

Изомонодромность локальная и глобальная

Введение

В данной заметке мы дадим краткий обзор *изомонодромности*, важного и интересного явления в теории дифференциальных уравнений в комплексной области. Традиционно под изомонодромностью понимают сохранение монодромии системы линейных дифференциальных уравнений при её деформации по некоторому, обычно многомерному, параметру. В случае *локальной* деформации, когда значения параметра принадлежат малой окрестности начального значения, такое понимание достаточно просто превратить в формальное определение. Если же мы хотим изучать *глобальные* деформации, когда параметр деформации может меняться в пределах всего пространства параметров, нам потребуется бóльшая аккуратность. Например, если пространство деформации неодносвязно, то приходится учитывать дополнительные эффекты, такие как нелинейную монодромию (“монодромию монодромии”).

Мы рассмотрим свойства локальных и глобальных изомонодромных деформаций на примере *деформации Шлезингера* фуксовой системы линейных дифференциальных уравнений. Параметрами такой деформации будут служить положения особых точек $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ системы. Соответственно, при локальных деформациях параметры в совокупности принимают значения в малом шаре пространства \mathbb{C}^n , при глобальных же деформациях, в зависимости от интересующих нас вопросов, можно рассматривать в качестве пространства параметров неодносвязное множество $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ (особые точки не сливаются друг с другом при деформации – их перемещении по комплексной плоскости), либо его универсальное накрытие.

Монодромия фуксовой системы

Рассмотрим *фуксову* систему p линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана, записанную в матричном виде:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i^0}{z - a_i^0} \right) y, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (1)$$

где a_1^0, \dots, a_n^0 – особые точки системы, а B_1^0, \dots, B_n^0 – постоянные $p \times p$ -матрицы, называемые *матрицами-вычетами* системы в соответствующих особых точках (при этом если $\sum_{i=1}^n B_i^0 \neq 0$, то помимо конечных особых точек a_1^0, \dots, a_n^0 система (1) также будет иметь фуксову особую точку в бесконечности).

Рассмотрим устройство её решений. Как известно из комплексного анализа, решение даже алгебраического уравнения в комплексных переменных является многозначной функцией, локально описываемой с помощью *ростков*. Аналогичными свойствами обладают и решения комплексных дифференциальных уравнений. Выберем в окрестности неособой точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$ росток фундаментальной матрицы $Y(z)$ системы (1). При аналитическом продолжении вдоль образующей γ_i фундаментальной группы $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}, z_0)$ проколотой сферы Римана (γ_i – класс эквивалентности простой петли, обходящей точку a_i^0 против часовой стрелки) и возвращении в окрестность исходной точки z_0 мы получим, вообще говоря, другой росток \tilde{Y}_i . Являясь двумя базисами одного и того же конечномерного векторного пространства решений, эти ростки связаны соотношением

$$\tilde{Y}_i(z) = Y(z) G_i, \quad G_i \in \text{GL}(p, \mathbb{C}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отображение $\gamma_i \mapsto G_i^{-1}$ задает гомоморфизм (называемый *монодромией* системы (1)) фундаментальной группы сферы Римана, проколотой в точках a_1^0, \dots, a_n^0 , в группу невырожденных комплексных матриц размера $p \times p$. Матрицы G_1, \dots, G_n называют *матрицами монодромии* системы (1) в особых точках a_1^0, \dots, a_n^0 (соответствующими фундаментальной матрице Y). Выбор другой фундаментальной матрицы или другой неособой

точки системы приводит к одновременному сопряжению всех матриц монодромии на одну и ту же невырожденную матрицу, то есть отображение монодромии задаёт *представление* фундаментальной группы проколотой сферы в группе невырожденных линейных преобразований пространства \mathbb{C}^p . Если бесконечность не входит в число особых точек системы (1) (что, напомним, определяется условием $\sum_{i=1}^n B_i^0 = 0$), то матрицы монодромии удовлетворяют соотношению

$$G_n \dots G_1 = I.$$

Локальные изомодромные деформации

В рамках данного раздела мы зафиксируем произвольный набор петель из классов эквивалентности γ_i и обозначим их γ_i^0 . Рассмотрим малую деформацию исходной фуксовой системы (1), разрешив особым точкам непрерывно менять своё положение, оставаясь внутри соответствующих петель. Будем полагать, что матрицы-вычеты системы зависят от положения особых точек аналитически. Формально такая деформация может быть представлена как вложение исходной системы (1) в семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in D(a^0), \quad (2)$$

где $D(a^0)$ – шар малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$, а голоморфные в этом шаре матричные функции $B_i(a)$ принимают при $a = a^0$ значения B_i^0 .

