Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

10–14 ноября 2025 г.

Тезисы докладов

Международный математический центр
в Академгородке

Новосибирск • 2025

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 10–14, 2025

Collection of Abstracts

MATHEMATICAL CENTER IN AKADEMGORODOK

International Mathematical Center
in Akademgorodok

Novosibirsk • 2025

Содержание

I. Пленарные доклады

Равномерные конструкции в теории вычислимости

М. М. Арсланов

В теории вычислимости принято отличать "равномерные конструкции"от "неравномерных". Пусть задана эффективная нумерация некоторой совокупности множеств натуральных чисел. Построение по заданным из этой совокупности множествам определенных множеств *равномерно*, если существует эффективная процедура, которая позволяет определить индексы искомых множеств по индексам заданных множеств.

Часто равномерность конструкции используется (с привлечением теоремы рекурсии или ее вариантов) для получения новых результатов проведением дополнительных построений. Неравномерные конструкции комбинаторно более сложные. Например, в доказательстве Соара и Стоба [R.I.Soare, and M.Stob. Relative computable enumerability/ In: J.Stern, editor, Proceedings of the Herbrand symposium, Logic Colloquium'81, pp.299-324. North Holland, 1982] существования над каждым (по тьюринговой сводимости) низким невычислимым вычислимо перечислимым (для краткости, в.п.) множеством вычислимо перечислимого относительно него множества, тьюринговая степень которого не содержит в.п. множеств, авторам понадобилось построить два множества, одно из которых обладает требуемым свойством (авторы в этой же статье отметили, что их цель не может быть достигнута равномерной конструкцией). Иногда отсутствие равномерной конструкции является аргументом в пользу предположения о несуществовании множества с заданными свойствами.

В докладе для ряда структурных свойств совокупностей в.п.степеней и степеней, принадлежащих конечным уровням иерархии Ершова, обсуждаются вопросы существования или отсутствия равномерных конструкций.

Подгруппы Бореля и их касательные алгебры для групп автоморфизмов аффинных преобразований

И. В. Аржанцев

Доклад основан на результатах совместных работ с М.Г.Зайденбергом. В первой части мы рассмотрим подгруппы Бореля,то есть максимальные связные разрешимые подгруппы, в группах автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий. Будет показано, что группа автоморфизмов невырожденной аффинной торической поверхности содержит подгруппы Бореля двух типов. Подгруппы одного типа всегда сопряжены. Мы находим критерий сопряженности подгрупп разных типов. Доказательства этих результатов используют теорию действий групп на деревьях Басса-Серра. Вторая часть доклада посвящена изучению разрешимых подалгебр в касательной алгебре группы автоморфизмов. Мы определяем интегрируемые подалгебры Бореля и доказываем, что это в точности касательные алгебры подгрупп Бореля. Приводятся примеры, когда интегрируемая подалгебра Бореля не является подалгеброй Бореля, то есть максимальной разрешимой подалгеброй. Детально изучается случай касательной алгебры группы автоморфизмов аффинного пространства размерности не выше 3.

Исследования поддержаны грантом РНФ 25-11-00302.

Литература

[1] Ivan Arzhantsev and Mikhail Zaidenberg, Borel subgroups of the automorphism groups of affine toric surfaces, arXiv:2507.09679.

[2] Ivan Arzhantsev and Mikhail Zaidenberg, Borel subalgebras of Lie algebras of vector fields, arXiv:2510.17223.

НИУ ВШЭ, Москва (Россия)
E-mail: arjantsev@hse.ru

О структурах степеней для позитивных бинарных отношений

Н. А. Баженов

Пусть R и S—бинарные отношения на множестве натуральных чисел ω. Говорят, что всюду определенная функция $f(x)$ *сводит* R к S, если для любых $x, y \in \omega$ выполнено:

$$(x \; R \; y) \iff (f(x) \; S \; f(y)).$$

Если функция f вычислима, то говорят, что R *вычислимо сводится* к S. Если f примитивно рекурсивна, то R *примитивно рекурсивно сводится* к S. Систематическое изучение вычислимой сводимости для позитивных отношений эквивалентности было начато Ю. Л. Ершовым в 1970-е годы.

В докладе приводится обзор недавних результатов, связанных со сводимостями для позитивных эквивалентностей и позитивных предпорядков. Основное внимание сосредоточено на элементарных теориях соответствующих структур степеней.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Стройные частичные порядки и строго позитивные логики доказуемости

Л. Д. Беклемишев

Строго позитивные логики доказуемости возникли для аксиоматизации тождеств модальных алгебр, описывающих свойства схем рефлексии в формальной арифметике и её расширениях. Отношение порядка "A влечет непротиворечивость B"приводит к естественным системам ординальных обозначений, используемым в теоретико-доказаельственном анализе расширений арифметики. Частичный порядок называется стройным (well-partial ordering), если в нем нет бесконечных убывающих цепей и бесконечных антицепей. Такие порядки возникают в алгебре, комбинаторике, теории алгоритмов и других областях. В теории доказательств стройные порядки играют роль богатого источника простых комбинаторных утверждений, не доказуемых в достаточно сильных теориях.

В докладе мы опишем естественное соответствие между некоторыми известными в комбинаторике и теории доказательств стройными частичными порядками и строго позитивными логиками доказуемости. Это соответствие, в частности, проливает свет на роль таких порядков при анализе формальных теорий предикативной силы.

О пространствах непрерывных функций

Ю. Л. Ершов, М. В. Швидефски

В докладе пойдёт речь о недавних результатах, связанных с сохранением ряда свойств топологических пространств при переходе к пространствам непрерывных функций, наделённых той или иной топологией, которые представлены в монографии первого автора [**1**], а также в работах [**2**]–[**4**].

Например, справедлива следующая

Теорема. *Для T_0-пространства Y и для I-системы H равносильны следующие утверждения:*

(1) Пространство Y является H-собранным.
(2) Пространство $C_I(X, Y)$ непрерывных функций из X в Y, наделённое топологией Исбелла I, является H-собранным для некоторого (для любого) c-компактного T_0-пространства X.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00075), а также в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0012).

Литература

[1] Ю. Л. Ершов, *Топология для дискретной математики*, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.
[2] Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky, On function spaces, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 17 (2020), pp. 999–1008, https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.074.
[3] Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky, On function spaces. II, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 19(2) (2022), pp.815–834, https://doi.org/10.33048/semi.2021.19.069.
[4] Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky, On function spaces. III, *Lobachevskii J. Math.* 45(4) (2024), pp.1819–1824, https://doi.org/10.1134/S199508022460136X.
[5] M. I. Kudryashova, M. V. Schwidefsky, Properties of function spaces, *Siberian Math. J.*, accepted for publication.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: ershov@math.nsc.ru, m.schwidefsky@g.nsu.ru

Теоретико-модельные свойства йонсоновских теорий и их классов моделей

А. Р. Ешкеев

Доклад посвящен теоретико-модельным свойствам йонсоновских теорий как специального подкласса индуктивных (вообще говоря, неполных)теории и формируемому на их основе теоретико-модельному аппарату. Представляются результаты о совершенности, категоричности, стабильности йонсоновских теорий, а также обобщения ряда других понятий и классических результатов, известных для полных теорий, на случай йонсоновских теорий. Отдельно рассматриваются специальные модели и существенные подклассы моделей рассматриваемых теорий, уточняются условия существования и единственности, а также условия сохранения теоретико-модельных свойств при расширениях и вложениях.

Исследование профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489523).

Карагандинский Национальный Исследовательский Университет им. Е.А.Букетова (Казахстан)
E-mail: aibat.kz@gmail.com

Алгоритмические преобразования и универсальность классов алгебраических структур

И. Ш. Калимуллин

Доклад посвящен преобразованиям алгебраических структур, сохраняющих их алгоритмические свойства. Особую роль в представленных результатах будут играть линейно упорядоченные структуры, то есть алгебраические структуры, одним из сигнатурных предикатов которых является отношение линейного порядка. В докладе будет продемонстрировано, что любая алгебраическая структура может быть преобразована в линейно упорядоченную с сохранением многих, но далеко не всех алгоритмических свойств. На основе полученных результатов будет проведена попытка обобщить понятие универсальности классов структур, введенное в работе Хиршфельдта - Хусаинова - Шора - Слинко (2002).

Продолжение частичных автоморфизмов в конечных турнирах

К. Ж. Кудайбергенов

Обсуждается вопрос о возможности продолжения частичного автоморфизма конечного турнира (графа спектрального вида) до автоморфизма некоторого его конечного расширения и дается оценка размера такого расширения.

Институт Математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)
E-mail: kanatkud@gmail.com

Теория моделей обогащенных булевых алгебр

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

Доклад посвящен изучению обогащённых булевых алгебр: булевых алгебр с выделенными идеалами, подалгебрами и автоморфизмами. Особое внимание уделяется теоретико-модельным свойствам булевых алгебр с выделенными подалгебрами. В частности, исследуются булевы алгебры с выделенными подалгебрами, которые являются неподвижными подалгебрами автоморфизмов.

Подалгебра $\mathcal{B}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ называется подалгеброй ширины n, если под любым атомом подалгебры $\mathcal{B}$ лежат не более n атомов алгебры $\mathcal{A}$ и любой атом алгебры $\mathcal{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathcal{B}$. Подалгебра $\mathcal{B}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ называется плотной, если $\mathcal{A} = sub_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, F(\mathcal{A}))$—наименьшая подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, содержащая в себе множество $\mid \mathcal{B} \mid$ и идеал Фреше $F(\mathcal{A})$ булевой алгебры $\mathcal{A}$. Введена формульная характеристика $Sp(\mathcal{A})$ булевых алгебр с выделенной подалгеброй.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$— суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $Sp(\mathcal{A}) = Sp(\mathcal{B})$.*

Теорема 2. *Существует континуум попарно элементарно неэквивалентных суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины, элементарные теории которых имеют простую, но не имеют счетно-насыщенной модели.*

Теорема 3. *Существует континуум попарно элементарно неэквивалентных суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины, элементарные теории которых не имеют простой модели. Заметим, что у каждой булевой алгебры с выделенной подалгеброй из Теорем 2 и 3 выделенная подалгебра изоморфна самой булевой алгебре, причем почти с ней совпадает.*

Литература

[1] Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В., Суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, теория которой не имеет простой модели, *Сиб. матем. журн.*, **66**:3 (2025), 506—522; *Siberian Math. J.*, **66**:3 (2025), с.749—762.

[2] Пальчунов Д.Е., Трофимов А.В. Теории булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющие простой модели. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 526. № 6.

ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: palch@math.nsc.ru

Об одной гипотезе Колье-Телена

И. А. Панин

Рассмотрим кольцо дискретного нормирования R смешанной характеристики $(p, 0)$, где $p \neq 2$. Пусть A — это кольцо многочленов над R от нескольких переменных. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, и O — соответствующее локальное кольцо. Пусть f — обратимый элемент в кольце O. Пусть n — натуральное число, большее единицы. Мы доказываем, что если f представим в виде суммы n квадратов над полем частных K кольца O, то f представим в виде суммы n квадратов уже над самим кольцом O.

Данный результат подтверждает одну гипотезу Колье-Телена. Отметим, что для локального регулярного кольца, содержащего поле характеристики, не равной двум, гипотеза доказана в работах И.А.Панина, К.И.Пименова и Ш.Скуле.

Два уровня выразительности логики первого порядка

М. Г. Перетятькин

Универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий реализуется на основе специального комплекса преобразований теорий. Среди этих преобразований есть главное звено универсальной конструкции, главное звено процедуры редукции бесконечных сигнатур к конечным, а также несколько элементарных звеньев преобразования конечных сигнатур и переименования символов (среди них, часто цитируемая редукция конечной предикатной сигнатуры к графам), [**3**, Sec. 5.8], [**6**, Fig. 2]. Схема для указанного комплекса [**6**, Fig. 2] имеет три входа и один выход. Первый вход реализует процедуру редукции конечных сигнатур, второй вход реализует процедуру редукции бесконечных сигнатур к конечным, третй вход реализует процедуру редукции вычислимо аксиоматизируемых теорий перечислимых сигнатур к конечно аксиоматизируемым теориям (конечных сигнатур), т.е., универсальную конструкцию конечно аксиоматизируемых теорий. Указанный набор элементарных преобразований и их комбинаций (в определённых сочетаниях) можно охарактеризовать словами *унифицирующие преобразования теорий.* Общей целью данных преобразований является сведение к малым сигнатурам: к бинарному предикату, к бинарной функции, или к двум унарным функциям. Произвольная конечная богатая сигнатура является расширением (в определённом смысле) одной из этих трёх сигнатур. Тем самым, гарантируется существование целевой теории с заданными свойствами в любой конечно богатой сигнатуре, т.е., имеет место факт унифицированности для решений поставленной проблемы, чем и объясняется выбор термина "унифицирующие преобразования".

Схема [**6**, Fig. 2] включает два типа преобразований, различающиеся отсутствием/наличием нестандартных фрагментов. На основе такой характеристики определены два естественных уровня выразительности логики первого порядка, а именно, *финитарный* уровень с модельно-биективными представлениями (который также можно назвать *финитарно-комбинаторным*), и *инфинитарный* уровень с нестандартными фрагментами (также называемый *вычислительным*). К финитарному уровню относятся процедуры редукции конечных сигнатур, декартовы и факторно-декартовы расширения теорий. К инфинитарному уровню относятся процедуры редукции бесконечных сигнатур к конечным и универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий. В качестве технического окружения, в [**7**] представлен ряд семантических слоёв, имеющих значимость для данного направления.

Ключевым моментом поиска подходов к решению проблемы характеризации выразительной силы логики предикатов является естественная идея определить *финитарный слой* $FinL$, включив в него теоретико-модельные свойства, сохраняемые финитарными методами первого порядка, и *инфинитарный слой* $InfL$, включив в него теоретико-модельные свойства, сохраняемые инфинитарными методами первого порядка. В определениях слоёв $FinL$ и $InfL$ используются некоторые (специально подобранные) множества финитарных и инфинитарных методов, поскольку множества всех финитарных и всех инфинитарных методов определены неформально и поэтому не могут быть использованы в изложении. Важная особенность принятого подхода состоит в том, что в качестве отношения идентичности слоёв теоретико-модельных свойств применяется их сравнение *по модулю представительного слоя* [**5**, Sec. 2]. По умолчанию используется реальный вариант понятия теоретико-модельного свойства, [**2**], в рамках регулярного расширения радикального подхода, т.е., предлагаемые утверждения характеризуют обобщённые алгебры Тарского–Линденбаума произвольных (как полных, так и неполных) теорий перечислимых сигнатур, [**2**].

Утверждение 1. [**2**] *Финитарный семантический слой $FinL$ включает все теоретико-модельные свойства.*

Утверждение 2. [**7**], [**2**] *Процедура редукции конечных сигнатур $T \mapsto \mathsf{Redu}(T, \sigma)$, σ – заданная конечная богатая сигнатура, сохраняет тип вычислимого изоморфизма алгебры Тарского–Линденбаума и все теоретико-модельные свойства соответствующих полных расширений указанных теорий.*

Утверждение 3. [**7**], [**2**] *Для исчислений предикатов $PC(\sigma_1)$ и $PC(\sigma_2)$ любых двух конечных богатых сигнатур σ_1 и σ_2 существует вычислимый изоморфизм между алгебрами Тарского–Линденбаума $\mu\colon \mathcal{L}(PC(\sigma_1)) \to \mathcal{L}(PC(\sigma_2))$, сохраняющий все теоретико-модельные свойства.*

Утверждение 4. *Слой $UniL$ теоретико-модельных свойств, сохраняемых универсальной конструкцией, совпадает со слоем $I2fL$ свойств, сохраняемых процедурой редукции бесконечных сигнатур к конечным.*

Обоснование. Два указанных преобразования используют в качестве основы одно общее определение для инфинитарного слоя MQL (через класс *квазиточных интерпретаций*) и поэтому сохраняют идентичные слои теоретико-модельных свойств. □

Утверждение 5. *Стандартная версия универсальной конструкции, см.* [**3**, Th.0.6.1, Th.6.1.1], *имеет максимально возможную силу.*

Обоснование. По сути, универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий является преобразованием из класса вычислимо аксиоматизируемых теорий различных перечислимых сигнатур в класс конечно аксиоматизируемых теорий заданной конечной богатой сигнатуры, и поэтому такую конструкцию можно рассматривать как улучшенный вариант процедуры редукции бесконечных сигнатур к конечным. Согласно утверждению 4, два указанных преобразования сохраняют одинаковые слои теоретико-модельных свойств. Нелогично ожидать, что возможна версия универсальной конструкции, которая контролировала бы больше теоретико-модельных свойств чем это может делать процедура редукции бесконечных сигнатур к конечным. Это может служить неформальным подтверждением максимальности силы существующей версии универсальной конструкции. □

В качестве глобальных утверждений для введённых уровней выразительности получены две прямые формулы для структуры алгебры Тарского–Линденбаума исчисления предикатов конечной богатой сигнатуры над финитарным и инфинитарным слоями теоретико-модельных свойств; при этом имеется утверждение, устанавливающее некоторый эффективный переход между этими двумя представлениями, см. [**4**] (Для сравнения, проблема характеризации алгебры Тарского–Линденбаума исчисления предикатов конечной богатой сигнатуры была поставлена Тарским в конце 1930-х годов и решена Ханфом в 1975 году, см. [**1**, p. 587]). Полученные глобальные формулы выражают в концентрированном виде наиболее общую информацию о выразительной силе логики предикатов первого порядка. В частности, локальные утверждения, такие как процедуры редукции конечных сигнатур и универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий, являются непосредственными следствиями этих формул. С другой стороны, сами глобальные формулы получаются в результате некоторой сборки из локальных утверждений соответствующих уровней (процедуры редукции конечных сигнатур и универсальной конструкции). Таким образом, главные результаты финитарного и инфинитарного уровня выразительности, представленные в глобальной форме, являются более значимыми. Без этого картина выразительных возможностей логики предикатов первого порядка была бы неполной. Важный момент данного направления состоит в том, что, хотя определение понятия реального теоретико-модельного свойства

[**7**] использует неформальную аргументацию, тем не менее, получаемые результаты с использованием выражения "все теоретико-модельные свойства"оказываются математически точными утверждениями.

В докладе излагается некоторый общий взгляд на результаты по выразительной силе логики первого порядка в рамках концептуального подхода на основе комбинаторики первого порядка. К настоящему времени в этом направлении достигнут заметный прогресс и получены ответы на многие естественные вопросы, касающиеся выразительной силы логики первого порядка.

Литература

[1] Hanf W. *The Boolean algebra of Logic*, Bulletin AMS, 31 (1975), pp.587–589.

[2] Перетятькин М.Г. *Конечно аксиоматизируемые теории.* Новосибирск, МИОО, Научная книга, 1997, p.318.

[3] Peretyat'kin M.G. *Global structure of predicate calculus in a finite rich signature over finitary and infinitary lists of model-theoretic properties*, Maltsev's Meeting, Novosibirsk, 2–6 May 2010, Abstracts, pp.22–23.

[4] ПеретятькинМ.Г. *Комбинаторика первого порядка и теоретико-модельные свойства различимые на парах взаимно интерпретируемых теорий*, Математические труды, 18, No 2 (2015), с.61–92.

[5] Peretyat'kin M.G. *Fundamental significance of the finitary and infinitary semantic layers and characterization of the expressive power of first-order logic*, Mathematical journal, 17, No 3 (2017), pp.91–116.

[6] Перетятькин М.Г. *Виртуальные алгебраические изоморфизмы между исчислениями предикатов конечных богатых сигнатур*, Алгебра и логика, 60, No 6 (2021), с.587–611.

[7] Перетятькин М.Г. *Декартовы расширения и определение понятия теоретико-модельного свойства*, Алгебра и логика, в публикации (2025), p.26.

Институт Математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)
E-mail: m.g.peretyatkin@mail.ru

Научное наследие Ларисы Львовны Максимовой. Работы Ларисы Львовны Максимовой и ее коллег в области неклассической логики

В. В. Рыбаков, В. Ф. Юн

Лариса Львовна Максимова (5.11.1943–4.04.2025)–ведущий специалист в области неклассических логик и выдающаяся представительница алгебро-логической школы А. И. Мальцева. Методы, разработанные Ларисой Львовной Максимовой, оказали значительное влияние на исследования в области неклассических логик и имеют огромное значение для развития математической логики.

В докладе будут представлены результаты коллег Л.Л. Максимовой — Рыбакова В.В., Юн В.Ф., работавших также под её руководством. Полученные результаты имеют приложения в сфере искусственного интеллекта.

Институт Математики и Фундаментальной информатики СФУ, Красноярск; Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: vladimir$_r$ybakov@mail.ru, yun@math.nsc.ru

Научное наследие Ларисы Львовны Максимовой. Работы Ларисы Львовны Максимовой и ее коллег в области неклассической логики

А. М. Старолетов

Естественной задачей в теории представлений конечных групп является описание множества собственных значений образов элементов данной группы. В докладе будет обсуждаться решение этой задачи для симметрических и знакопеременных групп, а также смежные результаты и проблемы.

Литература

[1] A. Staroletov, On eigenvalues of permutations in irreducible representations of Sn. arXiv:2501.17571.

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: staroletov@math.nsc.ru

Two problems of Ershov in the numberings theor

S. Badaev

We say that a surjective mapping $\nu : \omega \mapsto \mathcal{F}$ is a *computable numbering* of a family $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_n^{-1}$ of sets of the Ershov hierarchy if

$$\{< x, m >: x \in \nu(m)\} \in \Sigma_n^{-1}.$$

The notion of reducibility for numberings is presupposed to be used in the talk. A Rogers semilattice $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ stands for the set of equivalent classes of the computable numberings of $\mathcal{F}$ ordered by reduction of numberings.

Our goal is to discuss history and the current state of studying two problems of Yu.L.Ershov concerning the following invariants of the Rogers semilattices $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ when $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_n^{-1}$:

- cardinality of $\mathcal{R}(\mathcal{F})$,
- possible number of minimal elements in $\mathcal{R}(\mathcal{F})$.

Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)

New Results for Algebraic Lattices

W. Dziobiak

Algebraic lattices with complete lattice homomorphisms as morphisms form a category. On the other hand, join semilattices with join-preserving homomorphisms $f : S \to S'$ which satisfy the following condition also form a category: for each $a \in S$, if $f(a) \leq b \vee c$, then there exist $d, e \in S$ such that $a \leq d \vee e$ and $\{f(d), f(e)\}$ refines $\{b, c\}$ in terms of the partial order of S'.

The two categories are dually equivalent in the sense of Category Theory. The goal of the talk is to show some benefits of this duality for Lattice Theory, mostly for algebraic lattices.

University of Puerto Rico

Friedman-Stanley embedding of graphs in trees

D. Gonzalez, J. Knight

Friedman and Stanley developed the notion of *Borel reducibility* and illustrated its use in comparing "classification problems" for some familiar classes of countable structures. Using known embeddings due to Lavrov, Mal'tsev, and others, they showed that undirected graphs, fields of fixed characteristic, and 2-step nilpotent groups lie on top. They descrubed embeddings of graphs in labeled trees and linear orderings, showing that those classes are also on top. We focus on the Friedman-Stanley embedding of graphs in labeled trees. For many embeddings, the fact that the embedding is $1-1$ on isomorphism types is explained by the existence of simple formulas that, uniformly, interpret the input structure in the output structure. For the embedding of graphs in labeled trees, Harrison-Trainor and Montalbán showed that this is not the case. Gonzalez and Rossegger showed that the embedding preserves Scott complexity. We refine this, showing that for an X-computable ordinal, the input graph $\mathcal{A}$ has an X-computable $\Pi_{\alpha+1}$ Scott sentence iff the output tree $T_{\mathcal{A}}$ does. Given a computable infinitary Scott sentence for $\mathcal{A}$, we use forcing to obtain one for $T_{\mathcal{A}}$.

Comparing presentations of compact spaces

A. Melnikov

We propose a new framework that extends the theory of computable dimension (autodimension) to compact metric spaces. In contrast with computable algebraic structures, the relation "being compitably homeomorphic"is a pre-order rather than an equivalence relation on computable presentations of a given space.

The talk is based on joint work with Greenbrrg, Scott, and Turetsky.

Measuring relative effective content

K. M. Ng

The notion of a Turing reduction is one of the central notions in computability theory. The robustness of this notion means that it provides the standard tool for analysing the algorithmic content of different objects. However there are different reducibilities which may be more suitable in a different setting. We will discuss several - perhaps less well-known - reducibilites and some survey recent results about them.

Beginnings of definability theory

A. L. Semenov, S. F. Soprunov

The main objective of our talk is to draw attention to the theory of definability, which offers remarkable research prospects due to the fact that throughout the development of mathematical logic it has constantly been "out of focus" of the main attention of researchers. The beginnings – "launchs" of research occurred several times. Today we propose a re-launch based on a set of open problems in our talk and more – outside.

Among the beginnings of the past, we point to: the research of the 19th century a summit of which was the "Padoa method"; the "golden age" of mathematical logic in 1920-30s – the results of Godel and Tarski, the last continued strong interest in definability for the rest of his life; 1959 – the Lars Svenonius theorem, which established the universality of Padoa method and opened the Erlangen program for the Geometry of Logic; homogeneous structures: 1964 – the theorem of Claude Frasnay, 1991 Simon Thomas' result, his hypotesis and followed research; 2000s – our research of non-homogeneous structures.

The report will provide initial invariant definitions: definability, definability space, definability lattice of structure. The relations between definability and decidability, hierarchies within the same definability space in terms of the number of arguments of the generators and the quantifier height are considered. The basic example and the first result on the definability lattice is the 5-element lattice for the order of rational numbers (Huntington – Frasnay); the effect of extending with a constant is impressive. The Svenonius theorem makes it possible to study definability lattices by constructing lattices of automorphism groups of elementary extensions of structures.

Results and open problems: - The Rabin – Elgot problem of the existence of a maximal space with a decidable theory. The monadic case was solved by Soprunov. The elementary case is open. - Thomas problem for homogeneous structures: prove the finiteness of the lattice. - Quantifier hierarchy: find natural examples with depth 3, 4,...

Non-homogeneous structures: - Discrete homogeneous: the lattice for integers with successor. Open questions on lattices: naturals with successor, infinite tree of degree 3, shifts on checkered paper. - The order of integers: A fragment of the structure, the existence of elements outside the fragment.

Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia)
E-mail: alexei.semenov@math.msu.ru

On simple Jordan superalgebras

I. Shestakov

It's a joint work with Efim Zelmanov.

We prove that a simple unital Jordan superalgebra of arbitrary dimension belongs to the list of known simple unital superalgebras or satisfies a certain polinomial identity.

University of São Paulo (Brazil), IMC of Southern University of Science and Technology (China)

The computational aspects of the theory of weak probability spaces

S. O. Speranski

In probability logic, a fundamental role is played by weak probability spaces, in which measures are required to be finitely additive, but not necessarily countably additive. The present talk will be concerned with the (elementary) theory of weak probability spaces and its computational aspects.

To give more details, let us fix a countable set of *variables*, intended to range over events in a given space. By a *basic μ-formula* we mean an expression of the form

$$f(\mu(\phi_1), \ldots, \mu(\phi_1)) \leqslant g(\mu(\phi_{m+1}), ..., \mu(\phi_{m+n}))$$

where f and g are polynomials with integer coefficients, $\phi_1), \ldots, \phi_{m+n}$ are Boolean combinations of variables. The *μ-formulas* are built up from the basic μ-formulas in the obvious way, as in first-order logic. Naturally, for a class $\mathcal{K}$ of spaces, the *theory of* $\mathcal{K}$ is the set of all μ-sentences true in every space in $\mathcal{K}$.

Next, call a μ-formula *flat* if each of its basic subformulas has the form

$$\mu(\phi) = \mu(\psi).$$

It turns out that even the flat fragment of the theory of weak probability spaces is Π^1_1-complete (as well as the full theory). Similar results can be obtained for various 'first-order' logics of probability (i.e., for languages analogous to those in [**1**]); see [**4**] and [**5**]. So in terms of closure ordinals (cf. [**2**]), many infinitary probabilistic calculi are as hard as possible: the corresponding closure ordinals coincide with ω_1^{CK}, which denotes the least non-constructive ordinal. In particular, this applies to various proof systems developed by Z. Ognjanović and his colleagues, like those in [**3**].

References

[1] Abadi M., Halpern J.Y. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability. *Information and Computation* 112(1), pp.1–36, 1994.

[2] Aczel P. An introduction to inductive definitions. In: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 739–782. Elsevier, 1977.

[3] Ognjanovi´c Z. (ed.). *Probabilistic Extensions of Various Logical Systems*. Springer, 2020.

[4] Speranski S.O. Sharpening complexity results in quantified probability logic. *Logic Journal of the IGPL* **33**(3), jzae114, 2025.

[5] Speranski S.O., Grefenshtein A.V. On the complexity of first-order logics of probability. *Izvestiya: Mathematics* 90(4), im9718, 2026. To appear.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow (Russia)
E-mail: katze.tail@gmail.com

Generalized Computability and Model Theory for Linguistic Structures

A. I. Stukachev

There is a remarkable list of mathematicians who contributed to both generalized computability theory and mathematical linguistics, including R. Montague, J. Barwise and Y. Moschovakis. In this talk, we discuss results of Yu.L. Ershov on approximation spaces and finite type functionals, which allow to construct generalized computable models for formal semantics (also known as Montague semantics) of natural languages, unifying generalized computability with mathematical linguistics. We survey our results from [1-4] and discuss some open questions.

References

[1] Stukachev, A.I. Interval extensions of orders and temporal approximation spaces // Siberian Mathematical Journal, 2021—V.62, №4,—pp.730–741.

[2] Burnistov, A. S., Stukachev, A. I. Generalized computable models and Montague semantics // Studies in Computational Intelligence, 2023,–V.1081,—pp.107–124

[3] Burnistov, A. S., Stukachev, A. I. Computable functionals of finite types in Montague semantics // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2024–V.21,—pp.1460–1472

[4] Penzina U., Stukachev A. Skolem functions and generalized quantifiers for negative polarity items semantics // Lecture Notes in Networks and Systems, 2025–V.1198,—pp.123–132

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: aistu@math.nsc.ru

Spectral theory of locally finite graphs

V. I. Trofimov

A graph is called locally finite if degrees of all its vertices are finite. For a locally finite graph Γ and a field F, eigenvalues and their corresponding eigenfunctions of Γ over F are defined as eigenvalues and their corresponding eigenfunctions of adjacency matrix of the graph Γ over the field F, acting in the natural way on the vector space over F of all F-valued functions on the vertex set $V(\Gamma)$ of Γ. In the talk, a theory of eigenvalues and eigenfunctions of infinite locally finite connected graphs over fields is given. A special emphasis will be placed on the case of fields of characteristic 0. One of the consequences of the theory is that for an arbitrary infinite locally finite connected graph Γ, there are rational functions $R_v(x) \in \mathbb{Q}(x)$, $v \in V(\Gamma)$, where $R_w(x) \neq 0$ for some $w \in V(\Gamma)$, such that for any $\lambda \in \mathbb{C}$ which is not a pole of any of $R_v(x)$, $v \in V(\Gamma)$, and is not a zero of at least one of $R_v(x)$, $v \in V(\Gamma)$, the function $v \mapsto R_v(\lambda)$ is an eigenfunction of Γ over $\mathbb{C}$, corresponding to the eigenvalue λ. In particular, only algebraic numbers can be non-eigenvalues of Γ over $\mathbb{C}$.

IMM UB RAS, UMC, UrFU, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: trofimov@imm.uran.ru

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Разработка инструментов анализа поведения JVM на основе событий Garbage Collector

Д. С. Авдеев

Разработка инструмента для визуализации и анализа работы сборщика мусора (GC) в JVM представляет собой важную задачу для компаний и их развития. Платформа Java занимает лидирующие позиции на рынке серверных решений, что делает средства диагностики нештатных ситуаций крайне востребованными. Проблемы могут возникать на разных уровнях, и часто аномалии, влияющие на поведение приложения, связаны с процессами сборки мусора.

Для решения проблемы предлагается реализовать инструмент анализа поведения JVM с возможностью изменения конфигураций. Возможность поддержи пользовательских конфигураций позволит пользователям получить прозрачный путь агрегации данных из логов, а интеграция с нейронной сетью позволит получить результаты, которые сократят время анализа.

Целью работы является данной работы является разработка инструментов анализа поведения JVM на основе событий Garbage Collector.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: выполнен обзор аналогов, разработана архитектура приложения, разработана серверная часть, проведен сбор данных для обучения модели.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.avdeev1@g.nsu.ru

Исследование эффективности моделей компьютерного зрения для детекции и классификации позвонков на рентгеновских снимках

И. А. Архипов

Разработка алгоритмов для автоматического анализа рентгеновских снимков позвоночника является важной задачей в современной медицинской диагностике. Автоматическое обнаружение и анатомическая маркировка позвонков позволяют существенно сократить время, затрачиваемое специалистом на рутинные операции, и минимизировать влияние субъективного фактора. Это особенно ценно при проведении массовых обследований и необходимости быстрого предварительного анализа [1].

Сложность задачи автоматической маркировки позвонков существенно зависит от вида рентгенограммы и представленных на ней анатомических структур. В работе исследованы различные типы снимков, включая изображения шейного, грудного и поясничного отделов позвоночника, а также их комбинации. Особое внимание уделено анализу того, как различные алгоритмы справляются с особенностями каждого типа исследований.

В данной работе представлен подход к решению задачи совместного обнаружения и классификации позвонков на рентгеновском снимке. Были исследованы и реализованы различные алгоритмы на основе метода Mask R-CNN [2]. Для сравнительной оценки эффективности алгоритмов применялась F-мера, обеспечивающая сбалансированную оценку точности и полноты предсказаний. Детальный качественный анализ ошибок проводился с помощью матрицы ошибок.

В результате работы были получены и сравнены различные алгоритмы для обнаружения и классификации позвонков. Проведенное исследование и полученные результаты могут служить основой для дальнейшей разработки и интеграции в программные комплексы анализа медицинских изображений.

Литература

[1] Yeasmin M.N., Al Amin M., Joti T.J., Aung Z., Azim M.A. Advances of AI in image-based computer-aided diagnosis: A review // Array.—2024.—№23.

[2] He K., Gkioxari G., Dollar P., Girshick R. Mask R-CNN // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2020.—№42.—c. 386-397.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: i.arkhipov@g.nsu.ru

Реинжиниринг программных модулей ПО при помощи совместного анализа ЭЭГ и лицевого видео

В. О. Балашов

Активность лицевых мышц отражает психофизиологическое состояние человека, включая его склонности к заболеваниям. Современные исследования мимической активности часто совмещают анализ видеозаписей и нейрофизиологических сигналов (ЭЭГ) [1]. При этом практические барьеры возникают не в алгоритмах распознавания, а в инженерной интеграции: неоднородные форматы, несогласованные временные метки и слабая модульность инструментов усложняют сопровождение и повторяемость результатов. OpenFace 2.2.0 [2] – открытый набор инструментов для следования за лицевыми точками, оценки позы головы, действий мимических мышц и взгляда в реальном времени; его структура и утилиты подробно описаны в официальной документации.

В соответствии с вышеуказанной проблемой была поставлена цель работы – провести реинжиниринг отдельных модулей и интерфейсов OpenFace 2.2.0, чтобы упростить совместный анализ ЭЭГ и лицевого видео без вмешательства в алгоритмы распознавания. Опора идёт на классическое определение реинжиниринга (обследование и изменение системы для её «перевоплощения» в новую форму), а также практики инженерной стандартизации данных [3]. Для достижения этой цели необходимо выполнить краткий архитектурный обзор OpenFace 2.2.0 с выделением модулей, исполняемых утилит и зависимостей; систематизировать формат выходных данных (CSV) и сгруппировать поля по подсистемам (лицевые мышцы, поза тела, направление взгляда) с краткими пояснениями; подготовить проверенный пример запуска с объяснением ключевых аргументов.

Литература

[1] Koelstra S., Patras I. Fusion of facial expressions and EEG for implicit affective tagging. Image and Vision Computing, Volume 31, Issue 2, pp. 164-174, 2013. DOI: 10.1016/j.imavis.2012.10.002.

[2] OpenFace // github [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://github.com/TadasBaltrusaitis/OpenFace/ (дата обращения: 20.10.2025).

[3] Pernet C.R., Appelhoff S., Gorgolewski K.J. et al. EEG-BIDS, an extension to the brain imaging data structure for electroencephalography. Sci Data 6, Art number 103, 2019. DOI: 10.1038/s41597-019-0104-8.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.balashov1@g.nsu.ru

Разработка методов формализации бизнес-процессов с помощью онтологических моделей и LLM

М. С. Бирюля, Д. Е. Пальчунов

Для автоматизации анализа неструктурированных регламентирующих документов предлагается концепция программной системы, состоящей из двух модулей:

- **Модуль хранения и анализа.** Ядром модуля хранения является граф знаний, организация данных в котором определяется четырехуровневой онтологией представления знаний [1-2]. Эта модель разделяет информацию на уровни: от концептуальной схемы и формализованных бизнес-правил, до базы фактов-прецедентов и синтезируемых на их основе оценочных знаний. Аналитическое ядро системы сочетает дедуктивный анализ для верификации графа фактов на соответствие бизнес-правилам и индуктивный анализ для синтеза новых, оценочных знаний путем поиска скрытых закономерностей.
- **Модуль извлечения знаний.** Модуль извлечения знаний преобразует неструктурированный текст в структурированные JSON-объекты для наполнения графа. Для обеспечения надежности больших языковых моделей (LLM) предложен гибридный двухэтапный подход: на первом этапе низкоуровневые детекторы (NER, Temporal Extraction) выполняют пре-аннотацию текста; на втором — основная генеративная LLM синтезирует JSON, фокусируясь на семантических связях между аннотированными "якорями". Надежность синтеза обеспечивается синергией двух методов: дообучением модели на доменных данных для повышения семантической точности и применением ограниченной генерации на основе формальных грамматик (GBNF) для гарантии синтаксической корректности.

