ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 498, с. 10–15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

ОБ АТТРАКТОРАХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. К. А. Бекмаганбетов[1,2,*], В. В. Чепыжов[3,4,], Г. А. Чечкин[2,5,6,***]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.02.2021 г.
Поступило 18.02.2021 г.
После доработки 18.02.2021 г.
Принято к публикации 09.03.2021 г.

В работе изучается система уравнений реакции—диффузии в перфорированной области с быстро осциллирующими членами в самом уравнении и в граничных условиях. Нелинейная функция в уравнениях может не удовлетворять условию Липшица, поэтому теорема единственности для соответствующей начально-краевой задачи для рассматриваемой системы уравнений реакции—диффузии может не выполняться. При этом доказано, что траекторные аттракторы этой системы слабо стремятся в соответствующей топологии к траекторным аттракторам усредненной системы реакции—диффузии со “странным членом” (потенциалом).

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, уравнение реакции—диффузии, нелинейные уравнения, слабая сходимость, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, странный член

DOI: 10.31857/S2686954321030036

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к задачам в перфорированных областях возник в связи прикладными задачами биологии, механики и инженерии. Работы, посвященные асимптотическому анализу таких задач, см., например, [1—5] и библиографию в этих работах. Особенно интересно изучать задачи, в которых может не выполняться теорема единственности. В таких задачах проводится усреднение соответствующих аттракторов (см. рис. 1[1], например). Аттракторы характеризуют всю динамику рассматриваемой модели (см., например, монографии [6—8] и ссылки в них). В работе [9] изучалось усреднение аттракторов скалярных эволюционных уравнений с диссипацией в периодически перфорированной области. В настоящей работе мы рассматриваем начально-краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими членами в перфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Нур-Султан, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[3] *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия*
[4] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[5] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[6] *Институт математики с компьютерным центром — подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
**E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz*
***E-mail: chep@iitp.ru*
****E-mail: chechkin@mech.math.msu.su*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть G_0 — область, принадлежащая $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$, такая, что $\bar{G}_0$ является компактом, диффеоморфным шару.

Пусть $\delta > 0$ и M — некоторое множество, введем следующее обозначение: $\delta M = \{x \colon \delta^{-1}x \in M\}$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало, чтобы

$$\varepsilon^{n/(n-2)}G_0 \subset \varepsilon Y.$$

[1] Из открытых источников.

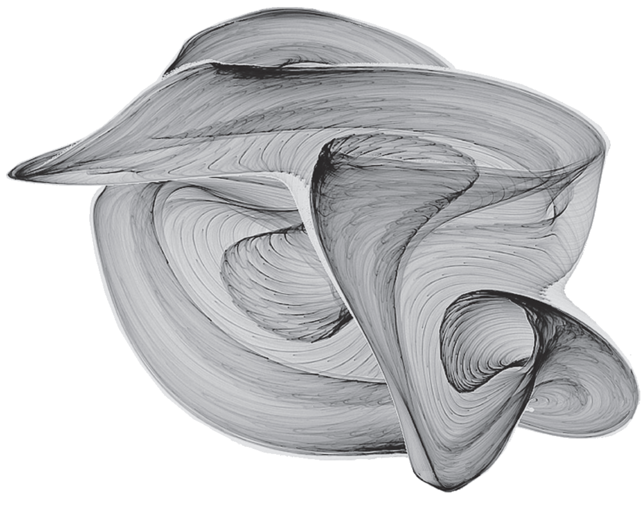

Рис. 1. Аттрактор.

Для $j \in \mathbb{Z}^n$ определим

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^{n/(n-2)} G_0.$$

Определим область $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega\colon \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{n}\varepsilon\}$ и множество допустимых индексов

$$\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n\colon\ G_\varepsilon^j \cap \bar{\tilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \varnothing\}.$$

Заметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, где $d > 0$ – некоторая постоянная. Рассмотрим область

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{G}_\varepsilon, \quad \text{где} \quad G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j.$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, +\infty), \quad Q = \Omega \times (0, +\infty).$$

Мы изучаем асимптотическое поведение траекторных аттракторов начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = H\Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^{n/(2-n)} B_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ j \in \Upsilon_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = U(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $u = (u^1, \ldots, u^N)^\top$, $f = (f^1, \ldots, f^N)^\top$ и $g = (g^1, \ldots, g^N)^\top$, ν – вектор единичной внешней нормали к границе. Функция $a(x, y) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ такая, что $0 < a_0 \le$ $\le a(x, y) \le A_0$ с некоторыми постоянными a_0, A_0, а функция $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеет среднее $\bar{a}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty, *_w}(\Omega)$, т.е.

$$\int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \to \int_\Omega \bar{a}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{2}$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$. Матрица кросс–диффузии H – это квадратная матрица размера $N \times N$ с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметричную часть $\frac{1}{2}(H + H^\top) \ge$ $\ge \alpha I$, где $\alpha > 0$, а I – единичная матрица порядка N. Отметим, что матрица H не обязательно симметрична, также отметим, что принцип максимума может не выполнятся для нашей задачи.

