $b$  — положительное вещественное число). Угол  $\varphi$  между малой вещественной главной осью и плоскостью кругового сечения равен углу между осью Галуа и мнимой главной осью гиперboloида. Его тангенс равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sqrt{c^2 - a^2}}{a \sqrt{c^2 + b^2}}.$$

Для гиперboloида вращения  $a = c$ , угол  $\varphi = 0$  и вещественные главные оси лежат в плоскости кругового сечения. Однако в случае гиперboloидов ось Галуа не нашла практического применения.

Для наклонного кругового конуса осью Галуа естественно назвать прямую, проходящую через вершину конуса и ортогональную плоскости некоторого кругового сечения.

Ни на однополостном гиперboloиде, ни на круговом конусе нет омбилических точек, поскольку они служат примерами линейчатых поверхностей, подробному описанию которых посвящено большое количество статей [14–16, 31]. Однако на аналитической замкнутой выпуклой поверхности в трёхмерном пространстве существуют хотя бы две омбилические точки [5]. Это частный случай гипотезы Каратеодори (Carathéodory), до сих пор остающейся без доказательства, если предполагать не аналитичность, а лишь гладкость поверхности. Так открывается путь для обобщения понятия оси Галуа для большого класса поверхностей. Действительно, если поверхность замкнута и симметрична относительно центра, то множество её омбилических точек разбивается на пары антиподальных точек. Каждая такая пара точек определяет прямую, проходящую через них и через центр. По аналогии с эллипсоидом, эту прямую можно назвать осью Галуа рассматриваемой поверхности.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что недавно возникшее в механике твёрдого тела понятие — ось Галуа — тесно связано с хорошо известными геометрическими задачами, изучение которых началось в Древней Греции. Приведён метод построения осей Галуа по известным главным осям эллипсоида. Это построение служит одним из естественных примеров геометрических задач и может быть использовано в учебном процессе. Кроме того, ось Галуа может быть корректно определена не только для эллипсоида, для которого она была введена изначально, но и для некоторых других классов центрально-симметричных поверхностей, включая гиперboloиды.

## Список литературы

1. Васильева В. Н. Золотое сечение и золотые прямоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 2. С. 47–55. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5d2c1ceb9f91b1.21353054](https://doi.org/10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054)
2. Волошинов Д. В. Алгоритмический комплекс для решения задач с квадратами с применением мнимых геометрических образов // Геометрия и графика. 2020. Т. 8. № 2. С. 3–32. doi: <https://doi.org/10.12737/2308-4898-2020-3-32>
3. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Едиториал УРСС, 2004. 344 с.
4. Епифанцев О. Г., Плетенчук Н. С. Трещиноватость горных пород. Основы теории и методы изучения. Новокузнецк: СибГИУ, 2008. 41 с.
5. Иванов В. В. Аналитическая гипотеза Каратеодори // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43. № 2. С. 314–405.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т. Т. 1: С древнейших времен до начала нового времени / под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. 352 с.
7. Малашонок Г. И. Применение сервиса MathPartner в образовании // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 3. С. 29–37.
8. Малашонок Г. И. Система компьютерной алгебры MathPartner // Программирование. 2017. № 2. С. 63–71.
9. Одинец В. П. О проблемах математической подготовки физиков // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. № 1(30). С. 114–117.
10. Пеклич В. А. Мнимая начертательная геометрия. М.: Изд-во АСВ, 2007. 104 с.
11. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М.: МЦНМО, 2007. 336 с.
12. Розенфельд Б. А. Аполлоний Пергский. М.: МЦНМО, 2004. 176 с.
13. Романова В. А. Визуализация правильных многогранников в процессе их образования // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 1. С. 55–67. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5c91ffd0916d52.90296375](https://doi.org/10.12737/article_5c91ffd0916d52.90296375)
14. Сальков Н. А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 1 // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 4. С. 20–31. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5c21f4a06dbb74.56415078](https://doi.org/10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078)
15. Сальков Н. А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 1. С. 14–27. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5c9201eb1c5f06.47425839](https://doi.org/10.12737/article_5c9201eb1c5f06.47425839)
16. Сальков Н. А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 3 // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 2. С. 13–27. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5d2c170ab37810.30821713](https://doi.org/10.12737/article_5d2c170ab37810.30821713)
17. Суворов Ф. М. Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определяемых помощью воображаемых точек и касательных. Казань: тип. Ун-та, 1884. 130 с.
18. Хейфец А. Л. Коники как сечения квадратик плоскостью (обобщенная теорема Данделена) // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 2. С. 45–58. doi: [https://doi.org/10.12737/article\\_5953f32172a8d8.94863595](https://doi.org/10.12737/article_5953f32172a8d8.94863595)
19. Хейфец А. Л., Барский Ю. К. Сравнительный анализ эффективности 2D и 3D алгоритмов в задачах на пересечение поверхностей // Труды 17-той международной научно-технической конференции Информационные средства и технологии. Москва 20–22 октября 2009. Т. 3. М.: Издательский дом МЭИ, 2009. С. 148–155.
20. Хейфец А. Л., Васильева В. Н. Реализация обобщенной теоремы Данделена для произвольных квадратик вращения в AutoCAD // Геометрия и графика. 2014. Т. 2. № 2. С. 9–14. doi: <https://doi.org/10.12737/5584>
21. Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1963. 420 с.
22. Adlaj S.F. On the second memoir of Évariste Galois' last letter // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 4. С. 11–26. doi: <https://doi.org/10.32603/2071-2340-4-11-26>
23. Adlaj S. F., Berestova S. A., Misyura N. E., Mityushov E. A. Illustrations of rigid body motion along a separatrix in the case of Euler–Poinsot // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 2. С. 5–13. doi: <https://doi.org/10.32603/2071-2340-2018-2-5-13>
24. Ageron P., Hedfi H. Ibrahim al-Balishṭār's book of arithmetic (ca. 1575): Hybridizing Spanish

