Том 66 **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2021** **Выпуск 3**

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВЕРЕТЕННИКОВ А. Ю.*

О ПОТРАЕКТОРНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МАККИНА–ВЛАСОВА[1)]

При умеренно слабых условиях регулярности на коэффициенты сноса и диффузии для многомерных уравнений Маккина–Власова установлена потраекторная единственность. И снос и диффузия зависят от маргинального распределения процесса. При ограниченных коэффициентах достаточным условием потраекторной единственности является условие Дини по фазовой переменной коэффициента сноса вместе с условием Липшица по фазовой переменной коэффициента диффузии; последний также предполагается непрерывным по времени и равномерно невырожденным. Постановка задачи — классическая Маккина–Власова, т.е. коэффициенты уравнения представлены в виде интегралов по маргинальным распределениям процесса.

Ключевые слова и фразы: уравнение Маккина–Власова, сильная единственность.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5447

1. Введение. Рассматриваются решения стохастического уравнения Маккина–Власова в $\mathbf{R}^d$

$$dX_t = B[t, X_t, \mu_t]\, dt + \Sigma[t, X_t, \mu_t]\, dW_t, \qquad X_0 = x_0, \tag{1}$$

при условии

$$B[t, x, \mu] = \int b(t, x, y)\, \mu(dy), \qquad \Sigma[t, x, \mu] = \int \sigma(t, x, y)\, \mu(dy). \tag{2}$$

Здесь W — стандартный d_1-мерный ($d_1 \geqslant d$) винеровский процесс, b и σ суть векторная и матричная борелевские функции размерностей d и

*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия; e-mail: ayv@iitp.ru

[1)] Статья подготовлена в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ).

$d \times d_1$ соответственно, μ_t — распределение процесса X в момент t. Начальное условие x_0 может быть случайным, и в таком случае оно предполагается независимым от W; допускается дельта-мера. Систематическое исследование таких уравнений было начато Г. Маккином [8]. В монографии [14] можно найти введение в это направление. Уравнения Маккина–Власова важны во многих областях, таких как многокомпонентные системы стохастических дифференциальных уравнений, теория фильтрации и др.

Результаты о сильных решениях уравнения (1) можно найти, в частности, в работах [14], [16], а по поводу последних достижений см. [1], [2] и [10]. О недавних результатах для диффузионных уравнений со скачками см. также [9]. В данной работе предлагается метод, отличный от используемого в [2], и целью является доказательство теоремы о сильной единственности с помощью комбинации подходов из [18], [1] и [17]. По сравнению с работой [2] предположены более слабые условия на зависимость коэффициента сноса от переменной состояния; метод не использует дифференцирование по мере, и, как следствие, предложено значительно более короткое доказательство теоремы. В то же время условия на зависимость сноса от "третьей переменной" в данной работе несколько более ограничительны по сравнению с аналогичным условием в [2], и формально в [2] рассмотрена иная, более сложная система, так что, строго говоря, семейство условий в настоящей работе напрямую не сравнимо с условиями в [2] и в других предшествующих работах на данную тему.

Работа состоит из раздела 1 — данного введения, раздела 2, содержащего основной результат, и раздела 3, в котором представлено его доказательство.

2. Основной результат. Отметим, что для любой борелевской функции $f(z,y)$ и любой вероятностной меры $\mu(dy)$ таких, что $f(z,\cdot)$ интегрируема относительно этой меры, функция $f[z,\mu] := \int f(z,y)\,\mu(dy)$ является измеримой по Борелю относительно z (см., например, [12, теорема 2.6.8]). В частности, если для любой пары (t,x) измеримые по Борелю коэффициенты $b(t,x,y)$ и $\sigma(t,x,y)$ ограничены (что предположено), то функции $\widetilde{b}(t,x) := B[t,x,\mu_t]$ и $\widetilde{\sigma}(t,x) := \Sigma[t,x,\mu_t]$ также измеримы по Борелю относительно (t,x). Благодаря этому факту, уравнение (1) корректно определено. Обозначим через $\mathcal{P}_2$ множество вероятностных мер в $\mathbf{R}^d$ с конечным вторым моментом.