Заключение

Предложенная методология закладывает основу для интеллектуальных систем, способных превратить пассивные архивы документов в активный ресурс для принятия решений. Дальнейшие исследования будут направлены на программную реализацию и экспериментальную оценку прототипа.

Литература

[1] C. Naydanov, D. Palchunov and P. Sazonova, "Development of automated methods for the critical condition risk prevention, based on the analysis of the knowledge obtained from patient medical records,"2015 International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 2015, pp. 33-38, doi: 10.1109/SIBIRCON.2015.7361845.

[2] D. E. Palchunov and A. A. Yakobson, “Разработка интеллектуального помощника для подбора товаров в процессе диалога с пользователем,” Бизнес-информатика, vol. 18, no. 1, pp. 58-71, 2024.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: m.biryulya@g.nsu.ru
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: palch@math.nsc.ru

Разработка методов извлечения темпоральных и каузальных знаний из текстов естественного языка

Т. К. Боев

В данной работе представляется концепт программного средства, предназначенного для автоматического извлечения темпоральных и каузальных знаний из текстов на естественном языке. Методология работы программы включает следующие этапы:

- **Формирование n-местных предикатов.** Введенный текст анализируется программой Logic Text. Глаголы преобразуются в n-местные предикаты.
- **Введение констант-ситуаций и разложение предикатов.** Каждому глаголу присваивается уникальная константа-ситуация, что позволяет разложить n-местный предикат на n+1 двухместных предикатов.
- **Объединение ситуаций и выявление отношений между событиями.** Все выявленные ситуации из текста объединяются под одной «сверх-ситуацией», которая включает все индивидуальные события. В процессе объединения анализируются отношения:
  - Identity — тождественность объектов;
  - Include — включённость событий друг в друга;
  - Before/After — временная последовательность действий.
- **Формализация и выходной граф знаний.** На выходе программы формируется единая ситуация, содержащая все события текста.

В данной работе представлена концептуальная методология извлечения темпоральных и каузальных знаний из текстов на естественном языке. Дальнейшие исследования направлены на реализацию программного прототипа, экспериментальную оценку метода на реальных данных.

Литература

[1] Ненашева Е.О., Пальчунов Д.Е. *Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов.* //Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, 2017, т. 15, № 3, с. 49-63. DOI: 10.25205/1818-7900-2017-15-3-49-63

[2] Ненашева Е.О., Пальчунов Д.Е. *Разработка автоматизированных методов представления знаний о действиях и ситуациях.* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, № 3. с. 61–72. DOI 10.25205/ 1818-7900-2019-17-3-61-72

[3] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е *Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка.* // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. с. 64-73.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: t.boev@g.nsu.ru

Интеллектуальная система шаблонов для автоматической генерации индивидуальных тренировочных планов

Е. А. Брилькова

В последние годы растет интерес к персонализированным тренировочным программам и цифровым инструментам для их автоматического создания. Это связано с желанием пользователей экономить время, поддерживать мотивацию и повышать эффективность занятий. Каждый человек имеет свои цели, уровень подготовки, физиологические особенности и предпочтения. Автоматизированная система учитывает эти параметры и формирует безопасные и эффективные планы тренировок, адаптированные под конкретного пользователя [1].

Цель работы — создать интеллектуальную систему шаблонов, упрощающую и ускоряющую генерацию персонализированных программ. Семантический подход [2, 3] анализирует индивидуальные характеристики пользователя — уровень подготовки, цели и ограничения, что повышает точность и релевантность программ. Это делает систему гибкой и адаптивной к разным условиям.

Особое внимание уделено алгоритмам построения тренировок: реализованы два базовых шаблона. Первый формирует план на основе целей (например, выносливость или набор массы), физических данных — возраста, веса, роста, пола — и количества тренировочных дней. Второй создает отдельное занятие по заданным мышечным группам, позволяя пользователю выбирать акценты тренировки.

Для реализации использовались современные технологии: phpMyAdmin для базы данных упражнений; серверная часть на Django REST Framework для работы алгоритмов; фронтенд на React в стадии доработки с интуитивным интерфейсом.

Результатом стала отлаженная логика автоматической генерации персональных программ с возможностью расширения шаблонов, правил и интеграций. Система полезна как для пользователей, так и для фитнес-специалистов. Перспективы — развитие функционала, улучшение интерфейса и добавление рекомендаций по питанию.

Литература

[1] Салина Д.Е. Разработка модели базы данных фитнес-упражнений и ее наполнение с генерацией противопоказаний. МНСК-2025. Информационные технологии. Материалы 63-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2025.

[2] Yakhyaeva G.E. Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning. 2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory, KNOTH 2021, 2021, pp. 40—44.

[3] Малаева Е.Д., Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов.// Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21. № 1. с. 32–45.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.brilkova@g.nsu.ru

Разработка алгоритма рекомендаций на основе мультивекторного представления пользователя

Э. А. Вартазарян

21 век можно охарактеризовать временем стремительного развития технологий. Интернет активно заполняется информацией, в которой с каждым годом становится всё проще потеряться [1]. В целях облегчения поиска в интернете были разработаны алгоритмы рекомендации, упрощающие нахождение нужной информации за счёт некоторых знания о пользователе (или пользователях), чтобы результат поиска был наиболее подходящим. Классические реализации рекомендательных алгоритмов представляют пользователя и информацию в векторном виде и сравнивают их схожесть на основе различных метрик, например, косинусного расстояния [2]. Однако такой подход обладает рядом недостатков, в частности при длительном поиске одних данных они начинают замещать собой (или похожими) все другие потенциально интересные варианты, которые могут быть менее актуальны в данный момент, но всё же важны для пользователя.

Целью данной работы является разработка рекомендательного алгоритма, в основе которого будет лежать не классический подход представления пользователя, а мультивекторное представление, которое позволяет учитывать не только текущий интерес пользователя, но и весь спектр его интересов в конкретной области. Для реализации алгоритма в качестве предметной области была выбрана рекомендация мероприятий: концертов, мастер-классов, соревнований и т.п. В процессе работы алгоритм изменяет вектора пользователя, чтобы подстроить их под интересы пользователя, а мероприятия подбираться так, чтобы максимально соответствовать хотя бы какому-то интересу пользователя. Чтобы достичь поставленной цели были поставлены следующие задачи: исследование существующих алгоритмов, проектирование алгоритма, внедрение в приложение и тестирование.

В рамках проведенной работы разработан прототип рекомендательного алгоритма, который позволяет представить пользователя в виде нескольких векторов, которые отвечают за различные интересы пользователя. Также был разработан прототип мобильного приложения под операционные системы Android и iOS, который позволяет тестировать алгоритм, проверять его эффективность и выявлять ошибки.

Литература

[1] Palchunov D., Yakhyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEURWorkshop Proceedings, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

[2] Введение в рекомендательные системы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/intro-recsys

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.vartazaryan@g.nsu.ru

Технология Java Foreign Functions and Memory API и ее реализация на платформе Эльбрус

А. И. Гаан

Современные приложения всё чаще требуют тесной интеграции между высокоуровневым управляемым кодом и существующими библиотеками на нативных языках.

Для экосистемы Java это традиционно решалось при помощи Java Native Interface (JNI) - подхода, который как даёт широкие возможности, так и имеет свои проблемы: необходимость писать и поддерживать вспомогательной код на нативном языке, риск ошибок в управлении памятью, значительные накладные расходы при частых переходах между средами исполнения.

В Java 21 был представлен Foreign Functions & Memory API, который является более современным интерфейсом для взаимодействия с нативным кодом и управления памятью вне кучи JVM. Он ориентирован на безопасность типов, уменьшение копирований данных и упрощение семантики вызовов в сравнении с классическим JNI.

Цель данного исследования — провести рассмотрение механизмов Foreign Functions and Memory API применительно к задаче портирования компилятора Java под архитектуру «Эльбрус» и выделить ключевые архитектурные особенности, затрагиваюшие этот механизм.

Литература

[1] Нейман-заде М. И., Королёв С. Д. Руководство по эффективному программированию на платформе «Эльбрус». ЗАО «МЦСТ», 2024.

[2] Ким А. К., Перекатов В. И., Ермаков С. Г. Микропроцессоры и вычислительные комплексы семейства «Эльбрус». ЗАО «МЦСТ», 2013.

[3] JEP 454: Foreign Function & Memory API. URL: https://openjdk.org/jep/454.

[4] Документация по пакету java.lang.foreign. URL: https://docs.oracle.com/en/java/javase/21/docs/api/java.base/java/lang/foreign/package-summary.html.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.gaan@g.nsu.ru

Автоматизированная система интеллектуального анализа логов микросервисных приложений с интеграцией в платформы управления инцидентами

Д. Ю. Дронов

Рост масштабов распределённых микросервисов увеличивает объёмы логов, усложняя выявление инцидентов. Существующие инструменты (Splunk, ELK, Datadog) частично решают анализ, но не автоматизируют связь с управлением задачами. Требуется система, объединяющая интеллектуальный анализ логов и автоматическое взаимодействие с платформами управления инцидентами [1,2].

В рамках работы реализована модульная система, включающая следующие компоненты: модуль машинного обучения, выполняющий классификацию ошибок, определение критичности и обнаружение новых типов аномалий [3,4]; модуль интеграции, использующий REST API целевых платформ для автоматического создания, обновления и закрытия задач с учётом контекста инцидентов; базу знаний, предназначенную для накопления информации об инцидентах и дообучения моделей; интерфейс обратной связи, позволяющий инженерам корректировать результаты классификации и улучшать точность ML-моделей.

Логи собираются из хранилища Elasticsearch, проходят этапы предобработки и классификации, после чего результаты автоматически передаются в Jira или Azure DevOps с учётом контекста задач.

Прототип системы значительно сократил среднее время реакции на критичные инциденты, поддерживает интерактивное дообучение моделей по обратной связи инженеров и корректно интегрируется с Jira и Azure DevOps для автоматического создания, обновления и повторного открытия задач.

Разработанная система способствует повышению эффективности DevOps процессов за счёт интеллектуальной автоматизации жизненного цикла инцидентов и может быть масштабирована для использования в различных высоконагруженных сервисах.

Литература

[1] Li W. Automatic log analysis using machine learning: awesome automatic log analysis version 2.0. – 2013.

[2] Kotsiantis S. B., Zaharakis I. D., Pintelas P. E. Machine learning: a review of classification and combining techniques //Artificial Intelligence Review.-—2006.–T.26.-—c. 159-190.

[3] Cao Q., Qiao Y., Lyu Z. Machine learning to detect anomalies in web log analysis //2017 3rd IEEE international conference on computer and communications (ICCC). – IEEE, 2017. – c. 519-523.

[4] Ozulku O. et al. Anomaly detection system: Towards a framework for enterprise log management of security services //World Congress on Internet Security (WorldCIS-2014). – IEEE, 2014. – c. 97–102.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.dronov@g.nsu.ru

Методы разработки интеллектуальных помощников, основанные на онтологическом моделировании предметных областей

А. О. Зайцев

Зачастую каждый, кто сталкивался с работой интеллектуальных помощников, испытывал определенный ряд проблем с ними. Начиная возможности действий только по заранее заданному специалистом компании сценарию, заканчивая тем, что его ответы могут отличаться от объективного описания. Все эти факторы, вынуждая нанимать сотрудников технической поддержки, приносят компаниях убытки.

Для решения подобных проблем было принято решение начать разработку интеллектуального помощника, основанного на онтологической модели предметной области. Одним из ключевых отличий системы предполагается комбинация использования нейронных сетей и онтологических моделей.

Целью данной работы является разработка метода, выполняющего построение ответа на вопрос пользователя, на основании онтологической модели предметной области; реализация и внедрение модуля в платформу.

В рамках работы были рассмотрены подходы к построению диалога с пользователем [**1**], найдены и проанализированы существующие методы извлечения знаний [**2, 3**], изучена предметная область, изучены существующие решения подобных задач, выбраны технологии для достижения поставленной цели, сформированы требования к сервису, разработана первоначальная версия алгоритма построения диалога с пользователем, подготовлена основа для будущего расширения алгоритма, произведена интеграция модуля в платформу. Также было проведено тестирование работоспособности первичного алгоритма на реальных пользователях, собраны отзывы.

В качестве дальнейшего развития планируется разработка методов наполнения онтологической модели из различных открытых источников в сети Интернет; систематизация полученных результатов: расширение и дополнение разработанного метода.

Литература

[1] Пальчунов Д.Е., Якобсон А.А. Разработка интеллектуального помощника для подбора товаров в процессе диалога с пользователем // Бизнес-информатика. 2024. Т. 18. № 1. С. 7–21.

[2] Болотова, Л. С. Системы поддержки принятия решений // Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 250 с. — ISBN 978-5-9916-8251-0.

[3] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, № 3. С. 34–48. ISSN 1818-7900.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.zaitsev3@g.nsu.ru

Разработка интеллектуального помощника для банка на основе порождения дополненного поиска

С. А. Карпиевич

Современные системы сталкиваются с огромным количеством информации, которая постоянно обновляется. Автоматизация аргументированных рассуждений актуальна для повышения эффективности принятия решений, улучшения качества анализа информации [1]. В банковской сфере в последние годы также наблюдается рост объёма нормативных актов и внутренних регламентов. Сотрудникам юридического блока, комплаенса и риск-менеджмента нужно быстро находить нужные пункты и проверять актуальную редакцию. Ручной поиск в Confluence занимает много времени и требует помощи экспертов.

Цель работы — создать простую для пользователя RAG-систему [2], которая находит релевантные фрагменты, показывает ссылки на первоисточники и защищает от ошибок из-за устаревших документов. Система учитывает тип документа, версию и дату обновления. Это делает ответы точными и безопасными для операционной работы.

Особое внимание уделено комбинации методов: гибридный поиск (векторы + BM25), последующий реранкинг и короткая генерация ответа в деловом стиле с обязательным указанием источников. Такой подход сокращает время подготовки заключений и разгружает экспертов.

Использовались технологии: Retrieval: Weaviate (HNSW + Hybrid BM25) [3]. Модели: эмбеддер bge-m3; реранкер MiniLM cross-encoder; генерация Mistral-7B-Instruct (LoRA). Интеграция: веб-чат и плагин для Confluence; артефакты и метрики — MLflow; деплой — Docker.

Результатом стала отлаженная логика поиска и цитирования дала измеримый эффект: среднее время ответа сократилось до 8 минут, доля эскалаций в юрдепартамент снизилась на 37 процентов; офлайновые метрики: Recall@5 = 0.91, Precision@1 = 0.86; исключена работа со старыми редакциями за счёт строгого контроля версий и поствалидации ссылок.

Литература

[1] Yakhyaeva, G., Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning. 2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory, KNOTH 2021, 2021, pp. 40–44.

[2] Как я победил в RAG Challenge: от нуля до SoTA за один конкурс. Источник: https://habr.com/ru/articles/893356

[3] Weaviate Documentation: Hybrid Search, BM25/BM25F, HNSW Index. Источник:https://docs.weaviate.io/weaviate/search/hybrid

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.karpievich@g.nsu.ru

О специфицируемости эффективно отделимо нумерованных моделей с позитивными и негативными отношениями

С. Н. Касымов

Если (M,μ) — нумерованная модель, то подмножество $M_0 \subseteq M$ называется μ-перечислимым, если полный μ-прообраз M_0 вычислимо перечислим. Семейство $\mathfrak{S}$ μ-перечислимых подмножеств множества M назовем полным разделяющим семейством, если для любых $a, b \in M \wedge a \neq b$ найдется такое $M_0 \in \mathfrak{S}$, что $a \in M_0 \wedge b \notin M_0$ либо $a \notin M_0 \wedge b \in M_0$. Нумерация μ называется отделимой, если существует полное разделяющее семейство μ-перечислимых множеств. Если $\mathfrak{S}$ — полное разделяющее семейство для нумерации μ и семейство вычислимо перечислимых множеств $\{\mu^{-1}M_0 \mid M_0 \in \mathfrak{S}\}$ имеет вычислимую нумерацию (в смысле [**1**]), то нумерация μ называется эффективно отделимой (см., Ю.Л. Ершов, [**1**]). Класс эффективно отделимых нумераций содержит в себе как Σ_1^0 (позитивные), так и Π_1^0 (негативные) нумерации и лежит в классе Π_2^0 ([**1**]). Эффективно отделимые нумерации моделей оказались интересными и важными объектами, имеющими полезные приложения как в теории вычислимости, так и в теоретической информатике (см. обзоры [**2, 3**]). Предлагаемые тезисы анонсируют возможность адекватного (с точностью до изоморфизма) описания многосортных моделей эффективных сигнатур, обладающих эффективно отделимыми нумерациями с позитивными и негативными основными отношениями, что может быть актуально в рамках идеологии современной теоретической информатики.

Определение 1. Многосортная модель M эффективной сигнатуры Σ называется специфицируемой, если существует такое обогащение M^* модели M в сигнатуре $\Sigma^* \supseteq \Sigma$, порожденное Σ^*-константами, что подходящее вычислимо перечислимое множество Φ предложений сигнатуры Σ^* реализуется в M^* и для всякой Φ-системы ее подсистема, порожденная Σ^*-константами, либо изоморфна $\mathfrak{M}^*$, либо не является Φ-системой.

Теорема 1. *Всякая многосортная модель эффективной сигнатуры, имеющая эффективно отделимую нумерацию с позитивными и негативными отношениями, является специфицируемой.*

Литература

[1] Ю. Л.Ершов, *Теория нумераций,* Наука, М., 1977.

[2] N. Kh.Kasymov, R. N.Dadazhanov, F. N.Ibragimov, *Separable Algorithmic Representations of Classical Systems and their Applications,* Journal of Mathematical Sciences **278** (3), 476-519 (2024).

[3] Н. Х.Касымов, *Отделимые нумерации универсальных алгебр,* Математика и теоретические компьютерные науки **2** (4), 66–102 (2024).

Отдел разработки и поддержки ПО "Департамента цифрового развития г. Ташкента", Ташкент (Узбекистан)
E-mail: s.kasymov94@gmail.com

Гибридный подход к извлечению эмоциональных оценок из текстов на основе нейросетевых моделей и онтологии

С. В. Ким, Д. Е. Пальчунов

Современные нейросетевые модели (LSTM, BERT), демонстрируя высокие результаты в задачах классификации текстов естественного языка, сталкиваются с фундаментальными трудностями при интерпретации сложных лингвистических явлений. Эти ограничения обусловлены отсутствием у них явных механизмов логического вывода. Для преодоления указанных ограничений предложена гибридная архитектура, интегрирующая нейросетевые модели с формальной четырехуровневой онтологической моделью представления знаний.

Онтологическая модель обеспечивает глубокий смысловой анализ за счет структурирования знаний на четырех уровнях: уровень онтологических знаний (формальные определения эмоциональных категорий, семантические отношения и лингвистические маркеры); уровень общих теоретических знаний (универсальные лингвистические правила и шаблоны синтаксических конструкций, характерных для конкретных эмоций); уровень эмпирических знаний (база размеченных прецедентов (отзывов) для верификации гипотез); уровень оценочных знаний (формирование и корректировка верифицированных вероятностных гипотез на основе результатов логического вывода).

Онтологическая модель позволяет формализовать и разрешить противоречие между буквальным значением слов и общим смыслом высказывания, используя заложенные правила и отношения между понятиями.

В рамках исследования был создан размеченный датасет из тысячи русскоязычных отзывов, охватывающий семь эмоциональных категорий: радость, грусть, страх, отвращение, злость, удивление, сарказм. Качественный анализ подтвердил, что модель BERT эффективно справляется с контекстными зависимостями, но требует значительных ресурсов в отличие от LSTM. Предложенная гибридная архитектура LSTM-BERT-онтология оптимизирует процесс, используя каскадную схему, что обеспечивает баланс между точностью и вычислительной эффективностью. Представленный подход демонстрирует плодотворность интеграции нейросетевых методов с формальными алгебро-логическими моделями представления знаний. Такая гибридизация позволяет создавать более интерпретируемые системы для анализа текстов, способные работать со сложными семантическими конструкциями естественного языка. Это открывает широкие возможности для практического применения, в частности, в создании инструмента для автоматизированного анализа пользовательских мнений в задачах маркетинга, управления репутацией и анализа потребительского опыта.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.kim3@g.nsu.ru, palch@math.nsc.ru

Разработка алгоритма автоматизированного планирования в сфере тайм-менеджмента

Н. С. Косарев

В современном мире у людей нередко возникают проблемы с организацией собственного времени и планированием задач. С целью решения этих проблем были придуманы техники и практики эффективного управления временем – тайм-менеджмента.

В наше время существует множество программных решений, основной целью которых является интеграция процессов управления временем в цифровой среде. Однако, несмотря на обширный список возможностей приложений данного класса, трудозатратный процесс планирования выполнения задач по-прежнему остается за пользователем [1]. Более того, всего 30-40% запланированных работ завершаются в срок [2].

Целью данной работы является разработка алгоритма автоматизированного планирования в сфере тайм-менеджмента. Для решения задачи автоматизированного планирования был разработан алгоритм, основанный на уменьшении размерности анализируемого пространства значимых параметров задач, введении штрафной функции для различных последовательностей (планов) выполнения задач и поиске решения, обладающего минимальным значением штрафной функции, методом построения симуляционных деревьев и поиска временных окон для выполнения задач. Также был разработан демонстрационный стенд для данного алгоритма, представляющий собой клиент-серверную программную систему для тайм-менеджмента.

По итогам бета-тестирования результаты работы алгоритма автоматизированного планирования признаны более качественными или сопоставимыми по качеству с результатами самостоятельного пользовательского планирования.

Новизна данной работы заключается в разработке формализованного алгоритма, который может быть использован для автоматизации процесса планирования в сфере тайм-менеджмента. Теоретическая ценность данной работы заключается в расширении методологии планирования в рамках предметной области тайм-менеджмента. Практическая ценность данной работы заключается в экономии времени пользователей на этапе планирования выполнения задач.

Литература

[1] Kahneman D., Tversky A. Intuitive prediction: Biases and corrective procedures // Judgment under uncertainty: Heuristics and biases – Cambridge: Cambridge University Press.–1982.–c.313-327.

[2] Callaway F., van Opheusden B., Gul S., Das P., Krueger P.M., Griffiths T.L., Lieder F. Rational use of cognitive resources in human planning // Nature Human Behaviour. – 2022.–T. 6.–c.1112-1125.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: nkosarev4392@gmail.com

Двухмодульная система для автоматизированного прогнозирования заболеваний животных на основе анализа текстовых медицинских записей

Д. А. Курдюков

В области ветеринарии актуальной задачей является автоматизация анализа медицинских записей для прогнозирования заболеваний. Современные методы обработки естественного языка позволяют извлекать структурированную информацию из неформализованных текстов, что открывает широкие возможности для построения интеллектуальных диагностических систем [1].

Целью работы является разработка двухмодельной системы прогнозирования заболеваний животных. Система состоит из двух последовательных модулей: первый, основанный на задаче извлечения именованных сущностей (NER), предназначен для выделения симптомов из текстовых записей для их дальнейшего сохранения и использования во второй модели; второй выполняет прогнозирование заболеваний на основе переданного анамнеза, извлечённых и нормализованных симптомов и ранее выделенных для этого животного симптомов.

Для обучения первой модели использовались данные, собранные из учебников по ветеринарии, профильных форумов, а также сгенерированные при помощи больших языковых моделей. Всего было подготовлено более 100 примеров, которые были аугментированы до 300 путём замены слов синонимами. Для сравнения были выбраны модели RuModernBert, SpaCy, а также RuDR-BERT. Наилучшие результаты показала модель RuModernBert с F1-мерой 0,85, accuracy 0,94, а оценки precision и recall составили 0,89 и 0,81 соответственно.

Вторая модель предназначена для выявления потенциальных проблем в системах органов собак на основании анамнеза, составленного врачом, нормализованных симптомов, извлечённых первой моделью, и сохранённой истории. Данные для неё собирались из профильных статей, после чего были аугментированы при помощи синонимичных замен. В итоге было собрано порядка 350 различных записей с симптоматикой. Собранные болезни были распределены по 10 системам органов: желудочно-кишечная, сердечно-сосудистая, дыхательная, мочевыделительная, нервная, эндокринная, кожная, опорно-двигательная, офтальмологическая, репродуктивная. Для решения данной задачи были применены следующие алгоритмы: Random Forest, SVM, Logistic Regression и XGBoost. По результатам тестирования лучшие результаты показал SVM с F1 и accuracy на уровне 0,9. В дальнейшем планируется расширить датасет за счёт использования частичного перевода датасета PetEVAL, а также обучить и протестировать модели-трансформеры.

Разрабатываемая система позволит не только автоматизировать процесс извлечения симптомов, но и повысить точность диагностики за счёт использования контекстуальной информации и истории обращений. Более того, система будет способна интегрироваться с существующими медицинскими записями, что делает её практичным инструментом для ветеринарных клиник. Внедрение такой системы может значительно сократить время на анализ медицинских записей и повысить качество диагностики заболеваний животных.

Литература

[1] Tutubalina E. et al. The Russian Drug Reaction Corpus and neural models for drug reactions and effectiveness detection in user reviews // Bioinformatics.—2021.— Vol.37.—No. 2.—pp. 243–249.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.kurdyukov@g.nsu.ru

Применение темпоральной логики в рекомендательной системе на основе GNN

В. В. Лавринова

Графовые нейронные сети (GNN) [1,2] являются мощным инструментом для обработки графов, в которых информация представлена в виде узлов и рёбер. Однако в некоторых задачах важно учитывать не только структуру графа, но и временные зависимости, которые возникают в процессе взаимодействий между элементами графа. Это может быть особенно полезно в рекомендательных системах, где необходимо учитывать не только текущие предпочтения пользователя, но и их изменения во времени. Одним из инструментов, который позволяет работать с временными зависимостями, является темпоральная логика LTL. В контексте рекомендательных систем это может быть использовано для моделирования изменения интересов пользователей с течением времени, что позволяет точнее предсказывать будущие предпочтения. В настоящей работе мы внедряем темпоральные правила в рекомендательную систему фильмов [3]. Для этого вместо обычных графов используются временные графы. Кроме того, чтобы графовая нейронная сеть умела генерировать и использовать LTL-правила, нужно добавить механизм, позволяющий ей формулировать эти правила на основе данных. В рекомендательных системах или при анализе временных графов LTL-правила могут быть использованы для описания различных закономерностей (например, «если пользователь смотрел фильм жанра X, то в будущем он посмотрит фильм жанра Y»). Для генерации LTL-правил на основе истории взаимодействий в графе были использованы Seq2Seq-модели, которые представляют собой архитектуру, предназначенную для обработки последовательностей, где на вход подается одна последовательность, а на выходе генерируется другая. Внедрение временной логики в модель рекомендательной системы привело к заметному повышению точности предсказаний. Таким образом, включение LTL-правил в графовые нейронные сети позволило улучшить качество прогнозов, сделав модель более чувствительной к изменениям данных с течением времени.

Литература

[1] Bai T. et al. Temporal graph neural networks for social recommendation //2020 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). IEEE. 2020. pp.898–903.

[2] Лавринова В.В., Хворостухина Е.В. Применение графовых нейронных сетей в анализе данных // Искусственный интеллект и цифровые технологии в подготовке специалистов для различных отраслей экономики. Сборник материалов Междунар. научно-практической конференции. 2024. С. 257–265. – EDN DWSAML.

[3] Лавринова В. В. Разработка рекомендательной системы на основе графовой нейронной сети // Проблемы управления в социально-экономических и технических системах : Материалы XXI Междунар. научно-практ. конференции. 2025. с.102–105. – EDN RLMOWZ.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов (Россия)
E-mail: lavrinova.valya@yandex.ru

Разработка системы распознавания эмоций в отзывах покупателей с применением предварительно обученных языковых моделей

А. Е. Масютина

Актуальность проблемы извлечения эмоциональных оценок из текстов естественного языка растёт ввиду её значимости для разных сфер жизни общества. В рамках исследования завершён теоретический этап разработки программы, которая будет выявлять эмоции в текстах и анализировать их причины с учётом контекстной информации.

Извлечение эмоциональных оценок включает две задачи: анализ тональности (сентимент-анализ) и классификацию эмоций. На основе классификации Экмана выделены 6 базовых эмоций: радость, злость, отвращение, грусть, интерес, страх [**1**]. Для машинного обучения данные будут разбиты на 7 классов (6 базовых + нейтральные эмоции) и 15 комбинаций базовых эмоций; прочие эмоции отнесены к нейтральным.

Для предобработки текста применяются следующие приёмы:

- токенизация;
- нормализация (стемминг, лемматизация, удаление стоп-слов);
- фильтрация;
- векторизация [**2**].

Для классификации текста оптимальны модели BERT и RoBERTa. Для аннотирования данных наилучшим выбором является GPT-2.

Аспектно-ориентированный подход Метод предполагает разделение системных проблем на компоненты-аспекты. Ключевые концепции:

- аспекты;
- соединители (*Join Points*);
- советы (*Advice*);
- точки пересечения (*Pointcuts*);
- внедрение (*Weaving*) [**3**].

Подход повышает точность оценки мнений и чувств за счёт учёта контекста.

Обзор аналогов модели Анализ моделей (OCC, OCC+, Экмана, Плутчика, Лазаруса, *Affective Lexicon*) позволил сформулировать критерии разработки:

- точность;
- обработка контекста;
- интерпретируемость;
- устойчивость к шуму;
- учёт многозначности слов;
- многоуровневый анализ.

Тренировочная выборка:

- объём: >1000 аннотированных комментариев;
- источники: различные форумы и сайты (для обеспечения разнообразия данных);
- аннотации: по эмоциям (с участием нескольких аннотаторов для минимизации субъективности).

Тестовая выборка:

- объём: >100 комментариев без аннотаций;
- источники: те же, что и для тренировочной выборки (для сопоставимости).

Выходные данные для каждого комментария:

- ключевое слово (наиболее значимое слово/фраза);
- определённая эмоция (классифицированная моделью);
- цепочки «эмоция—причина» (если их несколько).

Архитектура программы Программа включает следующие модули:

(1) сбора данных;
(2) предобработки данных;
(3) разделения данных;
(4) обучения;
(5) классификации;
(6) вывода результатов.

Архитектура обеспечивает гибкость и надёжность системы.

Литература

[1] Ekman P., Cordaro D. What is Meant by Calling Emotions Basic // Emotion Review. 2011. Vol.—3, No—4. pp.364–370.

[2] Affect Lexicon. URL: https://knowledge.deck.no/languages-and-linguistics/psycholinguistics/language-and-emotion/affect-lexicon(дата обращения: 10.04.2025).

[3] Андрианов И.А., Майоров В.Д., Турдаков Д.Ю. Современные методы аспектно-ориентированного анализа эмоциональной окраски // Труды Института системного программирования РАН. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennye-metody-aspektno-orientirovannogo-analiza-emotsionalnoy-okraski (дата обращения: 15.02.2025)

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.masyutina@g.nsu.ru

Использование методов онлайн обучения для задачи поиска аномалий в метриках приложений

А. М. Мацько

Современные программные системы, решающие задачи бизнеса и научные проблемы, как правило состоят из множества компонентов. Для отслеживания состояния в систему и её компоненты при разработке заранее внедряют код, который каким либо образом сохраняет (и/или отправляет) метрики приложения. Обычно метрики представляют собой числовой временной ряд. Аномалии в таком временном ряде могут свидетельствовать о сбоях в системе.

К сожалению, одному человеку и даже группе людей не уследить за тем потоком метрик, который генерируется приложениями, поэтому необходима система, которая бы смогла обнаружить аномалию в метриках и оповестить пользователя о ней. Существующие решения (например, Moira, Prometheus, Grafana, VictoriaMetrics) в основном используют некие пороговые значения для определения аномалий, которые со временем устаревают, а также требуют некоторых знаний о временном ряде.

Для решения данных проблем предлагается использовать в системе детектор аномалий на основе онлайн обучения, когда модель одновременно выдаёт предсказания и обучается на поступающих данных. Это позволит модели своевременно адаптироваться к ожидаемым изменениям в метриках.

Целью данной работы является разработка системы для обнаружения аномалий и оповещения пользователей о них. Для достижения цели выделены следующие задачи: анализ алгоритмов для онлайн обучения моделей; поиск размеченного набора данных; сравнение показателей качества различных моделей онлайн обучения, а также их комбинаций; разработка прототипа приложения, его тестирование и экспериментальный анализ.

На текущий момент найден датасет с аномалиями в метриках; проведено сравнение различных моделей онлайн обучения, а также их комбинаций; начата разработка прототипа системы.

Обнаружение аномалий в поступающем потоке данных открывает возможности для создания самовосстанавливающихся систем.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.matsko@g.nsu.ru

Разработка методов извлечения структурированных знаний из текстов и таблиц на основе онтологий и больших языковых моделей (LLM)

Е. В. Мельникова

Доклад посвящен задаче извлечения структурированных знаний из документов со сложной версткой, таких как медицинские анализы и техническая документация на оборудование. Такие документы часто не имеют единого шаблона, содержат вложенные таблицы и текстовые блоки, что усложняет их автоматическую обработку традиционными методами.

Предлагается многоэтапный гибридный метод, основанный на последовательном применении моделей анализа верстки и семантического анализа.

Структурный анализ (Layout Parsing) + OCR. На первом этапе документ (в формате изображения или PDF) обрабатывается моделями, обученными на задачах анализа верстки (например, LayoutLMv3, DiT). Модель производит сегментацию страницы, выделяя логические блоки: заголовки, параграфы, таблицы и изображения, и определяет их координаты (bounding boxes). Только после этого задача переходит к модели OCR, которая заранее знает, что перед ней — текст или таблица.

Онтологически-управляемое извлечение знаний. На втором этапе к содержимому распознанных блоков применяются большие языковые модели (LLM), работа которых управляется предметной онтологией. Онтология формально описывает целевые сущности и отношения для конкретной области (например, параметры вентиляционного оборудования). LLM извлекает факты, а онтология используется для их типизации, валидации и приведения к нормализованному виду, что снижает риск галлюцинаций модели.

Такой подход позволяет сначала восстановить логическую структуру документа, а затем прицельно извлекать семантику из каждого элемента.

Литература

[1] C.Naydanov, D.Palchunov, P.Sazonova. “Development of automated methods for the critical condition risk prevention, based on the analysis of the knowledge obtained from patient medical records. In: Proceedings” *International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies, SIBIRCON 2015, p. 33-38, 2015.*

[2] D. E. Palchunov. Methodological Aspects of the Application of Model Theory in Knowledge Engineering and Artificial Intelligence, *Ural-Siberian Conference on Computational Technologies in Cognitive Science, Genomics and Biomedicine (CSGB), 2022, pp. 210-215, 2022.*

[3] A. Anand et al., “TableCraft OCR for Efficient Detection & Recognition of Table Structures in Document Images,” *arXiv preprint arXiv:2404.10305, 2024.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.ptitsyna@g.nsu.ru

Фреймы Мальцева

Е. В. Мищенко

Фреймы - наборы элементов из гильбертовых пространств, обладающие избыточностью по сравнению с обычными базисами пространства - нашли широкое применение в теории передачи информации с начала 2000-х годов. Они используются для фиксации важных характеристик сигнала, обеспечения численной устойчивости при его восстановлении, а также при разработке алгоритмов сжатия изображения и восстановления в случае, если некоторая информация о сигнале была утеряна. Ввиду избыточности фрейма квантованное разложение по фрейму весьма полезно в случае, если некоторые коэффициенты разложения теряются при передаче. Разложение по фрейму обеспечивает устойчивость к потерям в пакетных сетях, таких как Интернет. Актуальным вопросом является построение конкретных примеров фреймов или описание общих подходов к их построению.

Не менее интересным является вопрос исторического приоритета. Так, считается общепризнанным, что впервые понятие «фрейм» было введено в 1952 году в работе [1] при изучении возможности представления функций из пространства $L^2([-\gamma,\gamma])$, $0<\gamma\leq\pi$, рядом Фурье по комплексным экспонентам $\exp(i\lambda_n t)$.

Однако можно показать, что алгебраическая конструкция прямоугольной матрицы со взаимно ортогональными строками и столбцами, имеющими одинаковую векторную норму, предложенная в 1947 году А. И. Мальцевым в работе “Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю.М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов“ [2], является, говоря современной терминологией, первым примером 1-жёсткого равномерного фрейма.

Литература

[1] V.K. Goyal, M. Vetterli, and N.T. Thao. Quantized overcomplete expansions in R^N // Analysis, synthesis and algorithms, IEEE Trans. Inform. Th.–1998–V. 44–pp.16-31.

[2] R.J. Duffin, A.C. Scaeffer. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1952.–Vol. 72.—pp.341-366.

[3] А.И. Мальцев. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю.М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов” // Изв. АН СССР. Сер. матем.–1947–том 11, выпуск 6.–с.567–568.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: eugenia-m@academ.org

Разработка фреймворка для представления частичных моделей

Ч. А. Найданов

В докладе будет представлен проект разработки программного инструмента для представления частичных моделей в системах, основанных на онтологических моделях. Программный инструментарий предназначен для использования в реализации диалоговых ботов, интеллектуальных помощников, цифровых заместителей.

Предполагаемый инструментарий должен обладать следующими возможностями: 1. Представление формализма частичных моделей в Java-программах. 2. Представление формул логики предикатов первого порядка в Java-программах. 3. Визуальный редактор частичных моделей и формул. 4. Подключение машин вывода для проверки на непротиворечивость формул логики первого порядка.