Поскольку в наших предположениях при каждом $a \in D(a^0)$ особые точки a_1, \dots, a_n соответствующей фуксовой системы из семейства (2) лежат внутри петель $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$, то монодромию всех систем данного семейства можно определить поведением их фундаментальных матриц при аналитическом продолжении вдоль одного и того же набора петель $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$:

$$Y(z, a) \mapsto Y(z, a) G_i(a), \quad i = 1, \dots, n.$$

Если найдётся такое семейство фундаментальных матриц $Y(z, a)$, что соответствующие матрицы монодромии $G_1(a), \dots, G_n(a)$ постоянны (не зависят от параметра $a \in D(a^0)$), то семейство (2) будем называть *локальной изомонодромной деформацией* фуксовой системы (1).

Упражнение 1. Покажите, что семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_1}{z - a_1} + \frac{B_2}{z - a_2} + \frac{B_3}{z - a_3} \right) y, \quad B_1 + B_2 + B_3 = 0, \quad (3)$$

фуксовых систем с тремя особыми точками и *постоянными* матрицами-вычетами является изомонодромным.

Указание. Сделайте преобразование

$$t = t(z, a) = \frac{z - a_1}{z - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}$$

независимой переменной, переводящее точки a_1, a_2, a_3 в $0, 1, \infty$ соответственно, и проверьте, что при каждом значении параметра $a = (a_1, a_2, a_3)$ преобразованная система будет иметь один и тот же вид

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \left(\frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t - 1} \right) \tilde{y}. \quad (4)$$

Обозначим через $\tilde{Y}(t)$ фундаментальную матрицу системы (4). Заключите, что $\tilde{Y}(t(z, a))$ будет семейством фундаментальных матриц для (3), монодромия которых не зависит от значения параметра a .

Одним из наиболее известных и содержательных примеров изомонодромных деформаций фуксовых систем является *изомонодромная деформация Шлезингера*. Если в качестве матриц-вычетов семейства (2) взять решение системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка,

$$dB_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

называемой *уравнением Шлезингера*, то полученное таким образом семейство фуксовых систем оказывается изомонодромным

(см. [1, теоремы 13.2, 14.1]). Уравнение Шлезингера обладает рядом важных и интересных свойств. Перечислим некоторые из них.

- Собственные значения матриц $B_i(a)$, удовлетворяющих уравнению Шлезингера, постоянны (см. упражнение 3). Это свойство выполняется и для произвольных изомонодромных семейств (см. [1, упражнение 13.3 и лекции 5, 6]).
- Уравнение Шлезингера *вполне интегрируемо* в $D(a^0)$, т. е. для любого набора матриц B_1^0, \dots, B_n^0 в достаточно малой окрестности a^0 существует единственное решение $B_1(a), \dots, B_n(a)$ такое, что $B_i(a^0) = B_i^0, i = 1, \dots, n$ (см. [1, лекция 14]). Другими словами, всякая фуксова система (1) может быть вложена и при том единственным образом в изомонодромное семейство Шлезингера (2).
- Матричные функции $B_i(a)$, удовлетворяющие уравнению Шлезингера, могут быть продолжены из шара $D(a^0)$ на все пространство $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ как многозначные аналитические функции, имеющие не более чем степенной рост при подходе к особым гиперплоскостям $\{a_i = a_j\}$ и особенности полярного типа вне множества этих гиперплоскостей (см. [5] и [1, лекция 16]).

Упражнение 2. Проверьте, что изомонодромное семейство (3) является деформацией Шлезингера тогда и только тогда, когда матрицы B_1, B_2, B_3 попарно коммутируют.

Упражнение 3. Проверьте, что если матрица $L(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}L = [L, M]$ с некоторой матрицей $M(t)$, то для любого натурального k выполняется $\frac{d}{dt} \text{tr} L^k = 0$. Заключите отсюда, что собственные значения матриц решений уравнения Шлезингера не зависят от a .