Положим

$$\rho_B(r) := \sup_{t\geqslant 0}\ \sup_{\mu\in\mathcal{P}_2}\ \sup_{|x-x'|\leqslant r} |B[t,x,\mu] - B[t,x',\mu]|, \qquad r \geqslant 0,$$

что можно понимать как “равномерный относительно остальных переменных” модуль непрерывности функции B по переменной x. Символ $\mathcal{L}(X_t)$ используется для обозначения маргинального распределения X_t.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $\mathcal{L}(X_0) \in \mathcal{P}_2$;

(ii) *функции* b *и* σ *измеримы по Борелю, ограничены и удовлетворяют глобальному условию Липшица по* y;

(iii) *матрица* $\Sigma\Sigma^*[t,x,\mu]$ *равномерно непрерывна по* (t,x) *для любой меры* μ *и является равномерно невырожденной*:

$$\inf_{s\geqslant 0,\, x\in\mathbf{R}^d,\, \mu\in\mathcal{P}_2}\ \inf_{\lambda\in\mathbf{R}^d:\ |\lambda|=1} \lambda^*\Sigma[s,x,\mu]\Sigma^*[s,x,\mu]\lambda > 0; \qquad (3)$$

(iv) *функция* $\Sigma[t,x,\mu]$ *равномерно (глобально) липшицева по переменной* x;

(v) *вектор-функция* $B[t,x,\mu]$ *удовлетворяет условию Дини по переменной* x:

$$\int_0^1 \frac{\rho_B(r)}{r}\,dr < \infty. \qquad (4)$$

Тогда решение уравнения (1) *потраекторно единственно и, следовательно, является сильным.*

Замечание 1. Подчеркнем, что в предположениях теоремы слабое решение существует (см. ссылки в доказательстве), поэтому требование его существования не включено в условия; более того, свойство единственности вообще не обязательно предполагает существование. Условие (ii) в части *ограниченности* коэффициентов можно ослабить; оно используется лишь для более простой ссылки на результат о слабом существовании, а также ради удобства ссылок на результаты о параболических уравнениях. Конечная цель, а именно, установление сильной единственности лишь при условии ограниченности и борелевской измеримости сноса b, по-видимому, остается открытой проблемой для случая, когда коэффициент диффузии зависит от распределения; если коэффициент диффузии не зависит от него, см., например, [11, теорема 3] (даже при условии линейного роста по переменной x). Классическое предположение (2) данной теории также можно ослабить: достаточно условия Липшица на Σ и B по переменной “мера”. Все эти ослабления в данной работе не рассматриваются, что сделано с целью максимально упростить изложение.

3. Доказательство теоремы 1. Чтобы работать с коэффициентами, зависящими от меры, используется идея преобразования Звонкина (см. [18]): как оказалось, зависимость от меры здесь “мешает” не слишком сильно. Существование слабого решения при различных условиях, охватывающих условия теоремы 1, установлено рядом авторов (см., например, [3]–[5], [9], [11]). В то же время для утверждения потраекторной единственности не требуется (слабого) существования: если есть решение, то оно потраекторно единственно. После того как это последнее свойство установлено, утверждение о том, что любое решение — сильное, следует из принципа Ямада–Ватанабе [17].

Допустим, есть два решения (X_t^i, μ_t^i), $i = 1, 2$, на одном и том же вероятностном пространстве с тем же винеровским процессом (W_t). Пусть $T > 0$ (далее это число будет выбрано достаточно малым); положим

$$
\begin{aligned}
L^i(t,x) &= L[t,x,\mu_t^i] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}[t,x,\mu_t^i]\,\frac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial x^k} + \sum_j B^j[t,x,\mu_t^i]\,\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i = 1, 2,
\end{aligned}
$$

где $A[t,x,\mu] = \Sigma\Sigma^*[t,x,\mu]$, и пусть $u(s,x) = (u^1(t,x), \dots, u^d(t,x))$ — вектор-функция, являющаяся соболевским непрерывным решением в пространстве $\bigcap_{p>1} W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$ системы параболических уравнений

$$
u_t^k(t,x) + L_t^1 u^k(t,x) = 0, \quad u^k(T,x) = x^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant d.
$$