Для вектор-функции $g(x, y)$ будем считать, что функции $g_\varepsilon^i(x) = g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ и имеют средние $\bar{g}^i(x)$ в пространстве $V' = H^{-1}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0+$, т.е.

$$\int_\Omega g^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \to \int_\Omega \bar{g}^i(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \to 0+) \tag{3}$$

для любой функции $\varphi \in V = H_0^1(\Omega)$ и для всех $i = 1, \ldots, N$.

В работе [10] приведены примеры функций вида $a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, которые удовлетворяют условиям усреднения (2) и (3).

Здесь $B_\varepsilon^j(x)$ – диагональная матрица с ограниченными элементами вида

$$b^{11}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \ldots, b^{NN}\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^{n/(n-2)}}\right), \quad j \in \Upsilon_\varepsilon,$$

где $b^{kk}(x, y) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ – 1-периодические по y функции такие, что

$$0 < b_0 \le b^{kk}(x, y) \le B_0 \tag{4}$$

с некоторыми постоянными b_0, B_0 для всех $k = 1$, $2, \ldots, N$.

Обозначим также вектор

$$\bar{B}(x, y) := (b^{11}(x, y), \ldots, b^{NN}(x, y))^\top,$$

а диагональную матрицу с элементами $b^{11}(x, y)$, ..., $b^{NN}(x, y)$ – через $B(x, y)$.

Предположим, что вектор-функция $f(v) \in C(\mathbb{R}^N;$ $\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^{N}|f^i(v)|^{p_i/(p_i-1)} \le C_0\left(\sum_{i=1}^{N}|v^i|^{p_i}+1\right), \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i|v^i|^{p_i} - C \le \sum_{i=1}^{N} f^i(v)v^i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N, \qquad (6)$$

где $\gamma_i > 0$ для всех $i = 1,\ldots,N$. Для определенности будем считать, что $p_N \ge p_{N-1} \ge \ldots \ge p_1 \ge 2$. Заметим, что выполнение условия Липшица для функции $f(v)$ относительно v не предполагается.

Введем следующие обозначения для пространств $\mathbf{H} := [L_2(\Omega)]^N$, $\mathbf{H}_\varepsilon := [L_2(\Omega_\varepsilon)]^N$, $\mathbf{V} := [H_0^1(\Omega)]^N$, $\mathbf{V}_\varepsilon := [H^1(\Omega_\varepsilon;\partial\Omega)]^N$ – множество всех вектор-функций из $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^N$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом:

$$\|v\|^2 := \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}|v^i(x)|^2dx,$$

$$\|v\|_\varepsilon^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N}|v^i(x)|^2dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}|\nabla v^i(x)|^2dx,$$

$$\|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N}|\nabla v^i(x)|^2dx.$$

Напомним, что $\mathbf{V}' := [H^{-1}(\Omega)]^N$ – двойственное пространство к пространству $\mathbf{V}$, кроме того, $\mathbf{V}_\varepsilon'$ – двойственное пространство для $\mathbf{V}_\varepsilon$.

Пусть $q_i = \dfrac{p_i}{p_i-1}$ для всех $i = 1,\ldots,N$. Будем использовать следующие векторные обозначения $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_N)$ и $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_N)$, а также определим пространства

$$\mathbf{L_p} := L_{p_1}(\Omega)\times\ldots\times L_{p_N}(\Omega),$$
$$\mathbf{L_{p,\varepsilon}} := L_{p_1}(\Omega_\varepsilon)\times\ldots\times L_{p_N}(\Omega_\varepsilon),$$

$$\mathbf{L_p}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L_p}) := L_{p_1}(\mathbb{R}_+;L_{p_1}(\Omega))\times\ldots\times L_{p_N}(\mathbb{R}_+;L_{p_N}(\Omega)),$$

$$\mathbf{L_p}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L_{p,\varepsilon}}) := L_{p_1}(\mathbb{R}_+;L_{p_1}(\Omega_\varepsilon))\times\ldots\times L_{p_N}(\mathbb{R}_+;L_{p_N}(\Omega_\varepsilon)).$$

Как и в [7], будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x,s) \in \mathbf{L}_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\mathbf{p}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon}),$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{gathered}\int_{Q_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\cdot\psi dxdt + \int_{Q_\varepsilon} H\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\psi dxdt + \\ + \int_{Q_\varepsilon} a_\varepsilon(x)f(u_\varepsilon)\cdot\psi dxdt + \\ + \varepsilon^{n/(2-n)}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^{+\infty}\int_{\partial G_\varepsilon^j} B_\varepsilon^j(x)u_\varepsilon\cdot\psi dxdt = \\ = \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x)\cdot\psi dxdt\end{gathered} \qquad (7)$$

для любых функций $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon)$. Здесь $y_1\cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^N$.