Глобальные изомонодромные деформации

Как было отмечено выше, важным и нетривиальным свойством уравнения Шлезингера является возможность аналитического

продолжения любого его решения $B_1(a), \dots, B_n(a)$ за пределы шара $D(a^0)$. Аналитическое продолжение вдоль замкнутого пути σ в пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ с началом и концом в точке a^0 , при возвращении в исходный шар $D(a^0)$ даст, вообще говоря, другое локальное решение (росток) $\tilde{B}_1(a), \dots, \tilde{B}_n(a)$, значения которого в точке $a = a^0$ могут отличаться от B_1^0, \dots, B_n^0 . Монодромия фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{B}_i(a^0)}{z - a_i^0} \right) y \quad (5)$$

из продолженного таким образом локального изомонодромного семейства Шлезингера, вообще говоря, может отличаться от монодромии исходной системы (1). Здесь нужно сделать некоторое пояснение, согласующее это возможное отличие с привычным нам свойством “сохранения монодромии” системы при её изомонодромной деформации.

Дело в том, что при *глобальной изомонодромной деформации*, когда параметр a деформации может выходить за пределы шара $D(a^0)$ и перемещаться по всему пространству $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, при рассмотрении монодромии нельзя ограничиться фиксированным набором петель $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$, как это делалось при локальных деформациях, так как точки a_1, \dots, a_n теперь могут покидать внутренности этих петель. Одним из естественных способов решения этой проблемы является деформация рассматриваемого набора петель, петли как бы тянутся за точками, которые они обходят. Обозначим через $\gamma_1^\sigma, \dots, \gamma_n^\sigma$ набор петель, полученных из начальных $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$ в результате следования за движением особых точек a_1, \dots, a_n , начинающимся и заканчиваемся конфигурацией a_1^0, \dots, a_n^0 и отвечающим замкнутому пути σ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$.

Набор матриц монодромии системы (5), соответствующих *новым петлям* $\gamma_1^\sigma, \dots, \gamma_n^\sigma$, будет совпадать (с точностью до общего сопряжения) с набором матриц монодромии системы (1), соответствующих *начальным петлям* $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$. Именно в таком смысле следует понимать сохранение монодромии при глобальной изомонодромной деформации.

Поясним этот важный момент на примере трёх точек.

Пусть начальный набор трёх точек a_1^0, a_2^0, a_3^0 совершает, например, следующее перемещение: точка a_1^0 остаётся на месте, а точки a_2^0 и a_3^0 двигаются вокруг друг друга против часовой стрелки, меняясь местами (занимая промежуточное положение $a_2 = a_3^0, a_3 = a_2^0$). Тогда начальная конфигурация петель $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$, изображённая на рис. 1, деформируясь вслед за этим перемещением точек, принимает вид $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, изображённый на рис. 2.

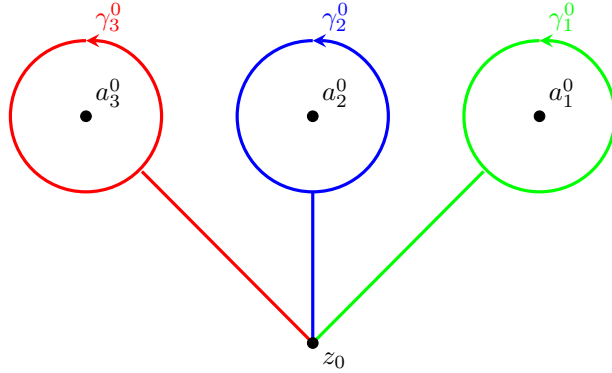


Рис. 1

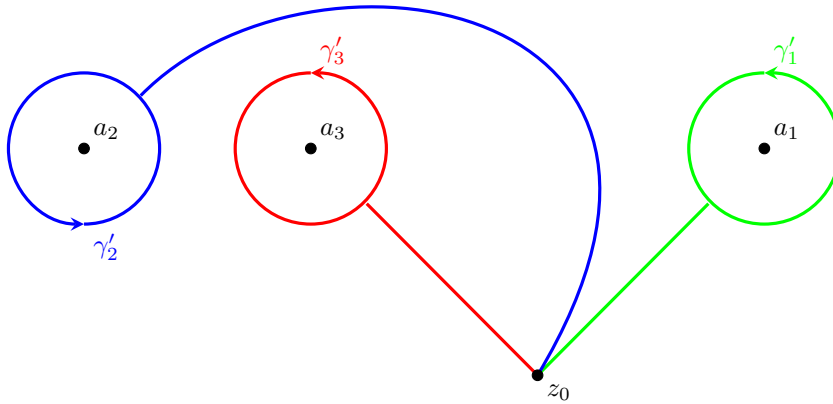


Рис. 2

Ясно, что $\gamma'_1 \sim \gamma_1^0$ и $\gamma'_3 \sim \gamma_2^0$, а из соотношения $\gamma'_2 \gamma'_3 \sim \gamma_2^0 \gamma_3^0$ следует, что