В рамках разработки фреймворка будет разработан собственный API, к которому будут обращаться пользователи фреймворка. В свою очередь внутренний API должен использовать уже разработанные библиотеки для представления логических утверждений и их проверки на непротиворечивость.

В рамках данного доклада будет представлен общий план предполагаемого фреймворка. Отдельные его части будут рассмотрены в работах О.А. Овсянникова и А.А. Никулиной.

Предполагаемый фреймворк должен разрабатываться с расчётом на дальнейшее расширение функциональности путём добавления модулей. Разрабатываемый фреймворк расчитан на использование исследователями в области семантического искусственного интеллекта.

Литература

[1] Найданов Ч. А. Разработка ядра онтологической модели, настраиваемой под предметную область // Вестн. НГУ. Серия: ИТ. 2019.–Т. 17, №1.–с.72-81.

[2] Найданов Ч. А., Пальчунов Д. Е., Сазонова П. А. Теоретико-модельные методы интеграции знаний, извлеченных из медицинских документов // Вестн. НГУ. Серия: ИТ. 2015.–Т. 13, вып.3.–с.29–41.

[3] Palchunov D.E. Automated Methods for Modeling Thinking and Reasoning Based on the Partial Model Theory // 2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE).—IEEE, 2023.-–с.1490-1495.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: chimit-naydanov@yandex.ru

Цифровые двойники регламентов в задаче автоматизации кафедральных процессов

И. С. Немцев

Значительная часть административной работы университетской кафедры связана с выполнением регламентированных процедур – планированием учебных мероприятий, контролем сроков и согласованием документов. Выполнение этих задач вручную требует существенных трудозатрат и часто приводит к несогласованности действий между участниками процесса. Для решения данной проблемы была разработана программная система, предназначенная для автоматизации планирования и контроля задач на кафедре.

Архитектурно система реализована в виде набора микросервисов [**1**] на платформе Spring Boot с встроенным движком Camunda 7, обеспечивающим исполнение моделей в нотации BPMN 2.0 [**2**]. Для маршрутизации используется механизм JavaDelegate, где управление передаётся обработчику в зависимости от указанного ключа события (eventKey). Такой подход обеспечивает модульность и возможность расширения функционала без изменения основных BPMN-схем. Система автоматически инициирует процессы, отслеживает их исполнение, рассылает уведомления и реагирует на отклонения.

Дальнейшее развитие исследования направлено на формализацию регламентов и построение их цифровых двойников – моделей, отражающих структуру и динамику нормативных процессов [**3**]. В качестве основы рассматривается интеграция процессных BPMN-моделей с логико-семантическим описанием регламентов, реализуемым в среде LogicText [**4**]. Такой подход позволит обеспечить формальную верификацию регламентов, автоматическое обновление сроков и согласованность исполняемых процессов при изменении нормативных документов.

Практическая реализация подтвердила снижение нагрузки на сотрудников и применимость выбранных решений для автоматизации регламентов. Полученные результаты послужат основой для дальнейшего перехода от отдельных процессных моделей к интегрированным цифровым представлениям регламентов.

Литература

[1] V. Velepucha and P. Flores, “A survey on microservices architecture: Principles, patterns and migration challenges.” IEEE Access, 2023.

[2] OMG, Business Process Model and Notation (BPMN), Version 2.0.2, Object Management Group, 2013. [Online]. https://www.omg.org/spec/BPMN/2.0.2/

[3] F. Fornari, F. Corradini, A. Polini, B. Re, F. Tiezzi, and A. Vandin, “Digital Twins of Business Processes: A Research Manifesto,” arXiv preprint arXiv:2410.08219, 2024.

[4] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии.— 2014. —Т. 12, вып. 2.—с.64–73.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: i.nemtsev@alumni.nsu.ru

Разработка фреймворка для представления формул логики предикатов первого порядка в онтологической модели

А. А. Никулина

В работе секретаря университетской кафедры много рутинных и повторяющихся задач. Автоматизация выполнения этих задач уменьшила бы количество формальной работы секретаря и позволила бы уделить больше времени содержательной работе на кафедре.

В интеллектуальных системах, опирающихся только на нейронные сети, возникают следующие проблемы: невозможность объяснения в человекопонятном виде процесса получения результата системы, "галлюцинации"нейронных сетей при вычислении результата, разные результаты на один и тот же запрос.

Для преодоления вышеперечисленных проблем предлагается задавать бизнес-логику интеллектуальных систем при помощи логики предикатов первого порядка.

В рамках данной работы рассматривается разработка фреймворка для представления формул логики предикатов первого порядка. Для разработки фреймворка был выбран язык Java, а также предполагается использовать набор библиотек Tweety.

Литература

[1] Palchunov D.E. Logical Methods for Modeling Reasoning, Concepts and Representations Based on the Partial Model Theory // 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). – IEEE, 2024.

[2] Никулина А. А. Разработка фреймворка для представления формул логики предикатов в семантической модели // Материалы конференции «Знания-Онтологии-Теории (ЗОНТ-2025)». 2025.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.nikulina2@g.nsu.ru

Нечеткие модели как формализация оценочных знаний экспертов

О. Д. Пальчунова

В современных интеллектуальных системах часто требуется учет экспертных оценок, которые выражаются в терминах субъективной вероятности и могут быть неполными или противоречивыми [1]. Для повышения надежности принимаемых решений становится необходимым формализованный подход к анализу, проверке и объединению таких знаний, что особенно актуально при отсутствии достаточно полной статистической информации о предметной области [2, 3].

Целью работы являлась разработка формального аппарата для представления и анализа субъективных оценочных знаний посредством теории нечетких моделей. Для достижения этой цели были поставлены задачи по формализации субъективной вероятности на языке нечетких моделей, выработке критериев согласованности экспертных оценок, исследованию свойств минимальной нечеткой модели, согласованной с заданным набором оценочных знаний, а также изучению критериев уникальности такой модели.

В ходе исследования предложили модельно-теоретическую формализацию субъективной вероятности на основе нечетких моделей. Были описаны формальные критерии согласованности экспертных оценок, рассмотрены различные свойства согласованных оценочных знаний и введено понятие минимально согласованной нечеткой модели. Провели анализ условий, при которых такая модель существует и является единственной, и проиллюстрировали работу подхода на теоретических и практических примерах.

Полученные результаты позволили формализовать процедуру проверки и согласования экспертных знаний, повысить обоснованность и прозрачность принимаемых на их основе решений. Разработанная теоретическая база может быть использована для построения инструментов анализа экспертных знаний и дальнейшего совершенствования методик принятия решений в интеллектуальных системах различного назначения.

Литература

[1] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Методы согласования знаний по компьютерной безопасности, извлеченных из различных документов. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2013. Т.11, вып. 3.–с.63–73.

[2] Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge. Pattern Recognition and Image Analysis, 2023, Vol. 33, No. 3, pp. 529–535.

[3] МалаеваЕ.Д. , Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21.№ 1.–с.32-45.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: o.palchunova@g.nsu.ru

Проектирование ИИ-агента для администрирования Apache Kafka кластера на виртуальных машинах

С. Е. Петров

С развитием облачных вычислений и распределенных систем обработки данных управление кластерами Apache Kafka становится всё более сложной и критической задачей. Ручное администрирование таких кластеров требует значительных трудозатрат, подвержено ошибкам оператора и не позволяет эффективно реагировать на динамические изменения нагрузки и состояния системы.

Целью работы является проектирование ИИ-агента для администрирования Apache Kafka кластера на виртуальных машинах.

В ходе работы планируется изучить предметную область и выделить функциональные и нефункциональные требования к системе, спроектировать архитектуру системы [**1**], определить необходимые технологии и инструменты, спроектировать схемы баз данных и схемы взаимодействия между компонентами.

При проектировании будут учтены вопросы безопасности межсервисного трафика, простоты интеграции агента с корпоративными системами SSO [**2**], оптимизации настройки кластеров Apache Kafka при помощи RAG-сервиса [**3**] и взаимодействия операторов с ИИ-агентом посредством естественного языка.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Литература

[1] Д. Е. Намиот, Е. А. Ильюшин Архитектура LLM агентов // International Journal of Open Information Technologies. 2025. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/arhitektura-llm-agentov (дата обращения: 20.10.2025).

[2] Алексеев Э. Н., Хайруллин А. Ф. УНИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ДАННЫМИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ // Вестник науки. 2025. №7 (88). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/unifitsirovannaya-sistema-upravleniya-dannymi-polzovateley (дата обращения: 20.10.2025).

[3] Науменко А. О. ТЕХНОЛОГИЯ RAG (RETRIEVAL-AUGMENTED GENERATION) КАК ИННОВАЦИОННЫЙ ПОДХОД В LLM // Вестник науки. 2025. №8 (89). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-rag-retrieval-augmented-generation-kak-innovatsionnyy-podhod-v-llm (дата обращения: 20.10.2025).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.petrov1@g.nsu.ru

Автоматизация семантического извлечения и проверки знаний для цифрового представления кладбищ

И. С. Прокофьев

Развитие цифровых сервисов в сфере муниципальных услуг требует создания интеллектуальных систем, способных автоматически извлекать и структурировать данные из разнородных источников [1]. Одним из перспективных направлений в этом контексте является построение цифровых моделей кладбищ, включающих сведения о захоронениях, биографические данные и географическую информацию.

В работе представлен прототип системы, реализующий RAG-подход (Retrieval-Augmented Generation) для автоматического извлечения и проверки знаний [2]. На первом этапе данные о захоронениях извлекаются из интерактивных карт и локальных реестров с помощью Selenium WebDriver, обеспечивающего эмуляцию действий пользователя в веб-интерфейсе.

Для обогащения информации формируются поисковые запросы к внешним источникам через Yandex Search API, извлечённые HTML-страницы очищаются от разметки при помощи библиотеки BeautifulSoup. Полученная текстовая информация подвергается предварительной фильтрации и анализу релевантности, после чего производится выделение ключевых сущностей. На основе полученных данных формируется агрегированный набор фактов о человеке, передаваемый в LLM-модель в рамках RAG-потока. Далее выполняется фактчекинг, в ходе которого производится лексико-семантическое сопоставление между исходными релевантными фрагментами текста, подаваемыми в модель, и результатом её генерации. Алгоритм фиксирует различия по сущностям (ФИО, даты, локации) и ключевым событиям, оценивает степень расхождения и помечает потенциально недостоверные элементы биографии. Это позволяет автоматически выявлять и фильтровать возможные искажения, формируя итоговое описание, максимально согласованное с исходными данными [3].

Литература

[1] Palchunov D., Yakhyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEUR Workshop Proceedings, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

[2] Lewis P., Perez E., Piktus A. и др. Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks. Advances in Neural Information Processing Systems, 2020, vol. 33, pp. 9459–9474.

[3] Прокофьев И. С. Разработка интеллектуальной системы поиска и обработки данных о захоронениях для цифрового представления кладбищ. МНСК-2025. Информационные технологии. Материалы 63-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2025.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: i.prokofev1@g.nsu.ru

Модуль генерации тренировочного плана с учетом противопоказаний

Д. Е. Салина

Рост популярности фитнеса и здорового образа жизни сопровождается увеличением спроса на интеллектуальные системы персонализации тренировочного процесса [1]. Большинство существующих приложений ограничены в возможностях учета индивидуальных потребностей пользователей, в связи с чем возникает потребность в приложении, создающем тренировки не только на основе целей пользователя, но и учитывающем противопоказания [2].

В работе предлагается подход к созданию алгоритма генерации тренировочного плана на основе древовидной структуры принятия решений [3,4]. Такая структура позволяет пошагово исключать неподходящие упражнения в зависимости от наличия у пользователя ограничений по здоровью и подбирать безопасные альтернативы. На выходе формируется тренировочный план продолжительностью 14 дней с равномерным распределением нагрузки на все основные группы мышц.

Алгоритм реализован на языке программирования Kotlin [5]. Для хранения данных использована реляционная база данных PostgreSQL [6], содержащая ранее собранную информацию об упражнениях и противопоказаниях к ним.

Предложенный подход персонализирует процесс и снижает риск травм при самостоятельных занятиях. В будущем система ляжет в основу серверной части мобильного приложения для автоматизированного создания безопасных тренировочных планов с учётом индивидуальных противопоказаний.

Литература

[1] [1] Морозов М.В., Афонькина К.А. Современные тенденции в физической культуре: вызовы и возможности
Международный журнал гуманитарных и естественных наук, no. 9-4 (96), 2024, стр. 165-167.

[2] Салина Д.Е. Разработка модели базы данных фитнес-упражнений и ее наполнение с генерацией противопоказаний. МНСК-2025. Информационные технологии. Материалы 63-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2025.

[3] Yakhyaeva G.E. Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning. 2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory, KNOTH 2021, 2021, pp. 40–44.

[4] Малаева Е.Д., Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов. // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21. № 1.–с.32-45.

[5] Heckler M. Spring Boot: Up and Running: Building Cloud-Native Java and Kotlin Applications. O'Reilly Media, Sebastopol, CA, 2021.—-pp.325.

[6] Chauhan C., Kumar D. PostgreSQL High Performance Cookbook. Packt Publishing, Birmingham, 2017.—-pp.366.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.salina@g.nsu.ru

Считывание, оценка качества и беспроводная передача электромиографических данных с микроконтроллерных систем с оценкой быстродействия связи

А. А. Сартаков

Современные системы протезирования и нейроинтерфейсы требуют высокой точности и минимальных задержек при передаче ЭМГ сигналов. Ключевым направлением развития является переход к высокоплотным многоканальным ЭМГ-системам, для которых критически важны надежность беспроводной передачи и быстродействие каналов связи, поскольку миллисекундные задержки ухудшают отклик управляющих устройств.

Работа выполняется в рамках крупного исследовательского проекта по разработке функционального протеза руки, реализуемого при участии компании «Моторика». Цель проекта — создание комплексной архитектуры сенсорной и управляющей подсистем протеза, включающей регистрацию биосигналов, их обработку и передачу управляющих команд в реальном времени.

Основной инновационный аспект проекта заключается в интеграции различных источников биосигналов в единую микроконтроллерную систему с локальной предобработкой. Сочетание локальной обработки, беспроводной передачи с минимальной задержкой и нейросетевых методов интерпретации формирует комплексное решение, обладающее высоким потенциалом внедрения в системы протезирования и нейроуправления.

Целью работы является создание и экспериментальная проверка прототипа микроконтроллерной системы, предназначенной для считывания, оценки качества и беспроводной передачи высокоплотных ЭМГ-сигналов, а также анализ быстродействия различных технологий связи. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Проведение анализа существующих микроконтроллерных платформ и выбрать оптимальные решения для работы с многоканальными ЭМГ-сигналами.

2. Тестирование применимости беспроводных протоколов для задач с жёсткими требованиями к времени отклика.

3. Разработка экспериментального стенда и выполнение измерения задержек передачи данных на основе тестовых сигналов.

4. Подготовить методику перехода к следующему этапу — регистрации и обработке реальных ЭМГ-сигналов с тела человека.

Следующим этапом исследования станет практическое испытание считывания и обработки сигналов на борту микроконтроллера с последующей передачей данных на управляющее устройство протеза.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.sartakov1@g.nsu.ru

Генетический алгоритм проверки изоморфизма неориентированных графов

М. С. Семишкин, Е. В. Хворостухина

Рассматривается применение генетического алгоритма (ГА) для задачи проверки изоморфизма неориентированных невзвешенных графов [1, 2]. Алгоритм основан на поиске перестановки вершин, при которой матрицы смежности двух графов становятся идентичными. В отличие от классических переборных методов, предлагаемый подход позволяет эффективно находить соответствие между вершинами даже при увеличении размера графа [3].

Каждый индивид популяции представляет собой перестановку номеров вершин. Фитнесс-функция определяет количество несовпавших рёбер в верхних треугольниках матриц смежности: значение 0 означает полное совпадение, то есть изоморфизм. В процессе эволюции используются операторы *order crossover* (OX), мутация обменом (*swap*) и локальное улучшение, основанное на жадных свапах вершин [4]. Отбор особей реализован методом турниров, а элитизм обеспечивает сохранение лучших решений между поколениями.

Реализованный алгоритм был протестирован на случайно сгенерированных графах и на заранее известных парах изоморфных и неизморфных структур. В случае изоморфных графов ГА с высокой вероятностью сходится к нулевому значению фитнеса за ограниченное число поколений (100–200), корректно восстанавливая перестановку вершин. Для проверки корректности результатов использовалась встроенная функция `is_isomorphic` библиотеки `NetworkX`.

Предложенный ГА позволяет решать задачу изоморфизма графов эвристическим способом без необходимости полного перебора. Алгоритм легко модифицируется для взвешенных и ориентированных графов, а также может быть распараллелен для ускорения вычислений. Дальнейшие исследования предполагают оптимизацию операторов мутации и кроссовера, а также использование GPU для ускорения оценки фитнесс-функции.

Литература

[1] *Goldberg, D. E.* (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley Professional,–pp.412.

[2] *Mitchell, M.* (1998). An Introduction to Genetic Algorithms. MIT Press,–pp.221.

[3] *Sedgewick, R., Wayne, K.* (2011). Algorithms (4th Edition). Addison-Wesley Professional,–pp.955.

[4] *Зизенкова, К. О.* Использование генетического алгоритма для генерации латинских квадратов / К. О. Зизенкова, Е. В. Хворостухина // Математика. Механика. – 2023. – № 25.—с.26-31.—EDN UJLWAC.

Саратовский государственный технический университет, Саратов (Россия)
E-mail: semishkin@bk.ru,khvorostukhina85@gmail.com

Разработка модуля интеллектуального помощника по анализу вторичного рынка мобильных устройств

А. А. Суркова

Вторичный рынок электроники показывает устойчивый рост, чему способствует растущий интерес покупателей к доступным мобильным устройствам, в том числе ранних поколений, которые не теряют своей актуальности [1]. Однако и покупатели, и продавцы нередко сталкиваются с трудностью объективной оценки стоимости конкретного устройства. Применение современных методов анализа данных и информации о рыночных предложениях может способствовать более обоснованному формированию цены.

В рамках проекта реализуется модуль интеллектуальной оценки подержанных устройств, являющийся частью системы. Основу модуля составляет связка построения семантического графа на основе извлеченных триплетов и взаимодействия с языковой моделью (LLM).

Граф знаний формируется из рыночных данных, полученных с онлайн-площадок - таких как технические характеристики, состояние, год выпуска, комплектация и заданная цена устройства. Эти данные конвертируются в триплеты, отражающие смысловые отношения между объектами и свойствами. Построенный граф служит структурированной основой для диалога с LLM.

Интеграция языковой модели позволяет пользователю в интерактивной форме обращаться к системе: задавать уточняющие вопросы, получать объяснения, проводить сравнение устройств и формировать обоснования стоимости. LLM интерпретирует граф и, опираясь на собранные данные, генерирует релевантные текстовые ответы в удобной для восприятия форме.Таким образом, разработанный модуль обеспечивает представление рыночной информации и интеллектуальное взаимодействие с пользователем за счет интеграции технологий извлечения знаний и языковых моделей.

Литература

[1] Рынок б/у техники в России в 2025 году: ключевые тренды и лучшие предложения [Электронный ресурс]. - Режим доступа: URL: https://allomarket.su/rynok-bu-tekhniki-v-rossii-v-2025-godu-klyuchevye-trendy-i-luchshie-predlozheniya/ (18.10.2025)

[2] Малаева Е. Д., Яхъяева Г. Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов. // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21. № 1. С. 32-45.

[3] Суркова А. А. Разработка алгоритма оценки стоимости б/у мобильных телефонов на основе ассоциативных правил. // Мальцевские чтения. Тезисы докладов Международной конференции. Новосибирск, 2024. С. 90.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.surkova@g.nsu.ru

Квантовый оптимизационный алгоритм для решения задачи о максимальном разрезе с учётом топологии графа

В. А. Харченко

Квантовые компьютеры открывают принципиально новые возможности для вычислений, используя законы квантовой механики. Благодаря таким явлениям, как суперпозиция, запутанность и интерференция, квантовые алгоритмы могут анализировать все возможные решения одновременно [1]. Это позволяет им значительно превосходить классические компьютеры в решении сложных комбинаторных задач.

Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) [2] представляет наибольший интерес как один из первых практически реализуемых алгоритмов, который не требует полномасштабного квантового компьютера с коррекцией ошибок, открывая путь к исследованию квантового преимущества на доступном сегодня оборудовании.

Исследование QAOA имеет фундаментальную важность для решения комбинаторных задач на графах, которые лежат в основе множества практических проблем — от оптимизации сетей до логистики и машинного обучения. Такие задачи, как поиск максимального разреза или минимальной вершины покрытия, относятся к классу NP-трудных, и их решение на классических компьютерах с ростом размера графа становится чрезвычайно затратным.

Целью данной работы является разработка нового решения задачи о максимальном разрезе, в основе которого лежит фреймворк Quantum Graph Optimization Algorithm [3] – расширение алгоритма QAOA, позволяющее учитывать топологию графа при кодировании задачи. Квантовая схема реализуется на симуляторе квантовых вычислений cirq.

Литература

[1] Г.Э. Яхъяева, О.Д. Пальчунова, О квантовой интерпретации теории нечетких моделей. Сборник научных трудов XII Международной научно-практической конференции "Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте Коломна, 14-17 мая 2024 г. Том 1. С. 225-236.

[2] Farhi E., Goldstone J., Gutmann S. A quantum approximate optimization algorithm. arXiv preprint arXiv:1411.4028. – 2014.

[3] Huang Y. et al. Quantum Graph Optimization Algorithm //arXiv preprint arXiv:2404.06434. – 2024.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.kharchenko1@g.nsu.ru

Radix Spline индекс в Apache Hudi: прототип, интеграция и первичная оценка

С. Е. Хомченко

Radix Spline — это обучаемый индекс для поиска по отсортированным ключам, сочетающий радикс-таблицу (для быстрой локализации диапазона) и линейную интерполяцию по точкам сплайна [1]. Такая гибридная структура позволяет значительно ускорить операции поиска и повысить производительность систем обработки данных, а также уменьшить потребление памяти.

Основная цель работы — внедрить прототип Radix Spline в Apache Hudi и оценить его применимость в реальной конфигурации: определить точку встраивания в архитектуру Hudi, реализовать хранение/загрузку модели и проверить поведение в запросах через Flink SQL.

В рамках данной работы была изучена архитектура Apache Hudi, её механизмы индексации и форматы хранения, что позволило определить оптимальную точку интеграции нового индекса в модуль «hudi-client-common», независимый от конкретного вычислительного движка. Также был реализован и интегрирован прототип индекса Radix Spline. Проведено автономное тестирование реализации Radix Spline на Flink-кластере, индекс корректно создаётся и отображается в метаданных. Комплексное тестирование предполагается выполнить в ближайшее время, т.к. на данный момент оптимизатор Flink не использует Radix Spline (как и большинство встроенных индексов).

Проделанная работа подтвердила принципиальную реализуемость Radix Spline-подобных структур в экосистеме Hudi. Направления дальнейших исследований: поддержка формата таблиц Merge-on-Read, интеграция с планировщиками Flink/Spark и сравнение с уже существующими индексами.

Литература

[1] Kipf A., Marcus R., van Renen A. et al. RadixSpline: A Single-Pass Learned Index. aiDM'20 // Proceedings of the Third International Workshop on Exploiting Artificial Intelligence Techniques for Data Management. No. 5. P. 1–5. DOI: 10.1145/3401071.3401659.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.khomchenko@g.nsu.ru

Проектирование и реализация микросервиса для динамического вычисления опций логистического заказа

И. В. Чайко

В условиях растущей конкуренции на рынке электронной коммерции возможность доставки заказов раньше плановой даты становится ключевым конкурентным преимуществом. Однако существующие монолитные системы управления не способны оперативно выявлять такие возможности из-за разрозненности данных между логистическими подсистемами и отсутствия механизмов прогнозирования фактического времени доставки.

Разработанный микросервис, построенный на принципах Domain-Driven Design, решает эту проблему через четкое разделение предметных областей. В архитектуре выделены bounded context'ы "Управление опциями "Вычисление опций ранней доставки-прогнозирование сроков"и "Оптимизация маршрутов что позволяет эффективно инкапсулировать сложную бизнес-логику каждого домена. Агрегаты "Опция доставки"и "Маршрут"обеспечивают целостность данных и транзакционную согласованность при пересчете сроков доставки.

Система использует event-driven архитектуру с Amazon SQS для обработки потоковых данных из WMS, TMS и API транспортных служб. Domain Events, такие как "Возможно доставить раньше обеспечивают слабую связанность между контекстами. Реализация паттерна Specification позволяет гибко проверять возможность ускоренной доставки на основе текущей геолокации товаров, загрузки складов и статистики выполнения аналогичных маршрутов.

Внедрение системы показало отличные результаты: в 80 процентов случаев клиент выбрал привезти ему заказ раньше и доставка была осуществлена раньше первоначально заявленного срока. Применение подхода Domain-Driven Design позволило сократить время разработки новых бизнес-правил и обеспечить эффективную эволюцию системы в условиях постоянно меняющихся требований к логистике.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: i.chaiko@g.nsu.ru

Разработка интеллектуального помощника для автоматизации документооборота кафедры

С. И. Чернявцева

В работе предлагается реализация системы, направленная на автоматизацию работы с документами [1]. В качестве инструмента для построения модели кафедры используется Protégé. С его помощью можно работать с базой знаний, строить и наполнять онтологию [2]. При создании онтологической модели используется четырехуровневая модель представления знаний. Знания о документах представлены в построенной модели, они извлекаются во время заполнения документов [3]. Работа осуществляется с тремя видами документов: шаблоны, предзаполненные документы и полностью заполненные документы.

Кроме того, в онтологической модели предметной области хранится информация о требованиях, предъявляемых к документам. При работе модуля проведения нормативного контроля, эти данные извлекаются при помощи SPARQL запроса к базе знаний. К нормативному контролю относится проверка как оформления документа, так и содержания. После проведения нормативного контроля будет сгенерирован файл в формате json, в котором описаны результаты проверки документов на соответствие требованиям. Json был выбран как наиболее подходящий формат для интеграции с системой по рассылке писем и документов. В файле описаны, какие документы были проверены и когда, ошибки, возникшие в ходе проведения нормативного контроля.

В результате выполнения работы были исследованы бизнес-процессы кафедры, построена онтологическая модель, реализован функционал системы: созданы предзаполненные документы, которые в дальнейшем были разосланы участникам бизнес-процесса кафедры, после получения документов с заполненной содержательной частью был проведен нормативный контроль, реализован пользовательский интерфейс. Разработанная система успешно интегрирована с системой по рассылке писем и документов.

Литература

[1] D. Palchunov, A. Vaganova. Methods for Developing Digital Twins of Roles Based on Semantic Domain-Specific Languages, 2021 IEEE 22nd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials, 2021, pp. 515–519, doi: 10.1109/EDM52169.2021.9507716.

[2] D.E. Palchunov, S.I. Chernyavtseva. Methods for Identifying and Resolving Contradictions in Document Texts. Proceedings 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 2024, pp. 327–332.

[3] Palchunov D.E., Chernyavtseva S.I. Development of an Intelligent Assistant for Document Automation // 2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). — 2023. — c. 1470–1475.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: chernsvetl21@gmail.com

Разработка системы сбора информации о студентах для автоматизации документооборота кафедры

Д. А. Шабанов

В работе рассматривается подход к созданию системы, предназначенной для автоматизации документооборота кафедры при оформлении учебных и производственных практик студентов. В настоящее время этот процесс сопровождается большим объёмом отчётных документов и требует ручного ввода данных, что увеличивает трудоёмкость и вероятность ошибок.

Предлагается концепция системы, которая будет обеспечивать сбор и структурирование информации о студентах, автоматизировать формирование необходимых документов и передачу данных в базу кафедры. Планируется разработать пользовательский интерфейс, определить структуру данных и реализовать интеграцию с внутренними сервисами вуза.

Ожидается, что разработка позволит снизить административную нагрузку, ускорить обработку отчётности и повысить точность данных. Разработка ориентирована на практическое внедрение инструментов автоматизации документооборота и повышение качества обработки данных о студентах.

Литература

[1] D. Palchunov, A. Vaganova. Methods for Developing Digital Twins of Roles Based on Semantic Domain-Specific Languages, 2021 IEEE 22nd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials, 2021, pp. 515-519, doi: 10.1109/EDM52169.2021.9507716.

[2] Palchunov D.E., Chernyavtseva S.I. Development of an Intelligent Assistant for Document Automation. 2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE).—-2023.—-c.1470-1475.

[3] Пальчунов Д.Е., Чернявцева С.И. Разработка интеллектуального помощника для автоматизированного порождения документов кафедры. Программная инженерия. 2023. Том 14, № 8. С. 388—400. DOI: 10.17587/prin.14,–c.388-400.

[4] D.E. Palchunov, S.I. Chernyavtseva. Methods for Identifying and Resolving Contradictions in Document Texts. Proceedings 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 2024,–pp.327-332.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.shabanov1@g.nsu.ru

Алгоритм представления объектов в рекомендательных системах за счет учета семантической близости ключевых слов

А. И. Шатрова

Актуальность задачи обработки неструктурированных текстовых данных возрастает в условиях развития информационных технологий и увеличения объемов информации. Особую значимость приобретает построение эффективных рекомендательных систем, способных работать с текстовыми описаниями объектов на естественном языке. Традиционные подходы, основанные на бинарном представлении ключевых слов, не учитывают семантические связи между терминами, что снижает точность рекомендаций [1].

В работе предложен метод улучшения представления объектов в рекомендательных системах с учетом семантической близости ключевых слов из текстовых описаний. На примере набора йога-упражнений показано, что бинарное векторное представление («1» — наличие слова, «0» — отсутствие) приводит к семантической неоднозначности и избыточности, так как близкие по смыслу термины воспринимаются как независимые признаки.

Для устранения недостатков предложено использовать эмбеддинги ключевых слов из модели Word2Vec и нормализовать слова для устранения морфологической вариативности. Сравнение трех методов нормализации — pymorphy2, Natasha и Deepseek V3 — показало, что ни один не обеспечивает достаточной точности для специализированной лексики физических упражнений на русском языке. Лучшие результаты дала Deepseek V3, корректно обработавшая 10 из 15 слов, но потребовалась ручная доработка из-за многозначности. Для небольших наборов ключевых слов ($80 > 65$ после нормализации) эффективен гибридный подход с ручной модерацией и словарём замен, учитывающим предметную специфику. Для оценки близости объектов в рекомендательных системах предлагается два метода: усреднение векторов ключевых слов и построение семантического профиля через обход графа связей, с последующим вычислением косинусного сходства. В обоих случаях близость между объектами определяется с помощью косинусного сходства [2] полученных векторных представлений.

Литература

[1] МалаеваЕ.Д. , Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21.—№ 1.—с.32-45.

[2] Титов Ф. М. Использование алгоритмов определения семантического сходства для классификации текстов. Сборник статей XVI Международной научно-практической конференции, Саратов, 30 июня 2021 г. – Саратов: НОО «Цифровая наука», 2021.—с. 31-35.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.shatrova@g.nsu.ru

Что должен знать по математической логике выпускник технического ВУЗа по направлению "Математические основы искусственного интеллекта"(Body of Knowledge for Bachelors of Engineering program "Math & AI")

Н. В. Шилов

В 2024 г. по инициативе А.В. Гасникова, ректора АНО ВО "Университет Иннополис стартовало новое направление подготовки "Математические основы искусственного интеллекта"[**1**]. Существует мнение, что современный ИИ – это методы оптимизации, нейронные сети и большие языковые модели, а классический подход к ИИ (господствовавший в ИИ до начала XXI века) — это ИИ, основанный на логиках и правилах вывода. И хотя в настоящее время основной тренд в ИИ - это нейронные сети и языковые модели (а также численные методы оптимизации), но знание классики ИИ необходимо (и, по-видимому, перспективно) для создания гибридных систем ИИ, основанных как на нейросетевых и языковых моделях, так и на логиках и правилах.

Цель доклада – представить и обсудить программу семестрового курса по выбору "Математическая логика для Искусственного Интеллекта"(бакалавриат, второй курс) по направлению подготовки "Математические основы искусственного интеллекта"в Университете Иннополис. (К сожалению, в настоящий момент этот семестровый курс по выбору – единственный курс по логике за все четыре годы обучения по данному направление подготовки.) Предварительно программа курса была представлена и обсуждена на заседании 9 октября 2025 г. семинара "Нестандартные логики"им. Л. Л. Максимовой лаборатории логических систем ИМ СО РАН и кафедрой алгебры и математической логики Новосибирского Государственного Университета [**3**].

Литература

[1] Математические основы искусственного интеллекта. АНО ВО "Университет Иннополис https://apply.innopolis.university/bachelors/DS-PËAI/ (дата посещения: 16.10.2025)

[2] Математические основы искусственного интеллекта. Программа обучения. АНО ВО "Университет Иннополис https://apply-bach.innopolis.university/ds-mai (дата посещения: 16.10.2025)

[3] Семинар "Нестандартные логики"им. Л. Л. Максимовой. Инсттитут Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, https://math.nsc.ru/seminars/nlog (дата посещения: 16.10.2025)

МАОУ Лицей № 22 "Надежда Сибири Новосибирск (Россия)
E-mail: shiloviis@mail.ru

Разработка автоматизированных методов поиска противоречий в документах с использованием онтологического моделирования и машинного обучения

А. А. Шишкин

В современном мире информация играет ключевую роль во всех сферах человеческой деятельности. Документы, будь то нормативные документы, бизнес требования, регламенты или другие виды текстов, содержат важные данные, которые необходимо верифицировать и проверять на отсутствие противоречий. Некорректная информация, в свою очередь, может привести к серьезным последствиям, таким как принятие неверных решений, финансовые потери и даже юридические проблемы. Поэтому разработка методов для автоматического выявления противоречий в документах становится все более важной задачей.

Для автоматизации поиска логических и содержательных противоречий в документах предлагается разработать методы на основе интеграции онтологического моделирования и машинного обучения. Использование онтологий позволит определять и классифицировать противоречия [**1**], обеспечит объяснимость и интерпретируемость полученных результатов [**2**]. Использование современных технологий машинного обучения позволит с высокой скоростью и точностью выделять факты и знания из документов различной сложности и форматов [**3**].

Целью работы является разработка автоматизированных методов поиска противоречий в документах с использованием онтологического моделирования и машинного обучения. Для достижения цели были определены следующие требования к разрабатываемому методу: поиск и классификация противоречий должны происходить на уровне сущностей и связанных с ними действий и состояний. В дальнейшей работе планируется разработка методов машинного обучения для выделения фактов из документов, разработка методов построения онтологической модели на основе фактов, построение автоматических методов поиска противоречий в документах, проверка их работоспособности на тестовой задаче.

Литература

[1] Ansari, A.M. Ontology-Based Classification and Detection of the Smart Home Automation Rules Conflicts / A. M. Ansari, M. Nazir, K. Mustafa // IEEE Access, 12 – pp.85072-85088.

[2] Chari, S. Explanation ontology: a model of explanations for user-centered AI / S. Chari, O. Seneviratne, D. M. Gruen, M. A. Foreman, A. K. Das, D. L. McGuinness // International Semantic Web Conference, 2023 – pp. 228-243.

[3] Nasar, Z. Named entity recognition and relation extraction: State-of-the-art / Z. Nasar, S. W. Jaffry, M. K. Malik // ACM Computing Surveys (CSUR), 54(1), 2021 – pp. 1-39.

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск (Россия)
E-mail: shaa6661@gmail.com

Методы выявления и корректировки ошибок в ответах больших языковых моделей

А. А. Якобсон

Современные диалоговые системы, основанные на больших языковых моделях-(LLM), демонстрируют высокую эффективность в генерации текста благодаря архитектуре трансформеров с механизмом внимания [1] и обширным обучающим датасетам. Однако их использование в критически важных системах ограничено принципиальными недостатками: непрозрачностью внутренних механизмов принятия решений («черный ящик») и регулярными ошибками в выводах [2]. Повышение прозрачности работы диалоговых систем требует явного представления объектов предметной области в интерпретируемой форме и методов валидации готовых ответов. В работе предлагается гибридный подход к представлению информации, объединяющий векторные эмбеддинги и логическое представление.

В нейронных сетях доминирующим способом представления данных являются эмбеддинги, позволяющие представить тексты в виде векторов в многомерном пространстве. Основным недостатком векторного подхода является потеря прозрачности при сведении операций с текстом к линейной алгебре. Альтернативный подход основан на логических методах. Система LogicText [3] предоставляет инструментарий для представления текстов на естественном языке в виде конечных подмножеств атомарных диаграмм, позволяя явно описывать понятия и связи между объектами.

Объединение векторного и логического подходов позволяет частично решить проблему «чёрного ящика» через рассмотрение пары «векторное представление + логическое представление». Данный подход обеспечивает сохранение вычислительных преимуществ векторных методов при одновременном введении способа формальной верификации через онтологический и логический анализ входящих данных.

Наличие логического анализа информации позволяет корректировать промпты моделей при выявлении «галлюцинирующих» результатов через проверку истинности формул логического представления ответа. Для этого необходимо преобразовать атомарную диаграмму ответа в частичную модель, с помощью которой становится возможным проверить соответствие ответа предметной области [4,5]. На основе набора заранее подготовленных фраз и результатах проверки полученной частичной модели обеспечивается возможность динамической корректировки последующего запроса к модели для улучшения качества ответа.

Литература

[1] Vaswani, Ashish, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Łukasz Kaiser, and Illia Polosukhin. «Attention is all you need.» *Advances in neural information processing systems* 30 (2017).

[2] Ji, Z., Yu, T., Xu, Y., Lee, N., Ishii, E. and Fung, P., 2023, December. Towards mitigating LLM hallucination via self reflection. In *Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2023* (pp. 1827-1843).