- mathematical treatises with the Arabic scientific tradition // *Historia Mathematica*. 2020. V. 52. P. 26–50. doi: <https://doi.org/10.1016/j.hm.2020.01.002>
25. *Del Centina A., Fiocca A.* Borelli's edition of books V–VII of Apollonius's Conics, and Lemma 12 in Newton's Principia // *Archive for History of Exact Sciences*. 2020. Vol. 74. P. 255–279. doi: <https://doi.org/10.1007/s00407-019-00244-w>
26. *Lamarche F., Leroy C.* Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals // *Computer Physics Communications*. 1990. Vol. 59. № 2. P. 359–369. doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(90\)90184-3](https://doi.org/10.1016/0010-4655(90)90184-3)
27. *Mariani N. J., Mazza G. D., Martinez O. M., Barreto G.F.* Evaluation of radial voidage profiles in packed beds of low-aspect ratios // *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2000. Vol. 78. № 6. P. 1133–1137. doi: <https://doi.org/10.1002/cjce.5450780614>
28. *Neumann P. M.* The editors and editions of the writings of Évariste Galois // *Historia Mathematica*. 2012. Vol. 39. P. 211–221. doi: <https://doi.org/10.1016/j.hm.2012.01.003>
29. *Saito K.* Re-examination of the different origins of the arithmetical books of Euclid's Elements // *Historia Mathematica*. 2019. Vol. 47. P. 39–53. doi: <https://doi.org/10.1016/j.hm.2019.03.002>
30. *Vaccaro M. A.* Historical origins of the nine-point conic. The contribution of Eugenio Beltrami // *Historia Mathematica*. 2020. Vol. 51. P. 26–48. doi: <https://doi.org/10.1016/j.hm.2019.12.002>
31. *Vršek J.* Contour curves and isophotes on rational ruled surfaces // *Computer Aided Geometric Design*. 2018. Vol. 65. P. 1–12. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2018.06.006>

Поступила в редакцию 21.09.2020, окончательный вариант — 16.11.2020.

**Селиверстов Александр Владиславович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук** <http://orcid.org/0000-0003-4746-6396>, ✉ [slvstv@iitp.ru](mailto:slvstv@iitp.ru)

---

Computer tools in education, 2020

№ 4: 59–68

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2020-4-59-68

## On Circular Sections of a Second-Order Surface

Seliverstov A. V.<sup>1</sup>, PhD, ✉ [slvstv@iitp.ru](mailto:slvstv@iitp.ru)

<sup>1</sup>Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), 19 Bolshoy Karetny pereulok, bild. 1, 127051, Moscow, Russia

