О колмогоровской ε-энтропии и размерности аттракторов автономных и неавтономных 2D систем Навье–Стокса

А. А. Ильин[1]

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН
и
Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН, г.Москва
ilyin@keldysh.ru

В. В. Чепыжов

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН, г.Москва
и
Воронежский государственный университет, г.Воронеж
chep@iitp.ru

Аннотация

В работе дается обзор современных методов получения верхних оценок размерности и ε-энтропии глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем, порожденных диссипативными эволюционными уравнениями как в автономном, так и в неавтономном случае. В качестве основных примеров рассматриваются автономные и неавтономные системы Навье–Стокса в ограниченной двумерной области.

1 Введение

Понятие ε-энтропии было введено А.Н.Колмогоровым в связи с изучением классов аналитических функций, используемых в теории связи, которая возникла из работ К.Шенона и В.А.Котельникова. Эта фундаментальная характеристика функциональных множеств применяется в теории информации и теории приближения функций.

Колмогоровская ε-энтропия и связанная с ней энтропийная размерность являются важными характеристиками, которые описывают сложность компактных множеств, что весьма существенно в теории приближений функций и функциональных множеств. В основополагающей работе А.Н.Колмогорова и В.М.Тихомирова [1] были получены оценки сверху и снизу для ε-энтропии многих классов функциональных множеств, что послужило истоком целого научного направления.

Новый интерес к колмогоровской ε-энтропии возник в связи с исследованием нерегулярных аттракторов динамических систем, которые появляются во многих моделях так называемого детерминированного хаоса. Аттрактором динамической системы называется компактное множество фазового пространства, которое инвариантно относительно сдвигов вдоль траекторий данной системы, и к которому притягиваются все траектории системы при $t \to +\infty$. Особенно важным это понятие становится при исследовании бесконечномерных динамических систем, отвечающих нелинейным уравнениям с частными производными, которые имеют компактные аттракторы весьма сложной структуры, что,

[1]Исследования А.А.Ильина выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00515 и 18-01-00524).

возможно, имеет тесную связь с проблемой объяснения турбулентных явлений во многих задачах динамики сплошных сред.

Одной из фундаментальных проблем, возникающих при исследовании эволюционных уравнений математической физики и математической гидродинамики, является описание поведения решений этих уравнений при больших временах или когда время стремится к бесконечности.

В последние десятилетия при решении подобных задач большую популярность приобрел подход, основанный на теории динамических систем, который изначально применялся при исследовании конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Прежде всего этот интерес был связан с открытием детерминированного хаоса, то есть достаточно простых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, у которых, однако, наблюдается весьма нерегулярное (хаотическое) поведение траекторий, когда время стремится к бесконечности. Классическим примером такой системы служит трехмерная система Лоренца, которая получается из галеркинского приближения системы уравнений Бусинеска, описывающей конвекцию подогреваемой жидкости.

Многие идеи, понятия и методы теории конечномерных динамических систем легли в основу теории бесконечномерных динамических систем, порождаемых дифференциальными уравнениями с частными производными. С этой точки зрения стали изучаться, например, системы уравнений Навье–Стокса, различные уравнения и системы реакции-диффузии, комплексные уравнения Гинзбурга–Ландау, нелинейные диссипативные волновые уравнения и многие другие эволюционные уравнения и системы. Целью этих исследований было построение глобальных аттракторов таких систем и исследование их структуры. При этом существенной характеристикой сложности этих множеств может служить колмогоровская ε-энтропия и энтропийная размерность.

Дадим определение колмогоровской ε-энтропии компактного множества X в банаховом пространства E. Через $N_\varepsilon(X,E) = N_\varepsilon(X)$ обозначается наименьшее число шаров радиуса ε в пространстве E, которые покрывают множество X :

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon), \quad N_\varepsilon(X) = \min N. \tag{1.1}$$

Здесь $B(x_i,\varepsilon) = \{x \in E \mid \|x - x_i\|_E < \varepsilon\}$ – шар в E с центром в x_i и радиусом ε. Важно отметить, что $N_\varepsilon(X) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$, так как множество X компактно в E.

Определение 1.1 *Колмогоровской ε-энтропией* множества X в пространстве E называется число

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X,E) := \mathbf{H}_\varepsilon(X) := \log_2 N_\varepsilon(X). \tag{1.2}$$

Для конкретных множеств X задача заключается в исследовании асимптотического поведения по ε функции $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0+$. Ясно, что ε-энтропия позволяет узнать, сколько необходимо задать точек (или функций) в пространстве E, для того чтобы определить множество X с погрешностью ε. С ε-энтропией тесно связано важное понятие *энтропийной размерности*, которую часто называют *фрактальной размерностью* компактного множества. На английском языке эта величина также иногда называется *box counting*.

Определение 1.2 *Фрактальной размерностью* компактного множества X в пространстве E называется число

$$\mathbf{d}_F(X,E) := \mathbf{d}_F(X) := \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(X)}{\log_2(1/\varepsilon)}. \tag{1.3}$$

Если фазовое пространство E имеет конечную размерность, то легко видеть, что $\mathbf{d}_F(X) \le \dim E < +\infty$. В бесконечномерном пространстве E фрактальная размерность компактных множеств может быть бесконечной. Однако если известно, что $0 < \mathbf{d}_F(X) < +\infty$, то $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx \mathbf{d}_F(X)\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, и значит, потребуется $N_\varepsilon(X) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mathbf{d}_F(X)}$ точек для того, чтобы приблизить множество X с точностью до ε. В работе А.Н.Колмогорова и В.М.Тихомирова рассматривались примеры множеств в различных функциональных пространствах, для которых $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx D\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$, где $a > 1$, и даже $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx D\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$. Для таких множеств, очевидно, фрактальная размерность равна бесконечности, однако ε-энтропия этих множеств остается конечной, и ее величина характеризует сложность множества бесконечной размерности.

Отметим, что фрактальная размерность бывают также весьма полезными при исследовании различных “негладких” множеств, например самоподобных множеств или фракталов. Например, фрактальная размерность *множества Кантора* K на прямой $\mathbb{R}$ равна

$$d_F(K) = \log_3 2 < 1.$$

Еще одной полезной, но более слабой, характеристикой компактного множества X служит его хаусдорфова размерность $\mathbf{d}_H(X)$. Известно, что всегда $\mathbf{d}_H(X) \le \mathbf{d}_F(X)$. Можно привести примеры множеств, для которых $\mathbf{d}_H(X) = 0$, но $\mathbf{d}_F(X) = +\infty$.