[3] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. С. 64-73.

[4] C.Naydanov, D.Palchunov, P.Sazonova. Development of automated methods for the critical condition risk prevention, based on the analysis of the knowledge obtained from patient medical records. In: Proceedings - 2015 International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies, SIBIRCON 2015, p. 33-38. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2015.7361845

[5] Palchunov, D. E., Yakobson, A. A. (2024). Development of an intelligent assistant for selection of goods in the process of dialogue with the user. Бизнес-информатика, 18(1 (eng)), 7-21.

[6] Norouzi, S.S., Barua, A., Christou, A., Gautam, N., Eells, A., Hitzler, P. and Shimizu, C., 2024. Ontology population using llms. *arXiv preprint arXiv:2411.01612*.

[7] Lippolis, Anna Sofia, Mohammad Javad Saeedizade, Robin Keskisärkkä, Sara Zuppiroli, Miguel Ceriani, Aldo Gangemi, Eva Blomqvist, and Andrea Giovanni Nuzzolese. «Ontology generation using large language models.» In *European Semantic Web Conference*, pp. 321-341. Cham: Springer Nature Switzerland, 2025.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.yakobson@g.nsu.ru

Conflict Driven Clause Learning for Invariant Verification

M. V. Korovina

We report on ongoing research in continuous constraint satisfiability checking in CDCL-style. These investigations are motivated by reachability and safety property verification in formal analysis of cyber-physical system. The main idea behind is to check in advance satisfiability of invariants given as existential first order formulas in the real number language extended by different classes of real functions. Historically, there have been two main approaches to deal with non-linear constrains: the symbolic one originated by Tarski's decision procedure for the real closed fields and the numerical one based on interval constraint propagations. It is well known that both approaches have their strength and weakness concerning completeness, efficiency and expressiveness. Nowdays, merging strengths of symbolical and numerical approaches is one of the challenging research areas in theoretical and applied computer science. We a propose calculus that successfully integrates strengths of symbolical and numerical methods. The key steps of the decision procedure based on this calculus contain assignment refinements, inferences of linear resolvents driven by linear conflicts, backjumping and constructions of local linearisations of non-linear components initiated by non-linear conflicts. In **[1]** we showed that the procedure is sound and makes progress by reducing the search space. This approach is applicable to a large number of constraints involving computable non-linear functions, piecewise polynomial splines, transcendental functions and solutions of polynomial differential equations. In **[2, 3]** we proved, among other results, that algorithms based on the calculus are δ-complete for bounded problems. In this setting we discuss recent and future research work.

References

[1] F.Brauße, K. Korovin, M. Korovina, and N.Th. Muller. A CDCL-style calculus for solving non-linear constraints. *Frontiers of Combining Systems - 12th International Symposium, FroCoS 2019, London, UK, September 4-6, 2019, Proceedings*, ed. Andreas Herzig and Andrei Popescu, LNCS (LNAI), Springer, 11715:pp.131–148, 2019.

[2] F. Brauße, K.Korovin, M.Korovina, and N.Th.Muller. The ksmt Calculus Is a δ-complete Decision Procedure for Non-linear Constraints. *The 28th International Conference on Automated Deduction, CADE 2021*, ed. Andrè Platzer, Geoff Sutcliffe, LNCS, Springer, 12699: 113-130, 2021.

[3] F. Brauße, K.Korovin, M.Korovina, and N. Th. Muller. The ksmt Calculus Is a δ-complete Decision Procedure for Non-linear Constraints. *Theor. Comput. Sci.*, 975:pp. 114–125, 2023.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk (Russia)
E-mail: rita.korovina@gmail.com

Applying Russian tokenization to multimodal model ONE-PEACE

D. B. Puchkov, I. Y. Bondarenko

The ONE-PEACE model demonstrates strong performance across various modalities when processing English text; however, it lacks the ability to process Russian text[1]. To adapt the model to the Russian language, we propose employing the Learned Embedding Propagation method, which was previously applied by Mikhail Tikhomirov for training LLMs (unimodal models). This approach involves: retokenization, incorporating Russian language tokens into the tokenizer; retraining only the text adaptor and Language FFN components. As a result, the model will learn to generate appropriate word embeddings for both Russian and English, while the shared self-attention layer remains unchanged [2]. This adaptation will enable the model to process and understand both Russian and English texts simultaneously, while also mapping them into a unified, modality-agnostic semantic space.

References

[1] Peng Wang, Shijie Wang ONE-PEACE: Exploring one general representation model toward unlimited modalities // ArXiv. 2023.

[2] M. Tikhomirov, D. Chernyshev Facilitating large language model russian adaptation with learned embedding propagation // ArXiv. 2024.

Novosibirsk State University,Novosibirsk (Russia)
E-mail: d.puchkov1@g.nsu.ru, i.bondarenko@g.nsu.ru

On the kernels of nonlinear quasi-perfect codes

A. M. Romanov

Let $\mathbb{F}_q^n$ be a vector space of dimension n over a finite field $\mathbb{F}_q$. We will consider vectors belonging to $\mathbb{F}_q^n$ as *words* of length n over the alphabet $\mathbb{F}_q$. An arbitrary subset $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ is called a *q-ary error-correcting code* of length n (a q-ary code for short). A code is called *linear* if it forms a linear subspace over $\mathbb{F}_q$. Otherwise, the code is called *nonlinear*. Let $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denote the *Hamming distance* between the words $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$. *The Hamming sphere* of radius r centered at $\mathbf{x}$ is the set

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n \,|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le r\}.$$

The *packing radius* $e(\mathcal{C})$ of a code $\mathcal{C}$ of length n is the maximum number e such that $B_e(\mathbf{u}) \cap B_e(\mathbf{v}) = \varnothing$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{u} \ne \mathbf{v}$. The *covering radius* $\rho(\mathcal{C})$ of a code $\mathcal{C}$ of length n is the smallest number ρ such that $\cup_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}} B_\rho(\mathbf{c}) = \mathbb{F}_q^n$.

A code $\mathcal{C}$ is called *perfect* if $\rho(\mathcal{C}) = e(\mathcal{C})$ and a code $\mathcal{C}$ is called *quasi-perfect* if $\rho(\mathcal{C}) = e(\mathcal{C}) + 1$.

The *rank* of a code $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ is the dimension of the subspace spanned by $\mathcal{C}$.

The *kernel* of a code $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ is the set

$$\ker(\mathcal{C}) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n \;\middle|\; \lambda \cdot \mathbf{x} + \mathcal{C} = \mathcal{C} \text{ for any } \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

We study the structural properties of nonlinear 1-quasi-perfect q-ary codes, namely the rank and dimension of the kernel.

In present paper, we propose a construction of 1-quasi-perfect q-ary codes with parameters of generalized Reed-Muller codes of order $r = (q-1)m-2$, where m is a positive integer. For $q \ge 3$, $m \ge 2$, the proposed construction allows one to construct nonlinear 1-quasi-perfect q-ary codes with different kernel dimensions. The dimensions of the kernel of nonlinear 1-quasi-perfect q-ary codes constructed using the proposed construction are calculated.

There is a close relationship between 1-perfect codes and codes with parameters of generalized Reed-Muller codes of order $(q-1)m-2$ (see [**1, 2**]). The classification and enumeration of 1-perfect codes over finite fields is a widely open problem in coding theory [**3**, p. 180].

References

[1] A.M. Romanov, *On non-full-rank perfect codes over finite fields*, Des. Codes Cryptogr., **87**:5 (2019), pp.995–1003.

[2] A.M. Romanov, *Perfect mixed codes from generalized Reed-Muller codes*, Des. Codes Cryptogr., **92**:6 (2024), pp.1747–1759.

[3] F.J. MacWilliams, N.J.A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: rom@math.nsc.ru

III. Секция «Неклассические логики и универсальная алгебра»

n-характеристическая модель для предтабличных расширений Int

С. И. Башмаков, Е. В. Брылякова

Неклассические логики, в частности интуиционистские и модальные, включают в себя широкий спектр дедуктивных систем. Исследование унификации в этих системах является важным инструментом для анализа их структурных свойств и взаимосвязей. Одной из фундаментальных проблем, актуальных для любой логической системы, остается проверка доказуемости формул. В рамках этой проблемы особый интерес представляет задача унификации, которая фокусируется на возможности преобразования формулы в доказуемую путем подстановок.

Значительную часть исследований теории унификации занимают задачи определения типов унификации логик, [**1**]. Логика имеет *унитарный* тип унификации, если для любой унифицируемой формулы в логике существует наиболее общий унификатор (н.о.у). Если найдутся унифицируемые формулы, не имеющие н.о.у., логика может обладать следующими типами унификации: *финитарный* тип, при существовании только конечных наборов максимальных унификаторов для каждой такой формулы в логике; *инфинитарный*, если найдутся формулы имеющие бесконечное число максимальных унификаторов; *нульарный*, если некоторые унифицируемые формулы не имеют максимальных унификаторов.

Настоящее исследование посвящено доказательству финитарного типа унификации предтабличных расширений интуиционистской логики — L2 и L3, [**2**].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2025-1790).

Литература

[1] Bashmakov S.I. Unification in Pretabular Extensions of S4 / S.I. Bashmakov; Logica Universalis, 2021.— Vol. 15.—№ 3.–pp.345-361.

[2] Максимова, Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики /Л.Л. Максимова; Алгебра и логика, 1972.—с.558-570.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: krauder@mail.ru
Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: lbrylyakovv@bk.ru

Кортежная семантика логики ветвящегося времени

С. И. Башмаков, А. А. Поляков

В современных работах в области модальных логик фундаментальным инструментом для решения различных задач, таких как исследование разрешимости или типа унификации логической системы и сопутствующих им вопросов, является реляционная семантика Крипке. Однако, не смотря на её универсальность, в некоторых случаях приоритет отдаётся более специализированным подходам к семантическому описанию логики. Так, при исследовании унификации в модальной логике Alt_1 в [**1**], помимо семантики Крипке также была введена кортежная семантика.

В совместной работе, [**2**], была исследована взаимосвязь двух семантик, а также показана их эквивалентность в случае $\mathcal{LTL}.sl$. В данном докладе будет представлено обобщение кортежной семантики для логики $BTL.sl$, характеризующейся нерефлексивными нетранзитивными деревьями.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

Литература

[1] Balbiani P. Unification in modal logic Alt1 / Balbiani P., Tinchev T. // Advances in Modal Logic.—2016.—Vol. 11.—pp.117–134.

[2] Башмаков, С.И. Кортежная семантика линейной логики ступенчатого времени / Башмаков С.И., Поляков А.А., Зверева Т.Ю. // Ожидает публикации.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: sasha.polyakov.03@mail.ru

Разрешимость CTLK

С. И. Башмаков, К. А. Смелых

Реляционная семантика логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$, [**1**], в отличие от классических подходов — таких как TPS или сети Петри, — предоставляет средства для моделирования иерархических и деревовидных структур взаимодействий агентов. Благодаря этому она особенно эффективна при анализе систем, в которых сочетаются кооперативные и конкурентные формы поведения, [**2**]. Так, например, в интеллектуальных транспортных системах отдельные транспортные средства могут согласовывать свои действия для оптимизации движения, при этом сохраняя индивидуальные цели, [**3**].

Доклад посвящён результатам связанным с исследованием разрешимости логики $\mathcal{CTLK}^{Rel}$ и оценкой её вычислительной сложности, [**4**]. В работе представлена методология синтаксического анализа, включающая построение абстрактного синтаксического дерева (AST) и преобразование формул в отрицательную нормальную форму (NNF). Доказаны леммы, ограничивающие раскрытие временных операторов и размер моделей на основе модальной глубины и степени ветвления. На их основе разработаны алгоритмы построения моделей и проверки их корректности.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

Литература

[1] Башмаков С. И., Смелых К. А. Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений CTLK // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47.— с.78–92

[2] Halpern J. Y., Vardi M. Y. The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds. Journal of Computer and System Sciences.—1989.—Т. 38.—№. 1.-—pp.195-237.

[3] Dima C. *Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall. International Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.—pp.117-131.*

[4] Башмаков С. И., Смелых К. А. Разрешимость CTLK // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. // Принята к публикации.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: krauder@mail.ru
Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: lastth@yandex.ru

Натуральное исчисление для кросс-мировой логики

Е. В. Борисов

В литературе представлен ряд модальных логик первого порядка, отображающих феномен кросс-мировой предикации. Специфика логик этого вида состоит в том, что их семантика базируется на кросс-мировой интерпретации предикатов, т.е. на интерпретации, при которой n-местному предикату экстенсионалы назначаются не для отдельных возможных миров, а для упорядоченных n-ок возможных миров. Одна из таких логик – $CWPL$ (crossworld predication logic) – разработана автором: в [**1**] описана семантика этой логики; в [**2**] для нее предложено табличное исчисление. $CWPL$ – это модальная логика первого порядка с равенством; ее формальный язык содержит λ-оператор и индивидные константы; ее модели содержат переменный домен и нежесткую интерпретацию констант. На данный момент в известной мне литературе не описано аксиоматическое или естественное исчисление для какой-либо кросс-мировой логики. Доклад частично восполняет этот пробел: в нем предлагается система натурального вывода в стиле Фитча для упрощенной версии $CWPL$ – $CWPL'$. Упрощения состоят в следующем: язык $CWPL'$ не содержит предиката равенства; модели $CWPL'$ имеют постоянный домен и жесткую интерпретацию констант. Предлагаемая система натурального вывода является сильно корректной и сильно полной относительно семантики, изложенной в [**1**]. В определении вывода и демонстрации его корректности и полноты используются некоторые техники, предложенные в [**3**].

Литература

[1] Borisov E. A Nonhybrid Logic for Crossworld Predication // Логические исследования. 2023. Vol. 29, № 2. pp. 125–147.

[2] Borisov E. A tableau proof theory for CWPL // Логические исследования / Logical Investigations. 2025. Vol. 31. № 1. 31. № 1. pp. 74–96.

[3] Roy T. Natural Derivations for Priest, An Introduction to Non-Classical Logic // Australasian Journal of Logic. 2006, Vol. 4. pp. 47–192.

Институт философии и права СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Натуральное исчисление для модальной логики первого порядка с поссибилистскими кванторами и равенством

И. И. Борисова

В [**2**] представлена модальная логика первого порядка с поссибилистскими кванторами и равенством, $MLPQ$ (modal logic with possibilist quantifiers).

$MLPQ_1$—это упрощенная версия логики $MLPQ$. Упрощение состоит в том, что в языке $MLPQ_1$ нет констант. Поссибилисткий квантор всеобщности, Π, отличается от актуалистского, $\forall$, тем, что переменная, связанная поссибилистским квантором, пробегает по домену модели, а актуалистским — по домену мира оценки. В семантике $MLPQ_1$, как и в семантике $MLPQ$, у моделей переменный домен (как в [**1**]) и предикаты интерпретируются не на доменах миров, а на домене модели, т.е. экстенсионал предиката в некотором мире w может содержать объекты, которых нет в домене w. По этой причине в $MLPQ_1$ формула $\forall x P(x) \to P(x)$ не является общезначимой, но является общезначимой формула $\Pi x P(x) \to P(x)$.

В докладе будут представлены язык, семантика и натуральное исчисление в стиле Фитча для $MLPQ_1$.

Литература

[1] Fitting, M., Mendelsohn, R. First-Order Modal Logic. 2023.

[2] Мухаметшина, И. И. Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка // Analytica. 2023. Т.8. с. 90–103.

НГУ, Новосибирск (Россия)
E-mail: mukhametshina.indira@gmail.com

Алгоритмическая сложность интуиционистских эпистемических логик и их фрагментов

А. В. Ерёмин

Интуиционистская логика IEL, введённая в работе [**1**], призвана отразить логические свойства знания в интуиционистском контексте. Добавим к языку интуиционистской логики одноместную модальность $\boldsymbol{K}$ («известно»). Тогда IEL получается добавлением к аксиомам интуиционистской логики аксиомы нормальности $\boldsymbol{K}(A \to B) \to (\boldsymbol{K}A \to \boldsymbol{K}B)$, аксиомы сериальности $\neg\boldsymbol{K}\bot$ и принципа ко-рефлексии $A \to \boldsymbol{K}A$. В той же работе были введены родственные ей логики IEL^- и IEL^+, получающиеся из IEL удалением сериальности и добавлением аксиомы $\boldsymbol{KK}A \to \boldsymbol{K}A$ соответственно.

Первым исследованием алгоритмической сложности указанных логик является статья [**2**], в которой доказывается верхняя $\boldsymbol{PSPACE}$ оценка для IEL. В данном докладе будет показано, что аналогичная оценка верна для IEL^- и IEL^+, что, в совокупности с консервативностью над интуиционистской логикой и классическим результатом [**3**], доказывает $\boldsymbol{PSPACE}$-полноту всех трёх логик.

Более того, оказывается, что $\boldsymbol{PSPACE}$-полнота появляется уже в однопеременном фрагменте IEL^-. Метод доказательства последнего утверждения, опирающийся на результат М. Рыбакова из работы [**4**], можно приспособить, чтобы весьма просто получить утверждение о $\boldsymbol{PSPACE}$-трудности константных фрагментов для некоторых классов модальных интуиционистских логик (например, класса всех логик между интуиционистской K и интуиционистской K4). Наконец, будет анонсирован (куда менее тривиальный) результат А. Оноприенко и М. Рыбакова, касающийся $\boldsymbol{PSPACE}$-полноты однопеременного фрагмента IEL^+.

Литература

[1] Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic // The Review of Symbolic Logic, 9(2) pp. 266–298, 2016.

[2] Krupski V.N., Yatmanov A. Sequent calculus for intuitionistic epistemic logic iel. In International Symposium on Logical Foundations of Computer Science, pages 187–201. Springer, 2016.

[3] Statman R. Intuitionistic Propositional Logic is Polynomial-Space Complete, Theoretical Computer Science 9, pp.67 - 72, 1979.

[4] Рыбаков М.Н. Погружение интуиционистской логики в её фрагмент от двух переменных и сложность этого фрагмента // Логические исследования, вып. 11, М., Наука, 2004, с. 247–261.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва (Россия)
E-mail: aerem05@inbox.ru

Обобщенные кванторы и скулемовские функции в формальной семантике естественных языков

У. Д. Зайцева

Феномен отрицательного согласования (NC) в русском языке, при котором несколько формально отрицательных элементов выражают единое отрицание, представляет собой вызов для анализа и построения их формальной модели [**1**]. Обобщенные кванторы, обладающие функциональным типом $(e \to t) \to t$, успешно применяются для формализации отрицания в английском языке [**3**], однако в русском языке их прямое применение нарушает принцип композициональности и вызывает трудности при интерпретации [**4**].

В качестве альтернативы предлагается подход, сочетающий лингвистическое преобразование с использованием скулемовских функций. Исходное предложение («Никакой человек не пишет ему») сперва трансформируется в семантически эквивалентную форму с единым сентенциальным отрицанием [**5**]: «Неверно, что какой-нибудь человек пишет ему». Затем неопределенное местоимение интерпретируется не как квантор, а как скулемовская функция с более простым типом $(e \to t) \to e$. Эта функция возвращает конкретного «свидетеля» для экзистенциального утверждения, что позволяет элиминировать сам квантор. В результате логическая форма $\neg\exists x(\mathrm{Person}(x) \wedge \mathrm{Write}(x, h))$ преобразуется в $\neg(\mathrm{Person}(c) \wedge \mathrm{Write}(c, h))$, что адекватно отражает смысл исходного высказывания.

Таким образом, предлагаемый в докладе алгоритм представляет собой метод формализации русского отрицательного согласования, обходящий сложности, связанные с прямыми попытками построения эквивалентного логического варианта предложения [**2**].

Литература

[1] *Падучева Е. В.* Имплицитное отрицание и местоимения с отрицательной поляризацией // Вопросы языкознания. 2011. Vol.1. c.3–18.

[2] *Penzina U., Stukachev A.* Skolem Functions and Generalized Quantifiers for Negative Polarity Items Semantics // In: Distributed Computing and Artificial Intelligence, Special Sessions I, 21st International Conference / Lect. Notes Networks Syst. Vol.1198. Springer, 2025.

[3] *Montague R.* The proper treatment of quantification in ordinary English // In: Approaches to natural language: Proceedings of the 1970 Stanford workshop on grammar and semantics. Springer, 1973. pp.221–242.

[4] *Barwise J., Cooper R.* Generalized quantifiers and natural language // In: Philosophy, language, and artificial intelligence: Resources for processing natural language. Springer, 1981. pp.241–301.

[5] *Zeijlstra H. Sentential negation and negative concord* // PhD Thesis, 2004.

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: u.penzina@g.nsu.ru

О задаче разрешимости нетранзитивной логики ступенчатого времени $\mathcal{LTL}.sl$

Т. Ю. Зверева

Модальные логические системы, описывающие нетранзитивный временной переход, являются эффективным инструментом моделирования вычислительного процесса информационных систем. Ранее в рамках нашего исследования было выполнено семантическое построение линейной многомодальной логики знания нетранзитивного «ступенчатого» времени $\mathcal{LTK}.sl$.

Алфавит языка $L^{\mathcal{LTK}.sl}$ включает счётное множество пропозициональных переменных $Prop = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, константы $\{\top, \bot\}$ скобки $(,)$, стандартные булевы операции и следующий набор модальных операторов: N – нерефлексивный нетранзитивный оператор временного перехода, $\Box_1, \ldots, \Box_n$ – операторы знаний агентов и $\Box_e$ – оператор универсального знания на сгустках.

$\mathcal{LTK}.sl$-фреймом назовём набор $F := \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n \rangle$, где

- $W_{\mathbb{N}} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ – непересекающееся объединение сгустков C_t, пронумерованных натуральными числами;
- **Next** – нерефлексивное нетранзитивное отношение «следующее натуральное число»;
- $R_1, \ldots, R_n$ – отношения знаний агентов;
- R_e – отношение эквивалентности на каждом сгустке.

Для описанной логической системы доказаны конечная аппроксимируемость и p-морфность бесконечных фреймов конечным, установлена проективность унификации и её тип, получен вид проективного унификатора для унифицируемых формул в логике $\mathcal{LTK}.sl$, [**1**].

Позднее аналогичные задачи были рассмотрены для версии логики без компонента знания в семантике – линейной временной логике $\mathcal{LTL}.sl$. Также была исследована взаимосвязь кортежной и реляционной семантики для $\mathcal{LTL}.sl$, установлена их эквивалентность [**2**].

В рамках этой работы рассмотрены вопросы разрешимости и унифицируемости в классе таких логик.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2025-1790).

Литература

[1] Bashmakov S.I., Zvereva T.Yu. // Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl //Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, V. 20 № 2, pp. 1361-1373.

[2] Башмаков С.И., Поляков А.А., Зверева Т.Ю. // Кортежная семантика линейной логики ступенчатого времени–*ожидает публикации.*

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)

Дуальность для многообразия $\mathbf{SP}(M_3)$

А. Е. Изъюрова

Рассмотрим структуру $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$, где S — множество, а $\leq$ и R — два бинарных отношения. Тогда $\mathbb{S}$ является M_3-*пространством*, если

(s1) $\leq$ частичный порядок на S;

(s2) $R \subseteq S^2$ — это отношение эквивалентности на S такое, что для всех элементов $a, b, c, d, e, f \in S$ выполняются следующие условия:

- (a) $[a]_R$ — антицепь; более того, либо $[a]_R$ состоит из одного элемента, либо $[a]_R$ содержит три элемента;
- (b) если $[a]_R = \{a, b, c\}$ и $a, b \leq d$, то $c \leq d$;
- (c) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d\}$ и $d \leq a$, то $d \ll \{b, c\}$;
- (d) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d, e, f\}$ и $d \leq a$, то либо $d \ll \{b, c\}$, либо $\{e, f\} \ll \{b, c\}$.

Полагаем $X(S) = \big\{s \in S \mid [s]_R$ является элементом$\big\}$ и $Y(S) = S \backslash X(S)$.

Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle S', \leq, R \rangle$ — M_3-пространства. Тогда $\varphi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ является M_3-*морфизмом*, если выполняются следующие условия:

(m1) φ отображает S в $S' \cup \big\{\{a, b\} \mid a, b \in X(S')\big\}$;

(m2) если $u, v \in S$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in S'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;

(m3) для всех $x \in X(S)$, $\varphi(x) \in X(S')$;

(m4) для всех $a \in Y(S)$ с $[a]_R = \{a, b, c\}$ выполняется следующее:

- (a) если $\varphi(a) \in X(S')$, то выполняется одно из следующих условий:
  - $\varphi(b) = \big\{\varphi(a), \varphi(c)\big\} \subseteq X(S')$;
  - $\varphi(c) = \big\{\varphi(a), \varphi(b)\big\} \subseteq X(S')$;
  - $\varphi(a) \leq \varphi(b) = \varphi(c) \in X(S')$;
  - $\varphi(b) \leq \varphi(a) = \varphi(c)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$;
  - $\varphi(c) \leq \varphi(a) = \varphi(b)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$;
- (b) если $\varphi(a) \in Y(S')$, то $\big[\varphi(a)\big]_R = \big\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\big\} \subseteq Y(S')$;
- (c) если $\varphi(a) \notin S'$, то $\varphi(a) = \big\{\varphi(b), \varphi(c)\big\} \subseteq X(S')$ — антицепь; более того, $\varphi(a) \ll \varphi(u)$ для каждого $u \in S$, такого что $a \leq u$.

Через $\mathbb{M}_3$ мы обозначили категорию, объектами которой являются M_3-пространства, а морфизмами — M_3-морфизмы, а $\mathbb{B}_3$ обозначает категорию, объектами которой являются полные биалгебраические решётки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(M_3)$, порождённому диамантом, а морфизмами — полные решёточные гомоморфизмы.

Теорема. *Категории $\mathbb{M}_3$ и $\mathbb{B}_3$ дуально эквивалентны.*

Работа выполнена в сотрудничестве с М. В. Швидефски.
Исследование поддержано Российским научным фондом https://rscf.ru/project/24-21-00075/.

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.izyurova@g.nsu.ru

Неймановы бинарные отношения

И. Б. Казаков

Настоящий доклад [1] посвящен бинарным отношениям, названных мной неймановыми (англ. Neumann binary relation). Во-первых, представлено соответствующее формальное определение нейманова бинарного отношения. Во-вторых, представлена теорема о том, что в каждой мощности, в которой оно существует, нейманово отношение единственно с точностью до изоморфизма. В-третьих, представлены необходимые и достаточные условия существования нейманова бинарного отношения на заданном множестве. Отдельно стоит отметить, что существование нейманова бинарного отношения над некоторым множеством зависит только лишь от мощности данного множества. Понятие нейманова бинарного отношения мотивировано свойствами теоретико-множественного универсума V, которые выражаются в виде соответствующих аксиом теории множеств NGB. Во-первых, выполнена аксиома экстенсиональности: всякое множество однозначно определяется своими элементами. Во-вторых, выполнена аксиома фундированности, т. е. запрещены бесконечные убывающие цепи множеств. В-третьих, выполнен принцип ограничения размера: класс X является множеством тогда и только тогда, когда он не равномощен универсальному классу V.

Определение 1. *Пусть X—множество, R—бинарное отношение над X. Будем говорить, что R является экстенсиональным, если из $\{b \in X | (b, a_1) \in R\} = \{b \in X | (b, a_2) \in R\}$ следует $a_1 = a_2$*

Определение 2. *Пусть X—множество, R—бинарное отношение над X. Будем говорить, что R является фундированным, если не существует последовательности a_n (элементов множества X) такой, что для всех n выполнено $(a_{n+1}, a_n) \in R$, т. е. не существует бесконечной убывающей последовательности (по отношению R).*

Определение 3. *Пусть X—множество, R—бинарное отношение над X. Будем говорить, что R является корректным, если для любого $a \in X$ выполнено $|\{b \in X | (b, a) \in R\}| < |X|$, т. е. если для всякого элемента множество элементов, состоящих с ним в отношении R, является малым подмножеством множества X.*

Определение 4. *Пусть X—множество, R—бинарное отношение над X. Будем говорить, что R является полным, если для любого малого подмножества $Y \subset X$, $|Y| < |X|$ существует $a \in X$ такое, что $Y = \{b \in X | (b, a) \in R\}$*

Определение 5. *Пусть X—множество, R—бинарное отношение над X. Будем говорить, что R является неймановым, если оно является экстенсиональным, фундированным, корректным и полным.*

РЭУ им. Плеханова, МГТУ им.Баумана, Москва (Россия)
E-mail: i_b_kazakov@mail.ru

[1] Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему "Модели, методы и алгоритмы искусственного интеллекта в задачах экономики для анализа и стилизации многомерных данных, прогнозирования временных рядов и проектирования рекомендательных систем номер проекта FSSW-2023-0004.

Сложность эквациональных теорий двух классов решеток Клини с делениями

М. И. Канович, С. Л. Кузнецов, А. О. Щедров

Решетка Клини с делениями (РКД) [**7, 3**] — это алгебраическая структура $(A, \preccurlyeq, \wedge, \vee, \cdot, 0, 1, \backslash, /, {}^*)$, где $(A, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$ — решетка, $(A, \cdot, 1)$ — моноид, 0 — ноль по умножению, деления удовлетворяют условиям $a \preccurlyeq c \,/\, b \iff a \cdot b \preccurlyeq c \iff b \preccurlyeq a \,\backslash\, c$, и, наконец, итерация Клини a^* задается условием неподвижной точки: $a^* = \min_{\preccurlyeq}\{b \mid 1 \vee a \cdot b \preccurlyeq b\}$. Более конкретные классы РКД образованы алгебрами формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ и алгебрами бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$. (Произведение в первом случае определяется как попарная конкатенация, во втором — как композиция отношений.) РКД из этих классов являются $*$-непрерывными, т.е. удовлетворяют более сильному условию $a^* = \sup_{\preccurlyeq}\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Известно, что эквациональная теория (множество всех общезначимых на данном классе атомарных формул-равенств) класса всех РКД перечислима, но не разрешима (Σ^0_1-полна) [**5**]. Эквациональная теория класса всех $*$-непрерывных РКД является Π^0_1-полной [**1**]. Вопрос о сложности эквациональных теорий для упомянутых выше конкретных классов РКД был поставлен в работе Бушковского [**2**], где были установлены нижние Π^0_1-оценки. Оказывается, однако, что эквациональные теории данных конкретных классов РКД имеют намного более высокую сложность.

Теорема. *Эквациональная теория алгебр формальных языков, в сигнатуре решеток Клини с делениями, Π^1_1-полна.*

Теорема. *Эквациональная теория алгебр бинарных отношений, в сигнатуре решеток Клини с делениями, Π^1_1-полна.*

Ключевую роль играют константы 0 и 1. С их помощью строятся аналоги экспоненциальной модальности [**6**] — $1 \wedge (0 \,/\, (0 \,/\, (1 \wedge A)))$ для бинарных отношений и $1 \wedge A$ для формальных языков — и моделируется следование из гипотез [**4**].

Литература

[1] *Buszkowski W., Palka E.* Infinitary action logic: complexity, models and grammars // Stud. Logica. Vol. 89(1). pp.1–18.

[2] *Buszkowski W.* On the complexity of the equational theory of relational action algebras // In: Proc. RelMiCS 2006 / Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 4136. Springer, 2006. pp.106–119.

[3] *Kozen D.* On action algebras // In: Logic and Information Flow. MIT Press, 1994. pp.78–88.

[4] *Kozen D.* On the complexity of reasoning in Kleene algebra // Inform. Comput. 2002. Vol. 179. pp.152–162.

[5] *Kuznetsov S.* Action logic is undecidable // ACM T. Comput. Log. 2021. Vol. 22(2). Art. 10.

[6] *Kuznetsov S. L., Speranski S. O.* Infinitary action logic with exponentiation // Ann. Pure Appl. Log. 2022. Vol.173(2). Art. 103057.

[7] *Pratt V.* Action logic and pure induction // In: JELIA 1990: Logics in AI / Lect. Notes Artif. Intell. Vol. 478. Springer, 1991. pp.97–120.

UCL, Лондон (Великобритания)
E-mail: m.kanovich@ucl.ac.uk
МИАН, Москва (Россия)
E-mail: sk@mi-ras.ru
UPenn, Филадельфия (США)
E-mail: scedrov@math.upenn.edu

Инклюзивное описание эндоморфизмов n-группоидов

А. В. Литаврин

Полагаем, что f – это n-арная операция на множестве G. Тогда алгебраическую систему $G = (G, f)$ называют *n-группоидом.* В настоящей работе изучается вопрос описания множества всех эндоморфизмов n-группоидов с помощью условий, записанных с помощью отношения включения множеств (т.е. инклюзивные свойства). Для каждого n-группоида $G = (G, f)$ введем отображение $\Phi : G \to 2^{G^n}$, которое для любого $g \in G$ определяется равенством:

$$\Phi(g) := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in G^n \mid f(a_1, a_2, ..., a_n) = g\}.$$

Отображение Φ полностью описывает операцию f в n-группоиде $G = (G, f)$. Поэтому задание конкретного отображения Φ для множества G эквивалентно заданию конкретного n-группоида с носителем G.

Как обычно, $T(G)$ – это симметрическая полугруппа всех преобразований множества G и $S(G)$ – симметрическая группа всех перестановок множества G. Для каждого преобразования $\alpha \in T(G)$, каждого кортежа $(a_1, a_2, ..., a_n) \in G^n$ и всякого подмножества A множества G^n будем использовать договоренности:

$$\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) := (\alpha(a_1), \alpha(a_2), ..., \alpha(a_n)),\ \alpha(A) := \{\alpha(a) \mid a \in A\}.$$

В частности, $\alpha(\varnothing) := \varnothing$. Была доказана следующая

Теорема. *Для любого n-группоида G имеют место равенства множеств:*

$$\mathrm{End}(G) = \{\alpha \in I(G) \mid \forall g \in G\ :\ \alpha(\Phi(g)) \subseteq \Phi(\alpha(g))\};$$

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha \in S(G) \mid \forall g \in G\ :\ \alpha(\Phi(g)) = \Phi(\alpha(g))\}.$$

С помощью приведенной теоремы удалось построить некоторые классы n-группоидов для которых были получены результаты в исследовании проблемы поэлементного описания множества всех эндоморфизмов. В докладе будут представлены соответствующие результаты и их обсуждение. Данная теорема является удобным инструментом в исследовании открытой проблемы 4.1 из [**1**], которая связана с универсальным критерием неподвижных точек произвольного преобразования фиксированного непустого множества.

Литература

[1] *Litavrin A.V.* On some universal criterion for a fixed point // *Middle Volga Mathematical Society Journal.* 2025. V. 27, No. 1. pp.34–48.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: anm11@rambler.ru

Об определяемости универсальных частичных графовых автоматов своими полугруппами входных сигналов

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов

В работе рассматриваются частичные автоматы в категории [**1**] графов, то есть автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами графов, сохраняющихся частичными функциями переходов и выходов автомата. Особое внимание уделяется универсальным частичным графовым автоматам $\mathrm{PAtm}(G_1, G_2)$ над некоторыми графами G_1 и G_2. Такие автоматы являются универсально притягивающими объектами в категории частичных графовых автоматов над графами G_1 и G_2, полугруппа входных сигналов таких автоматов является множеством пар частичных отображений, таких что первая компонента есть частичный эндоморфизм графа состояний G_1, вторая компонента есть частичный гомоморфизм графа состояний G_1 в граф выходных сигналов G_2 и области определений обеих компонент совпадают.

Дуга графа, не имеющая встречной, называется собственной. Граф $\widetilde{G} = (X, \rho^{-1})$ называется двойственным графом графа $G = (X, \rho)$. Для универсальных частичных графовых автоматов над рефлексивными графами, содержащими по крайней мере одну собственную дугу, мы решаем задачу их абстрактной определяемости своими полугруппами входных сигналов: при каких условиях полугруппы входных сигналов двух таких автоматов будут изоморфны? Основным результатом является доказательство того, что автоматы над такими графами определяются своими полугруппами входных сигналов с точностью до изоморфизма и направления дуг в графах.

Теорема. *Пусть $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $G'_1 = (X'_1, \rho'_1)$, $G'_2 = (X'_2, \rho'_2)$ — рефлексивные графы, причём граф G_1 содержит по крайней мере одну собственную дугу. Тогда для универсальных частичных графовых автоматов $\mathrm{PAtm}(G_1, G_2) = (G_1, S(G_1, G_2), G_2, \star, \diamond)$ и $\mathrm{PAtm}(G'_1, G'_2) = (G'_1, S(G'_1, G'_2), G'_2, \star', \diamond')$ следующие утверждения равносильны:*

1) *графы G_1, G_2 изоморфны соответственно графам G'_1, G'_2 или двойственным графам $\widetilde{G'_1}$, $\widetilde{G'_2}$;*
2) *полугруппы $S(G_1, G_2)$, $S(G'_1, G'_2)$ изоморфны;*
3) *частичный автомат $\mathrm{PAtm}(G_1, G_2)$ изоморфен частичному автомату $\mathrm{PAtm}(G'_1, G'_2)$ или частичному автомату $\mathrm{PAtm}(\widetilde{G'_1}, \widetilde{G'_2})$.*

Литература

[1] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.,—с. 191.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов (Россия)
E-mail: v.molchanov@inbox.ru, renatfara@mail.ru

Унификация и проективность в логиках $MLinML_N$ и NML

Н. А. Проценко, К. В. Грекович

Ранее в работах [**1, 2**] изучались неклассические модальные логики, в которые были добавлены операторы, отвечающие за надежность информации в системах. В предыдущих работах были решены проблемы разрешимости для логик $MLinML_N$ [**1**] и NML [**2**].