$$\gamma'_2 \sim \gamma_2^0 \gamma_3^0 (\gamma_2^0)^{-1},$$

где под эквивалентностью путей стандартно понимается совпадение их гомотопических классов. Если точки a_2, a_3 продолжат движение вокруг друг друга и вернуться в начальное положение

$a_2 = a_2^0, a_3 = a_3^0$, то петли γ'_2, γ'_3 примут вид $\gamma_2^\sigma, \gamma_3^\sigma$, изображённый на рис. 3.

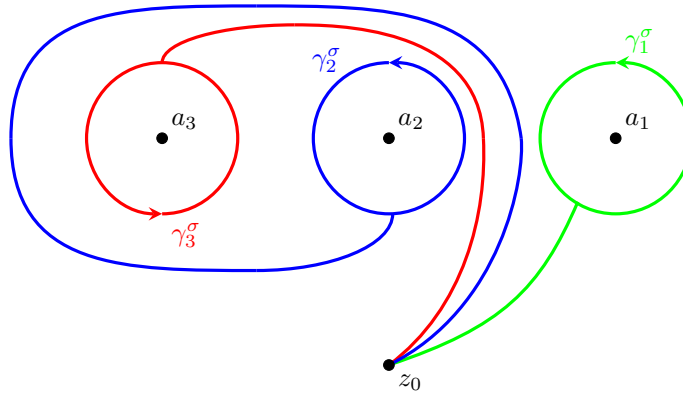


Рис. 3

Упражнение 4. Опишите путь σ , отвечающий данному движению особых точек.

Петли $\gamma_1^\sigma, \gamma_2^\sigma, \gamma_3^\sigma$ выразятся через исходные $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1^\sigma &\sim \gamma'_1 \sim \gamma_1^0, \\ \gamma_2^\sigma &\sim \gamma'_2 \gamma'_3 \gamma'_2{}^{-1} \sim \gamma_2^0 \gamma_3^0 \gamma_2^0 (\gamma_3^0)^{-1} (\gamma_2^0)^{-1}, \\ \gamma_3^\sigma &\sim \gamma'_2 \sim \gamma_2^0 \gamma_3^0 (\gamma_2^0)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{B}_i(a)$ аналитическое продолжение соответствующей матрицы-вычета $B_i(a)$ вдоль пути σ . Тогда матрицы монодромии G_1, G_2, G_3 исходной системы относительно петель $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ будут совпадать (с точностью до общего сопряжения) с матрицами монодромии фуксовой системы с теми же особыми точками и матрицами-вычетами $\tilde{B}_1(a^0), \tilde{B}_2(a^0), \tilde{B}_3(a^0)$ относительно петель $\gamma_1^\sigma, \gamma_2^\sigma, \gamma_3^\sigma$. А какими будут матрицы монодромии $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$ последней системы относительно исходного набора петель $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$? Этот вопрос вполне естественен, поскольку было бы логично сравнить монодромию двух систем с одинаковым набором особых точек относительно одного набора обходящих эти точки петель. Чтобы ответить на него, достаточно выразить петли $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ через $\gamma_1^\sigma, \gamma_2^\sigma, \gamma_3^\sigma$ и воспользоваться свойством го-

моморфизма:

$$\begin{aligned}\gamma_1^0 &\sim \gamma_1^\sigma, \\ \gamma_2^0 &\sim (\gamma_3^\sigma)^{-1} \gamma_2^\sigma \gamma_3^\sigma, \\ \gamma_3^0 &\sim (\gamma_3^\sigma)^{-1} (\gamma_2^\sigma)^{-1} \gamma_3^\sigma \gamma_2^\sigma \gamma_3^\sigma,\end{aligned}$$