Другое важное применение фрактальной размерности и ε-энтропии связано с изучением аттракторов динамических систем, которые описывают детерминированный хаос, открытый Лоренцем в 60-х годах прошлого века. Для системы Лоренца фазовым пространством является $E = \mathbb{R}^3$. Эта система имеет глобальный аттрактор, который называется *аттрактором Лоренца* и его фрактальная размерность удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le \mathbf{d}_L(\mathcal{A}) = 2.402\ldots$$

Здесь $\mathbf{d}_L(\mathcal{A})$ обозначает *размерность Ляпунова* аттрактора $\mathcal{A}$, которая всегда больше или равна фрактальной размерности (см. [2] и теорему 2.2).

В следующих параграфах изучаются ε-энтропия и фрактальная размерность глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем, как автономных так и неавтономных. В качество приложения к конкретным уравнениям математической физики рассматриваются автономные и неавтономные системы Навье-Стокса в ограниченной области из $\mathbb{R}^2$.

2 Глобальные аттракторы автономных бесконечномерных динамических систем и оценки их размерности

Изложим некоторые фундаментальные результаты об ε-энтропии и размерности глобальных аттракторов автономных эволюционных уравнений с частными производными. Основной результат можно сформулировать так: для многих важных диссипативных автономных уравнений и систем уравнений математической физики доказаны теоремы о существовании глобальных аттракторов и установлена конечномерность этих аттракторов. Этот результат, по-видимому, впервые были получены для двумерной системы Навье–Стокса, которая является весьма популярным объектом исследований в области аттракторов бесконечномерных динамических систем. Эти и другие результаты были получены в пионерских работах О.А.Ладыженской [3], М.И.Вишика, А.В.Бабина [4], П.Константина, Ч.Фояша, Р.Темама [5], Дж.Хейла [6], а также в многочисленных работах их учеников и последователей.

Автономное эволюционное уравнение можно записать в следующей форме:

$$\partial_t u = A(u),\ u|_{t=0} = u_0(x) \in E,\ t \geq 0. \tag{2.1}$$

Здесь $u = u(x,t)$ – решение уравнения (2.1), x – пространственная переменная, а t – время. Правая часть $A(u)$ уравнения (2.1) является некоторым (нелинейным) оператором, зависящим от функции u и от ее частных производных по x. Функция $u_0(x)$ в (2.1) определяет начальное состояние динамической системы, описываемой этим уравнением, т.е., $u(x,0) = u_0(x)$. Начальное условие $u_0(x)$ принадлежит некоторому бесконечномерному банахову пространству E, которое называется *фазовым пространством* задачи (2.1). Фазовое пространство E выбирается, исходя из физического смысла задачи. Например, это может быть некоторое пространство Соболева. Значение $u_0(x)$ можно выбрать произвольно в этом пространстве. Предполагается, что при любой функции $u_0(x)$ из E задача (2.1) имеет, и притом единственное, решение $u(x,t),\ t \geq 0$, в некотором классе функций, причем $u(\cdot,t) \in E$ при всех $t \geq 0$. Тогда с задачей (2.1) можно связать семейство нелинейных операторов $\{S(t),\ t \geq 0\},\ S(t) : E \to E$, действующих по формуле $u_0(x) \longmapsto S(t)u_0(x) = u(x,t)$, где $u(x,t)$ – решение задачи (2.1) с начальным условием $u_0(x)$. Операторы $\{S(t)\} = \{S(t),\ t \geq 0\}$ образуют *полугруппу*, т.е., $S(0) = \mathrm{Id}$ – тождественный оператор, и $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ для любых чисел $t_1, t_2 \geq 0$. Полугруппу, порождаемую задачей (2.1), мы будем называть *динамической полугруппой.*

В качестве примера задачи (2.1) рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса, которая описывает плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ с условием прилипания на границе $\partial\Omega$. Система Навье–Стокса имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nu L u - B(u,u) + g\left(x\right),\ \operatorname{div} u = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in H, \quad E = H. \end{cases} \tag{2.2}$$

Система записана в проекции на пространство H соленоидальных векторных полей в $\mathbb{R}^2$, поэтому в ней отсутствует неизвестная функция давления $p(x,t)$. Требуется определить поле скоростей жидкости $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ в каждой точке $x \in \Omega$ в любой момент времени $t \geq 0$, если известно начальное распределение скорости $u_0(x)$. Условие несжимаемости жидкости записано в виде уравнения $\operatorname{div} u = \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = 0$.

В системе (2.2) $\nu > 0$ – это коэффициент вязкости жидкости, $L = -\Pi\Delta$ – оператор Стокса, $B(u,u) = \Pi \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_{x_i} u$ – билинейный оператор. Через Π обозначается ортопроектор в пространстве $(L_2(\Omega))^2$ на подпространство H соленоидальных (то есть, с нулевой дивергенцией) векторных полей,

$$H = \left[\left\{v(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \operatorname{div} v(x) = 0\right\}\right]_{(L_2(\Omega))^2}.$$

($[\,\cdot\,]_E$ обозначает замыкание в пространстве E.) Оператор Π используется для исключения из системы неизвестной функции давления.

Функция $g(x) = (g^1(x), g^2(x))$ является внешней силой системы (2.2). Предполагается, что $g \in H$.

В классических работах Хопфа, Лерэ и Ладыженской (см. [7, 8, 9]) доказано, что при любой начальной функции $u_0(\cdot) \in H$ задача (2.2) имеет единственное решение $u(t), t \geq 0$, в пространстве

$$L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^1).$$

Здесь

$$H^1 = \left[\left\{v(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \operatorname{div} v(x) = 0\right\}\right]_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^2}.$$

При этом $u(\cdot, t) \in H$ при любом $t \geq 0$ и кроме того $u(\cdot, t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Следовательно, задача (2.2) порождает динамическую полугруппу $\{S(t)\}$, действующую в гильбертовом пространстве H.

Дадим определение глобального аттрактора полугруппы $\{S(t)\}$, действующей в некотором банаховом пространстве E.

Определение 2.1 Компактное множество $\mathcal{A}$из Eназывается *глобальным аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$,если
1) множество $\mathcal{A}$строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$, т.е.