В докладе мы хотим представить результаты исследования логик из наших предыдущих работ, но уже в области унификации. Одной из поставленных целей было: адаптировать технику из [**3**] для логики $MLinML_N$. Также мы предприняли попытку расширить имеющиеся результаты на логики с мультиозначенными моделями.

Исследование поддержано Российским Научным Фондом https://rscf.ru/project/25-21-20011/)

Литература

[1] Protsenko N. A. Multilinear multimodal logic with semi-reliable information operator / Protsenko N. A., Rybakov V. V. // Siberian Electronic Mathematical Reports.–2025.–Vol. 22, No. 2.–pp. 1154–1163. – DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.071

[2] Rybakov V. V. Non-standard Logic and Reliability of Information / Rybakov V. V., Kiyatkin V. R., Grekovich K. V. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.–2025.–Vol. 18, No. 5.– pp. 680–686.–EDN: OEPOYR.

[3] Rybakov V. V. Admissibility and Unification in the Modal Logics Related to S4.2 / Rybakov V. V.// Siberian Mathematical Journal.–2024. – Vol. 65, No. 1. – pp. 198–206. – DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2024.65.115

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: nikitaprotsenko2003@gmail.com; propro879@gmail.com

Построение (формульного) базиса глобально допустимых правил логики *Grz*.

В. В. Римацкий

В начале 2000-х для большинства базовых неклассических индивидуальных логик (Int, KC, $K4$, $S4$ и др.) в работах Рыбакова В.В., Ерябека Е., Иемхофф Р., Римацкого В.В. и др. были построены явные базисы для допустимых правил вывода. Тем самым ключевые вопросы теории допустимых правил вывода неклассических логик (разрешимость, финитная аппроксимируемость, описание базиса) были решены. Возник вопрос о дальнейшем развитии этой теории.

Одним из направлений развития теории допустимых правил стали глобально допустимые правила вывода. Правило r *глобально допустимо в логике* L, если r допустимо во всех фининто аппроксимируемых (табличных) логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики* L, если (i) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; (ii) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L.

Представленная работа продолжает изучение глобально допустимых правил неклассических логик и развивает результаты, полученные в **[1, 2]**. Мы исследуем правила вывода, глобально допустимые в логике Grz. По произвольному конечному фрейму, адекватного логике Grz, строится конечная модель специального вида, элементы которой формульные. С использованием этих формул определяются формульные правила вывода специального вида. Для данной совокупности данных правил доказано, что 1) все эти правила глобально допустимы в логике Grz, и 2) каждое глобально допустимое в Grz правило вывода выводится из заданного набора правил.

Тем самым доказан основой результат:

Теорема. *Заданная совокупность правил вывода образует (формульный) базис глобально допустимых правил вывода логики* Grz.

Исследование было поддержано Российским Научным Фондом (Проект No.25-21-20011)

Литература

[1] Римацкий В. В. Глобально допустимые правила вывода. Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. с. 138–160. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138

[2] Римацкий В. В. Базис глобально допустимых правил логики $S4$. Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. с. 152–169. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск (Россия)
E-mail: Gemmeny@rambler.ru

Сложность логик **S2** и **S3**

М. Н. Рыбаков

Нормальные модальные пропозициональные логики часто PSPACE-трудны; так, **K**, **T**, **S4**, **D**, **GL**, **Grz** и многие другие PSPACE-полны [**7, 3**], причём даже при малом числе переменных в языке [**2, 4, 9, 10**]. В то же время все расширения таких логик как **K5**, **GL.3**, **Grz.3** являются coNP-полными. Похожая ситуация наблюдается с ненормальными логиками, содержащимися в **K**: логики **E**, **EM**, **EN** и многие другие coNP-полны [**11**], и то же самое справедливо для их фрагментов от малого числа переменных [**1, 6**].

Мы затронем вопрос сложности систем **S1**–**S8** [**8, 5**]. Две из них — **S4** и **S5** — являются нормальными и их сложность известна. Остальные являются ненормальными, и похоже, что вопрос их сложности не исследовался. Гипотеза автора состоит в том, что и они, и их фрагменты от одной переменной PSPACE-трудны. Пока эту гипотезу удалось подтвердить для **S2** и **S3**.

Теорема. *Логики* **S2** *и* **S3***, а также их фрагменты от одной переменной, являются* PSPACE-*трудными.*

Предполагается, что для систем **S1**, **S6**, **S7** и **S8** в ближайшее время будут получены близкие результаты. Планируется обсудить причины, приводящие к таким результатам.

Литература

[1] Кудинов А.В., Рыбаков М.Н. Сложность константных фрагментов ненормальных модальных логик. Четырнадцатые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. Москва, 2025, с.36–39.

[2] Chagrov A., Rybakov M. How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics? Advances in Modal Logic, pp.71–82, King's College Publications, London, 2003.

[3] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal Logic. Oxford: Oxford logic guides, 1997.

[4] Halpern J. Y. The effect of bounding the number of primitive propositions and the depth of nesting on the complexity of modal logic. Artificial Intelligence, 75(2):pp. 361–372, 1995.

[5] Kripke S. A. Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-Normal Modal Propositional Calculi. The Theory of Models: Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965, pp.206–220.

[6] Kudinov A., Rybakov M. Complexity of the variable-free fragments of non-normal modal logics (extended version). Cornell University, arXiv: 2507.09136, 2025.

[7] LadnerR.E. The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic. SIAM Journal on Computing, 6(3):pp.467–480, 1977.

[8] Lewis C. I., Langford C. H. Symbolic Logic. The Century Co., New York, 1932. (Second edition reprinted by Dover Publications, 1959.)

[9] Spaan E. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1993.

[10] Švejdar V.The decision problem of provability logic with only one atom. *Archive for Mathematical Logic*, 42(8):pp. 763–768, 2003.

[11] Vardi M. Y. On the complexity of epistemic reasoning. *Proceedings. Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science*, Pacific Grove, CA, USA, 1989, pp.243–252.

ВШМ МФТИ и НИУ ВШЭ, Москва; ТвГУ, Тверь (Россия)
E-mail: m_rybakov@mail.ru

О решетках, близких к дистрибутивным

К. В. Селиванов

Определение. [**1**] *Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы*

$$[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z] \text{ и } [(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

Класс решеток, близких к дистрибутивным, является вполне естественным расширением класса дистрибутивных решёток.

Хорошо известно, что минимальные недистрибутивные решётки — это «диамант» и «пентагон». Их наличие или отсутствие в решётке в качестве подрешётки определяет, является ли решётка дистрибутивной.

Для класса решеток, близких к дистрибутивным, естественно было бы рассмотреть аналогичный вопрос, т. е. найти минимальные решетки, не являющиеся близкими к дистрибутивным. В [**2**], докладчик в соавторстве с А. Г. Гейном показали, что класс минимальных решёток, не близких к дистрибутивным, можно разбить на два подкласса: один подкласс состоит из минимальных решёток, не близких к дистрибутивным, порождающихся 3 элементами специального вида, а другой подкласс состоит из минимальных решёток, не близких к дистрибутивным, порождающихся 4 элементами специального вида.

Докладчиком полностью описаны оба подкласса. В первом подклассе 5 самодвойственных решёток и 12 пар двойственных решёток. Во втором подклассе 7 самодвойственных решёток и 68 пар двойственных решёток. В докладе предполагается изложить методику получения результата для обоих подклассов. Благодаря этому описанию можно для конечных решёток получить критерий того, является ли данная решетка близкой к дистрибутивной.

Теорема. Конечная решётка близка к дистрибутивной, тогда и только тогда, когда она не содержит в качестве подрешётки одну из минимальных, не близких к дистрибутивным.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2025-1549).

Литература

[1] Гейн А.Г., Маслинцын И.Д., Маслинцына К.Э., Селиванов К.В. О 3-порождённых решетках, близких к дистрибутивных, Алгебра и логика, 62, № 4, 2023, с.504 – 523.

[2] Гейн А.Г., Селиванов К.В. Минимальные решётки, не близкие к дистрибутивным // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 14–19 ноября 2022 г. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2022, с.157.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Уральский математический центр, Екатеринбург, Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)

E-mail: ckirill2000@mail.ru

О свойствах звёздной высоты

Ю. Д. Теляковская

Цель работы–исследование влияния различных операций на звёздную высоту регулярных языков.

Определение звёздной высоты:

- Регулярные выражения строятся на основе констант 0 и 1 – обозначние нейтральных относительно объединения и конкатенации элементов, букв алфавита, с применением операций объединения ($\cup$), конкатенации ($\cdot$), звёзды Клини (*).
- Звёздная высота: $h(s) = 0$, $h(\sigma \cup \omega) = h(\sigma\omega) = \max\{h(\sigma), h(\omega)\}$, $h(\sigma^*) = h(\sigma) + 1$.
- Звёздная высота регулярного языка - минимальная высота среди описывающих его выражений.

Как показали Р. Коэн и Я. Бжозовски [**1**], 1970, добавление к используемым для записи регулярных выражений объединения, конкатенации и звезды Клини дополнительных операций может сильно изменить звёздную высоту регулярных языков. Так, Л. Эгган [**2**], 1963, доказал, что при стандартном определении регулярного выражений доказано, что для всякого натурального k существует регулярный язык E: $h(E) = k$. При этом вопрос о существовании языков звёздной высоты больше 1 в случае добавления дополнения к определению регулярных выражений входит в список 2019 года “Open problems about regular languages, 35 years later”[**3**].

Доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1. *Для всякого натурального n существуют регулярные языки R и T, такие, что, $h(T) = 0$, а $h(R) - h(R/T) = n$*

Утверждение 2. *Существует регулярный язык R, такой, что $h(R) > h(RR)$*

Литература

[1] Cohen R.S., Brzozowski J.A. (1970), General Properties of Star Height of Regular Events, JCSS, 4(3), pp. 260-280.

[2] Eggan L.C. (1963), Transition graphs and the star-height of regular events. Michigan Math. J. 10, pp.385–397.

[3] Jean-Eric Pin. Open problems about regular languages, 35 years later. Stavros Konstantinidis; NelmaMoreira; Rogério Reis; Jeffrey Shallit. The Role of Theory in Computer Science - Essays Dedicated to Janusz Brzozowski, World Scientifc, 2017.

НИУ ВШЭ, Москва (Россия)
E-mail: jldjldt@mail.ru

Адаптация линейной логики к категории векторных пространств

А. Н. Хранилова

Существуют различные подходы к изучению связи линейной логики [**1**] и категории векторных пространств $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ [**2, 3, 4**]. Поскольку соотношение между ними оказывается нетривиальным, для достижения полноты интерпретации приходится модифицировать либо категорию векторных пространств, либо линейную логику. В рамках доклада будет представлена логика VSL, являющаяся адаптацией линейной логики к категории векторных пространств. Она построена так, чтобы её интерпретация в терминах аппарата изоестественных преобразований (незначительное расширение аппарата $\mathbb{Z}$-инвариантных морфизмов [**4**]) имела потенциал быть полной. В частности, для категории конечномерных векторных пространств $\mathrm{FdVect}_{\mathbf{k}}$ доказана полнота интерпретации логики VSL.

Утверждение (Корректность интерпретации VSL). *Интерпретация любого доказательства выводимой секвенции* $\vdash \Gamma$ *– ненулевое изоестественное преобразование.*

Литература

[1] Jean-Yves Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50, 1987.

[2] Melliès P.-A. Categorical semantics of linear logic. In: *Interactive Models of Computation and Program Behaviour*, Panoramas et Synthèses 27, Société Mathématique de France, 2009.

[3] Blute R.F., Scott P.J. Linear Läuchli semantics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 77(2):pp.101–140, 1996.

[4] Hamano M. $\mathbb{Z}$-modules and full completeness of multiplicative linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 107(1–3):pp.325–351, 2001.

МФТИ, Москва (Россия)
E-mail: khranilov.an@phystech.edu

On a generalisation of twist-structures of constructive and modal logics

D. M. Anishchenko, S. P. Odintsov

Some constructive and modal logics allows an algebraic semantics in terms of so called twist-structures – for instance, $\mathsf{N4}$ [**2**], BK [**4**], C and $\mathsf{C}^{\perp}$ [**1**] and the logic axiomatizing consequence relations over trilattice $SIXTEEN_3$ [**3, 5**]. Their languages include so called positive connectives and connectives corresponding to one or more constructive negations. A domain of a twist-structure is a subset of a Cartesian power of a domain an algebra in the language of positive connectives. Connectives corresponding to constructive negations are interpreted as operations that permute components in elements of the twist-structure while positive connectives are specified in non-standard way on components different from the first one. If we consider permuting of components in terms of group action, then we could say that the group S_2 acts on twist-structures for $\mathsf{N4}$, BK, C and $\mathsf{C}^{\perp}$ and the group $S_2 \times S_2$ acts on twist-structures for logic determined by the matrix $SIXTEEN_3$.

We suggest a generalisation of this construction in case of an arbitrary group and a twist-structures over Heyting algebras and prove the corresponding strong completeness theorem. This construction can be transferred to twist-structures for modal logics and give a way to set an algebraic semantics for Wansing's logics extending the Heyting–Brouwer logic HB [**6**].

The work is supported by State Contracts of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF-2022-0012).

References

[1] Fazio D., Odintsov S.: An algebraic investigation of the connexive logic C. Studia Logica **112**, pp.37–67 (2024).

[2] Odintsov S.: Algebraic semantics for paraconsistent Nelson's logic. Journal of Logic and Computation **13**(4), pp.453–468 (2003).

[3] Odintsov S.: On axiomatizing Shramko–Wansing's logic. Studia Logica **91**, pp. 407–428 (2009).

[4] Odintsov S., Wansing H.: Modal logics with Belnapian truth values. Journal of Applied Non-Classical Logics **20**(3), pp.279–304 (2010).

[5] Odintsov S., Wansing H.: The logic of generalized truth values and the logic of bilattices. Studia Logica **103**, pp.91–112 (2015).

[6] Wansing H.: Constructive negation, implication, and co-implication. Journal of Applied Non-Classical Logics **18**, pp.341–364 (2008).

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: d.anishchenko@g.nsu.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

On pseudo-associative conjunctive operations on binary relations

D. A. Bredikhin

Let us denote by $R\{*\}$ (respectively, $R\{*, \subseteq\}$) the class of all groupoids (partially ordered groupoids) isomorphic to groupoids of binary relations with an operation $*$. The operation $\rho \otimes \sigma = (\rho^{-1} * \sigma^{-1})^{-1}$, where $^{-1}$ is the operation of relational inverse, is called *inverted* to the operation $*$. It is obvious that $R\{\otimes, \subseteq\} = R\{*, \subseteq\}$.

The operation is called *conjunctive* if it can be defined using a quantifier-free formula of first-order predicate logic containing only conjunctions [**1, 2**]. There are 72 different (up to duals and inverted) conjunctive binary operations on relations, of which only 24 are associative. The other 48 are non-associative but many of these satisfy identities that are natural generalizations of the identities of idempotency, commutativity, and associativity. We call a groupid pseudo-idemotent from the right [left] if it satisfies the identity $x^2y = xy$ [$xy^2 = xy$], pseudo-commutative from the right [left] if it satisfies the identity $(xy)z = (yx)z$ [$x[yz) = x[zy)$], and pseudo-associative from the right [left] if it satisfies the identity $((xy)z)w = (x(yz))w$ [$w((xy)z) = w(x(yz))$]. Note that the term pseudo-commutativity was first introduced by the founder of the theory of inverse semigroups (generalized groups) V.V. Wagner [**3**]. Left and right associative groupoids are naturally called pseudo-associative or pseudo-semigroups.

Below is given one of the results concerning the axiomatic characterization of classes of pseudo-semigroups of binary relations with conjunctive operations.

Theorem *Let us consider the operation $*$ on binary relations defined as follows:*

$$\rho * \sigma = \{(u, v) : (u, u), (v, v) \in \rho \wedge (v, u) \in \sigma\}.$$

The operation $*$ is pseudo-associative. The class $R\{*, \subseteq\}$ forms a quasi-variety and does not form a variety in the class of all partial ordered pseudo semigroups. A partially ordered pseudo semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R\{*, \subseteq\}$ if and only if it satisfies the following identities and quasi-identity: $x^2y = xy$ (1), $(xy)z = (yx)z$ (2), $x(yz) = y(xz)$ (3), $x(yz) = x(y(xz))$ (4), $x(xy) \leq y$ (5), $x \leq yz \Rightarrow x \leq y(yz)$ (6).

A partially ordered pseudo semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the variety generated by the class $R\{*, \subseteq\}$ in the class of all partial ordered pseudo semigroups if and only if it satisfies identities (1)–(5). The class $R\{*\}$ forms a variety. A pseudo semigroup $(A, \cdot)$ belongs to the class $R\{*\}$ if and only if it satisfies identities (1)–(4).

References

[1] Bredikhin D.A. On algebras of binary relations with conjunctive operations // Algebra Universalis, 2021, v.82, Article 39.

[2] Bredikhin D.A. On Groupoids of Relations with One Conjunctive Operation of Rank 2 // Studia Logica, 2022, v.110, pp. 1137-1153.

[3] Bredikhin D.A.,Makeev N.N.,Poplavski V.B. Legacy of Viktor Wagner. On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University // Izvestiya Of Saratov University Mathematics Mechanics Informatics, 2025, v. 25, iss. 3 (in Russian).

Saratov State University, Saratov State Technical University, Saratov (Russia)
E-mail: bredikhin@mail.ru

Limit varieties of aperiodic monoids

S. V. Gusev, O. B. Sapir

A variety of algebras is called *finitely based* if the identities it satisfies are finitely axiomatizable, otherwise, the variety is said to be *non-finitely based.* A *limit variety* is a variety that is minimal with respect to being non-finitely based.

A monoid is *aperiodic* if all its subgroups are trivial. The first two examples of limit varieties of aperiodic monoids were presented by Jackson [**1**] in 2005. Since then, limit varieties of aperiodic monoids have received much attention and several more examples have been found as well as some partial descriptions have been obtained (see Section 11 of the recent monograph [**2**] and references therein).

In this work, based on the previous results, we present a new example of a limit variety of aperiodic monoids. We also show that if there is any other limit variety of aperiodic monoids, then it is contained in the variety

$$\mathbf{Q}^1 \vee \mathbf{B} = \mathsf{var}\{xyx \approx xyx^2 \approx x^2yx,\, x^2y^2 \approx (xy)^2\},$$

where $\mathbf{B} = \mathsf{var}\{x \approx x^2\}$ is the variety of all idempotent monoids, and

$$\mathbf{Q}^1 = \mathsf{var}\{xyx \approx xyx^2 \approx x^2yx,\, x^2y^2 \approx y^2x^2\}$$

is the variety generated by the following six-element monoid

$$Q^1 = \langle a, b, c \mid a^2 = a,\, ab = b,\, ca = c,\, ac = ba = cb = 0\rangle \cup \{1\} = \{a, b, c, bc, 1, 0\}.$$

S. V. Gusev was supported by grant No. 25-71-00005 from the Russian Science Foundation, https://rscf.ru/en/project/25-71-00005/.

References

[1] M. G. Jackson, *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras*, Semigroup Forum, **70** (2005), pp.159–187.

[2] E. W. H. Lee, *Advances in the Theory of Varieties of Semigroups*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2023.

Ural Federal University, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: sergey.gusb@gmail.com
Ben-Gurion University of the Negev, Beersheba (Israel)
E-mail: olga.sapir@gmail.com

H-sobrifications of Δ-spaces

M. I. Kudryashova

We examine Δ-spaces, applying the theory of H-sober spaces, see [**4**]. The following Theorem is our main result and generalizes Proposition 5, Corollary 6 from [**1**].

Theorem. *Let* H *be an* I*-system. If* $\mathbb{X}$ *is a* Δ*-space, then its* H*-sobrification* $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ *is a* Δ*-space and* $\mathbb{X}$ *is a* [*strong*] *reflexive subspace of* $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.

Supported by the Russian Science Foundation https://rscf.ru/project/24-11-00227/.

References

[1] Ershov Yu.L. Δ-*spaces*, Algebra and Logic **38**, no. 6 (1999), pp. 667–679.
[2] Ershov Yu.L. *Topology for Discrete Mathematics* (Russian), Novosibirsk, Siberian Branch of RAS, 2020.
[3] Xu Xiaoquan, *On* H*-sober spaces and* H*-sobrifications of* T_0*-spaces*, Topology Appl. **289** (2021), article no. 107548.
[4] Kudryashova M.I., Schwidefsky M.V., *To the theory of H-sober spaces*, Sib. Math. J **65** (2024), pp.778–792.

Kazan Federal University, Kazan and Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: m.kudryashova@g.nsu.ru

On transferring properties of N4$^{\perp}$-extensions to their modal companions

S. P Odintsov

A modal companion of a logic L extending Nelson's logic $\mathsf{N4}^{\perp}$ ($L \in \mathcal{E}\mathsf{N4}^{\perp}$) is defined as an extension M of the Belnapian modal logic $\mathsf{BS4}$ such that L is faithfully embedded into M via T_B. The translation T_B is weakly structural and extends the well known Gödel-Tarski translation T to the language with strong negation. For $L \in \mathcal{E}\mathsf{N4}^{\perp}$, we define several $\mathsf{BS4}$-extensions:

$$\tau^B(L) = \mathsf{BS4} + \{T_B\varphi \mid \varphi \in L\};\ \tau^G(L) = \tau^B(L) + \{\mathsf{grz}\};\ \tau^3(L) = \tau^B(L) + \{\neg(p \wedge {\sim}p)\}.$$

Here grz denotes the Grzegorczyk axiom. Not every $\mathsf{N4}^{\perp}$-extension has modal companions [**1**]. However, we obtain the following results.

Tabularity. If L has modal companions and is tabular, then $\tau^B(L)$ is not tabular, but $\tau^G(L)$ is. If a modal companion of L is tabular, then L is tabular.

Pretabularity. There are 5 pretabular $\mathsf{BS4}$-extensions, but the known modal companions of pretabular $\mathsf{N4}^{\perp}$-extensions does not have this property.

Finite model property and *decidability* are transferred from special minimal and special explosive $\mathsf{N4}^{\perp}$-extensions to their counterparts of the form $\tau^B(L)$ and, respectively, $\tau^3(L)$.

Interpolation properties CIP and IPD. The fact that $M \in \mathsf{BS4}$ has CIP (IPD) is equivalent to the superamalgamation (resp., amalgamation) property of the respective variety $V(M)$ of $\mathsf{BS4}$-lattices. If $M \in \mathsf{BS4}$ has CIP or IPD, then this property is inherited by its $\sim$-free fragment. On the other hand, for every $M \in \mathcal{E}\mathsf{S4}$ with CIP or IPD there are at least four conservative extensions in $\mathcal{E}\mathsf{BS4}$ with the same property. Finally, we prove that if L is a minimal special or minimal explosive $\mathsf{N4}^{\perp}$-extension with CIP such that its intuitionistic fragment is different from Dummett's logic LC, then L has a modal companion with CIP or IPD.

The work was financially supported by the Russian Science Foundation https://rscf.ru/project/23-11-00104/, at Steklov Mathematical Institute of RAS.

References

[1] Anishchenko D.: On modal companions of logics with strong negation. *submitted to* Studia Logica, 2025.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow (Russia)
E-mail: odintsov.sergey2013@yandex.ru

On subring lattices of integral domains

V. B. Repnitski

A lattice is called *algebraic* if it is complete and each element is a join of compact elements. Important examples of algebraic lattices include subalgebra lattices of universal algebras. If a lattice L is complete and a subset M of L has the property that $\bigvee S,\ \bigwedge S \in M$ for every nonempty subset $S \subseteq M$, then M is called *a complete sublattice* of L. It is well known that a complete sublattice of an algebraic lattice is itself algebraic. This implies that complete sublattices of subalgebra lattices are also algebraic. In connection with this, the question arises about which algebraic lattices are representable as complete sublattices in subalgebra lattices of algebras from a given prominent class of algebras. In **[1, 2]** we proved that every algebraic lattice is isomorphic to a complete sublattice in the subalgebra lattice of an algebra from any of the classes listed below:

1) the class of all locally finite p-groups (p is an arbitrary prime number);
2) the class of all commutative nilsemigroups of index two;
3) the class of all semilattices;
4) the class of all commutative cancellative idempotent-free semigroups with unique roots;
5) a non-nilpotent variety of associative rings;
6) the class of all Boolean algebras;
7) a non-trivial variety of lattices.

The following statement is true as well.

Theorem. *Every algebraic lattice is isomorphic to a complete sublattice in the subring lattice of some integral domain of a fixed characteristic* p (*p is an arbitrary prime or zero*).

References

[1] Repnitskiĭ, V. B. Lattice universality of locally finite p-groups. *Ural Mathematical Journal*, 2023. Vol. 9, No. 1, pp. 127–134. DOI: 10.15826/umj.2023.1.011

[2] Repnitskiĭ, V. B. Algebraic lattices and lattices of subalgebras. *Semigroup Forum*, 2025. Vol. 111, pp. 268–282. DOI: 10.1007/s00233-025-10565-8

Ural Federal University, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: vladimir.repnitskii@urfu.ru

IV. Секция «Теория вычислимости»

О структуре вычислимой сводимости на предпорядках

Д. Алиш, Н. А. Баженов

Andrews, Belin и San Mauro в статье [**1**] рассмотрели структуру всех степеней отношений эквивалентностей относительно вычислимой сводимости и доказали, что теория данной структуры изоморфна арифметике второго порядка.

Бадаев, Баженов и Калмурзаев в статье [**2**] рассмотрели структуру вычислимо перечислимых отношений предпорядка относительно вычислимой сводимости и доказали, что в ней можно определить структуру вычислимо перечислимых отношений эквивалентностей. Следовательно, структура вычислимо перечислимых отношений предпорядка изоморфна арифметике первого порядка.

В данном докладе рассматриваются теорий структуры всех предпорядков и всех линейных предпорядков.

Через **Pr** и **LP** обозначаем множества, содержащие $\leq_c$-степени всех отношений предпорядка и всех линейных предпорядков на ω соотвественно.

Теорема 1. *Элементарная теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{Pr}, \leq_c)$ *рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.*

Теорема 2. *Элементарная теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c)$ *рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.*

Литература

[1] Andrews, Uri, Daniel F. Belin, and Luca San Mauro. "On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers."The Journal of Symbolic Logic 88.3 (2023): pp.1038-1063.

[2] Badaev, Serikzhan Agybaevich, Nikolay Alekseevich Bazhenov, and Birzhan Seilkhanovich Kalmurzaev. "The structure of computably enumerable preorder relations."Algebra and Logic 59.3 (2020): pp. 201-215.

Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: alish.darynn@gmail.com
Новосибирский Государственный Университет, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: nickbazh@yandex.ru

О наименьшем элементе структуры степеней негативной представимости линейных порядков

Р. Н. Дадажанов, Н. Х. Касымов

Пусть η — эквивалентность на множестве натуральных чисел ω. Будем говорить, что линейный порядок $\langle L; \leqslant_L\rangle$ негативно представим над η, если существует его негативная нумерация с ядром η (т.е. такая нумерация ν этого порядка, что множество $\{\langle x, y\rangle \mid \neg(\nu x \leqslant_L \nu y)\}$ вычислимо перечислимо и $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если порядок $\langle L; \leqslant_L\rangle$ негативно представим над эквивалентностью η, то η также негативна, т.к. $x \neq y \pmod{\eta} \Leftrightarrow [\neg(x/\eta \leqslant_L y/\eta) \vee \neg(y/\eta \leqslant_L x/\eta)]$.

Для негативной эквивалентности η на ω определим $\mathcal{L}(\eta)$ как класс линейных порядков, негативно представимых над η и на множестве Π всех негативных эквивалентностей введем отношение предпорядка $\preccurlyeq$: $\eta_0 \preccurlyeq \eta_1 \Leftrightarrow \mathcal{L}(\eta_0) \subseteq \mathcal{L}(\eta_1)$. Очевидно, что действие $\preccurlyeq_N$ на классах $\equiv_N$-эквивалентности симметричного замыкания $\equiv_N$ предпорядка $\preccurlyeq$ согласовано с $\equiv_N$.

Определение 1. Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/\equiv_N; \preccurlyeq_N\rangle$ называется *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы — *степенями негативной представимости линейных порядков.*

Аналогичным образом можно ввести структуру степеней позитивной представимости линейных порядков $\langle \Sigma/\equiv_P; \preccurlyeq_P\rangle$ (**[1]**). Для обеих структур рассматриваются бесконечные эквивалентности (т.е. бесконечного индекса), т.к. если η конечна, то в $\mathcal{L}(\eta)$ есть лишь один тип конечного линейного порядка.

Обозначим $N = \langle \Pi/\equiv \preccurlyeq_N\rangle, d_N(\eta) = \eta/\equiv_N; P = \langle \Sigma/\equiv; \preccurlyeq_P\rangle, d_P(\eta) = \eta/\equiv_P$.

Предложение 1 ([1, 2]). *N и P содержат тип $1+\omega^*$; в N есть наибольшая степень, в P — максимальная; в P есть наименьшая степень $d(\eta_P^*)$ и $\mathcal{L}(\eta_P^*) = \emptyset$.*

В **[3]** ставился вопрос о существовании наименьшего элемента в N.

Теорема 1. *В N существует наименьший элемент.*

Таковой является степень $d_N(\eta_N^*)$ для любой $\eta_N^* \in \Pi$, каждый η_N^*-класс которой невычислим. Отметим, что $\mathcal{L}(\eta_N^*)$ содержит все счетные плотные порядки.

Литература

[1] E. Fokina, B. Khoussainov, P. Semukhin, D. Turetskiy *Linear orders realized by C.E. equivalence relations.* J. Symb. Logic **81** (2), pp. 463-482 (2016).

[2] Н. Х. Касымов, Р. Н. Дадажанов *Негативные плотные линейные порядки.* Сиб. матем.журнал **58** (6), с.1306-1331 (2017).

[3] Н. Х. Касымов, Р. Н. Дадажанов, С. К. Джавлиев *Структуры степеней негативной представимости линейных порядков.* Изв. вузов. Математика **65** (12), с.31-55 (2021).

Университет общественной безопасности Республики Узбекистан, Национальный университет Узбекистана, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: dadajonovrn@mail.ru, nadim59@mail.ru

Низкий разреженный линейный порядок ранга 2 без вычислимой копии

М. В. Зубков

К. Джокуш и Р. Соар [**1**] построили низкий линейный порядок без вычислимой копии. Р. Дауни сформулировал, по сути, исследовательскую программу: описать свойства P классических типов линейных порядков, гарантирующие, что если $\mathcal{L}$ — низкий линейный порядок и его тип удовлетворяет P, то $\mathcal{L}$ изоморфен вычислимому линейному порядку [**3**].

С одной стороны, было показано, что широкие классы низких порядков имеют вычислимые копии. Так Р. Дауни и М. Мозес [**2**] доказали, что каждый низкий дискретный линейный порядок вычислимо изоморфен вычислимому. А.Н. Фролов получил аналогичные результаты для классов низких сильно η-схожих [**6**] и k-квазидискретных [**7**] линейных порядков.

С другой стороны, были построены и контрпримеры. Помимо упомянутого результата Джокуша и Соара (ранг Хаусдорфа 2), А.Н. Фролов [**8**] построил низкий η-схожий порядок без вычислимой копии (ранг Хаусдорфа 1). Позже А.Н. Фролов и М.В. Зубков [**4**] показали, что существует даже низкое сильное η-представление некоторого множества без вычислимой копии.

Настоящая работа посвящена разреженным линейным порядкам, то есть порядкам, не содержащим подпорядка типа η, и отвечает на следующий вопрос: изоморфен ли каждый низкий разреженный линейный порядок вычислимому? Если нет, то каков минимальный ранг Хаусдорфа α, для которого существует низкий разреженный порядок ранга α без вычислимой копии?

В недавней работе М.В. Зубкова и А.Н. Фролова [**5**] было показано, что если бесконечные блоки в низком разреженном порядке распознаются с помощью оракула $\mathbf{0}'$, то порядок имеет вычислимую копию.

Основным результатом данной работы является построение низкого разреженного линейного порядка ранга Хаусдорфа 2 без вычислимой копии. Поскольку бесконечные разреженные порядки ранга 1 — это ω, ω^* и ζ (и все они имеют вычислимые копии), этот результат дает полный ответ на поставленный вопрос, показывая, что минимальный ранг Хаусдорфа для контрпримера в классе разреженных порядков равен 2.

Работа поддержана грантом Академии наук Республики Татарстан, предоставленный молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан соглашение №19/2024-ПД.

Литература

[1] Jockusch C.G., Soare R.I. Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Annales of Pure and Applied Logic.–1991. V.52.–pp.39–61.

[2] Downey R.G., Moses M.F. On Choice Sets and Strongly Non-Trivial Self-Embeddings of Recursive Linear Orders// Mathematical Logic Quarterly.–1989.–V.35.–pp.237–246.

[3] Downey R.G. Computability Theory and Linear Ordering // Handbook of Recursive Mathematics V. 2.,Elsevier, Amsterdam.–1998.–pp.823–976.

[4] Frolov A., Zubkov M. The simplest low linear order with no computable copies // J. Symb. Logic.–2024.–V. 89.–№1.–pp.97–111.

[5] Frolov A., Zubkov M. Low scattered linear orders // Journal of Logic and Computation.–2025.–V.35.–№2.–p.exae008.

[6] Фролов А.Н. Δ^0_2-копии линейных порядков // Алгебра и Логика.–2006.–Т.45, № 3.– с.354–370.

[7] Фролов А.Н. Линейные порядки низкой степени // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т.51, №5.–с.1147–1162.

[8] Фролов А.Н. Вычислимая представимость счетных линейных порядков // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры».–2018.–Т.158.–с.81-–115.

КФУ, Казань (Россия)
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

Распознаваемость сигнатурных обогащений булевых алгебр

В. С. Исаков

Теория алгоритмического распознавания (algorithmic learning theory) начала формироваться в работах Марка Голда [**1**] в 60-х годах прошлого века. В классической теории изучаются проблемы распознаваемости для семейств формальных языков и частично рекурсивных функций.

В последние годы активно развивается теория алгоритмического распознавания для алгебраических структур. В 2001 году Ф. Стефан и Ю. Г. Венцов [**2**] исследовали распознаваемость для семейств подструктур данной вычислимой алгебраической структуры. В частности, для семейств идеалов коммутативного кольца.

В нашем случае рассматривается задача алгоритмической распознаваемости (algorithmic learnability, см. [**3**]) для семейств вычислимых булевых алгебр, обогащенных следующими унарными предикатами: $Atom$, $Atomic$, $Atomless$.

Семейство вычислимых структур $\mathcal{K}$ называют $InfEx_{\cong}$*-распознаваемым*, если существует устройство (learner), которое, получая на вход всё больше и больше информации об атомной диаграмме произвольной структуры $\mathcal{S} \in \mathcal{K}$, в пределе начинает выдавать корректное финитарное описание типа изоморфизма для $\mathcal{S}$.

В 2020 году Н. А. Баженов, Е. Б. Фокина, Л. Сан Мауро [**4**] нашли теоретико-модельную характеризацию (в терминах формул инфинитарной логики) для $InfEx_{\cong}$–распознаваемых семейств структур. В частности, был получен результат об $InfEx_{\cong}$–нераспознаваемости для семейств вычислимых булевых алгебр, содержащих не менее двух типов изоморфизма.

В докладе будут представлены для каждого из трех видов сигнатурных обогащений булевых алгебр полные описания $InfEx_{\cong}$–распознаваемых семейств, а также частично распознаваемых семейств.

Литература

[1] Gold M. Language identification in the limit // Information and Control. 1967. Vol 10. P. 447-474.

[2] Stephan F., Ventsov Y. Learning algebraic structures from text // Theoretical Computer Science. 2001. Vol. 268. pp. 221-273.

[3] Jain S., Osherson D., Royer J. S., Sharma A. Systems that learn: Second edition. MIT Press, Cambridge, 1999. pp.13–14.

[4] Bazhenov N., Fokina E., San Mauro L. Learning families of algebraic structures from informant // Inf. and Comp., 2020. Vol. 275. Article id 104590.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.isakov@g.nsu.ru

Об отделимых нумерациях моделей

Н. Х. Касымов

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [**1**]. Все упоминаемые гомоморфизмы по умолчанию являются морфизмами.

Если (M, μ) — нумерованная модель, то подмножество $M_0 \subseteq M^k (k \geqslant 1)$ называется μ-вычислимым (μ-перечислимым), если $\mu^{-1} M_0$ вычислимо (вычислимо перечислимо). Если $\overline{m} \in M_0 \subseteq M^k$, то M_0 называется окрестностью точки $\overline{m}$.

Определение 1. Нумерованная модель (M, μ) называется вычислимо отделимой (отделимой) в широком смысле, если отношение равенства вычислимо отделимо (отделимо) и для всякого основного k-местного $(k \geqslant 1)$ отношения p модели M и любой точки его ложности $\overline{m} \in M^k$ существует такая μ-вычислимая (μ-перечислимая) окрестность $M_0 \subseteq M^k$ точки $\overline{m}$, что $\forall \overline{x} \in M_0 [M \models \neg p(\overline{x})]$.

С технической точки зрения удобно следующее

Определение 2. Нумерованная модель (M, μ) называется вычислимо отделимой (отделимой) в узком смысле, если отношение равенства вычислимо отделимо (отделимо) и для всякого основного k-местного $(k \geqslant 1)$ отношения p модели M и любой точки его ложности $\overline{m} \in M^k$ существуют такие μ-вычислимые (μ-перечислимые) множества $M_1 \subseteq M, \ldots, M_k \subseteq M$, прямое произведение которых является окрестностью точки $\overline{m}$, что $\forall \overline{x} \in M_1 \times \cdots \times M_k [M \models \neg p(\overline{x})]$.