### Abstract

A brief overview of the history of conic sections is given. Circular sections of ellipsoids and hyperboloids with planes passing through the center of the surface are considered. In general, there are two such secant planes. Generalizing the concept that arose in rigid-body mechanics, a straight line passing through the center of an ellipsoid is called the Galois axis if the orthogonal plane intersects this ellipsoid along a circle. Let us consider the pencil of planes passing through the intermediate principal axis of a triaxial ellipsoid. Each section of an ellipsoid with such a plane is an ellipse, one of the axes of which coincides with the intermediate principal axis of the ellipsoid. When the secant plane rotates around the intermediate principal axis of the ellipsoid, the length of the other axis of the ellipse continuously changes, taking values between the lengths of the minor and major axes of the ellipsoid. Therefore, some such section is a circle whose diameter is the intermediate



principal axis of the ellipsoid. A triaxial ellipsoid has two such sections. They transform into each other when mirrored relative to the plane passing through the intermediate and other principal axes of the ellipsoid. Both Galois axes are orthogonal to the intermediate principal axis of the triaxial ellipsoid, and for a non-sphere ellipsoid of rotation, both Galois axes coincide with one axis and are orthogonal to the other principal axes of the ellipsoid. A method for constructing Galois axes from the known principal axes of an ellipsoid is proposed. This construction serves as one of the natural examples of geometric problems. In addition, the Galois axis can be correctly defined not only for the ellipsoid (for which it was originally introduced), but also for some other classes of centrally symmetric surfaces, including hyperboloids.

**Keywords:** *circular section, cone, ellipsoid, hyperboloid, Galois axis, history.*

**Citation:** A. V. Seliverstov, "On Circular Sections of a Second-Order Surface," *Computer tools in education*, no. 41, pp. 59–68, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-4-59-68

**Acknowledgements:** *The author is grateful to Semjon F. Adlaj and Alexander L. Kheyfets for numerous comments.*

## References

1. V. N. Vasil'eva, "Golden section and golden rectangles when building icosahedron, dodecahedron and archimedean solids based on them," *Geometry & Graphics*, vol. 7, no. 2, pp. 47–55, 2019 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5d2c1ceb9f91b1.21353054
2. D. V. Voloshinov, "Algorithmic complex for solving of problems with quadrics using imaginary geometric images," *Geometry & Graphics*, vol. 8, no. 2, pp. 3–32, 2020 (in Russian); doi: 10.12737/2308-4898-2020-3-32
3. D. Gilbert and S. Kon-Fossen, *Naglyadnaya geometriya* [Visual geometry], Moscow: Editorial URSS, 2004 (in Russian).
4. O. G. Epifantsev and N. S. Pletenchuk, *Treshchinovatost' gornykh porod. Osnovy teorii i metody izucheniya* [Fracturing of rocks. Fundamentals of theory and methods of study], Novokuznetsk, Russia: SibGIU, 2008 (in Russian).
5. V. V. Ivanov, "The Analytic Caratheodory conjecture," *Siberian Mathematical Journal*, 2002, vol. 43, no. 2, pp. 251–322.
6. A. P. Yushkevich et al., *The history of mathematics from ancient times to the 19th century*, A. P. Yushkevich ed., vol. 1, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
7. G. I. Malaschonok, "Application of the Mathpartner Service in Education," *Computer tools in education*, no. 3, pp. 29–37, 2017 (in Russian).
8. G. I. Malaschonok, "MathPartner computer algebra," *Programming and Computer Software*, vol. 43, no. 2, pp. 112–118, 2017; <https://doi.org/10.1134/S0361768817020086>
9. W. P. Odyniec, "About the problems of mathematical training of physicists," *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 30, no. 30, pp. 113–115, 2019 (in Russian).
10. V. A. Peklich, *Imaginary descriptive geometry*. Moscow: Izd-vo ASV, 2007 (in Russian).
11. V. V. Prasolov and V. M. Tikhomirov, *Geometry*, Moscow: MCCME, 2007 (in Russian).
12. B. A. Rosenfeld, *Apollonius of Perga*, Moscow: MCCME, 2007 (in Russian).
13. V. Romanova, "Visualization of regular polyhedrons during their formation," *Geometry & graphics*, vol. 7, no. 1, pp. 55–67, 2019 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5c91ffd0916d52.90296375
14. N. A. Sal'kov, "General Principles for Formation of Ruled Surfaces. Part 1," *Geometry & Graphics*, vol. 6, no. 4, pp. 20–31, 2018 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5c21f4a06dbb74.56415078
15. N. A. Sal'kov, "General Principles for Formation of Ruled Surfaces. Part 2," *Geometry & Graphics*, vol. 7, no. 1, pp. 14–27, 2019 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5c9201eb1c5f06.47425839
16. N. A. Sal'kov, "General Principles for Formation of Ruled Surfaces. Part 3," *Geometry & Graphics*, vol. 7, no. 2, pp. 13–27, 2019 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5d2c170ab37810.30821713