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \text{ для всех } t \geq 0,$$

2) множество $\mathcal{A}$притягивает множество $S(t)B$при $t \to +\infty$, где $B-$ любое ограниченное (в пространстве E) множество начальных условий $\{u_0(x)\} = B$:

$$\operatorname{dist}_E(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0,\ t \to +\infty.$$

Здесь $\operatorname{dist}_E(A_1, A_2) = \sup\limits_{a_1 \in A_1} \inf\limits_{a_2 \in A_2} \|a_1 - a_2\|_E$ обозначает *хаусдорфово полурасстояние* от множества A_1 до множества A_2 в пространстве E .

Рассмотрим теперь систему Навье–Стокса (2.2). Если внешняя сила $g(x)$ достаточно мала, то система (2.2) имеет, и притом единственное, стационарное решение $z(x)$, которое является экспоненциально асимптотически устойчивым. Точнее, рассмотрим следующую безразмерную величину

$$G = \frac{|\Omega| \|g\|_H}{\nu^2},$$

которая называется числом Грасхофа системы (2.2). Здесь $|\Omega|$ обозначает площадь области Ω. Тогда существует абсолютная константа $c_0 > 0$ такая, что если $G < c_0$, то имеется единственное решение $z = z(x)$ стационарной задачи Навье–Стокса

$$-\nu Lz - B(z, z) + g(x) = 0,\ \operatorname{div} z = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3}$$

При этом для любого решения $u(t) = S(t)u_0$ $(u(t) := u(x, t))$ уравнения (2.2), выполнено неравенство

$$\|u(t) - z\|_H \leq C\|u_0 - z\|_H e^{-\gamma t},\ \forall t \geq 0\ (\gamma > 0). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что при $G < c_0$ глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ полугруппы $\{S(t)\}$ задачи (2.2) состоит из одной точки z : $\mathcal{A} = \{z(x)\}$. В работе [14] показано, что в качестве c_0 достаточно взять

$$c_0 = \left(\frac{27\pi^3}{2}\right)^{1/2} = 20.45\ldots. \tag{2.5}$$

Если число Грасхофа G велико, то стационарное решение $z(x)$ теряет устойчивость. Могут возникнуть другие стационарные решения, а также иные предельные траектории, например, предельные циклы, предельные торы, неустойчивые многообразия, выходящие из стационарных точек. Все эти траектории включаются в глобальный аттрактор $\mathcal{A}$. С ростом G картина еще больше запутывается. Могут появиться хаотические траектории наподобие странного аттрактора Лоренца. Общая структура глобального аттрактора сильно усложняется и становится нерегулярной, хаотической. Отметим, что большинство из этих заключений сделаны на основе компьютерного моделирования системы (2.2). Строгие результаты доказаны только для отдельных частных случаев.

В общем случае доказано существование глобального аттрактора $\mathcal{A}$ системы (2.2) и изучены некоторые его свойства. Установлен важный результат о конечномерности глобального аттрактора двумерной системы Навье–Стокса (см. [7, 8]). Оценки сверху для размерности (хаусдорфовой и фрактальной) глобального аттрактора неоднократно улучшалась в работах многих авторов. Наилучшие оценки получаются с помощью неравенств Либа–Тирринга. Они имеет следующий вид

$$\mathbf{d}_H(\mathcal{A}) \le c_1 G, \quad \mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le c_2 G. \tag{2.6}$$

Заметим, что всегда $\mathbf{d}_H(\mathcal{A}) \le \mathbf{d}_F(\mathcal{A})$, а для константы c_2 выполняется оценка [10]

$$c_2 \le \frac{1}{c_{\mathrm{LY}}} \left(\frac{c_{\mathrm{LT}}}{2} \right)^{1/2}.$$

Здесь c_{LY} — это константа из оценки типа Ли–Яу для сумм собственных значений оператора Стокса. А именно, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ собственные значения оператора Стокса

$$Lu_j = \lambda_j u_j, \qquad 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots\,,$$

то для любого $n \ge 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ge \frac{c_{\mathrm{LY}}}{|\Omega|} n^2.$$

Точные значения постоянных Ли–Яу для оператора Стокса найдены в [10], в частности, в рассматриваемом двумерном случае $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$

$$c_{\mathrm{LY}} = 2\pi.$$

Далее, c_{LT} — это постоянная в неравенстве Либа–Тирринга

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{m} |v_j|^2 \right)^2 dx \le c_{\mathrm{LT}} \sum_{j=1}^{m} \|\nabla v_j\|^2,$$

где $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ произвольная ортонормированная в $L_2(\Omega)^2$ система бездивергентных вектор-функций:

$$\int_\Omega v_i \cdot v_j dx = (v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad \operatorname{div} v_j = 0, \quad v_j \in H_0^1(\Omega)^2.$$

На основании работы [11] в [10] получена оценка

$$c_{\mathrm{LT}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,$$

так что

$$c_2 \le \frac{1}{4\pi 3^{1/4}} = 0.060\ldots. \qquad (2.7)$$

Из неравенства (2.6) следует оценка для колмогоровской ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \lesssim c_2 G \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (2.8)$$

Оценки, аналогичные (2.6) и (2.8) для хаусдорфовой и фрактальной размерности глобальных аттракторов широкого класса автономных уравнений математической физики были доказаны в работах Р.Темама [7], А.В.Бабина, М.И.Вишика [8] и других математиков. В основе доказательства лежит исследование свойств сжатия конечномерных объемов под действием квазидифференциалов полугрупп, порождаемых этими автономными уравнениями.