Неформально, вычислимая отделимость (отделимость) нумерации модели означает, что всякая точка ложности любого основного отношения имеет вычислимую (перечислимую) окрестность, не содержащую точек его истинности.

Известно, что для вычислимо отделимых нумераций моделей понятия отделимости в узком и широком смыслах совпадают. При этом, имеет место

Критерий вычислимой отделимости ([2]). *Нумерованая модель вычислимо отделима, если и только если она аппроксимируется негативными моделями.*

Обеднение модели до функциональной части ее сигнатуры назовем F-обеднением.

Теорема 1. *Всякая отделимая в узком смысле нумерованная модель аппроксимируется негативными моделями с эффективно отделимыми F-обеднениями.*

Теорема 2. *Нумерованная модель, аппроксимируемая негативными моделями с эффективно отделимыми F-обеднениями, отделима в широком смысле.*

Литература

[1] Ю. Л.Ершов *Теория нумераций.* Наука, М.,1977.

[2] N. Kh.Kasymov, R. N.Dadazhanov, F. N.Ibragimov *Separable Algorithmic Representations of Classical Systems and their Applications* Journal of Mathematical Sciences **278** (3), pp.476-519 (2024).

Национальный университет Узбекистана, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: nadim59@mail.ru

О моделировании экспоненциальных вычислений формулами полиномиальной длины

И. В. Латкин

Речь идёт о возможности моделирования булевыми формулами полиномиальной длины детерминированных и недетерминированных вычислений на одно-ленточных машинах Тьюринга. Булевы формулы давно применяются для такого моделирования: в 1971 г. С. А. Кук доказал [1], что по любой программе недетерминированной машины Тьюринга M и всякому входу X на её ленте можно написать булеву формулу $\Sigma(M,X)$, которая выполнима тогда и только тогда, когда машина M допускает вход X за $p(n)$ шагов, где p — это многочлен, а n — длина цепочки X, т.е. $n=|X|$, и эта формула имеет полиномиальную длину: $|\Sigma(M,X)| = O(p^2(n)\log_2(n))$. При этом моделируются весьма громоздкие вычисления, поскольку недетерминированная машина за полиномиальное время способна породить экспоненциальное количество потенциально возможных конфигураций, и описание каждой из них выводимо из формулы $\Sigma(M,X)$.

В 2022 г. в [2] автор построил замкнутую булеву формулу (предложение) $\Omega(T,X)$, которое моделирует уже экспоненциальные вычисления, но только для детерминированных машин; а именно, при каждой детерминированной машине T и входе X формула $\Omega(T,X)$ истинна тогда и только тогда, когда машина T принимает X в течении времени $\exp(2,|X|)$, и эта формула имеет полиномиальный размер относительно длины входа X. Это моделирование существенно использует изящный приём, описанный в [3]. Но, в отличие от формул, построенных в [1] и [3], оно—*по-точечно локальное*, а именно, для любого момента времени описание максимум двух ячеек на ленте может стать ложным. Поэтому такое моделирование не годится для недетерминированного случая.

Теорема. *Существует недетерминированная машина Тьюринга M_0 такая, что написанная для неё формула $\Omega(M_0,X)$ не способна промоделировать даже один шаг машины при любом входе X при условии, что эта формула построена по-точечно локальным методом.*

Литература

[1] S.A.Cook, *The complexity of theorem-proving procedures.* in Proc. of the 3^{rd} Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, Shaker Heights, Ohio (1971), pp.151–159.

[2] I.V.Latkin, *The recognition complexity of decidable theories.* Eurasian Math. J., **13** (2022), no. 1, pp.44–68.

[3] L.J.Stockmeyer and A.R.Meyer, *Word problems requiring exponential time.* in Proc. 5^{th} Ann. ACM Symp. on the Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, 1973, pp.1–9.

Восточно-Казахстанский технический университет, Усть-Каменогорск (Казахстан)
E-mail: lativan@yandex.ru

Об одном свойстве тонкой иерархии

В. Н. Ореховский

Пусть $\mathbb{B} = (B, \cup, \cap, ^-, 0, 1)$ – булева алгебра. Для любых $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq 2^B$ положим $\Gamma_0 \cdot \Gamma_1 = \{xy \mid x \in \Gamma_0, y \in \Gamma_1\}$. В [**1**] рассматривалась операция $\cdot$ для уровней разностной иерархии $\{\Sigma^{-1}_n\}_{n \in \omega}$ и было показано, что множество $\{\Sigma^{-1}_n, \Pi^{-1}_n \mid n \in \omega\}$ замкнуто относительно $\cdot$. В [**1**] показано, что для произвольной фиксированной разностной иерархии $\{D_k\}_{k \in \omega}$ верны следующие соотношения: $\check{D}_n \cdot \check{D}_m = \check{D}_{\varphi(n,m)}$, $\check{D}_n \cdot D_m = D_{\psi(n,m)}$, $D_n \cdot D_m = \check{D}_{n-1} \cdot D_m = D_{\psi(n-1,m)}$, где $\psi(n,m) = n + m - (n \bmod 2) \cdot (m + 1 \bmod 2)$ и $\varphi(n,m) = n + m - (n \bmod 2) \cdot (m \bmod 2)$.

Базой в булевой алгебре $\mathbb{B} = (B, \cup, \cap, ^-, 0, 1)$ называют последовательность $L = \{L_n\}_{n<\omega}$ подрешеток $\mathbb{B}$ такую, что $L_n \cup \check{L}_n \subseteq L_{n+1}$ для каждого $n < \omega$, где $\check{L}_n = \{\bar{a} \mid a \in L_n\}$. В [**2**] определена тонкая иерархия $\{S^0_\gamma\}_{\gamma \in \varepsilon_0}$ над произвольной базой L, и показано, что она содержит в качестве подпоследовательности разностные иерархии $\{D_k(L_n)\}_{k \in \omega}$ для любого $n \in \omega$ (имеем $S^j_{\omega^k} = S^{j+1}_k$ и $S^n_k = D_k(L_n)$). В [**3**] показано, что для редуцируемых баз множество $\{S^0_\gamma, \check{S}^0_\gamma \mid \gamma \in \varepsilon_0\}$ замкнуто относительно операции $\cdot$. Однако, для тонкой иерархии над редуцируемой базой соотношения, аналогичные приведенным выше, для многих пар уровней неизвестны.

В данной работе получен следующий результат:

Теорема. *Пусть $n, m \in \omega$ такие, что $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, $\omega^n < \alpha < \omega^{n+1}$, μ – предельный ординал такой, что $\omega^n < \mu < \omega^{n+1}$ и $\{S^0_\gamma\}_{\gamma \in \varepsilon_0}$ – тонкая иерархия над базой L. Тогда $S^0_\alpha \cdot S^0_{\omega^m} = \check{S}^0_\alpha \cdot S^0_{\omega^m} = S^0_{\omega^{\psi(n,m)}}$ и*

1. *если n – четно, m – нечетно, то $S^0_\alpha \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_\alpha \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_{\omega^{\varphi(m,n)}}$.*
2. *если n – нечетно, m – нечетно, то $S^0_\alpha \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_\alpha \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = S^0_{\omega^{\psi(m,n)}}$.*
3. *если m – четно и L – редуцируемая база, то*
   (a) $S^0_\mu \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = S^0_{\omega^m \cdot \mu}$ *и* $\check{S}^0_\mu \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_{\omega^m \cdot \mu}$
   (b) $S^0_{\mu+1} \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = S^0_{\omega^m \cdot \mu+1}$ *и* $\check{S}^0_{\mu+1} \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_{\omega^m \cdot (\mu+1)}$
   (c) $S^0_{\mu+k} \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_{\omega^m \cdot (\mu+1)}$ *и* $\check{S}^0_{\mu+k} \cdot \check{S}^0_{\omega^m} = \check{S}^0_{\omega^m \cdot (\mu+1)}$*, где $k \in \omega$ такое, что $k \geqslant 2$*

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2025–343 от 29.04.2025).

Литература

[1] Ершов Ю.Л. Об одной иерархии множеств I // Алгебра и логика. – 1968. - Т. 7, № 1. - с. 65–71.
[2] Селиванов В.Л. Тонкие иерархии арифметических множеств и определимые индексные множества // Тр. Ин-та математики. - 1989. - № 12. - с. 165–185.
[3] Selivanov V.L. Fine hierarchies and Boolean terms // J. symb. log. 1995. T. 60, № 1. с. 289–317.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург (Россия)
E-mail: v.orekhovskii@spbu.ru

О системах с числом линейных уравнений не менее половины от числа переменных

А. В. Селиверстов

Рассмотрим систему из m линейных уравнений от n переменных над полиномиально вычислимым полем K, характеристика которого не равна двум.

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n + \alpha_{10} = 0 \\ \cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n + \alpha_{m0} = 0 \end{array}\right. .$$

Задача о существовании $\{0,1\}$-решения, где каждая переменная принимает значения из множества $\{0,1\}$, NP-полная. Мы рассмотрим алгоритм полиномиального времени, позволяющий при условии $m < n \leqslant 2m$ сводить почти любую исходную задачу к аналогичной задаче с большим числом линейно независимых уравнений. Хотя на малой доле входов (среди входов как-то ограниченного сверху размера) алгоритм не меняет систему, например, когда $\{0,1\}$-решений достаточно много. При этом исходная и новая системы всегда имеют одно и то же множество $\{0,1\}$-решений. Этот алгоритм получается небольшим изменением алгоритма из доклада **[1]**, но теперь достаточно добавить лишь одно новое уравнение. Алгоритм основан на приведении к ступенчатому виду матрицы Маколея **[2]**. Это позволяет ускорить метод ветвей и границ для поиска $\{0,1\}$-решения, хотя в худшем случае требуется перебор большого числа оценок переменных.

Теорема. *Пусть $\varepsilon > 0$, $m < n \leqslant 2m$ и произвольно фиксированы коэффициенты $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mn}$ линейных членов системы из m линейно независимых линейных уравнений от n переменных. Если свободные члены α_{i0} линейных уравнений независимо и равномерно распределены на множестве $S \subseteq K$ мощности $\lceil 1/\varepsilon \rceil$, то обсуждаемый алгоритм не добавляет ни одного линейно независимого линейного уравнения с вероятностью не выше числа ε.*

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Литература

[1] *A. V. Seliverstov*, The generic-case complexity of finding a binary solution to a system of linear equations, Computer algebra: 6th International Conference Materials, June 23–25, 2025, Moscow: RUDN University (2025), pp.98–101. URL: http://www.ccas.ru/ca/conference

[2] *R. La Scala, F. Pintore, S.K. Tiwari, A. Visconti*, A multistep strategy for polynomial system solving over finite fields and a new algebraic attack on the stream cipher Trivium, Finite Fields and Their Applications, **98**, No. 102452 (2024), pp.1–33. DOI: 10.1016/j.ffa.2024.102452

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва (Россия)
E-mail: SLVSTV@iitp.ru

Об инвариантности характеристических свойств геделевских нумераций относительно оператора пополнения

М. Х. Файзрахманов

В докладе будет рассмотрен вопрос об инвариантности относительно оператора пополнения таких свойств вычислимых нумераций семейств частично рекурсивных функций, как выполнение в них s-m-n теоремы, теоремы Клини о рекурсии (в оригинальной форме), а также свойства эффективной композиции.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Предельные модели эренфойхтовых теорий

Е. И. Хлестова

Открытый вопрос который мотивировал наше исследование задан Крисом Эшем и Тэрри Милларом в 1983 году: являются ли все счётные модели эренфойхтовых теорий с арифметическими вычислимыми типами арифметически разрешимыми [**1**]? Новые результаты о арифметической разрешимости предельных моделей эренфойхтовых теорий получены с помощью обогащения сигнатуры предикатами которое позволяет выражать свойства о реализациях типов.

Пусть $H \subseteq \omega$ — оракул и пусть $q_1(\bar{y}_1), \ldots, q_r(\bar{y}_r)$ — набор H-вычислимых множеств формул сигнатуры L. Для каждого $i \leq r$ определим новый предикат $P_i(\bar{y}_i)$ как бесконечную конъюнкцию $\bigwedge\limits_{\Phi \in q_i(\bar{y}_i)} \Phi(\bar{y}_i)$ и определим $L^* = L \cup \{P_1, \ldots, P_r\}$.

Теорема 1. *Пусть $H \subseteq \omega$, $p(\bar{x})$— H-вычислимый полный тип в полной теории T. Предположим, что $\Phi^* = \forall \bar{y}\, \exists \bar{z}\, \Psi^*(\bar{y}, \bar{z})$ — предложение сигнатуры L^*, где $\Psi^*(\bar{y}, \bar{z})$ — бескванторная формула. Если у теории T есть предельная модель $\mathcal{A}$ над типом $p(\bar{x})$ т.ч. $\mathcal{A} \models \Phi^*$, то есть и H'-разрешимая модель $\mathcal{B}$ с тем же свойством: она предельна над $p(\bar{x})$ и $\mathcal{B} \models \Phi^*$.*

Хорошо известно, что все счетные модели эренфойхтовых теорий будут либо почти простыми, либо предельными над некоторым типом [**2**]. Назовем структуру $\mathcal{A}$ — *аналитической*, если она почти проста или представима в виде $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{A}_i$, где $\mathcal{A}_0 \preccurlyeq \mathcal{A}_1 \preccurlyeq \mathcal{A}_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathcal{A}$ — элементарная цепь подструктур и $\mathcal{A}_i \cong \mathcal{M}$ для всех $i \in \omega$, а $\mathcal{M}$ — почти простая структура. Скажем, что $\mathcal{A}$ — *наследственно аналитическая структура*, если $(\mathcal{A}, \bar{d})$ — аналитическая структура для любого конечного набора $\bar{d}$ из $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Пусть T — полная теория сигнатуры L, все типы которой арифметические. Пусть $\Phi^* = \exists \bar{x} \forall \bar{y} \exists \bar{z}\, \Psi^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — предложение сигнатуры L^*, где $\Psi^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — бескванторная формула. Если $\mathcal{A}$ — наследственно аналитическая модель теории T и $\mathcal{A} \models \Phi^*$, то существует арифметически разрешимая модель $\mathcal{B}$ теории T такая, что $\mathcal{B} \models \Phi^*$. Более того, при этом $\mathcal{B}$ почти простая тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ почти простая.*

Вопрос, будет ли любая модель эренфойхтовой теории наследственно аналитической, остается открытым.

Литература

[1] Ash, C. and Millar, T., *Persistently finite, persistently arithmetic theories,* Proc. Am. Math. Soc. 89 (1983): pp. 487-492.

[2] Судоплатов, С.В. *Классификация счётных моделей полных теорий. Часть 1*, Litres, 2022 ISBN: 5041454752

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда https://rscf.ru/project/23-11-00170/

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.khlestova@g.nsu.ru

Abstract complexity classes

P. E. Alaev

Let $\mathrm{Mon} = \{E : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid s \leqslant E(s) \leqslant E(t)$ for all $s \leqslant t \in \mathbb{N}\}$. We say that $\mathscr{E} \subseteq \mathrm{Mon}$ is an *estimation class* if it contains $\mathrm{id}(s)$ and is closed downward, under linear combinations, and under substitution of a linear function. Examples of such classes are $\mathrm{Lin} = \{E \in \mathrm{Mon} \mid E(s) \leqslant as + b\}$, $\mathrm{Pol} = \{E \in \mathrm{Mon} \mid E(s) \leqslant A(s) \in \mathbb{N}[s]\}$, and Mon. A function $g : \Sigma^* \to_p \Sigma^*$ is $\mathscr{E}$*-restricted* if $|g(x)| \leqslant E(|x|)$ for some $E \in \mathscr{E}$.

We fix a countable universal alphabet Σ_ω. Let $F(\Sigma_\omega) = \{f \mid f : \Sigma^* \to_p \Sigma^*$, where $\Sigma \subseteq_f \Sigma_\omega\}$ be the set of all partial functions on words in a finite alphabet. For every $\Sigma \subseteq_f \Sigma_\omega$ and $a \in \Sigma$, we define *simplest functions* $w_a^\Sigma, r^\Sigma : \Sigma^* \to \Sigma^*$ so that $w_a^\Sigma(x) = xa$ and $r^\Sigma(x)$ is the word x without the last character.

We introduce four operators on $F(\Sigma_\omega)$. They are *composition* $C(f, g) = f \circ g$; *join* $J(f, g) = h$, where $h(x) = f(x)g(x)$, *branching* $B_a(f, g) = h$, where $h(x) = f(x)$ if x ends with the symbol a, and $h(x) = g(x)$ otherwise; in the last two cases $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$; and *E-restricted recursion* $I_E^\Sigma(f) = g$, where $g : \Sigma^* \to_p \Sigma^*$, for $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

$$\begin{cases} g(\varnothing) = f(\varnothing); \\ g(xa) = f(g(x)a); \end{cases}$$

and, in addition, $g(x)\!\downarrow\, \Rightarrow |g(x)| \leqslant E(|x|)$.

A class $\Gamma \subseteq F(\Sigma_\omega)$ is called a $\mathscr{E}$*-closed class* if it contains all simplest functions w_a^Σ, r^Σ and is closed under subfunctions, join, branching, composition $f \circ g$, where g is $\mathscr{E}$-restricted, and recursion I_E^Σ, where $E \in \mathscr{E}$.

Here $\Sigma \subseteq_f \Sigma_\omega$ and $a \in \Sigma$. As a rule, complexity classes considered in the theory of algorithms are Lin-closed.

A structure $\mathscr{A} = (A, L^\mathscr{A})$ of a finite signature L is in Γ if $A \subseteq \Sigma^*$ for a finite alphabet Σ, $A \in \Gamma$, and all predicates and functions from $L^\mathscr{A}$ are in Γ.

Theorem 1. *Let $\mathscr{A} = (A, \leqslant)$ be a loset from a* Lin*-closed class Γ, $A \subseteq \Sigma^*$, and $* \notin \Sigma$. Let $\mathrm{dom}(\xi) = \{a_1 * a_2 * \ldots * a_n \mid n \geqslant 1$ and $a_i \in A$ for $i \leqslant n\}$. We define the* sorting function *ξ as follows: if $x = a_1 * \ldots * a_n \in \mathrm{dom}(\xi)$, then $\xi(x) = b_1 * \ldots * b_k$, where $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ and $\{a_i \mid i \leqslant n\} = \{b_j \mid j \leqslant k\}$. Then $\xi \in \Gamma$.*

The language of $\mathscr{E}$-closed classes allows us to formulate general theorems that hold in every complexity class. Let $\Gamma_\mathscr{E}$ be the least $\mathscr{E}$-closed class. We can show that $\Gamma_{\mathrm{Pol}} = \mathrm{PTIME}$, $\Gamma_{\mathrm{Lin}} = \mathrm{PTIME}\,\&\,\mathrm{LSPACE}$, and Γ_{Mon} is the class of all p.r.f.

We introduce one more operator. If $a \in \Sigma_\omega$ then $M_a : F(\Sigma_\omega) \to F(\Sigma_\omega)$, $M_a(f) = g$, where $\mathrm{dom}(g) = \{x_1ax_2a\ldots ax_n \mid n \geqslant 1, a \notin x_i$ and $x_i \in \mathrm{dom}(f)$ for $i \leqslant n\}$ and $g(x_1ax_2a\ldots ax_n) = f(x_1)af(x_2)a\ldots af(x_n)$.

If $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ are two estimation classes, then Γ is called a $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$*-closed class* if it is $\mathscr{E}_2$-closed, closed under M_a, and under composition $f \circ g$, where $f \in \Gamma_{\mathscr{E}_1}$ and $g \in \Gamma$.

The concept of a (Lin, Lin)-closed class, or a *strongly* Lin*-closed class*, can be considered as a general definition of an abstract complexity class.

NSU, IM SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: alaev@math.nsc.ru

Comparison of structures of computable presentations of linear orders

A. Askarbekkyzy, K. M. Ng, H. T. Koh, B. S. Kalmurzayev

We say that binary relation R on natural numbers is computably reducible to the binary relation S (denoted by $R \leq_c S$) if there exists computable function f such that for every natural numbers x and y the following holds

$$xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y)$$

Let $\mathcal{L}$ be a linear order. By $\mathbf{P}(\mathcal{L})$ we denote the following degree structure

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}) = (\{\deg_c(L) : \ L \text{ is computable linear order isomorphic to } \mathcal{L}\}, \leq_c).$$

In the study of the structures $\mathbf{P}(\mathcal{L})$, we focus on the existence of universal, maximal, the least, and minimal elements, as well as on the density of these structures. In particular, we investigate and compare the structures $\mathbf{P}(\mathcal{L})$ arising from the following linear orders:

- $\omega \cdot k$ for any k,
- ω^2,
- ζ,
- $\omega + \omega^*$,
- $\omega \cdot \eta$.

We have shown that the structures $\mathbf{P}(\mathcal{L})$ are pairwise non-isomorphic for any pair of linear orders $\mathcal{L}$ from the list above.

Kazakh-Brithish Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: ms.askarbekkyzy@gmail.com

On Weihrauch complexity for elementary embeddings into countable saturated models

N. A. Bazhenov, M. I. Marchuk

According to the considered approach [**1**] the problem F is a (partial) multi-valued function $F :\subseteq X \rightrightarrows Y$. An element $p \in \mathrm{dom}(F)$ is called an *instance* of F, and an arbitrary $q \in F(p)$ is a *solution* (for the instance p).

Let $F, G :\subseteq \omega^\omega \rightrightarrows \omega^\omega$ be multi-valued functions.

(a) F is *Weihrauch reducible* to G (denoted by $F \leq_W G$) if there exist Turing functionals $\Phi, \Psi :\subseteq \omega^\omega \to \omega^\omega$ such that:
   - $\Phi(p) \in \mathrm{dom}(G)$ for any $p \in \mathrm{dom}(F)$,
   - $\Psi(p \oplus q) \in F(p)$ for any $p \in \mathrm{dom}(F)$ and $q \in G(\Phi(p))$.

(b) F is *strongly Weihrauch reducible* to G (denoted by $F \leq_{sW} G$) if there exist Turing functionals $\Phi, \Psi :\subseteq \omega^\omega \to \omega^\omega$ such that:
   - $\Phi(p) \in \mathrm{dom}(G)$ for any $p \in \mathrm{dom}(F)$,
   - $\Psi(q) \in F(p)$ for any $p \in \mathrm{dom}(F)$ and $q \in G(\Phi(p))$.

For $p \in \omega^\omega$ and $i \in \omega$, $p^{[i]}$ denotes the i-th column of p, that is, $p^{[i]}(x) = p(\langle i, x\rangle)$. The *limit map* (on Baire space) is the partial function $\lim :\subseteq \omega^\omega \to \omega^\omega$ such that:

- $\lim(p) = \lim_{i\to\infty} p^{[i]}$, if there exists $\lim_{i\to\infty} p^{[i]}$,
- $\lim(p)$ is undefined, otherwise.

For a given class of structures $\mathcal{K}$, we consider the following model-theoretic problem $\mathrm{ElEm}_{\mathcal{K}}(\mathrm{any}, \mathrm{sat})$:

- Instance: Complete diagrams of countable models $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ such that $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ are elementarily equivalent, and $\mathcal{N}$ is a countable saturated model.
- Solution: An elementary embedding $\theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

We isolate some natural subclasses $\mathcal{K}$ of equivalence structures and show that for them the Weihrauch degree of $\mathrm{ElEm}_{\mathcal{K}}(\mathrm{any}, \mathrm{sat})$ is *strictly less* than the degree $\deg_W(\lim)$. And also we prove the next theorem.

Theorem. *The class of all linear orders* $\mathbb{LO}$, *the class of all Boolean algebras* $\mathbb{BA}$ *and the class of all abelian groups* $\mathbb{AG}$ *satisfy* $\mathrm{ElEm}_{\mathbb{LO}}(\mathrm{any}, \mathrm{sat}) \equiv_{sW} \mathrm{ElEm}_{\mathbb{BA}}(\mathrm{any}, \mathrm{sat}) \equiv_{sW} \mathrm{ElEm}_{\mathbb{AG}}(\mathrm{any}, \mathrm{sat}) \equiv_{sW} \lim$.

References

[1] *Brattka V., Gherardi G., Pauly A.* Weihrauch complexity in computable analysis. In: Brattka, V., Hertling, P. (eds) Handbook of Computability and Complexity in Analysis. Theory and Applications of Computability. Springer, 2021, P. 367–417.

Sobolev Institute of Mathematics,Novosibirsk State University (Russia)
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru, margaretmarchuk@gmail.com

Notes on c.e. sQ-degrees

I. O. Chitaia, R. Sh. Omanadze

We say that a set A is sQ-reducible to a set B if there exist computable functions f and g such that the following two conditions are satisfied:

(i) $(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B)$, and (ii) $(\forall x)(\forall y)\,(y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \leq g(x))$.

This relation generates the sQ-degrees. Condition (i) characterizes Q-reducibility, which yields the Q-degrees.

Definition. *A set A is nowhere simple if, for every c.e. set B with $B - A$ infinite, there exists an infinite c.e. set $W \subseteq B - A$.*

Shore **[2]** proved that if $\mathbf{a}$ is a c.e. T-degree, then there exists a nowhere simple set $A \in \mathbf{a}$.

Our notation and terminology are standard and can be found, for example, in [**1, 3**].

In this talk, we will present the following results.

Theorem 1. *Let A and B be c.e. semirecursive sets with $B <_{sQ} A$. Then there exists a c.e. set C such that the sQ-degree of C contains neither simple nor nowhere simple sets, and*

$$B <_{sQ} C <_{sQ} A.$$

Theorem 2. *Let A and B be simple sets with $B <_{sQ} A$ and $A \nleq_{wtt} B$. Then there exists a c.e. set C such that the sQ-degree of C contains neither simple nor nowhere simple sets, and*

$$B <_{sQ} C <_{sQ} A.$$

Acknowledgement: This work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG), grant number: FR-22-16379 (Algorithmic reducibilities and algebraic structures).

References

[1] H. J. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.*MIT Press, 1967.

[2] R. Shore. *Nowhere simple sets and the lattice of recursively enumerable sets.* J. Symb. Log., 43:pp.322–330, 1978.

[3] R. I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets.*Springer Science & Business Media, 1999.

I.Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)
E-mail: i.chitaia@gmail.com,roland.omanadze@tsu.ge

Rogers semilattice of computable equivalences up to isomorphism

A. Melnikov

Classification problem for a class of computable structures $\mathcal{K}$ is a way to describe each element of the class up to isomorphism (or other equivalence) in terms of some basic invariants of this class. Goncharov and Knight ([**1**]) proposed several approaches to study classification problems for classes of computable structures. We implement one of them that uses *numberings* (or effective listing) as a tool for classification.

A numbering of a class $\mathcal{K}$ is a surjective map $\nu : \omega \to \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} : \exists \mathcal{B} \in \mathcal{K}\,[\mathcal{B} \cong \mathcal{A}]\}$. Following classical numbering theory we introduce a notion of reducibility among numberings

$$\nu \leq \mu \text{ via computable } f \Leftrightarrow \forall x\,[\nu(x) \cong \mu(f(x))]\,.$$

If we factorize the set of all such numberings with respect to $\equiv$-relation among numberings we get an analogue of Rogers semilattice $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ that was studied extensively by various authors for different families of sets.

In this talk we consider the class $\mathcal{E}$ of all computable equivalence structures. In particular, we prove that

Theorem. *There are*

(1) *infinitely many friedberg numberings for $\mathcal{E}$;*
(2) *infinitely many positive undecidable numberings for $\mathcal{E}$;*
(3) *infinitely many minimal non-positive numberings for $\mathcal{E}$.*

Moreover we show that $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ is different from any Rogers semilattice of families of c.e. sets.

References

[1] Goncharov S.S., Knight J.F., Computable structure and non-structure theorems, 2002, Algebra and Logic, 41 (6), pp. 351 - 373.

Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: bheadr73@gmail.com
Victoria university of Wellington, Wellington (New-Zealand)
E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com

Solving systems of linear hyperbolic differential equations in Grzegorczyk's hierarchy classes

S. Selivanova

In this work we extend the results on primitive recursive (PR) computability of certain partial differential equations (PDEs) solution operators from [**1**] to broader classes of PDEs, as well as prove refinements to Grzegorczyk's hierarchy classes. The Grzegorczyk hierarchy $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3 \subset$ stratifies the set of PR functions $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}^n = PR$ and provides a nice framework for a natural computational complexity classification of PDEs.

In particular, in [**1**] we introduced a notion of a PR metric space and proved that solution operators of a well-posed Cauchy problem or boundary value problem for a symmetric hyperbolic system with constant coefficients, belonging to a PRAS field (PR Archimedean field of reals with PR splitting), are PR computable. In the present work we introduce $\mathcal{E}^n$-computable metric spaces and establish analogues of the PDE computability results for all classes $\mathcal{E}^n$ for $n \geq 3$. The proofs are heavily based on results about $\mathcal{E}^n$-computable ordered fields from [**2**]. We also provide a generalization of both the PR and $\mathcal{E}^n$ results for the same class of PDEs with variable coefficient.

Generally, we work within the computable analysis approach [**3**]. It is interesting to note that the considered PDE systems solution operators do not preserve many natural complexity classes, e.g., if the initial conditions are polynomial computable, the solution is (optimally) computable only in $PSPACE$ for variable coefficients and in $\sharp P$ for certain classes of constant coefficient systems [**4**]. As stated in [**1**], the considered solution operators preserve the class PR, and our current results show that it extends to $\mathcal{E}^n$ with $\mathcal{E}^3$ being in a certain sense "minimal" complexity class, closed under these solution operators, to which our methods apply.

References

[1] Selivanov V., Selivanova S. Primitive Recursive Ordered Fields and Some Applications // Computability, 2023, vol. 12, no 1, pp. 71–99.

[2] Chilikov L., Selivanov V. Ordered Fields and Grzegorczyk Hierarchy // LNCS, Proceedings of CASC 2025, November 24-28, 2025 (in print).

[3] Weihrauch, K. Computable Analysis. Berlin, Springer, 2000.

[4] Koswara I., Pogudin G. Selivanova S., Ziegler M. Bit-complexity of Classical Solutions of Linear Evolutionary Systems of Partial Differential Equations // Journal of Complexity, 2023.

Supported by the Russian Science Foundation, project number 19-71-30002.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk; St. Petersburg State University (Russia)
E-mail: sweseliv@gmail.com

V. Секция «Теория групп и ее приложения»

Единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков $6p$, где $p \geqslant 5$ — простое число

Р. Ж. Алеев

Для простого $p \geqslant 5$ в [**1**] в группе единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка p была построена подгруппа $U(p)$,которая естественным образом вкладывается в группу единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка $6p$.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений.

(1) $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка $6p$.
(2) ζ — примитивный корень из 1 степени $6p$ и $\alpha = \zeta^6$.
(3) Для любых $j, k \in \{0, 1, \dots, 6p-1\}$ характер $\chi_j(x^k) = \zeta^{jk}$.

Согласно [**2**] для характера χ и элемента $\lambda \in \mathbf{Q}(\chi)$ определяется элемент $u_\chi(\lambda)$ рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$.

Пусть g — примитивный корень по модулю p. Обозначим

$$\mu = \frac{1-\alpha^g}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{g-1}.$$

Теорема. *Пусть* $\psi_m \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\chi_3))$, *где* $\psi_m(\alpha) = \alpha^m$. *Тогда существуют такие натуральные числа* r, l *и множество натуральных чисел* A *мощности* $2p-3$, *что*

$$\langle x \rangle \times U(p) \times \prod_{k=0}^{(p-5)/2} \langle u_{\chi_3}(\psi_{g^k}(-\mu^{\frac{p-1}{2}r}))\times\rangle \times \prod_{\chi\in\{\chi_1,\chi_2\}} \prod_{a\in A} \langle u_\chi\left((1-\zeta^a)^l\right)\rangle$$

— *подгруппа конечного индекса в группе единиц* $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ *целочисленного группового кольца группы* G. Можно получить значительное уточнение этой теоремы, но более громоздкое.

Литература

[1] Р. Ж. Алеев, Круговые единицы в групповых кольцах конечных абелевых групп. *Алгебра и логика: Материалы международного российско-китайского семинара.* Иркутск: Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 11–14.

[2] Р. Ж. Алеев, Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. *Матем. труды*, **3**: 1(2000), 3–37.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Челябинск (Россия)
E-mail: aleevrifhat@gmail.com

Квандлы с левым ключом Сада

А. Н. Бородин

Напомним, что множество $\mathcal{Q}$ с бинарной операцией умножения $\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$, $(x,y)\mapsto x\circ y$, для произвольных $x,y\in\mathcal{Q}$, называется квандлом **[1]**, **[2]**, если операция умножения идемпотентна:

$$x\circ x = x,\quad \forall x\in\mathcal{Q}$$

и отображение $\mathcal{I}_y : x\mapsto x\circ y,\quad x\in\mathcal{Q}$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{Q}(\circ)$.

В работе изучаются квандлы $\mathcal{Q}(\circ)$, в которых дополнительно выполняется левый ключ Сада **[5]**:

$$x\circ(x\circ y) = y,\quad \forall x,y\in\mathcal{Q},$$

или правый ключ Сада **[5]**:

$$(y\circ x)\circ x = y,\quad \forall x,y\in\mathcal{Q}.$$

Установлены некоторые общие свойства квандлов с левым ключом Сада. В частности, квандл $\mathcal{Q}(\circ)$, в котором выполняются левый и правый ключ Сада является дистрибутивной квазигруппой Штейнера **[4]**. Получено описание обобщённых квандлов Александера **[6]**, **[3]** и сердцевинных квандлов **[4]**, в которых выполнено тождество левого ключа Сада (в терминах исходной группы). Работа продолжает исследования начатые в **[6]**.

Литература

[1] С.В. Матвеев, Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Матем. сб., т. 119 (161), № 1(9) (1982), 78–88.

[2] D. Joyce, A classifying invariant of knots: the knot quandle // Journal of Pure and Applied Algebra, (1982), 37–65.

[3] М. Госсу, Несимметричные средние // Colloquium Mathematicum, 5 (1957), 32–42.

[4] В.Д. Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп // Издательство "НАУКА (1967).

[5] В.Д. Белоусов, Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами // Успехи мат. наук, т. XX, вып. 1(121), (1965), 75–146.

[6] А.Н. Бородин, М.В. Нещадим, А.А. Симонов Согласованные структуры обобщенных квандлов Александера. Тождества дистрибутивности и медиальности // Сибирский математический журнал, т. 66, №4, (2025), 583–595.

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)
E-mail: SerajSova@Yandex.ru

Согласованные структуры обобщенных квандлов Александера

А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов

В работе [1] исследуется и приводится ответ на следующий вопрос. Когда две структуры обобщённых квандлов Алескандера, построенных на группе $\langle G, \cdot \rangle$, согласованы обобщенным тождеством правой дистрибутивности

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G$$

или обобщенным тождеством медиальности

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z, t \in G.$$

Отметим, что из согласованности квандловых операций при помощи тождества медиальности следует их согласованность относительно тождества правой дистрибутивности, но обратное неверно.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

Литература

[1] *Бородин А.Н., Нещадим М.В., Симонов А.А.* Согласованные структуры обобщенных квандлов Александера. Тождества дистрибутивности и медиальности // Сибирский математический журнал. 2025. Т.66. №4. С.583-595. DOI: 10.33048/smzh.2025.66.403

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)
E-mail: serajsova@yandex.ru
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: neshch@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.simonov@g.nsu.ru

О квазимногообразии, порожденном свободной нильпотентной групп

А. И. Будкин

В процессе развития теории квазимногообразий достаточно быстро стало известно, что решётки квазимногообразий часто имеют непростое строение. В данной работе устанавливается, что квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной нильпотентной группой ступени c ($c \geq 4$) имеет континуальное множество подквазимногообразий.

В работе используются следующие обозначения:

$\mathcal{N}_c$—многообразие нильпотентных групп ступени не выше c; $F_2(\mathcal{N}_c)$—свободная в $\mathcal{N}_c$ группа ранга 2; A—группа, имеющая в многообразии $\mathcal{N}_3$ представление

$$A = \langle x, y; [y, x, y] = 1, \mathcal{N}_3 \rangle;$$

B—группа, имеющая в многообразии $\mathcal{N}_3$ представление

$$B = \langle x_1, x_2, x_3; [x_3, x_1, x_2][x_2, x_1, x_3] = 1, \mathcal{N}_3 \rangle;$$

qG—квазимногообразие, порождённое группой G;

$[qF_2(\mathcal{N}_c), \mathcal{M}]$ —это множество квазимногообразий $\mathcal{R}$ таких, что $qF_2(\mathcal{N}_c) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$.

Лемма 1. *Интервал* $[qF_2(\mathcal{N}_3), qB]$ *континуален.*

Лемма 2. $B \in qA$, следовательно интервал $[qF_2(\mathcal{N}_3), qA]$ континуален.

Лемма 3. *При* $c \geq 4$ *группа* $F_2(\mathcal{N}_c)$ *содержит подгруппу, изоморфную группе* A.

Теорема. *Интервал* $[qF_2(\mathcal{N}_3), qF_2(\mathcal{N}_c)]$ *в решётке квазимногообразий групп при* $c \geq 4$ *континуален.*

Алтайский госуниверситет, Барнаул (Россия)
E-mail: budkin@math.asu.ru

О зависимости длин конечной группы и ее максимальных подгрупп

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Рассматриваются только конечные группы. К. Дёрк [**1**] установил, что разность нильпотентной длины разрешимой группы и нильпотентной длины её максимальной подгруппы может быть 0, 1 или 2.

Используя концепцию функториала из работы Б. И. Плоткина [**2**], в [**3**] было введено понятие функториальной длины группы, которое в частных случаях охватывает известные длины групп. В работе [**4**] получено развитие теоремы К. Дёрка для функториальной длины. Приведем два результата.