Решение данной системы существует и единственно в классе непрерывных функций из пространства $\bigcap_{p>1} W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$ с умеренным ростом функции u (например, не быстрее, чем некоторый полином), см. [13, теорема 5.5], [18], [15, теорема 1]. Обозначим

$$
Y_t^i := u(t, X_t^i), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.
$$

Если $T > 0$ достаточно мало, то известно [18], что градиент вектор-функции u равномерно близок к тождественному оператору $I_{d\times d}$; в частности, он равномерно ограничен по норме:

$$
\sup_{t,x} \|\nabla_x u(t,x)\|_B < \infty \tag{5}
$$

(здесь $\|\cdot\|_B$ — любая супремум-норма, например $\sup_{t,x}\sup_{k,i}|u^k_{x^i}(t,x)|$), и существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$
C^{-1}|Y_t^1 - Y_t^2| \leqslant |X_t^1 - X_t^2| \leqslant C|Y_t^1 - Y_t^2|, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.
$$

Согласно формуле Ито–Крылова, примененной покомпонентно к процессу $u(t, X_t^i)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. [7, гл. 2]), имеем

$$
\begin{aligned}
dY_t^1 = du(t,X_t^1) &= (u_t + L_t^1 u)(t,X_t^1)\,dt + \Sigma^*[t,X_t^1,\mu_t^1]\nabla_x u(t,X_t^1)\,dW_t \\
&= \Sigma^*[t,X_t^1,\mu_t^1]\nabla_x u(t,X_t^1)\,dW_t,
\end{aligned}
$$

поскольку $u_t + L^1_t u = 0$ в смысле Соболева (в частности, в L_{d+1}), что гарантирует применимость формулы Ито–Крылова. Аналогично,

$$\begin{aligned} dY^2_t &= du(t,X^2_t) = (u_t + L^2_t u)(t,X^2_t)\,dt + \Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t]\nabla_x u(t,X^2_t)\,dW_t \\ &= (u_t + L^1_t u)(t,X^2_t)\,dt + (L^2_t - L^1_t)u(t,X^2_t)\,dt \\ &\qquad + \Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t]\nabla_x u(t,X^2_t)\,dW_t \\ &= (L^2_t - L^1_t)u(t,X^2_t)\,dt + \Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t]\nabla_x u(t,X^2_t)\,dW_t. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$Y^1_0 = u(0,x_0) = Y^2_0.$$

Следовательно, разность $Y^1_t - Y^2_t$ имеет (векторнозначный) стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} d(Y^1_t - Y^2_t) &= \big(\Sigma^*[t,X^1_t,\mu^1_t]\nabla_x u(t,X^1_t) - \Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t]\nabla_x u(t,X^2_t)\big)\,dW_t \\ &\qquad - (L^2_t - L^1_t)u(t,X^2_t)\,dt \\ &= \big(\Sigma^*[t,X^1_t,\mu^1_t]\nabla_x u(t,X^1_t) - \Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t]\nabla_x u(t,X^2_t)\big)\,dW_t \\ &\qquad - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big((\Sigma\Sigma^*[t,X^2_t,\mu^2_t] - \Sigma\Sigma^*[t,X^2_t,\mu^1_t])u_{xx}(t,X^2_t)\big)\,dt \\ &\qquad - (B[t,X^2_t,\mu^2_t] - B[t,X^2_t,\mu^1_t])\nabla_x u(t,X^2_t)\,dt. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} (Y^1_t - Y^2_t)^2 &= 2\int_0^t (Y^1_s - Y^2_s)\big(\Sigma^*[s,X^1_s,\mu^1_s]\nabla_x u(s,X^1_s) \\ &\qquad - \Sigma^*[s,X^2_s,\mu^2_s]\nabla_x u(s,X^2_s)\big)\,dW_s \\ &\quad - \int_0^t (Y^1_s - Y^2_s)\operatorname{Tr}\big((\Sigma\Sigma^*[s,X^2_s,\mu^2_s] - \Sigma\Sigma^*[s,X^2_s,\mu^1_s])u_{xx}(s,X^2_s)\big)\,ds \\ &\quad - 2\int_0^t (Y^1_s - Y^2_s)\nabla_x u(s,X^2_s)(B[s,X^2_s,\mu^2_s] - B[s,X^2_s,\mu^1_s])\,ds \\ &\quad + \int_0^t \big(\sigma^*(s,X^1_s,\mu^1_s)\nabla_x u(s,X^1_s) - \sigma^*(s,X^2_s,\mu^2_s)\nabla_x u(s,X^2_s)\big)^2\,ds. \end{aligned}$$