Приведем один общий результат об оценивании ε-энтропии и фрактальной размерности инвариантных множеств полугрупп. Он является следствием более общих теорем об оценках ε-энтропии глобальных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Пусть задана некоторая полугруппа $\{S(t)\}$, действующая в гильбертовом пространстве H. Рассматривается компактное множество X в H, $X \Subset H$. Пусть множество X строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$, т.е. $S(t)X = X$ для всех $t \ge 0$. Например, множество X может быть глобальным аттрактором полугруппы $\{S(t)\}$, $X = \mathcal{A}$ (см. определение 2.1). Предполагается, что полугруппа $\{S(t)\}$ *равномерно квазидифференцируема на* X в следующем смысле: для любого $t \ge 0$ и для каждого $u \in X$ имеется линейный ограниченный оператор $L(t,u) : E \to E$ (*квазидифференциал*) такой, что

$$\|S(t)u_1 - S(t)u - L(t,u)(u_1 - u)\|_H \le \gamma(\|u_1 - u\|_H, t)\|u_1 - u\|_H \qquad (2.9)$$

для любых $u, u_1 \in X$, причем функция $\gamma = \gamma(\xi, t) \to 0+$ при $\xi \to 0+$ для каждого фиксированного $t \ge 0$. Предполагается, что линейные операторы $L(t,u)$ порождаются уравнением в вариациях вида

$$\partial_t v = A_u(u(t))v, \quad v|_{t=0} = v_0 \in H, \qquad (2.10)$$

где $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in X$, а $A_u(\cdot)$ — формальная производная по u оператора $A(\cdot)$, причем область определения H_1 оператора $A_u(u(t))$ плотна в H. Предполагается, что линейная задача (2.10) однозначно разрешима для любого $v_0 \in H$ при всех $u_0 \in X$. По нашему предположению в неравенстве (2.9) квазидифференциалы $L(t, y_0)z_0 = z(t)$, где $z(t)$ – решение уравнения (2.10).

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $L : H_1 \to H$ – линейный, возможно, неограниченный оператор. Тогда m-мерным следом оператора L называется число

$$\mathrm{Tr}_m L = \sup_{\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,m}} \sum_{i=1}^{m} (L\varphi_i, \varphi_i), \qquad (2.11)$$

где точная верхняя грань взята по всевозможным ортонормированным в H семействам векторов $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,m}$, лежащим в H^1.

Определение 2.2 Введем следующие числа:

$$\tilde{q}_j = \varlimsup_{t \to +\infty} \sup_{u_0 \in X} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Tr}_j(A_u(u(s))ds, \ j = 1, 2, \dots \ , \tag{2.12}$$

где $u(t) = S(t)u_0$.

Теорема 2.1 *Предположим, что полугруппа $\{S(t)\}$, действующая в пространстве H, имеет компактное строго инвариантное множество X и является равномерно квазидифференцируемой на X. Пусть выполнены неравенства*

$$\tilde{q}_j \le q_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \tag{2.13}$$

где числа $\tilde{q}_j$ определены в (2.12), причем мажорирующая функция q_j выпукла вверх по j (как $\cap$). Пусть m – наименьшее число, такое что $q_{m+1} < 0$ (очевидно, что $q_m \ge 0$). Обозначим

$$d = m + \frac{q_m}{q_m - q_{m+1}}. \tag{2.14}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся такие числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ множества X выполнена следующая оценка:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(X) + (d + \delta) \log_2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha \varepsilon} \right), \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{2.15}$$

Кроме того, множество X имеет конечную фрактальную размерность и

$$\mathbf{d}_F(X) \le d. \tag{2.16}$$

Доказательство приведено в [12].

Замечание 2.1 Отметим, что оценки вида (2.16) для хаусдорфовой размерности $\mathbf{d}_H(X)$ были доказаны в работе А.Дуади и Ж.Остерле [13] для $q_j \equiv \tilde{q}_j$ без условия выпуклости функции $\tilde{q}_j$ по j. Однако в конкретных приложениях бывает очень трудно вычислить точное значение $\tilde{q}_j$. Вместо этого используются разные оценки сверху этой величины вида (2.13). При этом функции q_j обычно получаются выпуклыми по j. В результате с помощью теоремы 2.1 устанавливаются оценки фрактальной размерности, совпадающие с известными оценками хаусдорфовой размерности глобальных аттракторов конкретных уравнений.

Оценку (2.15) можно улучшить следующим образом, отбросив условие выпуклости мажоранты q_j. Рассмотрим величины $\tilde{q}_j$, определенные в (2.12).

Определение 2.3 *Пусть m – наименьшее число, такое что $\tilde{q}_{m+1} < 0$. Размерностью Ляпунова множества X называется величина*

$$d_L(X) = m + \frac{\tilde{q}_m}{\tilde{q}_m - \tilde{q}_{m+1}}. \tag{2.17}$$

В работе А.А.Ильина и В.В.Чепыжова [14] доказана следующая оценка.

Теорема 2.2 *Предположим, что полугруппа $\{S(t)\}$, действующая в пространстве H, имеет компактное строго инвариантное множество X и является равномерно квазидифференцируемой на X. Предположим, что линейные операторы $L(t,y)$, $y \in X$ непрерывно зависят от $y \in X$ в операторной норме $\mathcal{L}(H;H)$, т.е., при любом $t \geq 0$*

$$\|L(t,y) - L(t,y_0)\|_{\mathcal{L}(H;H)} \to 0 \quad (\|y - y_0\|_H \to 0).$$

Тогда

$$\mathbf{d}_F(X) \leq d_L(X). \tag{2.18}$$

Замечание 2.2 Следовательно, фрактальную размерность аттракторов эволюционных уравнений можно оценивать сверху их размерностью Ляпунова, не требуя выполнения условия выпуклости функции коэффициентов $\tilde{q}_m$ по m. Ранее этот результат был установлен лишь для хаусдорфовой размерности аттракторов (см. [7, 13]).

3 Равномерные аттракторы неавтономных бесконечномерных динамических систем

Рассматривается неавтономное эволюционное уравнение вида:

$$\partial_t u = A(u,t), \ \ u|_{t=\tau} = u_\tau \in E, \ \ t \geq \tau. \tag{3.1}$$

Нелинейный оператор $A(u,t)$ зависит от функции u, ее частных производных по x, а также от времени $t \in \mathbb{R}$. Начальное условие u_τ, принадлежащее банахову пространству E, задается при $t = \tau$, где τ – любое фиксированное число. Предполагается, что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и любом $u_\tau \in E$ задача (3.1) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in E$ при всех $t \geq \tau$. Рассматривается двупараметрическое семейство нелинейных операторов $\{U(t,\tau)\}$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, в E, которое строится по формуле

$$U(t,\tau)u_\tau = u(t), \ \ t \geq \tau, \ \ \tau \in \mathbb{R}, \ u_\tau \in E, \tag{3.2}$$

где $u(t)$ – решение (3.1) с начальным условием $u_\tau \in E$. Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ называется *динамическим процессом*, порожденным задачей (3.1). Процесс имеет следующие свойства: 1) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$; 2) $U(t,s) \circ U(s,\tau) = U(t,\tau)$ при всех $t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Если операторы $A(u,t)$ в (3.1) не зависят от времени, то процесс $\{U(t,\tau)\}$ является полугруппой $U(t,\tau) = S(t-\tau)$, порождаемой автономной задачей (2.1).