Е. И. Хухро и П. Шумяцкий [**5**] ввели понятие обобщённой высоты Фиттинга $h^*(G)$ группы G как наименьшего числа h такого, что $\mathrm{F}^*_{(h)}(G) = G$, где $\mathrm{F}^*_{(0)}(G) = 1$, а $\mathrm{F}^*_{(i+1)}(G)$ — это прообраз обобщенной подгруппы Фиттинга $\mathrm{F}^*(G/\mathrm{F}^*_{(i)}(G))$.

Теорема 1. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда $h^*(G)-h^*(M) \leq 2$.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$, для которой всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка, называется $\check{S}$-формацией. Из [**6**] следует, что для данной наследственной $\check{S}$-формации $\mathfrak{F}$ в каждой группе существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Поэтому для такой формации $\mathfrak{F}$ можно стандартным способом определить $\mathfrak{F}$-длину группы G, которая обозначается $h_{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная $\check{S}$-формация, причем $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Если M — максимальная подгруппа разрешимой группы G, то $h_{\mathfrak{F}}(M) = h_{\mathfrak{F}}(G) - i$, где $i \in \{0, 1, 2\}$.*

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (Грант 20211750 “Конвергенция–2025”) и БРФФИ-РНФ (Ф23РНФ-237).

Литература

[1] Doerk K., Über die nilpotente Lenge maximaler Untergruppen bei endlichen aulösbaren Gruppen, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **91** (1994), 20–21.

[2] Plotkin B., Radicals in groups, operations on classes of groups, and radical classes, Transl., II Ser. Amer. Math. Soc., **119** (1983), 89–118.

[3] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. On the lengths of mutually permutable products of finite groups // Acta Math. Hungar., **170**:1 (2023), 412–429.

[4] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. To the theorem of K. Doerk // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси, **33**:1 (2025), 28–33.

[5] Khukhro E. I., Shumyatsky P.On the length of finite factorized groups // Ann. Mat. Pura Appl., **194**:6 (2015), 1775–1780.

[6] Васильев А. Ф., Мурашко В. И., Арифметические графы и классы конечных групп // Сиб. матем. журн., **60**:1 (2019), 55–73.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru

О числе порождающих элементов коммутанта конечной р-группы

Б. М. Веретенников

В данном сообщении $d(G)$ означает ранг конечной p-группы G, т. е. минимальное число порождающих группы G.

В статье [**1**] Н. Блэкберн доказал, что если $G/G' \simeq Z_{p^{k_1}} \times Z_{p^{k_2}}$ в конечной p-группе G, $k_1, k_2 \geq 1$, то $d(G') \leq (p^{k_1}-1)(p^{k_2}-1)$, причем эта оценка для $d(G')$ является точной в классе рассматриваемых групп.

Далее, в статье [**2**] получена точная оценка $d(G')$ в классе всех конечных p-групп G с условием

$$a_1^{p^{k_1}} = 1, \dots, a_n^{p^{k_n}} = 1, \tag{1}$$

, где $k_1, \dots, k_n \geq 1, n \geq 2$ и $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$:

$$d(G') \leq (n-1)p^{k_1+\dots+k_n} - \sum_{j=1}^{n} p^{k_1+\dots+\widehat{k_j}+\dots+k_n} + 1, \tag{2}$$

, где “крышка” над k_j означает, что в сумме n слагаемых $k_1 + \dots + k_n$ слагаемое k_j изъято.

Заметим, что эта оценка $d(G')$ при $n = 2$ совпадает с оценкой Блэкберна выше.

В связи с этими результатами возникает вопрос о точной оценке $d(G')$ в классе конечных p-групп с условием $a_1^{p^{k_1}}, \dots, a_n^{p^{k_n}} \in G'$, где $n \geq 3$ и $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

В этом направлении доказано следующее утверждение:

Теорема. *Пусть G – конечная p-группа, $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$,
$a_1^{p^{k_1}} = 1, \dots, a_{n-1}^{p^{k_{n-1}}} = 1$, $a_n^{p^{k_n}} \in G'$ где $k_1, \dots, k_n \geq 1$ для всех i, $n \geq 2$.*

Тогда $d(G')$ удовлетворяет неравенству (2) выше.

Таким образом, замена равенства $a_n^{p^{k_n}} = 1$ в формулах (1) на условие $a_n^{p^{k_n}} \in G'$ не повышает точную оценку (2) для $d(G')$.

Литература

[1] N.Blackburn, On prime-power groups with two generators, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **54**: 3, (1958), 327–337.

[2] B.M.Veretennikov, The formula of maximal possible rank of commutator subgroups of finite p-groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **19**: 2, (2022), 804-808 (in Russian).

Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: boris@veretennikov.ru

О циклических факторалгебрах полиадических групп специального вида

А. М. Гальмак

Понятие эквивалентности последовательностей элементов n-арной группы введено Постом в [**1**]. Определение специальной полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ можно найти в [**2**]. Определение n-полуинвариантной l-арной подгруппы l-арной группы $< A, \eta >$ имеется в [**3**]. l-Полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы называют её полуинвариантными l-арными подгруппами, а 2-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – инвариантными.

Теорема. *Пусть* $< B, \eta >$ *– полуинвариантная* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $< A, \eta >$*, отличная от неё;* n*-арная факторгруппа* $< A/B, \eta >$ *является циклической, порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1})$*; последовательность* $\underbrace{a \ldots a}_{l-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$*; подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$*. Тогда:*

1) *для любого смежного класса* H n*-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно* l*-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$*, а универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной* l*-арной подгруппой* l*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*;*

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной, то* l*-арная подгруппта* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является* n*-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*.*

Полагая в этой теореме $n = 2$, получим

Следствие. *Пусть* B *– нормальная подгруппа группы* A*, отличная от неё; факторгруппа* A/B *является циклической, порождаемой смежным классом* aB*;* $a^{l-1} \in B$*, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$*. Тогда:*

1) *для любого смежного класса* H *факторгруппы* A/B *декартова степень* H^k *замкнута относительно* l*-арной операции* $[\,]_{l,\sigma,k}$*, а универсальная алгебра* $< H^k, [\,]_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной* l*-арной подгруппой* l*-арной группы* $< A^k, [\,]_{s,\sigma,k} >$*;*

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, l-1$ *подстановка* σ^{i-1} *– не является тождественной, то* l*-арная подгруппа* $< H^k, [\,]_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\,]_{s,\sigma,k} >$*.*

Литература

[1] Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. № 2. P. 208–350.

[2] Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова, 2018, – №1 (51). – С. 4–10.

[3] Гальмак, А.М. n-Арные группы. Часть 1.—Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 202с.

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилев (Беларусь)
E-mail: halm54@mail.ru

nuzhin2008@rambler.ru sokolovskaya-anna-24@mail.ru

Минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1, унитарной группы $PSU_5(q^2)$ для нечетного q

Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, А. В. Соколовская

В работе [**1**] записана следующая проблема. *Для каждой конечной простой неабелевой группы G найти $n_c(G)$ — минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1* (см. также [**2**], вопрос 14.69в)). Такое число $n_c(G)$ существует, поскольку каждая конечная простая неабелева группа G порождается любым своим классом сопряженных инволюций. К настоящему времени задача А) решена для спорадических и знакопеременных групп и $PSL_n(q)$ при нечетном q, для $q \neq 9$ при $n \geq 4$ и $q \not\equiv 3\,(mod\,4)$ при $n = 6$ [**3**]; группы $PSL_n(9)$ при $n \geq 4$ рассмотрены в [**4, 5**]. Также её решение завершено в [**6**] для групп с одним классом сопряженных инволюций, к которым относятся все группы лиева типа ранга 1 и три группы ранга 2, а именно, $PSL_3(q)$ при любом q и при нечетном q группы $G_2(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$.

Теорема. *Группа $PSU_5(q^2)$, где q — нечётное, порождается тремя сопряжёнными инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны, и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены..*

Следствие. $n_c(PSU_5(q^2)) = 5$, *для любого нечётного q.*

Работа поддержана Российским научным фондом, проект 25-21-20059, https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

Литература

[1] G. Malle, J. Saxl, T. Weigel. Generation of classical groups, *Geom. Dedicata*, **49** (1994), 85–116.

[2] The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory, Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro // Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, № 20 (2022).

[3] J. M. Ward, Generation of simple groups by conjugate involutions: Thesis of doctor of philosophy, Queen Mary college, University of London, (2009), 193 p.

[4] И. Ю. Ефимов, Я. Н. Нужин, Порождающие множества сопряженных инволюций групп $SL_n(q)$ при $n = 4, 5, 7, 8$ и нечетном q // Труды Института математики и механики УрО РАН, 1 (2021), 62—69.

[5] Р. И. Гвоздев, Порождающие множества сопряжённых инволюций группы $PSL_n(9)$ // Алгебра и догика, 4 (2023), 479—503.

[6] Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, групп $PSL_3(2^m)$ и $PSU_3(q^2)$ // Сибирский математический журнал, 6 (2023), 1160—1171.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru

Проблема распознаваемости по спектру для простых классических групп неплотности 4

М. А. Гречкосеева

Представляемые результаты получены совместно с В.М. Родионовым.

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Группы изоспектральны, если у них одинаковые спектры. Мы говорим, что для группы G решена *проблема распознаваемости по спектру*, если известно число $h(G)$ классов изоморфизмов конечных групп, изоспектральных G, и если $h(G) < \infty$, то представители этих классов явно указаны.

Графом простых чисел группы G называется граф, вершинами которого являются простые делители порядка группы G и в котором две вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Неплотностью $t(G)$ графа $GK(G)$ называется наибольший размер коклики этого графа. В настоящее время проблема распознаваемости по спектру решена для всех конечных неабелевых простых групп, кроме групп L, удовлетворяющих следующим условиям (см. **[1]**, **[2]**, **[3]**):

(1) L — простая классическая группа над полем нечетной характеристики;
(2) $4 \leq t(L) \leq 13$;
(3) $GK(L)$ связен.

Отметим, что для простых классических груп неплотность графа простых чиел линейно растет вместе с размерностью. Также отметим, что классические группы со связным графом простых чисел втречаются чаще, чем группы с несвязным графом. Таким образом, указанные группы L — это довольно обширное семейство классических групп, чья размерность ограничена как сверху, так и снизу.

Наша цель — решить проблему распознаваемости по спектру для групп L, удовлетворяющих (1), (3) и $t(L) = 4$. Это в точности группы $L_8(q)$, где $q \neq 3, 5, 9$, $U_8(q)$, где $q \neq 3, 7$, $O^+_{10}(q)$, где $q \neq 3, 5$, $O^-_{10}(q)$ и $O^+_{12}(q)$, где $q \neq 3$ (везде q нечетно).

Теорема. *Пусть L — одна из групп $L_8(q)$, $U_8(q)$, $O^+_{10}(q)$, $O^-_{10}(q)$, $O^+_{12}(q)$, где q нечетно. Тогда $h(L) < \infty$, все конечные группы, изоспектральные L, являются почти простыми группами с цоколем L и известны.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00127, https://rscf.ru/project/24-11-00127/.

Литература

[1] M. A. Grechkoseeva, V. D. Mazurov, W. Shi, A. V. Vasil'ev, and N. Yang, Finite groups isospectral to simple groups // Commun. Math. Stat. **11** (2023), 169–194.

[2] М. А. Гречкосеева, В. В. Паньшин, О распознаваемости по спектру линейных и унитарных групп небольшой размерности // Сиб. матем. журн., **65**:5 (2024), 876–900.

[3] V. Panshin, On recognition of simple groups with disconnected prime graph by spectrum // arXiv:2509.03483.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск (Россия)
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

О некоторых бесконечномерных линейных группах конечного нормального ранга

О. Ю. Дашкова

Л.А.Курдаченко ввел определение нормального ранга группы [**1**].

Определение 1. Говорят, что группа G имеет конечный нормальный ранг r, если r – наименьшее число с тем свойством, что для любого конечного множества элементов $g_1, g_2, \cdots, g_n$ группы G найдутся элементы $h_1, h_2, \cdots, h_m$ из G такие, что $m \leq r$ и

$$\langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle^G = \langle h_1, h_2, \cdots, h_m \rangle^G.$$

В случае, когда такого числа r не существует, нормальный ранг группы G считается бесконечным.

Автор исследует линейные группы конечного нормального ранга.

Пусть F – поле, V – векторное пространство над полем F, $GL(F, V)$ – группа всех F-автоморфизмов векторного пространства V. Группа $GL(F, V)$ и ее подгруппы называются линейными группами. Если размерность векторного пространства V над полем F конечна, любой элемент группы $GL(F, V)$ можно отождествить с невырожденной квадратной матрицей размерности n над полем F, где n – размерность векторного пространства V над полем F. В случае, когда размерность векторного пространства V над полем F бесконечна, ситуация кардинально меняется. Исследования бесконечномерных линейных групп требуют дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений является конечность центральной размерности некоторых подгрупп данной бесконечномерной линейной группы [**2**].

Определение 2 [**2**]. *Пусть H – подгруппа группы $GL(F, V)$. Тогда H действует на фактор-пространстве $V/C_V(H)$ естественным образом. Размерность фактор-пространства $V/C_V(H)$ называется центральной размерностью группы H.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – локально разрешимая подгруппа группы $GL(F, V)$, имеющая бесконечную центральную размерность и бесконечный p-ранг, p – простое число. Если каждая собственная подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность, то группа G имеет конечный нормальный ранг.*

Литература

[1] O. Yu. Dashkova, On groups of finite normal rank. *Algebra Discrete Math.*, **1**: 1 (2002), 64–68.

[2] M. R. Dixon, M. J. Evans, L. A. Kurdachenko, Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension. *J Algebra*, **277**: 1 (2004), 172–186.

Филиал МГУ в городе Севастополе, Севастополь (Россия)
E-mail: odashkova@yandex.ru

Усиление одной теоремы Б. Неймана и некоторые его следствия

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина

Напомним некоторые используемые ниже определения.

Если g – элемент группы G, n – натуральное число, то элемент h группы G, удовлетворяющий равенству $h^n = g$, называется *корнем n-ой степени из элемента g*. Б. Нейман в работе [**1**] доказал, в частности,

„Всякая группа вложима в группу D, в которой из любого элемента извлекается корень произвольной степени n“.

Такие группы D называются *полными* или *делимыми* группами.

В известной монографии Р. Линдона и П. Шуппа [**2**] на стр. 259 доказана теорема 3.4, усиливающая этот результат Б. Неймана:

„Любая счетная группа C может быть вложена в счетную полную простую группу G.“

Следующая теорема усиливает результат Б. Неймана [**1**] и теорему 3.4 из монографии [**2**]:

Теорема. *Любая счетная группа G вложима в такую простую группу $\overline{G}$, в которой разрешимо каждое уравнение вида $w(x_1, \ldots, x_n) = g$,, где $w(x_1, \ldots, x_n)$ – непустое несократимое групповое слово от неизвестных x_1, ..., x_n, а g – произвольный элемент группы $\overline{G}$.*

Уравнения указанного вида получили название *уравнений, разрешенных относительно неизвестных*, или *однокоэффициентных уравнений.*

В качестве следствия получаем

1) *любая счетная группа G может быть вложена в простую группу $\overline{G}$, в которой ширина любой вербальной подгруппы $\overline{G}(w(x_1, \ldots, x_n))$ равна* 1,

2) *в любой счетной алгебраически замкнутой группе G разрешимо каждое разрешенное относительно неизвестных уравнение (бескоэффициентное уравнение) вида $w(x_1, \ldots, x_n) = g$.*

Литература

[1] *Neumann B. H.* Adjunction of elements to groups // J. London Math. Soc. 1943. Vol. 18. pp. 4-11.
[2] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с.

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, Ярославль (Россия)
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru, a.zetkina1@uniyar.ac.ru

О порождении сопряженными тройственными автоморфизмами

А. В. Заварницин

Одно из доказательств разрешимого аналога теоремы Бэра–Судзуки опирается на результат С. Геста [**1**], утверждающий, что если x — автоморфизм нечётного простого порядка неабелевой простой группы S, то, за исключением обозримого списка случаев, всегда найдётся элемент $g \in S$ такой, что x и x^g порождают неразрешимую группу. Нам удалось найти контрпример к этому утверждению и пробел в доказательстве [**1**], из которого этот контрпример возникает.

Наш основной результат следующий:

Теорема. *Пусть* $G = \langle S, \rho \rangle$, *где* $S = O_8^+(2)$ *или* $O_8^+(3)$ *и* ρ *— тройственный автоморфизм группы* S. *Тогда группа* $\langle \rho, \rho^g \rangle$ *разрешима для всех* $g \in G$.

Здесь, как обычно, S отождествляется с $\operatorname{Inn} S \leqslant \operatorname{Aut} S$. Таким образом, к списку исключений в теореме Геста необходимо добавить группы $O_8^+(2)$, $O_8^+(3)$ и их тройственный автоморфизм ρ.

Более точно, мы описывает строение всех подгрупп расширения $G = \langle S, \rho \rangle$ вида $\langle \rho, \rho^g \rangle$, где $g \in G$, и показываем, что они всегда являются $\{2, 3\}$-группами.

В доказательстве используются вычисления в пакете `GAP`.

Доклад основан на совместных с Д. О. Ревиным результатах [**2**].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Литература

[1] S. Guest, A solvable version of the Baer–Suzuki theorem, *Trans. Am. Math. Soc.*, **362**:11 (2010), 5909–5946.

[2] D. O. Revin, A. V. Zavarnitsine, On the solvable analogue of the Baer–Suzuki theorem and generation by conjugate trialities, *J. Algebra*, to appear.

ИМ им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: zav@math.nsc.ru

О системах уравнений в свободных абелевых группах с ограничениями на решения

А. И. Зеткина, В. Г. Дурнев

Обозначим через A_m свободную абелеву группу со свободными образующими a_1, ..., a_m и с мультипликативной системой обозначений. По аналогии с проблемой 9.25 Г.С. Маканина [**1**] рассмотрим систему уравнений в группе A_m с подгрупповыми ограничениями на решения, т.е. систему вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \,\&\, x_1 \in H_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in H_n,$$

где $H_1,\ldots,\ H_n$ – конечно порожденные подгруппы группы A_m.

Теорема 1. *Существует алгоритм, который по системе уравнений в группе A_m с подгрупповыми ограничениями на решения*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \,\&\, x_1 \in H_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in H_n,$$

где $H_1,\ldots,\ H_n$ – конечно порожденные подгруппы группы A_m, отвечает на вопрос, имеет ли она решение.

Введем предикат $Deg(x, y) \iff y - \text{степень } x \quad (y \in subgroup(x))$. Из известного результата А.П. Бельтюкова [**2**] сразу следует, что

существует алгоритм, который по произвольной системе уравнений и неравенств в группе A_1 вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1) \,\&\, \mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i, x_j) \,\&$$
$$\mathop{\&}_{t=1}^{q} w_t(x_1, \ldots, x_n, a_1) \neq u_t(x_1, \ldots, x_n, a_1) \,\&\, \mathop{\&}_{(s,l)\in B} \neg Deg(x_s, x_l),$$

где A, $B \subseteq \{(s,t) | 1 \le s, t \le n\}$, позволяет ответить на вопрос, имеет ли она решение в этой группе.

В то же время справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Невозможно создать алгоритм, который по произвольной системе уравнений в группе A_2 вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2) \,\&\, \mathop{\&}_{(i,j)\in A} Deg(x_i, x_j),$$

где $A \subseteq \{(s,t) | 1 \le s, t \le n\}$, позволяет ответить на вопрос, имеет ли она решение в этой группе.

Литература

[1] Коуровская тетрадь. Издание 17-е, дополненное и включающее Архив решенных задач // Новосибирск: Институт математики СО РАН. 2010.

[2] *Бельтюков А.П.* Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью //Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 60. С. 15–28.

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, Ярославль (Россия)
E-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru, durnev@uniyar.ac.ru

О совпадении графов простых чисел простых групп и почти простых групп с цоколем, изоморфным $F_4(q)$

М. Р. Зиновьева

Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) конечной группы G называется граф $GK(G)$, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Известны графы Грюнберга-Кегеля конечных простых неабелевых групп.

Одним из популярных направлений исследований в теории конечных групп является изучение групп по свойствам графа Грюнберга–Кегеля. В “Коуровской тетради” [**1**] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одним и тем же графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги в 2003 г. и М. А. Звездина в 2013 г. получили такое описание в случаях, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор в 2014–2020 гг. исследовал этот вопрос для конечных простых групп лиева типа.

В данной работе мы рассматриваем вопрос о совпадении графов простых чисел конечной простой группы и конечной почти простой группы с цоколем, изоморфным $F_4(q)$. Полученный результат может быть использован при решении проблемы распознаваемости конечных простых групп по спектру.

Теорема 1. *Пусть G_1 – конечная простая классическая группа, G – конечная почти простая, но не простая, группа, $P = Soc(G)$, где $P = F_4(q)$, $q = p^m$, p – простое число. Тогда $GK(G) \neq GK(G_1)$.*

Теорема 2. *Пусть G_1 – конечная простая группа исключительного лиева типа над полем из q_1 элементов, где $q_1 = p_1^{m_1}$, G – конечная почти простая, но не простая, группа с цоколем $P = F_4(q)$, где $q = p^m$. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то $G_1 = F_4(q_1)$ и выполнен один из следующих случаев:*

1) $s(G) = 2$, $G/P \cong \langle f\rangle$, f – полевой автоморфизм, qq_1 нечетно, $q = r^n$, $n = 2^u \cdot 3^w$, u, $w \geq 0$, $u + w > 0$, $|f| = n$, причем если $p_1 = p$, то $q_1 = q$; 2) $s(G) = 2$, $G/P \cong \langle g\rangle$, g – графовый автоморфизм, q_1 нечетно, $q = 2^m$, m нечетно, $|g| = 2$; 3) $s(G) = 3$, $G/P \cong \langle f\rangle$, f – полевой автоморфизм, $q_1 = q$ четно, $q = 2^m = r^n$, m четно, $n = 2^s$, $s > 0$, $|f| = n$.

Литература

[1] The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / Sobolev Institute of mathematics RAS SB. No. 20. Novosibirsk, 2022. 277 c. URL: http://math.nsc.ru/~alglog/20tkt.pdf.

ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург (Россия)
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Порядки произведений транспозиций классов

А. Л. Искра

В 2010 году С. Коль в своей работе [**1**] ввел группу $CT(\mathbb{Z})$. Она порождена транспозициями классов целых чисел по различным модулям (кратко —транспозиции классов), которые обозначаются символом $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$, где $r(m) = \{r + mk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ и $r_1(m_1) \cap r_2(m_2) = \emptyset$. Транспозицию классов $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$ можно записать следующим образом:

$$\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} (r_1 + m_1k, r_2 + m_2k) \in Sym(\mathbb{Z}).$$

С. Коль записал в Коуровскую тетрадь [**2**, вопрос 18.48] следующую проблему описания порядков произведений двух транспозиций классов:

Вопрос. *Верно ли, что существует лишь конечное множество натуральных чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов?*

Для описания произведений двух транспозиций классов $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$ и $\tau_{r_3(m_3),r_4(m_4)}$ в работе [**3**] вводятся типы пересечений как 4-кортежи (t_1, t_2, t_3, t_4), где каждое число t_i характеризует отношение между парами классов соответственно:

$$\{r_1(m_1), r_3(m_3)\}, \{r_1(m_1), r_4(m_4)\}, \{r_2(m_2), r_3(m_3)\}, \{r_2(m_2), r_4(m_4)\}.$$

Пусть $\{r_i(m_i), r_j(m_j)\}$ одна из этих пар классов, а t_l соответствующее число в 4-кортеже (t_1, t_2, t_3, t_4). Тогда возможно 5 случаев:

1) $r_i(m_i) = r_j(m_j)$, в этом случае $t_l = 0$,

2) $r_i(m_i) \supset r_j(m_j)$, в этом случае $t_l = 1$,

3) $r_i(m_i) \subset r_j(m_j)$, в этом случае $t_l = 2$,

4) $r_i(m_i) \cap r_j(m_j) = \emptyset$, в этом случае $t_l = 3$,

5) $r_i(m_i) \cap r_j(m_j) = r_k(m_k)$, где $r_k(m_k) \neq r_i(m_i)$ и $r_k(m_k) \neq r_j(m_j)$, в этом случае $t_l = 4$.

Теорема. *Пусть* $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$ *и* $\tau_{r_3(m_3),r_4(m_4)}$ *– пара транспозиций классов типа* $(1, 4, 3, 4)$. *Тогда* $ord(\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)} \cdot \tau_{r_3(m_3),r_4(m_4)}) \in \{4, 6, 12, \infty\}$.

Теорема. *Пусть* $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$ *и* $\tau_{r_3(m_3),r_4(m_4)}$ *– пара транспозиций классов типа* $(3, 3, 4, 4)$. *Тогда* $ord(\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)} \cdot \tau_{r_3(m_3),r_4(m_4)}) \in \{4, 6, 12\}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00119, https://rscf.ru/project/24-11-00119/

Литература

[1] S. Kohl, *A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers*, Math. Z., 264, no. 4 (2010), pp.927–938.

[2] *Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп,* Новосибирск, 2022.

[3] S. Kohl, *On the cycle structure of products of two class transpositions*, preprint (2011), https://stefan-kohl.github.io/preprints/cycles.pdf

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, НГУ, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.iskra@g.nsu.ru

Об одном локальном критерии σ-субнормальности подгрупп в конечной группе

С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение σ множества всех простых чисел на попарно непересекающиеся непустые подмножества σ_i, индексированные элементами некоторого множества индексов I. Элементы σ_i $(i \in I)$ разбиения σ будем называть его *компонентами*, а компоненту, содержащую простое число p, будем обозначать $\sigma(p)$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп
$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$
такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является $\sigma(p)$-группой для некоторого простого p. Ясно, что подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для разбиения σ, состоящего из одноэлементных подмножеств.

В последние годы в теории конечных групп активно развивается направление, связанное с изучением их σ-свойств. Один из важных аспектов такой программы связан с установлением критериев σ-субнормальности подгрупп, а также с выяснением того, какие свойства субнормальных подгрупп и в какой степени имеют σ-субнормальные аналоги.

В частности, в связи с известным критерием Виландта интересен следующий вопрос 19.84 из "Коуровской тетради".

Верно ли, что подгруппа H σ-субнормальна в группе G, если H σ-субнормальна в $< H, H^x >$ для любого элемента $x \in G$?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

Соответствующий пример построен В.Н. Тютяновым (письмо в редакцию "Коуровской тетради" от 28 августа 2019 года). В то же время в ряде случаев отмеченная проблема решается положительно. В частности, это имеет место в классе всех разрешимых групп, в классе всех σ-разрешимых групп и в классе $3^{'}$-групп. Для некоторых подгрупп H вопрос 19.84 имеет положительный ответ и в классе всех конечных групп. В частности,справедлива следующая теорема:

Теорема. *Пусть H — $\sigma(2)$-подгруппа группы G. Если H содержит силовскую 2-подгруппу группы G и H σ-субнормальна в $< H, H^x >$ для каждого $x \in G$, то H является σ-субнормальной в G.*

Следствие. *Пусть H — $\sigma(2)$-подгруппа группы G. Если H содержит силовскую 2-подгруппу группы G и H σ-субнормальна в $< H, H^x >$ для каждого $x \in G$, то $G/O_{\sigma(2)}(G)$ является $2^{'}$-группой.*

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
vtutanov@gmail.com

Ослабленная σ-проблема Кегеля-Виландта и TI-подгруппы конечных простых групп

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

В работе рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся непустые подмножества σ_i, индексированные элементами некоторого множества индексов I.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ_j-группой для некоторого $j \in I$.

Группа G называется *σ-полной*, если $G \in \bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$. Далее класс $\bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить E_σ. Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и группы $G \in E_\pi$ мы говорим, что π-холлова подгруппа S *редуцируется* в H, если $H \cap S$ — π-холлова подгруппа из H.

В "Коуровской тетради" под номером 19.86 сформулирован следующий аналог известной гипотезы Кегеля–Виландта.

σ-Проблема Кегеля–Виландта. *Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ-субнормальной в G, если любая σ_i-холлова подгруппа группы G редуцируется в H для каждого $\sigma_i \in \sigma$?*

В работе обсуждается связь σ-проблемы Кегеля–Виландта со следующей гипотезой, которая интересна сама по себе.

Гипотеза 1. *Любая простая неабелева группа не содержит собственных простых неабелевых TI-подгрупп.*

Для E_π-группы G и $S \in Hall_\pi(G)$ через $SN_{\pi,S}(G)$ обозначим множество всех подгрупп группы G, в которые редуцируется подгруппа S.

Прикладные возможности гипотезы 1 для анализа σ-проблемы Кегеля–Виландта отражает следующая теорема:

Теорема. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, ..., k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда σ_i-холлова подгруппа S_i^g редуцируется H для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, ..., k$.*

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь),Гомельский филиал Международного университета "МИТСО Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

О строении третьего коммутанта произведения двух B-групп

В. Н. Княгина

Рассматриваются только конечные группы.

B–группа — это конечная ненильпотентная группа, у которой в фактор–группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта также является B–группой. Обе эти группы бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах нормальна, а другая—циклическая [**1**, 2.2]. Фактор-группа по подгруппе Фраттини нормальной силовской подгруппы— главный фактор и в группах Шмидта, и в B–группах. Однако между B–группами и группами Шмидта группами есть и различия. Так, если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в B–группе это свойство нарушается. Можно привести в пример диэдральную группу порядка 18, которая является B–группой и не является группой Шмидта.

В работе [**1**] мы описали основные свойства B–групп и доказали, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения B–подгруппы H и примарной подгруппы K, и если порядок ненормальной силовской подгруппы в H не равен 3 и 7, то группа G разрешима.

Ранее [**2**] было изучено произведение двух групп Шмидта. Доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть H — сверхразрешимая B–подгруппа конечной группы G и пусть $G = HK$, где K — циклическая или сверхразрешимая B–подгруппа. Тогда третий коммутант группы G — абелева 2–группа.*

Следствие 1. *Пусть H и K — B–подгруппы конечной группы G нечетного порядка и пусть $G = HK$. Если H и K сверхразрешимы, то G сверхразрешима.*

Следствие 2. *Пусть H и K — сверхразрешимые B–подгруппы конечной группы G и пусть $G = HK$. Если $|H|$ нечетен, то G 2–нильпотентна и $l_p(G) \leq 1$ для всех $p \in \pi(G)$.*

Пример. Группа $GL(2,3) = S_3SL_2(3) = S_3C_8$ допускает факторизации, указанные в теореме и ее третий коммутант имеет порядок 2.

Литература

[1] В. Н. Княгина. О произведении B–группы и примарной группы // Проблемы физики, математики и техники. 2017. Т 32, № 3. С. 52–57.

[2] В. Н. Княгина, В. С. Монахов. О p–длине произведения двух групп Шмидта // Сибирский математический журнал. 2004. Т 45, № 2. С. 329–333.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (Беларусь)
E-mail: knyagina@inbox.ru

Теорема о конгруэнции диассоциативных квазигрупп

О. О. Комилов

Конгруэнция позволяет упрощать алгебраические системы, сводя их к более простым фактор-алгебрам, классифицировать алгебраические структуры по их свойствам;в современной криптографии они обеспечивают математическую основу для защиты информации.

Конгруэнциям универсальных алгебр посвящено значительное число работ. В работе [1]-[3] авторами были исследованы диассоциативные квазигруппы и были найдены все диассоциативные квазигруппы 4-го порядка степени 3 в виде латинского квадрата (всего 16 квазигрупп).

Теорема. *Все диассоциативные квазигруппы 4-го порядка степени 3 не имеют нетривиальных конгруэнции..*

Пусть $(Q, \cdot)$ диассоциативная квазигруппа 4-го порядка степени 3. Предположим, что существует нетривиальная конгруэнция θ, которая разбивает θ на два класса эквивалентности {a, b} и {c, d}, где $a \neq b$ и $c \neq d$. Но рассмотрев все варианты легко можно заметит, что нет нетривиальных разбиений, сохраняющих операцию квазигруппы, нет и нетривиальных конгруэнций. Следовательно, квазигруппа простая.

Таким образом, легко можно показать, что тождества диассоциативности накладывают строгие ограничения на поведение элементов при многократном применении операции. Если мы предполагаем существование нетривиальной конгруэнции, то она нарушает условие сохранения классов эквивалентности при операциях.

Литература

[1] Комилов О.О. Диассоциативные квазигруппы малого порядка /О.О. Комилов // Доклады НАН Таджикистана. 2020. Том 63. № 11-12. - С. 665 - 671.

[2] Комилов О.О. , Табаров А.Х. Диассоциативные квазигруппы малого порядка. // Сборник тезисов XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. "Ломоносов - 2019 Москва, МГУ, 8-12 апреля 2019г., Секция "Вычислительная математика и кибернетика Издательство: ООО "МАКС Пресс". С. 36 - 37.

[3] Комилов О.О. Изотопия диассоциативной квазигруппы 9-го порядка. В книге: Мальцевские чтения. Международная конференция. г. Новосибирск. 14-18 ноября 2022 г.,с.159

Таджикский национальный университет, Душанбе (Таджикистан)
E-mail: okil.komilov@yandex.ru

Классы конечных групп с условиями формационно гиперцентральности на нормализаторы силовских подгрупп

А. Г. Коранчук

Рассматриваются только конечные группы. При изучении строения групп, силовские p-подгруппы и их нормализаторы, которые Альперин называл локальными подгруппами [**1**], играют ключевую роль. Теорема Фробениуса [**2**, 10.3.2] положила начало исследования определения принадлежности группы к классу групп по свойствам её локальных подгрупп.

В 1992 году Л.А. Шеметков предложил искать такие формации $\mathfrak{F}$, что класс $\mathtt{N}\mathfrak{F}$ всех групп, у которых нормализаторы всех силовских подгрупп принадлежат $\mathfrak{F}$, совпадает с $\mathfrak{F}$. Согласно [**3**] даже для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, класс групп, нормализаторы силовских подгрупп которых принадлежат $\mathfrak{F}$, не является формацией. В работе [**4**] нами предложена модификация данной конструкции, устраняющий указанный недостаток.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$—класс групп. Обозначим через $\mathtt{NZ}\mathfrak{X}$ следующий класс групп:* $(G \mid P \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(N_G(P))$ *для любой* $P \in \mathrm{Syl}G)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Тогда $\mathtt{NZ}\mathfrak{X}$ является формацией. Операция $\mathtt{NZ}$ является идемпотентной и монотонной, а на множестве наследственных формаций и операцией замыкания. Причем, $\mathtt{N}\mathfrak{F} \subseteq \mathtt{NZ}\mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{F}$.*

В 1997 году Л.А. Шеметковым [**5**] была поставлена задача описания формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу, совпадающую со своим $\mathfrak{F}$-гиперцентром. Такие формации называются Z-насыщенными.

Связь операции $\mathtt{NZ}$ с такими формациями устанавливает:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathtt{NZ}\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная формация.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (проект Ф23РНФМ-63).

Литература

[1] *Alperin, J.L.* Groups and Representations /J.L. Alperin, Rowen B.Bell//Springer Science and Business Media.— 2012.—Vol. 162.—p.196

[2] *Robinson, D.J.S.* A Course in the Theory of Groups/D.J.S.Robinson—New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1980.—p.286.

[3] *D'Aniello, A.* Saturated formations closed under Sylow normalizers/A.D'Aniello, C.De Vivo, G.Giordano, M.D. Pérez-Ramos //Comm. Algebra.—2005.—Vol.33.— pp.2801–2808.

[4] *Коранчук, А.Г.* Классы конечных групп с формационно гиперцентральным вложением силовских подгрупп в свои нормализаторы /А.Г. Коранчук //Проблемы физики, математики и техники. — 2025.—№ 3(64).—с. 90–95.

[5] *Shemetkov, L.A.* Frattini extensions of finite groups and formations /L.A. Shemetkov //Comm. Algebra.— 1997.—Vol. 23, № 3.—pp. 955–964.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: melchenkonastya@mail.ru

О пересечении слабых $\mathfrak{F}$-субнормализаторов

Я. А. Купцова, В. И. Мурашко

Рассматриваются только конечные группы. В 1935 году Р. Бэр [**1**] исследовал пересечение нормализаторов всех подгрупп группы G и связал его со структурой самой группы. Позднее в работе [**2**] этот результат был обобщен на случай субнормальных подгрупп. Эти работы положили начало дальнейшему изучению пересечений нормализаторов и их обобщений [**3, 4**].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Р.В. Картер и Д.К. Граддон изучали субнормализаторы и $\mathfrak{F}$—субнормализаторы подгруппы в группе соответственно. Для произвольной подгруппы субнормализатор или $\mathfrak{F}$-субнормализатор могут не существовать. А. Манн предложил концепцию слабого субнормализатора, который всегда существует, но может быть не единственным. Позже В.И. Мурашко и А.Ф. Васильевым было предложено понятие слабого K-$\mathfrak{F}$-субнормализатора.

По аналогии нами предложено следующее определение:

Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппу T группы G назовём слабым $\mathfrak{F}$-субнормализатором H в G, если H является $\mathfrak{F}$-субнормальной в T, и если H является $\mathfrak{F}$-субнормальной в $M \leq G$ и $T \leq M$, то $T = M$.*

В данной работе рассматриваются пересечения слабых $\mathfrak{F}$-субнормализаторов подгрупп из заданной системы. В частности, одним из обсуждаемых результатов является следующая теорема:

Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ - наследственная формация. Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{F}}(G)$ — пересечение слабых $\mathfrak{F}$-субнормализаторов всех $\mathfrak{H}$-подгрупп группы G. Тогда $\mathcal{I}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{F}}(G/\mathcal{I}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{F}}(G)) \simeq 1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ-РНФ М, проект Ф23РНФМ-63).