Как обычно, выражение $(Y^1_t - Y^2_t)^2$ понимается как скалярное произведение, равное $|Y^1_t - Y^2_t|^2$; величина

$$(Y^1_s - Y^2_s)\nabla_x u(s,X^2_s)\big(B[s,X^2_s,\mu^2_s] - B[s,X^2_s,\mu^1_s]\big)$$

также понимается как скалярное произведение; ее эквивалентной записью является формула

$$\big\langle Y^1_s - Y^2_s, \nabla_x u(s,X^2_s)(B[s,X^2_s,\mu^2_s] - B[s,X^2_s,\mu^1_s])\big\rangle,$$

хотя последнее обозначение и не будет далее использовано; все остальные выражения в последней выкладке понимаются аналогично. После взятия математического ожидания левой и правой частей стохастический интеграл пропадает. Далее, в силу условия Липшица для обоих коэффициентов b, σ и благодаря их ограниченности получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}|(L^2_s - L^1_s)u(s, X^2_s)| &\leqslant \frac{1}{2}\bigl|\mathrm{Tr}\bigl((\Sigma\Sigma^*[s, X^2_s, \mu^2_s] - \Sigma\Sigma^*[s, X^2_s, \mu^1_s])u_{xx}(s, X^2_s)\bigr)\bigr| \\ &\qquad + |\nabla_x u(s, X^2_s)(B[s, X^2_s, \mu^2_s] - B[s, X^2_s, \mu^1_s])| \\ &\leqslant C\,\mathbf{E}|X^1_s - X^2_s|.\end{aligned}$$

Здесь первая оценка имеет место в силу ограниченности всех компонент $\nabla_x u$ (см. (5)) и u_{xx}; свойство ограниченности u_{xx} установлено в [6], см. также [18, доказательство теоремы 4]. Последнее неравенство является следствием того факта, что для любой функции f, непрерывной в смысле Липшица, имеет место неравенство

$$|\mathbf{E}f(\xi^1) - \mathbf{E}f(\xi^2)| = |\mathbf{E}(f(\xi^1) - f(\xi^2))| \leqslant L_f\mathbf{E}|\xi^1 - \xi^2|,$$

если ξ^1 и ξ^2 определены на одном вероятностном пространстве, где L_f — липшицева норма функции f.

Более того,

$$\begin{aligned}&\bigl|(Y^1_s - Y^2_s)\bigl(\nabla_x u(s, X^1_s)\Sigma^*[s, X^1_s, \mu^1_s] - \nabla_x u(s, X^2_s)\Sigma^*[s, X^2_s, \mu^2_s]\bigr)\bigr| \\ &\quad\leqslant C|Y^1_s - Y^2_s|\,|X^1_s - X^2_s| + C|Y^1_s - Y^2_s|\,\mathbf{E}|X^1_s - X^2_s| \\ &\quad\leqslant C|Y^1_s - Y^2_s|^2 + C|Y^1_s - Y^2_s|\sqrt{\mathbf{E}|Y^1_s - Y^2_s|^2}\end{aligned}$$

в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца. Далее (с новыми постоянными C в каждой из строк) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|Y^1_t - Y^2_t|^2 &\leqslant C\,\mathbf{E}\int_0^t |Y^1_s - Y^2_s|^2\,ds \\ &\qquad + C\,\mathbf{E}\int_0^t |Y^1_s - Y^2_s|(\mathbf{E}|Y^1_s - Y^2_s|^2)^{1/2}\,ds + C\,\mathbf{E}\int_0^t |Y^1_s - Y^2_s|^2\,ds \\ &\leqslant C\int_0^t \mathbf{E}|Y^1_s - Y^2_s|^2\,ds.\end{aligned}$$