В качестве примера рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса, в которой внешняя сила зависит от времени,

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nu L u - B(u,u) + g_0\,(x,t)\,, \ \operatorname{div} u = 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H. \end{cases} \tag{3.3}$$

Все обозначения имеют тот же смысл, что и в системе (2.2). Предполагается, что зависящая от времени внешняя сила $g_0\,(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R};H)$, то есть, она является непрерывной ограниченной функцией времени со значениями в пространстве H. Как и в автономном случае справедлива теорема о существовании и единственности решения этой задачи: для любого $u_\tau(\cdot) \in H$ существует, и притом единственное, решение $u(x,t)$ задачи (3.3), принадлежащее пространству $L_\infty(\mathbb{R}_\tau; H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_\tau; H^1)$, причем $u(\cdot, t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H)$ (см. [7, 8, 9, 12]). Здесь обозначено $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$. Следовательно задача (3.3) порождает динамический процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в H по формуле (3.2).

Дадим определение *равномерного глобального аттрактора* $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$. Через $\mathcal{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E. Множество $P \subset E$ называется *равномерно* (по $\tau \in \mathbb{R}$) *притягивающим* для процесса $\{U(t,\tau)\}$, если для любого множества $B \in \mathcal{B}(E)$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \operatorname{dist}_E \left(U\left(\tau + h, \tau\right) B, P\right) \to 0, \quad h \to +\infty. \tag{3.4}$$

Процесс $\{U(t,\tau)\}$ называется *равномерно асимптотически компактным*, если он имеет компактное равномерно притягивающее множество.

Определение 3.1 Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется *равномерным (по $\tau \in \mathbb{R}$) глобальным аттрактором* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если оно замкнуто в E, является равномерно притягивающим для процесса $\{U(t,\tau)\}$ и обладает свойством минимальности, т.е. $\mathcal{A}$ принадлежит любому замкнутому равномерно притягивающему множеству этого процесса.

Понятие равномерного глобального аттрактора процесса было введено в работах А.Аро [15] (см. также [12]). В [12] доказано следующее общее утверждение.

Утверждение 3.1 *Если процесс $\{U(t,\tau)\}$ является равномерно асимптотически компактным, то существует единственный равномерный аттрактор $\mathcal{A}$, который является компактным множеством в E.*

Рассмотрим динамический процесс $\{U(t,\tau)\}$, отвечающий системе (3.3). В [12] доказано, что этот процесс имеет *компактное* в E *равномерно поглощающее множество.* Это доказывается с помощью основных энергетических априорных оценок задачи. В силу утверждения 3.1, у этого процесса есть равномерный аттрактор $\mathcal{A}$, который компактен в фазовом пространстве H этой задачи.

Для описания общей структуры глобального аттрактора процесса необходимы некоторые дополнительные понятия. Функция $u(s), s \in \mathbb{R}$, со значениями в E называется *полной траекторией* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если

$$U(t,\tau)u(\tau) = u(t) \text{ для всех } t \geq \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Определение 3.2 Ядром $\mathcal{K}$ динамического процесса $\{U(t,\tau)\}$ называется семейство всех ограниченных полных траекторий этого процесса:

$$\mathcal{K} = \left\{u(\cdot) \mid u \ \text{ удовлетворяет (3.5) и } \|u(s)\|_E \leq C_u,\ \forall s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Множество $\mathcal{K}(t) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subset E, \quad t \in \mathbb{R}$, называется *сечением* ядра в момент времени t. Легко проверяется следующее свойство.

Утверждение 3.2 *Если процесс $\{U(t,\tau)\}$ имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, то все сечения его ядра принадлежат $\mathcal{A}$:*

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{K}(t) \subseteq \mathcal{A}. \tag{3.6}$$

Отметим, что в общем случае включение (3.6) является строгим, т.е. на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ могут лежать точки, которые не являются значениями ограниченных полных траекторий исходного уравнения (3.1). Однако, как будет показано ниже, такие точки являются значениями ограниченных полных траекторий уравнений, "родственных" исходному уравнению. Чтобы описать эти "родственные" уравнения, вводится понятие *временного символа* рассматриваемого уравнения. Предположим, что все члены уравнения (3.1), которые явно зависят от времени t, можно записать в виде функции $\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в некотором банаховом пространстве Ψ. При этом само уравнение (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u), \;\; y|_{t=\tau} = y_\tau \in E, \;\; t \geq \tau. \tag{3.7}$$

Функция $\sigma(t)$ называется *временны́м символом* уравнения. Например, в неавтономной системе (3.1) символом является внешняя сила $g_0(\cdot, t)$, $\sigma(t) = g_0(\cdot, t)$, значения которой принадлежат пространству $H = \Psi$. Для простоты будем предполагать, что $\sigma(t) \in C(\mathbb{R}; \Psi)$.

Символ исходного уравнения (3.1) обозначим через $\sigma_0(t)$. Вместе с этим уравнением, имеющим символ $\sigma_0(t)$, мы также рассмотрим уравнения (3.1), в которых символами служат функции $\sigma(t) = \sigma_0(t+h)$ со сдвинутыми по времени аргументами на любые $h \in \mathbb{R}$. Кроме того, рассматриваются также уравнения, символы $\sigma(t)$ которых получаются предельными переходами из последовательностей вида $\sigma_0(t + h_n)$ при $n \to \infty$. Пределы берутся в пространстве $C(\mathbb{R}; \Psi)$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$, которая определяется следующим образом. По определению последовательность функций $\{\xi_n(t)\}$ из $C(\mathbb{R}; \Psi)$ сходится к функции $\xi(t)$ при $n \to \infty$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$, если для любого фиксированного $M > 0$

$$\max_{t \in [-M, M]} \|\xi_n(t) - \xi(t)\|_\Psi \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Введенная топология локальной равномерной сходимости в $C(\mathbb{R}; \Psi)$ является метризуемой, а соответствующее метрическое пространство полно.

Определение 3.3 Множество

$$\mathcal{H}(\sigma_0) = [\{\sigma_0(t+h) \mid h \in \mathbb{R}\}]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)} \tag{3.8}$$

называется оболочкой функции $\sigma_0(t)$ в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$. Здесь, как обычно, квадратные скобки $[\,\cdot\,]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)}$ обозначают замыкание в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$.