следовательно,

$$\tilde{G}_1 = G_1, \quad \tilde{G}_2 = G_3 G_2 G_3^{-1}, \quad \tilde{G}_3 = G_3 G_2 G_3 G_2^{-1} G_3^{-1}.$$

Таким образом, рассмотренная глобальная изомонодромная деформация позволяет определить действие фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}, a^0)$ на множестве классов эквивалентности троек $[(G_1, G_2, G_3)]$ матриц монодромии:

$$(\sigma, [(G_1, G_2, G_3)]) \mapsto [(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3)].$$

В современных терминах последнее множество носит название *многообразия $GL(p, \mathbb{C})$ -характеров* ($GL(p, \mathbb{C})$ -character variety) сферы Римана с тремя выколотыми точками, а элементы упомянутой выше фундаментальной группы могут быть проинтерпретированы как *крашенные косы* на трёх нитях. Тем самым, мы подходим к такому общему понятию, связанному с глобальной изомонодромной деформацией фуксовой системы, как действие группы крашенных кос на многообразии характеров проколотой сферы Римана. В случае изомонодромной деформации Шлезингера особый интерес представляет изучение орбит данного действия, что связано с возможностью описания глобальных свойств решений уравнения Шлезингера в терминах этих орбит.

Упражнение 5. Проверьте, что тройки матриц G_1, G_2, G_3 и $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$ из рассмотренного выше примера эквивалентны.

Указание. $G_3 G_2 G_1 = \tilde{G}_3 \tilde{G}_2 \tilde{G}_1 = I$.

Действие группы (крашенных) кос на многообразии характеров проколотой сферы Римана

Рассматривая локальную изомонодромную деформацию (2) фуксовой системы, мы предполагаем, что параметр деформации при-

нимает произвольные значения внутри шара $D(a^0)$. Однако, когда мы говорим об аналитическом продолжении матриц-вычетов $B_i(a)$ в рамках глобальной изомонодромной деформации на всём пространстве деформации $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, мы рассматриваем эти продолжения *вдоль путей*. Каждому пути σ , начинающемуся в a^0 , припишем произвольную гладкую параметризацию $\sigma(t)$,

$$\sigma(t) = \{(a_1(t), \dots, a_n(t)) \in \mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}, \quad 0 \leq t \leq 1\},$$

и получим движение точек уже по определенной траектории: $a_i = a_i(t) \in \mathbb{C}, a_i(0) = a_i^0$. Если рассматривать только такие пути σ , что конечная конфигурация точек $a_1(1), \dots, a_n(1)$ совпадает с начальной a_1^0, \dots, a_n^0 с точностью до перестановки, то соответствующие движения упорядоченного набора n точек $a_1(t), \dots, a_n(t)$ на плоскости можно интерпретировать как элементы группы $B_n(\mathbb{C})$ *геометрических кос* на n нитях.

Действительно, если умножить комплексную плоскость \mathbb{C} с отмеченными точками a_1^0, \dots, a_n^0 на вертикальный временной отрезок $\{0 \leq t \leq 1\}$, то траектория каждой точки $a_i(t)$ на плоскости будет выглядеть как кривая (нить) в пространстве $\mathbb{C} \times [0, 1]$, соединяющая точки $(a_i^0, 0)$ и $(a_{s(i)}^0, 1)$, где s – элемент группы перестановок S_n . Позиции точек $a_1(t), \dots, a_n(t)$ на плоскости различаются при каждом t , поэтому нити могут как угодно переплетаться друг с другом, но ни одна нить не проходит сквозь другую. Соответствующая коса при этом – это два экземпляра $\mathbb{C} \times \{0\}$ и $\mathbb{C} \times \{1\}$ комплексной плоскости, соединённые данными n нитями.

Подгруппа $PB_n(\mathbb{C}) \subset B_n(\mathbb{C})$ *крашенных кос* состоит из тех кос, все нити которых приходят в те же точки в $\mathbb{C} \times \{1\}$, из которых они выходят в $\mathbb{C} \times \{0\}$. Каждой такой косе соответствуют *тривиальная* перестановка $s = \text{id}$ и *замкнутый* путь σ – элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}, a^0)$. Таким образом, имеем следующие изоморфизмы групп:

$$\begin{aligned} PB_n(\mathbb{C}) &\simeq \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}, a^0), \\ B_n(\mathbb{C}) &\simeq \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\} / S_n, [a^0]). \end{aligned}$$

Использование групп кос вместо фундаментальных групп при изучении аналитического продолжения матриц-вычетов $B_i(a)$ на

всё пространство $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ отчасти вызвано наличием обозримого алгебраического представления групп кос с помощью образующих и соотношений.

