ОБ УСРЕДНЕНИИ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ ОБЛАСТИ

В.В. Чепыжов
chep@iitp.ru

УДК 517.957+517.955.8

Рассматривается система реакции-диффузии в области с периодической перфорацией, которая содержит быстро осциллирующие члены в уравнениях системы и в граничных условиях. Нелинейные члены, входящие в уравнения, могут не удовлетворять условию Липшица. Доказано, что траекторные аттракторы рассматриваемой системы реакции-диффузии сходятся в сильной топологии к траекторному аттрактору соответствующей усредненной системы, которая содержит дополнительный “странный” член (потенциал).

Ключевые слова: траекторный аттрактор, усреднение, система реакции-диффузии

On homogenization of attractors for reaction-diffusion systems in porous domain

We consider a reaction–diffusion system in a perforated domain with rapidly oscillating terms in the equation and in the boundary conditions. A nonlinear function in the equations may not satisfy the Lipschitz condition. It is proved that the trajectory attractors of this system converge in the corresponding strong topology to the trajectory attractors of the homogenized reaction–diffusion system with a “strange term” (potential).

Keywords: trajectory attractor, homogenization, reaction-diffusion system

Усреднение аттракторов систем реакции-диффузии изучалось авторами этих тезисов в недавних работах [1,2,3], где можно также прочитать обзор результатов, исторические справки, а также обширную литературу по данной теме. В частности в работах [1,3] рассматривалось скалярное уравнение реакции-диффузии в области с периодической перфорацией.

Аттракторы описывают поведение решений изучаемых диссипативных нелинейных эволюционных уравнений, когда время стремится к бесконечности. Аттракторы включают в себя наиболее важные предельные инвариантные объекты динамических систем, т.е., семейства траекторий, которые отражают финальную эволюцию модели с этими эволюционными уравнениями.

Теория траекторных аттракторов для диссипативных уравнений с частными производными была развита в книге [4]. Этот подход особенно эффективен при изучении долговременного поведения решений эволюционных уравнений, для которых не доказаны теоремы о единственности решений соответствующих смешанных краевых задач или задач Коши (например, для трехмерной системы Навье-Стокса) или эти теоремы не выполнены (например, для общей системы реакции-диффузии, рассмотренной в данной публикации, если нелинейные функции, входящие в систему не удовлетворяют условию Липшица).

Исследование было поддержано грантом Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP14869553).

Чепыжов Владимир Викторович, д.ф.-м.н., гл.н.с., Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН (Москва, Россия); Vladimir Chepyzhov (Institut for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia)

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, G_0 – область, принадлежащая кубу $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ и диффеоморфная шару. Для целочисленных векторов $j \in \mathbb{Z}^3$ определим точки $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$ и области $G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^3 G_0$. Ведем область $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{3}\,\varepsilon\} \subset \Omega$ и множество допустимых мультииндексов $\Upsilon_\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^3 : G_\varepsilon^j \cap \overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset \right\}$.

В перфорированной области $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G}_\varepsilon$ где $G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j$ изучается следующая смешанная краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^3 B\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^3}\right) u_\varepsilon = 0, & x \in \partial G_\varepsilon^j, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, \ldots, u_\varepsilon^N)^\top$ – неизвестная вектор-функция, $f = (f^1, \ldots, f^N)^\top$ – нелинейная вектор-функция, a – скалярная функция, $g = (g^1, \ldots, g^N)^\top$ – вектор-функция правых частей, и λ – положительная $N \times N$-матрица, ν – вектор единичной внешней нормали к границам областей G_ε^j.

В изучаемой задаче малый параметр ε характеризует диаметр полостей перфорации G_ε^j, а величина ε^{-1} – скорость осцилляции коэффициентов системы. Нелинейная вектор-функция $f(u)$ может не удовлетворять условию Липшица по переменной u, поэтому теорема единственности для соответствующей смешанной краевой задачи может не выполняться.

Предполагается, что функции $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеют средние при $\varepsilon \to 0+$ в пространствах $L_{\infty,*w}(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)^N$, соответственно.

В граничных условиях на границах полостей ∂G_ε^j стоит диагональная матрица $B = B(x,y)$ с положительными ограниченными элементами, которые являются 1-периодическими функциями по переменной y.

Рассматриваемая система имеет слабое решение (траекторию) $u(x,t)$, $t \geq 0$, при любом начальном условии $u_0(x) \in L_2(\Omega_\varepsilon)^N$. На пространстве всех траекторий рассматривается трансляционная полугруппа $\{T(h),\ h \geq 0\}$, действующая по формуле: $T(h)u(t,x) = u(t+h,x)$, $t \geq 0$. Известно, что при любом ε построенная полугруппа имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в соответствующей сильной топологии (см. [2,4]).

Доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ рассматриваемой системы реакции диффузии в перфорированной области сходится в сильной топологии при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ соответствующей усредненной системы реакции диффузии в области Ω без перфорации, которая содержит некоторый дополнительный “странный” член (потенциал).

Работа выполнена совместно с К.А. Бекмаганбетовым и Г.А.Чечкиным.

Литература

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Attractors and a “strange term” in homogenized equation // C.R. Mécanique **348**:5 (2020), 351–359.
2. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Strong convergence of trajectory attractors for reaction-diffusion systems with random rapidly oscillating terms // Commun. Pure Appl. Anal. **19**:5 (2020), 2419–2443.
3. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* “Strange term” in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain // Chaos Solitons Fractals **140** (2020), Article 110208.
4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics, Am. Math. Soc., Providence, RI, 2002.