Рассматривается семейство уравнений (3.7), временны́е символы $\sigma(t)$ которых принадлежат оболочке $\mathcal{H}(\sigma_0)$ символа $\sigma_0(t)$ исходного уравнения (3.1). Будем предполагать, что $\sigma_0(t)$ является *трансляционно-компактной* функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$.

Определение 3.4 Функция $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$ называется *трансляционно-компактной в* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$, если ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$.

Рассмотрим некоторые примеры трансляционно-компактных функций.

Пример 3.1 Пусть функция $\sigma_0(t)$ является почти периодической со значениями в банаховом пространстве Ψ. По определению это означает, что ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R}; \Psi)$ с топологией равномерной сходимости на всей оси $\mathbb{R}$. Топология $C_b(\mathbb{R}; \Psi)$, очевидно, сильнее топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$, поэтому, если множество $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактно в $C_b(\mathbb{R}; \Psi)$, то оно компактно и в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$, т.е. функция $\sigma_0(t)$ трансляционно-компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \Psi)$.

Пример 3.2 Важным частным случаем почти периодических функций являются квазипериодические функции со значениями в Ψ. Функция $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$ называется квазипериодической, если она представима в виде

$$\sigma_0(t) = \phi\left(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t\right) = \phi\left(\bar{\alpha} t\right), \quad \phi\left(\bar{\alpha} t\right) \in \Psi, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

где функция $\phi\left(\bar{\omega}\right) = \phi\left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\right)$ является непрерывной и 2π-периодической по каждому аргументу $\omega_i \in \mathbb{R}$. При $k = 1$ получаются периодические функции. Пусть $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^k$ обозначает k-мерный тор. Тогда $\phi(\bar{\omega}) \in C(\mathbb{T}^k;\Psi)$. Предполагается, что компоненты вектора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ в (3.9) являются рационально независимыми числами (иначе можно сократить число независимых аргументов ω_i в представлении (3.9)). Легко показать, что оболочку квазипериодической функции $\sigma_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$ образуют функции

$$\left\{\phi(\bar{\alpha} t + \bar{\omega}_1) \mid \bar{\omega}_1 \in \mathbb{T}^k\right\} = \mathcal{H}(\sigma_0). \tag{3.10}$$

Следовательно, оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ является непрерывным образом k-мерного тора $\mathbb{T}^k$. В частности, если функция $\phi(\bar{\omega})$ является гладкой, то фрактальная размерность множества $\mathcal{H}(\sigma_0)$ не превосходит k :

$$\mathbf{d}_F\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right) \le \mathbf{d}_F\left(\mathbb{T}^k\right) = k, \tag{3.11}$$

и в случае общего положения равна k (неравенство в (3.11) может быть строгим).

Можно построить другие примеры трансляционно-компактных функций, которые не являются почти периодическими или квазипериодическими (см. [12]).

Рассмотрим теперь семейство уравнений (3.7) с символами $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, где $\sigma_0(t)$ – трансляционно-компактная функция в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Предполагается, что для каждого символа $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$ задача Коши (3.7) однозначно разрешима при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и для каждого начального условия $u_\tau \in E$. Следовательно, имеется семейство динамических процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в пространстве E. Семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, называется $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-непрерывным, если для любых t и $\tau, t \ge \tau$, отображение $(u,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)u$ непрерывно из $E \times \mathcal{H}(\sigma_0)$ в E.

Сформулируем основную теорему о структуре глобального аттрактора уравнения (3.7) с трансляционно-компактным символом $\sigma_0(t)$, доказанную в диссертации. Процесс, порожденный этим символом, обозначим $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$. Доказательство этой теоремы приведено в [12].

Теорема 3.1 *Предположим, что функция $\sigma_0(t)$ трансляционно-компактна в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Пусть динамический процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ является асимптотически компактным, а соответствующее ему семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, является $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-непрерывным. Тогда процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \Subset E$, для которого справедливо следующее равенство:*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)} \mathcal{K}_\sigma(0) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)} \mathcal{K}_\sigma(t), \tag{3.12}$$

где $\mathcal{K}_\sigma$ – ядро процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ с символом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Здесь t – любое фиксированное число. Ядро $\mathcal{K}_\sigma$ не пусто при любом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$.

Применяя теорему 3.1 к исследованию неавтономной 2D системы Навье–Стокса (3.3), получаем следующий результат.

Утверждение 3.3 *Предположим, что внешняя сила $g_0(\cdot,t)$ в уравнении (3.3) является трансляционно-компактной функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Тогда процесс $\{U_{g_0}(t,\tau)\}$ задачи (3.3) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}\Subset E=H$, причем*

$$\mathcal{A}=\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g(0), \tag{3.13}$$

где $\mathcal{K}_g$ – ядро системы Навье–Стокса с внешней силой $g(\cdot,t)\in\mathcal{H}(g_0)$.

Сформулируем неавтономный аналог утверждения (2.4). Обозначим

$$\|g_0\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};H)}\equiv\|g_0\|^2_{L_2^b}:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|g_0(\cdot,s)|^2ds.$$

Отметим, что $\|g_0\|^2_{L_2^b}<\infty$, если функция g_0 является трансляционно-компактной в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Предположим, что число Грасхофа G неавтономной системы Навье–Стокса (3.3) удовлетворяет неравенству

$$G:=\frac{|\Omega|\|g_0\|_{L_2^b}}{\nu^2}<c_0, \tag{3.14}$$

где константа c_0 та же, что и в автономном случае (см. (2.5)). Тогда система (3.3) имеет, и притом единственное, решение $z_0(t),\ t\in\mathbb{R}$, ограниченное в H, (то есть ядро $\mathcal{K}_{g_0}$ состоит из единственной траектории $z_0(t)$). Это решение $z_0(t)$ является экспоненциально устойчивым: для любого решения $u(t)$ уравнения (3.3) выполнено следующее неравенство:

$$|u(t)-z_0(t)|\le C_0|u_\tau-z_0(\tau)|e^{-\beta(t-\tau)}\ \forall t\ge\tau, \tag{3.15}$$

где $u(t)=U_{g_0}(t,\tau)u_\tau$ (константы C_0 и β не зависят от u_τ и τ). Если известно, что $g_0(x,t)=\phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt)$ – квазипериодическая функция, причем функция $\phi(\bar\omega)\in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;H)$ непрерывная по Липшицу, то $z_0(x,t)$ также квазипериодическая с тем же набором рационально независимых частот, т.е.

$$z_0(x,t)=\Phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt), \tag{3.16}$$

где $\Phi(x,\bar\omega)\in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;E)$ – некоторая непрерывная по Липшицу, периодическая функция относительно $\bar\omega\in\mathbb{T}^k$.