Если $u_\varepsilon(x,t) \in \mathbf{L_p}(0,M;\mathbf{L_{p,\varepsilon}})$, тогда из условия (5) следует, что $f(u(x,t)) \in \mathbf{L_q}(0,M;\mathbf{L_{q,\varepsilon}})$. В то же время, если $u_\varepsilon(x,t) \in \mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon)$, тогда

$$\Delta u_\varepsilon(x,t) + g_\varepsilon(x) \in \mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon').$$

Поэтому для произвольного слабого решения $u_\varepsilon(x,s)$ задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t} \in \mathbf{L_q}(0,M;\mathbf{L_{q,\varepsilon}}) + \mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon').$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что

$$\mathbf{L_q}(0,M;\mathbf{L_{q,\varepsilon}}) + \mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon') \subset \mathbf{L_q}(0,M;\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}}),$$

где пространство $\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}} := H_\varepsilon^{-r_1}\times\ldots\times H_\varepsilon^{-r_N}$, $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_N)$ и $r_i = \max\left\{1, n\left(\dfrac{1}{q_i}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ для всех $i = 1,\ldots,N$ (соболевское пространство с отрицательным показателем). Следовательно, для любого слабого решения $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (1) имеем $\dfrac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial t} \in \mathbf{L_q}(0,M;\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}})$.

Замечание 1. Существование слабого решения $u(x,s)$ задачи (1) для любой функции $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$ и фиксированного ε, такого, что $u(x,0) = U(x)$, может быть доказано стандартным способом (см., например, [6]). Это решение может быть не единственным, поскольку функция $f(v)$ удовлетворяет условиям (5), (6) и для нее не предполагается выполнение условия Липшица относительно v.

Для удобства будем опускать индекс ε в обозначениях пространств, там, где это не вызывает непонимания. Положим $E_1 = \mathbf{L_p}\cap\mathbf{V}$, $E_0 = \mathbf{H}^{-\mathbf{r}}$, $E = \mathbf{H}$ и $A(u) = H\Delta u - a(\cdot)f(u) + g(\cdot)$ и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1,t_2] \in R$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t_1,t_2} &:= \mathbf{L_p}(t_1,t_2;\mathbf{L}_p) \cap \mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{V}) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty(t_1,t_2;\mathbf{H}) \cap \left\{v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L_q}(t_1,t_2;\mathbf{H^{-r}})\right.\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

с нормой

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} &:= \|v\|_{\mathbf{L_p}(t_1,t_2;\mathbf{L_p})} + \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{V})} + \\ &+ \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{\mathbf{L_q}(t_1,t_2;\mathbf{H^{-r}})}.\end{aligned} \tag{9}$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1,t_2} = \mathbf{L_q}(t_1,t_2;\mathbf{H^{-r}})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, а если $u(s)\in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$, тогда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$. Далее обозначим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} &= \mathbf{L_p^{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L_p}) \cap \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \left\{v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L_q^{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H^{-r}})\right.\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}} &= \mathbf{L_p^{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_{\mathbf{p},\varepsilon}) \cap \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap \\ &\cap \mathbf{L}_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L_q^{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon^{-\mathbf{r}})\right.\right\},\end{aligned}$$

а через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ и пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, т.е. если $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h+s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для любых $h \ge 0$. Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ следующим образом:

$$\rho_{0,M}(u,v) = \left(\int_0^M \|u(s)-v(s)\|^2 ds\right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ (соответственно $\Theta_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{\mathrm{loc}}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $k \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{H})} \to 0$ $(k \to \infty)$ для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1). Полугруппа сдвигов $\{S(t)\}$, действующая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc}.

Определим ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, используя банаховы пространства

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+^b &= \mathbf{L_p^b}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L_p}) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \\ &\cap \left\{v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L_q^b}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H^{-r}})\right.\right\},\end{aligned} \tag{10}$$

$\mathcal{F}_+^b$ – подпространство пространства $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, $S(t)\colon \mathcal{K}_\varepsilon^+ \to \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $t \ge 0$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(s), s \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^b &= \mathbf{L_p^b}(\mathbb{R};\mathbf{L_p}) \cap \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R};\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R};\mathbf{H}) \cap \\ &\cap \left\{v \left| \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L_q^b}(\mathbb{R};\mathbf{H^{-r}})\right.\right\}.\end{aligned}$$

Имеет место

Л е м м а 1. *При выполнении условий* (5), (6) *задача* (1) *имеет траекторные аттракторы* $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *в топологическом пространстве* Θ_+^{loc}. *Множество* $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *равномерно* (*по* $\varepsilon \in (0,1)$) *ограничено в* $\mathcal{F}_+^b$ *и компактно в* Θ_+^{loc}. *Более того*,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ K_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ *– непусто и равномерно* (*по* $\varepsilon \in (0,1)$) *ограничено в* $\mathcal{F}^b$. *Напомним, что пространства* $\mathcal{F}_+^b$ *и* Θ_+^{loc} *зависят от* ε.