17. F. M. Suvorov, *Ob izobrazhenii voobrazhaemykh toчек i voobrazhaemykh pryamykh na ploskosti i o postroenii krivykh linii vtoroi stepeni, opredelyaemykh pomoshch'yu voobrazhaemykh toчек i kasatel'nykh*, Kazan, Russia: Tipografiya imperatorskogo Universiteta, 1884 (in Russian).
18. A. L. Kheyfets, "Conics As Sections of Quadrics by Plane (Generalized Dandelin Theorem)," *Geometry & Graphics*, vol. 5, no. 2, pp. 45–58, 2017 (in Russian); doi: 10.12737/article\_5953f32172a8d8.94863595
19. A. L. Kheyfets and Yu. K. Barskii, "Sravnitel'nyi analiz effektivnosti 2D i 3D algoritmov v zadachakh na peresechenie poverkhnosti" [Comparative analysis of the effectiveness of 2D and 3D algorithms in problems on the intersection of surfaces], *Trudy 17-toi mezhdunarodnoi nauchno-tekhnikeskoj konferentsii Informatsionnye sredstva i tekhnologii. oct. 20–22, Moscow, 2009*, vol. 3, Moscow: Izdatel'skii dom MEI, 2009, pp. 148–155 (in Russian).
20. A. L. Kheyfets and V. Vasileva, "Generalized Dandelin's Theorem Implementation for Arbitrary Rotation Quadrics in AutoCAD," *Geometry & Graphics*, vol. 2, no. 2, pp. 9–14, 2014 (in Russian); doi: 10.12737/5584
21. N. F. Chetverukhin, *Descriptive geometry*, Moscow: Vysshaya shkola, 1963 (in Russian).
22. S. F. Adlaj, "On the second memoir of Évariste Galois' last letter," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 11–26, 2018; doi: 10.32603/2071-2340-4-11-26
23. S. F. Adlaj, S. A. Berestova, N. E. Misyura, and E. A. Mityushov, "Illustrations of rigid body motion along a separatrix in the case of Euler-Poinsot," *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–13, 2018; doi: 10.32603/2071-2340-2018-2-5-13
24. P. Ageron and H. Hedfi, "Ibrāhīm al-Balīshṭār's book of arithmetic (ca. 1575): Hybridizing Spanish mathematical treatises with the Arabic scientific tradition," *Historia Mathematica*, vol. 52, pp. 26–50, 2020; doi: 10.1016/j.hm.2020.01.002
25. A. Del Centina and A. Fiocca, "Borelli's edition of books V–VII of Apollonius's Conics, and Lemma 12 in Newton's Principia," *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 74, pp. 255–279, 2020; doi: 10.1007/s00407-019-00244-w
26. F. Lamarche and C. Leroy, "Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals," *Computer Physics Communications*, vol. 59, no. 2, pp. 359–369, 1990; doi: 10.1016/0010-4655(90)90184-3
27. N. J. Mariani and G. D. Mazza, "Martinez O. M., Barreto G.F. Evaluation of radial voidage profiles in packed beds of low-aspect ratios," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 78, no. 6, pp. 1133–1137, 2000; doi: 10.1002/cjce.5450780614
28. P. M. Neumann, "The editors and editions of the writings of Évariste Galois," *Historia Mathematica*, vol. 39, pp. 211–221, 2012; doi: 10.1016/j.hm.2012.01.003
29. K. Saito, "Re-examination of the different origins of the arithmetical books of Euclid's Elements," *Historia Mathematica*, vol. 47, pp. 39–53, 2019; doi: 10.1016/j.hm.2019.03.002
30. M. A. Vaccaro, "Historical origins of the nine-point conic. The contribution of Eugenio Beltrami," *Historia Mathematica*, vol. 51, pp. 26–48, 2020; doi: 10.1016/j.hm.2019.12.002
31. J. Vršek, "Contour curves and isophotes on rational ruled surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 65, pp. 1–12, 2018; doi: 10.1016/j.cagd.2018.06.006

Received 21.09.2020, the final version — 16.11.2020.

**Alexandr Seliverstov, PhD, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), ✉ [slvstv@iitp.ru](mailto:slvstv@iitp.ru)**