С помощью неравенства (3.15) из утверждения 3.3 легко выводится, что глобальным аттрактором системы (3.3) при условии (3.14) служит множество

$$\mathcal{A}=\left[\{z(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\right]_H. \tag{3.17}$$

Если дополнительно известно, что $g_0(x,t)=\phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt)$ является квазипериодической функцией, то из представления (3.16) ограниченной траектории $z_0(t)$ и из (3.17) находим, что $\mathcal{A}=\Phi(\mathbb{T}^k)$. Поэтому, из непрерывности по Липшицу функции Φ, получаем оценку для фрактальной размерности аттрактора $\mathcal{A}:\ \mathbf{d}_F(\mathcal{A})=\mathbf{d}_F(\Phi(\mathbb{T}^k))\le\mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k)=k$, а для его ε-энтропии справедливо неравенство

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A})\lesssim k\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.18}$$

Легко построить примеры функций $g_0(x,t)$ для которых $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = k$. Для этого достаточно выбрать подходящую гладкую функцию $z_0(x,t)$ вида (3.16) и подставить ее в систему (3.3) для нахождения $g_0(x,t)$. Так же строится пример почти периодической функции $g_0(x,t)$ с бесконечным набором рационально независимых частот, для которой $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = +\infty$.

Эти примеры указывают на целесообразность изучения в общем случае колмогоровской ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ неавтономной системы Навье–Стокса.

4 Оценки ε-энтропии и размерности аттракторов неавтономных динамических систем

Рассматривается семейство уравнений (3.7), в котором символ $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Предполагается, что исходный символ $\sigma_0(t)$ является трансляционно-компактной функцией в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Рассматривается соответствующее ему семейство динамических процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в E. Предполагаются выполненными условия теоремы 3.1. Тогда процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который представим в виде (3.12).

Задача заключается в исследовании ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, E)$ аттрактора $\mathcal{A}$ в пространстве E. При этом предполагается известной ε-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$. Здесь $\Pi_{0,l}$ обозначает оператор сужения на отрезок $[0,l]$.

Сформулируем некоторые дополнительные условия для $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$. Прежде всего, необходимо обобщить понятие квазидифференцируемости, введенное для полугрупп в формуле (2.9). Пусть $\{U(t,\tau)\}$ – некоторый процесс в E. Пространство E предполагается гильбертовым. Рассмотрим ядро $\mathcal{K}$ этого процесса. Из определения ядра вытекает следующее свойство строгой инвариантности сечений ядра:

$$U(t,\tau)\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(t),\ \forall t \geq \tau,\ \ \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Определение 4.1 Процесс $\{U(t,\tau)\}$ в E называется *равномерно квазидифференцируемым на* $\mathcal{K}$, если найдется семейство линейных ограниченных операторов $\{L(t,\tau,u)\}$, где $u \in \mathcal{K}(\tau),\ t \geq \tau,\ \tau \in R$, такое что

$$\|U(t,\tau)u_1 - U(t,\tau)u - L(t,\tau,u)(u_1-u)\|_E \leq \gamma(\|u_1-u\|_E, t-\tau)\|u_1-u\|_E \tag{4.2}$$

для любых $u, u_1 \in \mathcal{K}$, *причем функция* $\gamma = \gamma(\xi,s) \to 0+$ *при* $\xi \to 0+$ *для каждого фиксированного* $s \geq 0$.

Предполагается, что процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ является равномерно квазидифференцируемым на ядре $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, причем его квазидифференциал порождается уравнением в вариациях

$$\partial_t z = A_{\sigma_0 u}(u(t))z,\ \ z|_{t=\tau} = z_\tau \in E, \tag{4.3}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$, т.е., $L(t,\tau,u_\tau)z_\tau = z(t)$, где $z(t)$ – решение задачи (4.3), которая предполагается однозначно разрешимой при всех $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$ для любого $z_\tau \in E$. Аналогично (2.12) вводятся числа

$$\tilde{q}_j = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{u_0\in\mathcal{K}(\tau)} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}_j(A_{\sigma_0 u}(u(s)))ds, \tag{4.4}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, а след $\mathrm{Tr}_j(L)$ линейного оператора L определен в (2.11).

Предполагается также выполненным следующее условия Липшица для семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$:

$$\|U_{\sigma_1}(h,0)u - U_{\sigma_2}(h,0)u\|_E \le C(h)\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{C([0,h];\Psi)}, \qquad (4.5)$$
$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}(\sigma_0), \forall u \in \mathcal{A},\ \forall h \ge 0.$$

Сформулируем основной результат работы, который обобщает теорему 3.1.

Теорема 4.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и кроме того, пусть исходный процесс* $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ *является равномерно квазидифференцируемым на* $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, *причем его квазидифференциалы порождены уравнением в вариациях* (4.3), *а для чисел* $\tilde{q}_j$ (см. (4.4)) *выполнены неравенства*

$$\tilde{q}_j \le q_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.6)$$

Предполагается выполненным условие Липшица (4.5) *для семейства* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. *Предполагается, что функция* q_j *выпукла вверх по* j. *Пусть* m *– наименьшее число, такое что* $q_{m+1} < 0$ (*тогда* $q_m \ge 0$). *Обозначим*

$$d = m + q_m/(q_m - q_{m+1}).$$

Тогда для любого $\delta > 0$ *найдутся такие числа* $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $h \ge 0$, *что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\Pi_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0. \qquad (4.7)$$

Число $C(h)$ *такое же, как в условии Липшица (4.5).*

Сформулируем некоторые важные следствия из этой теоремы.

Следствие 4.1 *Предположим, что функция* $\sigma_0(t)$ *является почти периодической. Тогда неравенство* (4.7) *можно упростить:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \qquad (4.8)$$

где $\mathbf{H}_\epsilon\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right)$ *–* ϵ*-энтропия оболочки* $\mathcal{H}(\sigma_0)$ *в пространстве* $C_b(\mathbb{R};\Psi)$.