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [8], для более частного случая. Существование поглощающего множества, ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ и компактного в Θ_+^{loc}, доказывается так же, как и в [7].

2. УСРЕДНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

Чтобы определить “странный член” (потенциал в предельном уравнении), рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}-\Delta_y v = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_y} + B(x,y)v = \overline{B}(x,y), \quad y \in \partial G_0, \\ v \to 0, \quad |y| \to \infty,\end{gathered}$$

где матрица $B(x,y)$ и вектор $\overline{B}(x,y)$ были определены выше. В этой задаче переменная x играет роль медленного параметра. Определим предельный потенциал по следующей формуле:

$$V^{kk}(x) = \int\limits_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial \nu_y} v^k(x,y) d\sigma_y, \quad k = 1,\dots,N. \tag{11}$$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = H\Delta u - \overline{a}(x) f(u) - V(x)u + \overline{g}(x), \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u = U(x), \quad t = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $V(x)$ – диагональная матрица с элементами $V^{kk}(x)$, $k = 1,\dots,N$. Очевидно, что задача (12) также имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\overline{\mathcal{K}}^+$, соответствующем задаче (12), и

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (12) в $\mathcal{F}^b$.

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

Т е о р е м а 1. *В топологическом пространстве* Θ_+^{loc} *справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Более того

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \textit{в} \quad \Theta^{\mathrm{loc}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Напомним, что пространства в теореме 1 зависят от ε. Все функции могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм.

Если рассмотреть уравнения реакции–диффузии, для которых имеет место теорема единственности в задаче Коши. Для этого достаточно предположить, что нелинейный член $f(u)$ в системе уравнений (1) удовлетворяет условию

$$\begin{gathered} (f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geq -C|v_1 - v_2|^2 \\ \text{для всех} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N. \end{gathered} \tag{13}$$

(см. [7]). В [7] было доказано, что если выполнено (13), тогда уравнения (1) и (12) генерируют динамические полугруппы в $\mathbf{H}$, имеющие глобальные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$, ограниченные в пространстве $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (см. также [8]). Пусть

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{u(0) | \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \quad \overline{\mathcal{A}} = \{u(0) | u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

При этом выполняется следующее

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место предельное соотношение*

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{H}^{-\delta}}(\mathfrak{A}_\varepsilon, \overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора поддержана КН МОН РК (грант AP08855579). Научные результаты второго автора в первом параграфе поддержаны грантом РФФИ (проект 20-01-00469). Научный вклад третьего автора в результаты второго параграфа поддержан грантом РНФ (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. *Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A.* Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. Amsterdam: North–Holland; 1992.
3. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
4. *Cioranescu D., Murat F.* Un terme étrange venu d'ailleurs I & II. In Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar, Volume II & III, ed. H. Berzis, J.L. Lions. Research Notes in Mathematics, 60 & 70, London: Pitman, 98–138 & 154–178; 1982.
5. *Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 7. С. 3– 20.
6. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
7. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc.; 2002.
8. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag; 1988.
9. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* "Strange Term" in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140.
10. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 1. С. 13–50.

ON ATTRACTORS OF REACTION–DIFFUSION EQUATIONS IN A POROUS ORTHOTROPIC MEDIUM

K. A. Bekmaganbetov[a,b], V. V. Chepyzhov[c,d], and G. A. Chechkin[b,e,f]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[b] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[c] *Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[d] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[e] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[f] *Institute of Mathematics with Computing Center – Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper we study a system of reaction–diffusion equations in a perforated domain with rapidly oscillating terms in the equation and in the boundary conditions. A nonlinear function in the equations may not satisfy the Lipschitz condition and hence, the uniqueness theorem for the corresponding initial–boundary value problem for the considered system of reaction-diffusion equations may not be satisfied. It was proved that the trajectory attractors of this system weakly converge in the corresponding topology to the trajectory attractors of the homogenized reaction-diffusion system with a “strange term” (potential).

Keywords: attractors, homogenization, reaction-diffusion equation, nonlinear equations, weak convergence, perforated domain, rapidly oscillating terms, strange term