Напомним, что величина $\mathbf{E}|Y^1_s - Y^2_s|^2$ равномерно ограничена при $0 \leqslant s \leqslant T$, если $T > 0$ достаточно мало (это было требование для того, чтобы обеспечить ограниченность u_{xx}). Следовательно, в силу неравенства Гронуолла,

$$\mathbf{E}|Y^1_t - Y^2_t|^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}|X^1_t - X^2_t|^2 = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Другими словами, решение потраекторно единственно вплоть до T. Повторяя данное рассуждение по индукции на $T \leqslant t \leqslant 2T$, $2T \leqslant t \leqslant 3T$ и т.д., получаем потраекторную единственность на всей полуоси $t \geqslant 0$. Теорема доказана.

Автор благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Bahlali, M. A. Mezerdi, B. Mezerdi, “Stability of McKean–Vlasov stochastic differential equations and applications”, *Stoch. Dyn.*, **20**:1 (2020), 2050007, 19 pp.
2. P.-E. Chaudru de Raynal, “Strong well-posedness of McKean–Vlasov stochastic differential equations with Hölder drift”, *Stochastic Process. Appl.*, **130**:1 (2020), 79–107.
3. Tzuu-Shuh Chiang, “McKean–Vlasov equations with discontinuous coefficients”, *Soochow J. Math.*, **20**:4 (1994), 507–526.
4. T. Funaki, “A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **67**:3 (1984), 331–348.
5. W. Hammersley, D. Šiška, L. Szpruch, *McKean–Vlasov SDEs under measure dependent Lyapunov conditions*, arXiv: 1802.03974.
6. М. Д. Иванович, “О характере непрерывности решений параболических уравнений второго порядка”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1966, № 4, 31–41.
7. Н. В. Крылов, *Управляемые процессы диффузионного типа*, Наука, М., 1977, 399 с.; англ. пер.: N. V. Krylov, *Controlled diffusion processes*, 2nd ed., Stoch. Model. Appl. Probab., **14**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, xii+308 pp.
8. H. P. McKean, Jr., “A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **56**:6 (1966), 1907–1911.
9. S. Mehri, M. Scheutzow, W. Stannat, B. Z. Zangeneh, “Propagation of chaos for stochastic spatially structured neuronal networks with delay driven by jump diffusions”, *Ann. Appl. Probab.*, **30**:1 (2020), 175–207.
10. S. Mehri, W. Stannat, “Weak solutions to Vlasov–McKean equations under Lyapunov-type conditions”, *Stoch. Dyn.*, **19**:6 (2019), 1950042, 23 pp.
11. Yu. S. Mishura, A. Yu. Veretennikov, “Existence and uniqueness theorems for solutions of McKean–Vlasov stochastic equations”, *Theor. Probability and Math. Statist.*, **103** (2020), 59–101.
12. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980, 576 с.; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996, xvi+623 pp.
13. В. А. Солонников, “О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида”, *Краевые задачи математической физики. 3. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. МИАН СССР, **83**, 1965, 3–163; англ. пер.: V. A. Solonnikov, “On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **83** (1965), 1–184.
14. A.-S. Sznitman, “Topics in propagation of chaos”, *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour* XIX–1989, Lecture Notes in Math., **1464**, Springer, Berlin, 1991, 165–251.

15. А. Ю. Веретенников, “Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами, разрывными по времени”, *Матем. заметки*, **31**:4 (1982), 549–557; англ. пер.: A. Yu. Veretennikov, “Parabolic equations and Itô’s stochastic equations with coefficients discontinuous in the time variable”, *Math. Notes*, **31**:4 (1982), 278–283.
16. A. Yu. Veretennikov, “On ergodic measures for McKean–Vlasov stochastic equations”, *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods* 2004, Springer, Berlin, 2006, 471–486.
17. T. Yamada, S. Watanabe, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **11** (1971), 155–167.
18. А. К. Звонкин, “Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос”, *Матем. сб.*, **93(135)**:1 (1974), 129–149; англ. пер.: A. K. Zvonkin, “A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift”, *Math. USSR-Sb.*, **22**:1 (1974), 129–149.

Поступила в редакцию
22.X.2020
Исправленный вариант
21.III.2021