Достаточно очевидно, что любую косу можно составить из элементарных генераторов $\sigma_{i,j}$, переставляющих местами a_i^0 и a_j^0 , аналогично перестановке точек a_2^0 и a_3^0 в примере из предыдущего параграфа (рис. 2). Однако можно заметить, что такой набор слишком широк, достаточно ограничиться (всё ещё несвободным) набором $\sigma_{1,2}, \sigma_{2,3}, \dots, \sigma_{n-1,n}$ перестановок соседних точек. Тогда группа $B_n(\mathbb{C})$ задаётся $n - 1$ образующей

$$\sigma_1 = \sigma_{1,2}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2,3}, \quad \dots, \quad \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1,n},$$

с соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad j \neq i \pm 1,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}.$$

Заметим, что для задания группы $PB_n(\mathbb{C})$ недостаточно только элементов σ_i^2 , здесь образующими являются всевозможные косы $\sigma_{i,j}^2$, $i < j$, с дополнительными соотношениями.

Упражнение 6. а) Выразите крашеную косу, отвечающую пути σ из примера предыдущего параграфа, в терминах образующих $\sigma_{i,j}^2$.

б) Проверьте, что образующими группы $PB_3(\mathbb{C})$ являются косы $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1}$, и заключите отсюда, воспользовавшись идеями упражнения 5, что орбита каждой точки множества

$$\{(G_1, G_2, G_3) \mid G_{1,2,3} \in GL(p, \mathbb{C}), G_3 G_2 G_1 = I\} / \sim$$

под действием группы $PB_3(\mathbb{C})$ состоит из одной этой точки.

Множество наборов (G_1, \dots, G_n) матриц монодромии, рассмотренных с точностью до общего сопряжения,

$$\widehat{\mathcal{M}}_n = \{(G_1, \dots, G_n) \in GL(p, \mathbb{C})^n \mid G_n \dots G_1 = I\} / \sim,$$

является реализацией *многообразия* $GL(p, \mathbb{C})$ -*характеров* сферы Римана с n выколотыми точками,

$$\mathcal{M}_n = \text{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}, z_0), GL(p, \mathbb{C})) / GL(p, \mathbb{C}).$$

В общем случае произвольного $n > 3$ действие группы кос на многообразии характеров весьма нетривиально. На основе примера трёх точек, рассмотренного в предыдущем параграфе, можно заключить, что данное действие $V_n(\mathbb{C}) \times \widehat{\mathcal{M}}_n \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_n$ имеет следующее описание в терминах образующих σ_i группы $V_n(\mathbb{C})$:

$$\sigma_i: (\dots, G_i, G_{i+1}, \dots) \mapsto (\dots, G_{i+1}, G_{i+1}G_iG_{i+1}^{-1}, \dots).$$

В современной литературе особый интерес вызывает нахождение случаев *конечных орбит* этого действия, что связано с поиском *алгебраических* изомонодромных деформаций, к обзору отдельных частных случаев которых мы подходим. Заметим, что $PV_n(\mathbb{C})$ является нормальной подгруппой конечного индекса $n!$ в $V_n(\mathbb{C})$, что следует из точной последовательности групп

$$1 \rightarrow PV_n(\mathbb{C}) \rightarrow V_n(\mathbb{C}) \rightarrow S_n.$$

Поэтому если орбита некоторой точки множества $\widehat{\mathcal{M}}_n$ под действием группы $PV_n(\mathbb{C})$ конечна, то конечной будет и орбита этой точки под действием группы $V_n(\mathbb{C})$.

Рациональные и алгебраические решения уравнения Шлезингера

В заключительном параграфе мы рассмотрим некоторые примеры глобальных изомонодромных деформаций Шлезингера, матрицы-вычеты $B_i(a)$ которых (соответствующие решения уравнения Шлезингера) являются *однозначными* или *конечнозначными* матричными функциями на всём пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. С учётом свойств решений уравнения Шлезингера это эквивалентно, соответственно, *рациональности* или *алгебраичности* таких функций.