В самом деле, ε-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$ не превосходит ε-энтропию $\mathcal{H}(\sigma_0)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$. Из оценки (4.8) видно, что в случае общей почти периодической функции $\sigma_0(t)$, имеющей бесконечное число рационально независимых частот, основной вклад в оценку ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ вносит ε/L-энтропия оболочки $\mathcal{H}(\sigma_0)$, где $L = \frac{4C(h)}{\alpha}$. Однако если функция $\sigma_0(t)$ имеет конечное число частот, являясь квазипериодической, то вклад этой величины сравним с вкладом величины $d\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)$, что приводит к конечномерности глобального аттрактора.

Следствие 4.2 *Пусть в условиях теоремы 3.1 функция* $\sigma_0(t)$ *– квазипериодическая вида* $\sigma_0(t) = \phi(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t) = \phi(\bar{\omega}t)$, *где* $\phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = \phi(\bar{\omega}) \in C^{\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^k;\Psi)$. *Тогда оценка* (4.8) *выглядит так:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + k\log_2\left(\frac{8C(h)}{K\alpha\varepsilon}\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \qquad (4.9)$$

где K – константа Липшица из неравенства

$$\|\phi(\bar{\omega}_1) - \phi(\bar{\omega}_2)\|_\Psi \le K\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \in \mathbb{T}^k.$$

В частности,

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le d + k. \tag{4.10}$$

Напомним, что в автономном случае при $k = 0$ аналогом оценки (4.10) является оценка (2.16), в которой $X = \mathcal{A}$: $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le d$. В неавтономном случае, когда $k \ne 0$, имеет место оценка (4.10), в которой справа к d прибавляется число k рационально независимых частот квазипериодической функции $\sigma_0(t)$.

Рассмотрим еще две важные характеристики компактного множества X в пространстве E, введенные А.Н.Колмогоровым и В.М.Тихомировым. Число

$$\mathbf{df}(X, E) = \mathbf{df}(X) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\log_2(\mathbf{H}_\varepsilon(X))}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)} \tag{4.11}$$

называется *функциональной размерностью* множества X в E, а число

$$\mathbf{q}(X, E) = \mathbf{q}(X) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\log_2(\mathbf{H}_\varepsilon(X))}{\log_2(1/\varepsilon)} \tag{4.12}$$

называется его *метрическим порядком* в E. Легко видеть, что $\mathbf{df}(X) = 1$, $\mathbf{q}(X) = 0$, если $\mathbf{d}_F(X) < +\infty$. Поэтому величины $\mathbf{df}(X)$ и $\mathbf{q}(X)$ характеризуют бесконечномерные множества.

Следствие 4.3 *Пусть $\sigma_0(t)$ – почти периодическая функция, тогда*

$$\mathbf{df}(\mathcal{A}) \le \mathbf{df}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R}; \Psi)\right), \tag{4.13}$$

$$\mathbf{q}(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R}; \Psi)\right). \tag{4.14}$$

Теперь коротко изложим применение теоремы 4.1 и следствий 4.1 – 4.3 к неавтономной системе Навье–Стокса (3.3). Как уже отмечалось (см. утверждение 3.3), эта система имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ в $E = H$, который представим в виде (3.13).

Теорема 4.2 *При выполнении условий утверждения 3.3 найдутся числа $h > 0$, $L > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ и $\alpha < 1$ такие, что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + c_2 G \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon}{L}}\left(\mathcal{H}(g_0)_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\right) \tag{4.15}$$

для любого $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где G – число Грасхофа, определенное в (3.14), а постоянная c_2 допускает ту же оценку (2.7)*, что и в автономном случае.*

Основная сложность при доказательстве теоремы 4.2 связана с получением эффективных оценок для коэффициентов $\tilde{q}_j$ (см. (4.4)) для неавтономной системы Навье-Стокса (3.3). При этом используются и обобщаются глубокие методы оценивания этих коэффициентов для автономного случая этой систем.

Следствие 4.4 *Если функция $g_0(s)$ является квазипериодической, у которой имеется k рационально независимых частот, то*

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + c_2 G \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + k\log_2\left(\frac{L}{\varepsilon}\right), \ \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0,\\ &\mathbf{d}_F\mathcal{A} \le c_2 G + k\end{aligned} \tag{4.16}$$

для некоторых положительных чисел α, L и ε_0.

При $k = 0$ оценка (4.16) совпадает с оценкой (2.6) для фрактальной размерности глобального аттрактора автономной 2D системы Навье–Стокса.

5 Заключение

Аналогичные результаты об оценках сверху ε-энтропии и фрактальной размерности глобальных аттракторов получены для многих классов уравнений математической физики, а именно для неавтономных систем реакции-диффузии, для уравнений Гинзбурга–Ландау, содержащих члены, зависящие от времени, а также для неавтономных диссипативных волновых уравнений (§ 5). Для всех изучаемых уравнений доказаны оценки, которые явно зависят от основных параметров уравнений. Подробно изучены важные частные случаи, когда символы этих уравнений являются квазипериодическими функциями времени. Доказаны оценки сверху фрактальной размерности глобальных аттракторов таких неавтономных уравнений. Отметим, что разработанные нами методы применимы к исследованию весьма широких классов неавтономных уравнений математической физики.

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14. N 2. С. 3–86.

[2] Леонов Г.А. Формулы для ляпуновской размерности аттракторов Энона и Лоренца // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. N 3. С. 1–12.

[3] Ладыженская О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.

[4] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. 1983. Т. 38. N 4, С. 133–187.

[5] Constantin P., Foias C., Temam R. Attractors representing turbulent flows. Mem. Amer. Math. Soc. V. 53. 1985.

[6] Hale J.K. Asymptotic behaviour of dissipative systems. Math. Surveys and Mon. V. 25. Providence: AMS. 1988.

[7] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988, 1997.

[8] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

[9] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

[10] Ильин А.А. О спектре оператора Стокса. // Функциональный анализ и его приложения. 2009. Т. 43:4. С. 14–25.

[11] Dolbeault J., Laptev A., Loss M. Lieb–Thirring inequalities with improved constants. J. European Math. Soc. 2008. V. 10:4. P. 1121–1126.

[12] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Amer. Math. Soc. Providence, RI (2002).

[13] Duady A., Oesterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs // C. R. Acad. Sci. Paris. 1980. V. 290. Série A. P. 1135–1138.

[14] Chepyzhov V.V., Ilyin A.A. On the fractal dimension estimate of invariant sets; application to Navier-Stokes equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems V.10. 2004. N.1& 2. P.117-135.

[15] Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.