Отметим, что если локальное решение $\{B_1(a), \dots, B_n(a)\}$, $B_i(a^0) = B_i^0$, уравнения Шлезингера, продолженное на всё пространство $\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, состоит из однозначных (рациональных) матричных функций, то орбита элемента $[(G_1, \dots, G_n)]$ – класса эквивалентности набора матриц монодромии исходной фуксовой системы (1) – под действием группы $PV_n(\mathbb{C})$ состоит

из одной точки. Аналогично, если матричные функции $B_i(a)$ алгебраические, то орбита элемента $[(G_1, \dots, G_n)]$ под действием группы $V_n(\mathbb{C})$ конечна. Основным при классификации алгебраических решений уравнения Шлезингера является вопрос о том, можно ли утверждать обратное: *следует ли из конечности орбиты элемента $[(G_1, \dots, G_n)]$ под действием группы $V_n(\mathbb{C})$ алгебраичность матричных функций, которые составляют решение уравнения Шлезингера, описывающее изомонодромную деформацию соответствующей фуксовой системы?*

Наиболее полный ответ на данный вопрос получен в работе Г. Кузена [3]. В частности, ответ на него положителен в случае $SL(2, \mathbb{C})$ -монодромии: алгебраичность элементов 2×2 -матриц $B_i(a)$ с нулевым следом, удовлетворяющих уравнению Шлезингера, эквивалентна конечности орбиты элемента $[(G_1, \dots, G_n)]$ под действием группы $V_n(\mathbb{C})$, где $G_i \in SL(2, \mathbb{C})$ – матрицы монодромии соответствующей фуксовой системы. Случай $SL(2, \mathbb{C})$ -монодромии особо примечателен и важен тем, что уравнение Шлезингера в этом случае сводится к шестому уравнению Пенлеве, когда число особых точек $n = 4$ (см. [1, лекция 18]), и к системе Гарнье уравнений в частных производных, когда $n \geq 5$. Тем самым, задача о классификации конечных орбит действия группы $V_4(\mathbb{C})$ на многообразии $SL(2, \mathbb{C})$ -характеров сферы Римана, проколотой в четырёх точках, имеет непосредственное отношение к поиску алгебраических решений шестого уравнения Пенлеве. Эта задача о классификации была окончательно решена О. Лисовым и Ю. Тихим [4], и из их результата следовало, что список алгебраических решений шестого уравнения Пенлеве, полученных за последние годы стараниями многих математиков, является полным. Совсем недавно Ю. Тихий [6] (см. также [2]) классифицировал конечные орбиты действия группы $V_5(\mathbb{C})$ на многообразии *неприводимых* $SL(2, \mathbb{C})$ -характеров сферы Римана, проколотой в пяти точках (пятёрка 2×2 -матриц с единичным определителем, не имеющих общего собственного вектора), и выдвинул гипотезу о такой классификации при $n > 5$, что позволяет надеяться на решение задачи об описании алгебраических решений систем Гарнье.

Завершим наш обзор одним простым примером класса фук-

совых систем с произвольным числом n особых точек и произвольного числа p уравнений, действие группы кос $B_n(\mathbb{C})$ на набор матриц монодромии которых тривиально. Это фуксовы системы с *коммутативной* монодромией. Действительно, орбита класса эквивалентности $[(G_1, \dots, G_n)]$ набора (коммутирующих) матриц монодромии такой системы под действием группы $B_n(\mathbb{C})$ состоит из одного элемента, что приводит нас к следующему вопросу-упражнению. *Являются ли матричные элементы решения уравнения Шлезингера, описывающего изомонодромную деформацию фуксовой системы (1) с коммутативной монодромией, рациональными функциями n переменных?*

Литература

1. Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2009. — 222 с.
2. Calligaris P., Mazzocco M. *Finite orbits of the pure braid group on the monodromy of the 2-variable Garnier system* // J. Integr. Syst. **3** (2018), 1–35.
3. Cousin G. *Algebraic isomonodromic deformations of logarithmic connections on the Riemann sphere and finite braid group orbits on character varieties* // Math. Ann. **367** (2017), 965–1005.
4. Lisovyuy O., Tykhyuy Yu. *Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation* // J. Geom. Phys. **85** (2014), 124–163.
5. Malgrange B. *Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières* // Progr. Math. **37** (1983), 401–426.
6. Tykhyuy Yu. *Finite orbits of monodromies of rank two Fuchsian systems* // Anal. Math. Phys. (2021), submitted.