Литература

[1] Baer, R. Der Kern eine charakteristische Untergruppe / R. Baer // Compos. Math. — 1935. — Vol. 1. — pp.254–283.

[2] Wielandt, H. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen / H.Wielandt // Math. Z. — 1958. — Vol. 69. — pp.463–465.

[3] Li, S. On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group / S. Li, Z. Shen // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323, №5. — pp.1349–1357.

[4] Su, N. On the normalizers of $\mathfrak{F}$-residuals of all subgroups of a finite group / N. Su, Y. Wang // J. Algebra. — 2013. — Vol. 392. — pp.185–198.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: kuptsovayana519@gmail.com, mvimath@yandex.by

О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами $PSL_m(q)$

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Пусть M — непустое множество конечных групп. По определению, периодическая группа G насыщена множеством M, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторому элементу множества M.

Анонсируется следующий результат:

Теорема. *Пусть p — нечётное простое число, m — натуральное число, большее четырёх, M — множество, элементами которого являются группы $PSL_m(p^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Если G — периодическая группа с локально конечными централизаторами инволюций, насыщенная множеством M, то G изоморфна $PSL_m(F)$ для некоторого локально конечного поля F нечётной характеристики.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: daria.lytkin@gmail.com
Институт математики им. С.Л. Соболева РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: vic.mazurov@gmail.com

О порождаемости некоторых линейных групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны

И. А. Марковская

Группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть $(2 \times 2, 2)$-порожденной.

Подгруппу матриц общей линейной группы $GL_n(q)$ над конечным полем из q элементов с определителем равным ± 1 обозначим $GL_n^{\pm 1}(q)$. Ее гомоморфный образ по центру – $PGL_n^{\pm 1}(q)$). Очевидно, справедливо следующее равенство

$$GL_n^{\pm 1}(q) = SL_n(q) \leftthreetimes \langle diag(-1, 1, ..., 1) \rangle .$$

Группа $GL_n(q)$ не является $(2 \times 2, 2)$- порожденной при $q > 3$ [**1**]. Вместе с тем $GL_n^{\pm 1}(q)$ может являться $(2 \times 2, 2)$-порожденной при различных q.

Очевидно $GL_n^{\pm 1}(2^k) = SL_n(2^k)$ и $PGL_n^{\pm 1}(2^k) = PSL_n(2^k)$. Ответ о $(2 \times 2, 2)$-порождаемости этих групп получен в [**2**].

В [**3**] анонсирована

Теорема 1. *При нечетном q группа $GL_n^{\pm 1}(q)$ тогда и только тогда является $(2\times 2, 2)$-порожденной, когда $n \geq 5$.*

Опираясь на методы статьи [**4**], доказана

Теорема 2. *При нечетном q группа $PGL_n^{\pm 1}(q)$ тогда и только тогда является $(2 \times 2, 2)$-порожденной, когда $n = 2$ и $q \neq 9$ или $n \geq 4$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-20059, https://rscf.ru/project/25-21-20059/).

Литература

[1] Марковская И. А., Нужин Я. Н. *О порождаемости групп $GL_n(q)$ и $PGL_n(q)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. (doi: 10.21538/0134-4889-2025-31-4-fon-03)

[2] Нужин Я. Н. *Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2.* Алгебра и логика. 1990. Т. 29. №2. С. 192–206.

[3] Марковская И. А. *О порождаемости группы $GL_n^{\pm 1}(q)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны*, Тезисы докладов Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 90-летию со дня рождения В.А. Белоногова. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет . 2025. С.109.

[4] Нужин Я. Н. *Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики.* II, Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №4, С. 422–440.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: mark.i.a@mail.ru

Конечные группы с метабелевыми подгруппами Шмидта

В. С. Монахов

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Группа, в которой существует нормальная абелева подгруппа, фактор-группа по которой тоже абелева, называется метабелевой. Симметрическая группа S_3 степени 3 и знакопеременная группа A_4 степени 4 являются метабелевыми группами Шмидта, а $SL(2,3)$—неметабелева группа Шмидта.

Доказана следующая

Теорема. *В каждой конечной ненильпотентной группе с единичной подгруппой Фраттини существует метабелева подгруппа Шмидта.*

Гомельский госуниверситет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com

Представление решетки $\check{S}$-формаций конечных групп с помощью графов

В. И. Мурашко

Рассматриваются только конечные группы.

Напомним, что для класса групп $\mathfrak{X}$ минимальной не $\mathfrak{X}$-группой называется такая группа, которая не принадлежит $\mathfrak{X}$, но все её собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$; группой Шмидта называется минимальная ненильпотентная группа. Исследование формаций $\mathfrak{F}$, для которых всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка, было начато В.Н. Семенчуком и А.Ф. Васильевым [**1**]. Такие формации в настоящее время называются $\check{S}$-формациями.

В 2024 году А. Баллестером-Болиншесом, С.Ф. Каморниковым и С. Йи [**2**] были изучены с использованием метода локальных экранов свойства решётки всех наследственных (насыщенных) формаций разрешимых групп, являющимися $\check{S}$-формациями в классе всех разрешимых групп и содержащими все нильпотентные группы. Однако, как следует из работ [**3, 4**], этот метод неприменим для исследования решётки наследственных $\check{S}$-формаций в общем случае. Вследствие этого решётка наследственных $\check{S}$-формаций остаётся неизученной. Настоящий доклад посвящен её исследованию.

Используя методы арифметических графов групп, разработанные в [**5**], нами доказана

Теорема. *Решётка наследственных $\check{S}$-формаций решеточно изоморфна решётке подграфов полного ориентированного графа на счетном множестве вершин.*

Следствие. *Решётка наследственных $\check{S}$-формаций, содержащих все нильпотентные группы, решеточно изоморфна решётке подмножеств счётного множества.*

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант 20211750 “Конвергенция–2025”).

Литература

[1] В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев, Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара.—Ин-т математики Акад.наук БССР, Наука и техника, Минск, 1984.—с.175–181.

[2] A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi, The lattice of formations with the Shemetkov property // J Algebra Appl.—2024.—DOI: 10.1142/S0219498825503086.

[3] С.Ф. Каморников, О двух проблемах Л.А. Шеметкова // Сиб. матем. журн.—1994.— Т.35, № 4.—с. 801–812.

[4] A. Ballester-Bolinches, M.D. Pérez-Ramos, Two questions of L.A. Shemetkov on critical groups // J. Algebra.—1996.—№ 179.—pp.905–917.

[5] А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко, Арифметические графы и классы конечных групп // Сиб. матем. журн.—2019.—Т. 60, № 1.—с. 55–73.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: mvimath@yandex.ru

Классификация λ-гомоморфных брэйсов на свободной абелевой группе ранга 2 с точностью до изоморфизма

И. Новиков

Брэйсом A называется алгебраическая система с двумя бинарными операциями $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto x \circ y$, такими, что $(A, +)$ и $(A, \circ)$ – группы, и тождество

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$$

выполнено для всех $a, b, c \in A$. Здесь $-a$ обозначает обратный к a элемент по отношению к операции $+$.

Брэйсы были впервые введены в работе Румпа 2007 года **[1]** как инструмент для построения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера.

Для фиксированного $a \in A$ отображение $\lambda_a : b \mapsto -a + (a \circ b)$ является автоморфизмом группы $(A, +)$. Заметим, что $a \circ b = a + \lambda_a(b)$.

Будем рассматривать λ-гомоморфные брэйсы: такие брэйсы, для которых выполнено $\lambda_{a+b} = \lambda_a \lambda_b$. Пусть $(A, +) = (\mathbb{Z}^2, +)$ – свободная абелева группа ранга 2 с порождающими x, y и $\varphi = \lambda_x$, $\psi = \lambda_y$. Тогда в брэйсе $(\mathbb{Z}^2, +, \circ)$ выполнено $\lambda_{mx+ny} = \varphi^m \psi^n$, то есть операция $\circ$ полностью определяется двумя целочисленными матрицами φ, ψ.

Ранее **[2]**, **[3]** была получена классификация всех семейств пар (φ, ψ), задающих λ-гомоморфные брэйсы на $(\mathbb{Z}^2, +)$. В настоящем докладе устанавливается, какие из этих пар порождают изоморфные брэйсы, что приводит к полной классификации λ-гомоморфных брэйсов на $\mathbb{Z}^2$ с точностью до изоморфизма.

Новый результат кратко можно сформулировать в следующей теореме:

Теорема. *На $\mathbb{Z}^2$ с точностью до изоморфизма справедливо следующее:*

(1) *существует ровно 10 брэйсов, аддитивная группа которых не является абелевой;*

(2) *существует счётное однопараметрическое семейство брэйсов, аддитивная группа которых является абелевой*

Более того, мультипликативная группа каждого из указанных брэйсов является кристаллографической.

Литература

[1] W. Rump. Braces, radical rings, and the quantum Yang–Baxter equation, J. Algebra, V. 307, 2007, 153–170.

[2] V. Bardakov, M. Neshchadim, M.Yadav. On λ-homomorphic skew braces, J. Pure App. Algebra, V. 226, N. 6, 2022, 106961.

[3] T. Nasybullov, I. Novikov. Classification of λ-homomorphic braces on $\mathbb{Z}^2$. Communications in Algebra, 53(11), 4695–4709, 2025.

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (Россия)
E-mail: i.novikov1@g.nsu.ru

Достаточные условия замкнутости ковра аддитивных подгрупп

Я. Н. Нужин

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $E(\Phi, K)$— элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1}$$

Ковром типа Φ *над* K называется набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),\ r, s, ir+js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ группы $E(\Phi, K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть если $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

Справедлива

Теорема 1. *Включения* $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, *являются достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *над произвольным коммутативным кольцом.*

Теорема 1 дает положительный ответ на вопрос 19.63 из Коуровской тетради, поставленный автором. Её следствием является также подтверждение гипотезы В. М. Левчука о том, что более сильные, чем в теореме 1, включения

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi, \tag{4}$$

будут достаточными для замкнутости ковра. В 1982 г., когда выдвигалась эта гипотеза, её справедливость была известна только для Φ типа A_n. В этом случае (4) являются необходимыми и достаточными условиями дополняемости элементарного матричного ковра $\mathfrak{A}$ до полного, а дополняемые ковры являются замкнутыми.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект 25-21-20059, https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Кратно факторизуемые группы с условно полунормальными сомножителями

П. А. Павлушко, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными в* G [**1**], если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* [**2**] в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T. Кроме того, в [**2**] установлена принадлежность группы G с заданными системами (максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные, сомножители) условно полунормальных подгрупп к произвольной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Здесь $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Группа G является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, если $G = G_1G_2 \cdots G_n$ и $G_iG_j = G_jG_i$ для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Известно, что конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда она является произведением своих попарно перестановочных силовских подгрупп (теорема Ф. Холла). Из теоремы Виландта–Кегеля следует, что любая конечная группа, представимая в виде произведения попарно перестановочных нильпотентных подгрупп, также разрешима. Б. Хупперт доказал, что если группа является произведением попарно перестановочных циклических подгрупп, то она сверхразрешима.

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $G = G_1G_2 \cdots G_n$ *— произведение попарно перестановочных подгрупп* $G_1, \ldots, G_n$ *таких, что* G_i *и* G_j *являются условно полунормальными в* G_iG_j *для любых* $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— насыщенная формация, такая что* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

1. *Если* $G_i \in \mathfrak{F}$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$.
2. *Если* $G_i \in \mathfrak{F}$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$ *и* $(|G_i|, |G_j|) = 1$ *для любых* $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.
3. *Если* G_1 *сверхразрешима, а* G_i *нильпотентны для всех* $i \in \{2, \ldots, n\}$, *то* G *сверхразрешима.*

Здесь $\mathcal{D}$ — формация всех групп, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант №Ф23РНФ-237)

Литература

[1] Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. pp.493–510.

[2] Trofimuk A. A. Finite Groups with Given Systems of Conditionally Seminormal Subgroups // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45. pp. 6624–6632.

Брестский университет им. А.С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: polinapavlushko@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com

GAT-группы — новый взгляд на AT-группы

А. В. Рожков

В 2000 г. Р.И. Григорчук ввел классы *ветвящихся* и *слабо ветвящихся групп.*

Ниже T—слойно однородное дерево, $G \leq Aut(T)$.

Определение ветвящихся групп. *Пусть*

1. G действует транзитивно на слоях дерева T;

2a. если все костабилизаторы (жесткие стабилизаторы) $cost(n)$ нетривиальны, то группа называется слабо ветвящейся;

2b. если $|G : cost(n)| < \infty$, то ветвящейся.

Ветвящиеся группы—это чисто формальное обобщение некоторых AT-групп.

Взяты два свойства некоторых AT-групп и декларативно задан класс групп, обладающих этими свойствами. Но не все AT-группы являются даже слабо ветвящимися. Простейший пример—бесконечная диэдральная группа — два порожденная AT_ω−группа над последовательностью $\omega = (2, 2, ...)$. У нее все костабилизаторы равны 1. Поэтому даже слабо ветвящиеся группы, не содержат весь класс AT-групп.

Мы предлагаем работающее обобщение AT-групп.

Определение GAT-группы. *Пусть*

1. G действует транзитивно на слоях дерева T;

2. на всех поддеревьях дерева T группа G индуцирует GAT-группу, причем во всех вершинах данного слоя в точности одну и ту же.

Это схема рекурсии, и если задана конкретная конструкция, то определение становится корректным.

Примеры GAT-групп.

1. γAT-группы, где нетривиальные перестановки расположены только на бесконечном пути γ в дереве T.

2. AT_n−группа, когда нетривиальные перестановки расположены на расстоянии n от направляющего пути. Обычные AT-группы получаются при $n = 1$.

Исходные примеры Алешина и Сущанского—это AT_2−группы.

Получены предварительные результаты изучения данных классов групп.

Есть много других конструкций GAT-групп, который невозможно изложить в этом тексте. AT-группы—рекурсивная, самоподобная структура. Именно на этом пути, возможно, будет найдено максимально возможное обобщение этой полезной конструкции.

Кубанский государственный университет, Краснодар (Россия)
E-mail: great.ros.marine2@gmail.com

О конечных группах с одним некоммутатором

С. В. Скресанов

Элемент g группы G является коммутатором, если его можно представить в виде $g = a^{-1}b^{-1}ab$ для некоторых $a, b \in G$. В 2010 г. МакХейл поставил следующий вопрос в коуровской тетради: существует ли конечная группа порядка большего 2, в которой ровно один элемент не является коммутатором?

В докладе будет рассказано о положительном решении вопроса МакХейла и будет преведена бесконечная серия таких групп.

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: skresan@math.nsc.ru

$\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критические формации конечных групп

В. В. Скрундь, И. Н. Сафонова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в [**1, 2**].

Задача изучения критических формаций поставлена в 1980 г. Л.А.Шеметковым [**3**]. Разработка методов изучения структурного строения τ-замкнутых σ-локальных формаций приводит к необходимости развития теории критических τ-замкнутых σ-локальных формаций (τ – подгрупповой функтор в смысле А.Н. Скибы [**2**, с. 16]). При этом $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-*критической формацией* или *минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* мы называем τ-замкнутую σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные τ-замкнутые σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

σ-Локальную формацию $\mathfrak{H}$ называют [**4**] *σ-локальной формацией классического типа*, если $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — σ-локальная формация классического типа и h — ее каноническое σ-локальное определение. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) *$G = P$ — такая простая σ_i-группа, что $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;* 2) *P — не σ-примарная группа и G — $\overline{\tau}$-минимальная не $h(\sigma_i)$-группа с $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;* 3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, $p \in \sigma_i$, а K — либо монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $h(\sigma_i)$-группа с монолитом $Q = K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$, где $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, либо минимальная не $h(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов:* а) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;* б) *экстраспециальная группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;* в) *циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.*

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция – 2025», проект 20211328).

Литература

[1] A. N. Skiba. On one generalization of the local formations, *ПФМТ*, 1(34) (2018), pp. 79–82.
[2] A. N. Skiba. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.
[3] Л. А. Шеметков. Экраны ступенчатых формаций, *Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп.* Киев: Наукова думка. 1980, с.37–50.
[4] И. Н. Сафонова. О критических σ-локальных формациях конечных групп. *Труды Института математики НАН Беларуси.* **31**: 2 (2023), с.63–80.

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
E-mail: vallik@mail.ru; in.safonova@mail.ru

Об аппроксимируемости HNN-расширений с нормальными связанными подгруппами корневыми классами групп, нильпотентными и метанильпотентными группами

Е. В. Соколов

Говорят, что группа X аппроксимируется классом групп $\mathcal{C}$, если каждый ее неединичный элемент переходит в неединичный под действием некоторого гомоморфизма группы X на группу из класса $\mathcal{C}$. Согласно одному из равносильных определений класс $\mathcal{C}$ называют корневым, если он содержит неединичные группы и замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых степеней вида $\prod_{z \in Z} Y$, где $Y, Z \in \mathcal{C}$. Легко видеть, что к числу корневых относятся классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p—простое число), всех разрешимых групп, а также некоторые другие классы групп, аппроксимируемость которыми часто рассматривается в литературе. Классы нильпотентных и метанильпотентных групп корневыми не являются, поскольку они незамкнуты относительно взятия расширений. Однако, как показывают работы [**1, 2**], результаты об аппроксимируемости корневыми классами оказываются весьма полезны и при исследовании (мета)нильпотентной аппроксимируемости.

Известно, что в описании условий аппроксимируемости корневыми классами обобщенного свободного произведения двух групп с нормальной объединенной подгруппой важную роль играет группа автоморфизмов объединенной подгруппы, индуцированных внутренними автоморфизмами свободного произведения [**3**]. В [**4**] показано, что похожие группы автоморфизмов могут быть использованы и при исследовании аппроксимируемости HNN-расширений групп с нормальными связанными подгруппами. В докладе будет описано одно обобщение результатов из [**4**], а также приведены критерии аппроксимируемости той же конструкции нильпотентными и метанильпотентными группами, полученные с помощью указанного обобщения и идей из [**2**].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, `https://rscf.ru/project/24-21-00307/`

Литература

[1] *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. Vol. 582. P. 1–25.

[2] *Sokolov E. V.* On the residual nilpotence of generalized free products of groups // J. Algebra. 2024. Vol. 657. P. 292–326.

[3] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

[4] *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* Certain residual properties of HNN-extensions with normal associated subgroups // J. Group Theory. 2025. DOI: 10.1515/jgth-2025-0071.

Ивановский государственный университет, Иваново (Россия)
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

О конечных группах с $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-критическими подгруппами

М. М. Сорокина, Д. Г. Новикова

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. $\mathfrak{F}$-критической (иначе, минимальной не $\mathfrak{F}$-группой) называется группа, не принадлежащая классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. В работе [**1**] для насыщенной (локальной) наследственной формации $\mathfrak{F}$ установлены свойства группы с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-критическими подгруппами. Теорема 1 развивает результат из [**1**] для случая ω-локальной формации, где ω— непустое множество простых чисел.

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех групп, $\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп (π — непустое множество простых чисел); $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ — функция.

Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)\cap\omega\}$ называется ω-локальной формацией [**2**], где $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа в G, $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G; $\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$; $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$ — произведение формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Цепь подгрупп группы G называется ω-цепью относительно $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}$-корадикал каждого члена данной цепи является ω-группой; подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в G, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, либо в G существует максимальная ω-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$, где $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$ [**3**]. Следуя [**4**], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп, если в любой группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, обладающая решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп, $\omega \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Если G — группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, в которой каждая $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной $\pi(\mathfrak{F})$-подгруппой и $H/F(H) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{N}_{\omega\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.*

Литература

[1] Semenchuk V.N., Skiba A.N. Finite groups with systems of K-$\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // arXiv: 1705.10476v1. [math.GR] 30 may 2017.

[2] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды, 1999. Т. 2, № 2, с.114-147.

[3] Максаков С.П., Сорокина М.М. О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета, 2022. № 3 (27), с. 7-17.

[4] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

Брянский государственный университет им.И.Г.Петровского, Брянск (Россия)
E-mail: mmsorokina@yandex.ru, novikovadg@yandex.ru

О сверхразрешимости конечной группы

И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть G — неединичная группа. Цепь подгрупп

$$1 = M_0 \lessdot M_1 \lessdot \ldots \lessdot M_{n-1} \lessdot M_n = G, \tag{1}$$

в которой M_i—максимальная в M_{i+1} подгруппа для каждого i, называется максимальной цепью группы G, а n—ее длиной. Следуя [**1**], длину самой короткой максимальной цепи группы G будем называть глубиной группы G и обозначать $\lambda(G)$. Если группа G π-разрешима, то каждый индекс ее максимальной цепи(1) является π'-числом или примарным π-числом. Поэтому вполне естественным обобщением понятия глубины для частично разрешимых групп является понятие π-глубины.

Пусть G—π-разрешимая группа, тогда π-глубиной группы G. Будем называть наименьшее число π-индексов среди всех максимальных цепей группы G и обозначать $\lambda_\pi(G)$. Наибольшее число π-индексов среди всех максимальных цепей группы G будем называть π-высотой группы G и обозначать $\mu_\pi(G)$.

Теорема. *Группа G π-сверхразрешима тогда и только тогда, когда $\mu_\pi(G) = \lambda_\pi(G)$.*

Следствие [2]. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные цепи имеют одинаковые длины.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237).

Литература

[1] Burness T.C., Liebeck M.W., Shalev A. The depth of a finite simple group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **146**: 6 (2018), pp.2343–2358.

[2] Iwasawa K., Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I*, **4** (1941), 171–199.

Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

О неограниченных группах

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин

Пусть $S(N)$ – группа всех подстановок множества натуральных чисел N.

Определение 1. Подстановка $g \in S(N)$ называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Обозначим

$$G = Lim(N) = x | x \in S(N), \omega(x) < \infty$$

Если $x, y \in G$, то нетрудно понять, что

$$\omega(x^{-1}) = \omega(x), \omega(x, y) \leq \omega(x) + \omega(y).$$

При этом смешанная группа G представима в виде произведения двух локально конечных подгрупп.

Согласно теореме Кэли любая счетная группа изоморфна подгруппе группы $S(N)$.

Определение 2. Произвольная группа называется ограниченной, если она изомофрна подгруппе группы $G = Lim(N)$.

В работе [1] установлено, что ограниченными являются, например, счетаня свободная группа, 2-группа Алешина, счетная локально-конечная группа, счетная свобоная абелева группа. Естественно возник вопрос о существовании и строении (счетных) неограниченных групп. Получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть p – простое число. Если группа H содержит такие элементы*

$$h, h_1, h_2, ..., h_k, ...,$$

что $h_1^p = h, h_2^p = h_1, \ldots, h_n^p = h_{n-1}$, то H—неограниченая группа.

Сформулируем простое следствие этого результата.

Теорема 2. *Если группа T является p-полной для некоторого простого p и содержит элемент бесконечного порядка, то T – неограниченная группа.*

Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект № 24-41-10004.

Литература

[1] A.I. Sozutov, N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, On subgroups of group Lim(N), Siberian electronic mathematical reports, 17 (2010), pp.208-217.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: shlyopkin@mail.ru
alextk@yandex.ru, azarovdn@mail.ru

О мощности расщепляемых расширений групп

А. И. Ткачев, Д. Н. Азаров

Группа G называется мощной, если для любого элемента $a \in G$ и для любого натурального делителя n порядка элемента a существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий a в элемент порядка n (делителем бесконечности считается любое натуральное число). Очевидно, что любая мощная группа финитно аппроксимируема. А. И. Мальцев доказал, что расщепляемое расширение G конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы A с помощью финитно аппроксимируемой группы B является финитно аппроксимируемой группой. Существуют примеры, показывающие, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на мощность—мы показали, что расщепляемое расширение группы кватернионов с помощью конечной циклической группы может не быть мощным. С другой стороны, нами были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если метабелева группа G является расщепляемым расширением конечно порожденной мощной группы A с помощью мощной группы B, то группа G является мощной.*

Теорема 2. *Для произвольной группы A следующие условия равносильны:*

1. Любое расщепляемое расширение группы A с помощью произвольной мощной группы без кручения B является мощной группой.

2. Любое расщепляемое расширение группы A с помощью произвольной свободной группы B является мощной группой.

3. Группа A является сверхмощной, то есть для каждого элемента $a \in A$ и для каждого натурального делителя n порядка элемента a в группе A существует характеристическая подгруппа конечного индекса, по модулю которой порядок элемента a равен n.

Теорема 3. *Следующие группы являются сверхмощными: поли-Z-группы; конечно порожденные нильпотентные группы; конечно порожденные группы, аппроксимируемые конечными p-группами для каждого простого p.*

Теорема 4. *Расщепляемое расширение сверхмощной группы A с помощью слабо мощной группы B является слабо мощной группой.*

Финитно аппроксимируемая группа G называется слабо мощной, если для любого ее элемента a бесконечного порядка существует натуральное m такое, что для каждого натурального n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий a в элемент порядка mn.

Исследование выполнено за счет гранта по приоритетным направлениям деятельности РНФ (проект 30-2025-003994 «Аппроксимационные свойства групп»).

Ивановский государственный университет, Иваново (Россия)

О связях свойств ковровой подгруппы и коврового кольца Ли

Е. Н. Троянская

Рассматриваются импликативные связи замкнутости, инвариантности и L-замкнутости ковра аддитивных подгрупп ранга l (определения см. в [**1**]). Результаты приведены в таблице ниже, где характеристика p основного кольца коэффициентов есть простое число или 0. Импликации 4) и 5) установлены в [**2**].

№	p	Свойство	Вопрос	Свойство	$l = 1$	$l \geqslant 2$
1)	0	замкнутость	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	нет	нет
	2	замкнутость	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	да	да
	$p > 2$	замкнутость	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	нет	?
2)	0	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	замкнутость	нет	нет
	2	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	замкнутость	нет	нет
	$p > 2$	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	замкнутость	да	да
3)	0	замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	нет	нет
	2	замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	нет	нет
	$p > 2$	замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	нет	?
4)	0	инвариантность	$\Longrightarrow$	замкнутость	да	да
	2	инвариантность	$\Longrightarrow$	замкнутость	да	да
	$p > 2$	инвариантность	$\Longrightarrow$	замкнутость	да	да
5)	0	инвариантность	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	да	да
	2	инвариантность	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	да	да
	$p > 2$	инвариантность	$\Longrightarrow$	L-замкнутость	да	да
6)	0	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	нет	нет
	2	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	нет	нет
	$p > 2$	L-замкнутость	$\Longrightarrow$	инвариантность	да	да

Работа поддержана РНФ https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

Литература

[1] **Нужин Я.Н.** Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3, с.195–200.

[2] **Nuzhin Ya. N.** On the closedness of carpets of additive subgroups associated with a Chevalley group over a commutative ring // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 16:6 (2023), pp.732–737.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

Центроиды CT-групп

И. А. Чесноков, А. В. Трейер

В 2000 году А. Г. Мясников и С. Лютиков в работе [**1**] ввели понятие центроида произвольной группы G. В той же статье было доказано, что центроид CSA групп имеет явное описание. Мы показали, что можно обобщить этот результат на более широкий класс CT-групп и более того установить критерий с помощью структуры центроида.

Теорема *Пусть G — группа, C_i — представители классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов. Группа G является CT-группой тогда и только тогда, когда* $\Gamma(G) \cong \overline{\prod_{i\in I}}\Gamma_N(C_i)$.

С помощью этого результата были вычислены центроиды ограниченных сплетений абелевых групп с $\mathbb{Z}$, метабелевых групп Баумслага-Солитера типа $BS(1,k)$, $k \neq -1$ и свободных разрешимых групп.

Литература

[1] Lioutikov S., Myasnikov A. Centroids of groups, J. Group Theory, 3 (2000), pp.177-197

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск (Россия)
E-mail: ivanches1920@gmail.com

О сложности решетки квазимногообразий 2-ступено нильпотентных групп

С. А. Шахова

В [**1**] М.И. Каргаполов поставил проблему (вопрос 4.31): описать решётку квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп. Оказалось, что эта решётка, как и решётки квазимногообразий других универсальных алгебр, имеет довольно сложное строение.

Обозначим через qG — квазимногообразие, порождённое группой G, $L_q(\mathcal{N})$ — решётка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{N}$; $F_2(\mathcal{N})$ — свободная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа ранга 2; $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ — многообразие нильпотентных ступени не выше двух групп экспоненты p^δ с коммутантом экспоненты p^λ, p — простое число, δ, λ — натуральные числа, $\delta \geq \lambda$. Будем писать $\mathcal{R}_\delta$ вместо $\mathcal{R}_{\delta,\delta}$.

В [**2, 3**] получены теоремы, характеризующие сложность решётки $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ при $\delta \geq 2$. В работе [**2**] показано, что при $\delta \geq 2$ существует бесконечное множество квазимногообразий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$, порождённых конечной группой, и таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$, интервал $[\mathcal{M},\ \mathcal{N}]$ в решётке квазимногообразий континуален. В частности, континуален интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{\delta,1}),\ \mathcal{N}]$ для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $qF_2(\mathcal{R}_{\delta,1}) \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$.

В [**3**] доказано, что если $\delta \geq \lambda \geq 2$, и $\delta > \lambda \geq 2$ при $p = 2$, $G \in \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, G — конечная группа, заданная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями, $qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}) \subsetneq qG$, то интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}),\ qG]$ в решётке $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ имеет мощность континуума.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Если $\delta \geq 2$, $p \neq 2$, то для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего условию $qF_2(\mathcal{R}_\delta) \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_\delta$, интервал $[qF_2(\mathcal{R}_\delta),\ \mathcal{N}]$ в решётке $L_q(\mathcal{R}_\delta)$ имеет мощность континуума.*

Литература

[1] Коуровская тетрадь. Нерешённые задачи теории групп, 20-е изд. /Под ред. В.Д. Мазурова и Е.И. Хухро, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2022.

[2] А.И. Будкин О квазимногообразиях, порождённых конечной группой и не имеющих независимых базисов квазитождеств, *Сиб. мат. журн.*, **61**:6 (2020), с.1234–1246.

[3] А.И. Будкин, С.А. Шахова О сложности решётки квазимногообразий нильпотентных групп, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **21**:2 (2024), с.1118–1131.

Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: sashakhova@gmail.com

О наследовании π-теоремы Силова подгруппами классических групп

В. Д. Шепелев

Пусть π — множество простых чисел. Конечная группа называется π-*группой*, если все простые делители её порядка принадлежат π. Группа G удовлетворяет π-*теореме Силова* ($G \in D_\pi$), если её максимальные π-подгруппы сопряжены, и *сильной* π-*теореме Силова* ($G \in W_\pi$), если всякая подгруппа G удовлетворяет π-теореме Силова.

Виланд [**1**, вопрос (h)] предложил классифицировать простые группы $G \in W_\pi$. Спорадические и знакопеременные группы из W_π классифицированы Н. Ч. Манзаевой [**2**], группы лиева типа ранга1—докладчиком [**3**].

Если G—группа, то $G \in W_\pi$ если и только если $G \in D_\pi$ и $M \in W_\pi$ для любой максимальной подгруппы M. Согласно теореме Ашбахера максимальные подгруппы классических групп либо принадлежат одному из восьми “геометрических” классов, либо являются почти простыми. Подгруппы первого типа хорошо известны [**4**], подгруппы второго типа — не всегда. Неабелевы композиционные факторы подгрупп Ашбахера — знакопеременные или классические группы.

Определение. Если G—знакопеременная группа или классическая группа лиева типа ранга 1, то $G \in \tilde{W}_\pi$, если $G \in W_\pi$. Если G — классическая группа ранга > 1, то $\tilde{W}_\pi$, если $G \in D_\pi$, и $S \in \tilde{W}_\pi$ для всякого неабелева композиционного фактора S любого элемента класса Ашбахера.

Решая проблему Виланда, естественно попытаться перечислить классические группы из $\tilde{W}_\pi$. Но возникает вопрос о корректности: определяется ли принадлежность $\tilde{W}_\pi$ только типом изоморфизма группы? Известны изоморфизмы между группами лиева типа, а также изоморфизмы со знакопеременными группами (например, $U_4(2) \cong S_4(3)$, $L_4(2) \cong A_8$). Представители классов Ашбахера при этом зависят от того, в каком качестве мы рассматриваем ту или иную группу.

Теорема. *Для любого множества π принадлежность $\tilde{W}_\pi$ классической группы G определяется только типом изоморфизма группы G.*

Работа выполнена за счёт гранта РНФ https://rscf.ru/project/24-21-00163/.

Литература

[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), pp.161–173.

[2] Н. Ч. Манзаева, Решение проблемы Виланда для спорадических групп, Сиб. электрон. матем. изв., **9** (2012), с.294–305.

[3] В. Д. Шепелев, Сильная π–теорема Силова для простых групп лиева типа ранга 1, Сиб. матем. журн., **66**:4 (2025), с.755–771

[4] P. Kleidman, M. Liebeck. The subgroup structure of the finite classical groups. Vol. 129. Cambridge University Press, 1990.

НГУ, ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.shepelev@g.nsu.ru

О группах с N-критичным графом в локально конечных группах

А. А. Шлепкин, В. И. Мурашко

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [**1, 2**]. Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $G-$ локально конечная группа, $\pi(G) = \{2, p_1, \cdots, p_d\}$ и G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{H_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где H_i- конечная $(p_i, 2)$-группа Шмидта, $p_i \in \pi(H_i)$ и p_i- нечетно. Тогда G обладает нормальной $2^{'}-$холовой подгруппой

$$A = A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_d,$$

где A_j- силовская p_j-подгруппа группы G.

Теорема 2 . *Пусть $G-$ периодическая группа Шункова, $\pi(G) = \{2, p_1, \cdots, p_d\}$ и G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{H_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где H_i- конечная $(p_i, 2)$-группа Шмидта, $p_i \in \pi(H_i)$ и p_i- нечетно. Тогда G обладает нормальной $2^{'}-$холовой подгруппой

$$A = A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_d,$$

где A_j- силовская p_j-подгруппа группы G и как следствие G — локально конечная группа.

Работа первого автора поддержана РНФ проект № 24-41-10004, работа второго автора поддержана БРФФИ проект № Ф23РНФМ-63.

Литература

[1] А.К. Шлепкин. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III международная конференция по алгебре. Сб. тез. Красноярск. 1993.—с. 369.

[2] А.К. Шлепкин. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами / А.К. Шлепкин // Матем. тр. ИМ СО РАН.—1998.– Т.1, № 1.—с.129–138.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: shlyopkin@mail.ru

Централизаторная размерность групп, действующих на деревьях, с абелевыми стабилизаторами

А. В. Усиков

Конечно порожденная группа G называется называется GBS-группой, если она действует на некотором дереве X без инверсий ребер так, что стабилизаторы вершин и ребер — бесконечные циклические группы, и $aGBS$-группой, если стабилизаторы вершин и ребер абелевы.

Если в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_d$$

длины d, но не существует такой цепочки длины $d+1$, то централизаторная размерность $\mathrm{cdim}(G)$ равна d. Если такого числа не существует, то полагают $\mathrm{cdim}(G) = \infty$.

В **[1]** А. Дж. Дункан, И. В. Казачков и В. И. Ремесленников доказывают, что для каждого $m \geqslant 1$ класс групп данной централизаторной размерности m аксиоматизируется универсальной формулой логики первого порядка. Поэтому описание централизаторной размерности размерности весьма полезно при изучении универсальной эквивалентности групп. Кроме того, такое описание играет важную роль для решения уравнений в группах.

В **[2]** Ф. А. Дудкину удалось вычислить централизаторную размерность всех GBS-групп, а в **[3]** им найден критерий универсальной эквивалентности GBS-групп, для которых G/X — дерево.

В настоящей работе мы начинаем изучать централизаторную размерность $aGBS$-групп. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — $aGBS$-группа и G/X — дерево. Тогда*

$$\mathrm{cdim}(G) \leqslant 2|V(G/X)| - 1.$$

Литература

[1] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Centralizer dimension and universal classes of group, Sib. Electron. Math. Rep., 3(2006), pp.197–215.

[2] F. A. Dudkin, “Computation of the centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups”, Сиб. электрон. матем. изв., 15 (2018), pp.1823–1841

[3] Ф. А. Дудкин, “Об универсальной эквивалентности обобщённых групп Баумслага–Солитера”, Алгебра и логика, 59:5 (2020), 529–541; Algebra and Logic, 59:5 (2020), с. 357–366

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.usikov@g.nsu.ru

On the variety of two dimensional representations of some groups with one relation

A. N. Admiralova, V. V. Beniash-Kryvets

Let $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ be a finitely generated group and K be an algebraically closed field of characteristic zero. For any homomorphism $\rho : G \to GL_n(K)$ the set of elements

$$(\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$$

satisfies evidently all the relations of G and thus the correspondence

$$\rho \to (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$$

gives a bijection between points of the set $\mathrm{Hom}(G, GL_n(K))$ and K-points of some affine K-variety $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$. The variety $R_n(G)$ is usually called the variety of n-dimensional representations of G (**[1]**).

The study of geometric invariants of $R_n(G)$ like the dimension or the number of irreducible components is of interest in combinatorial group theory (**[2]**). The representation varieties have also many applications in 3-dimensional geometry and topology (**[3]**).

We consider the group $G = \langle x, y, z_1, \ldots, z_m \mid [x, y] = W(z_1, \ldots, z_m) \rangle$, where $W(z_1, \ldots, z_m)$ do not belong to the commutant of the free group $F(z_1, \ldots, z_m)$ with generators $z_1, \ldots, z_m$. This means that in the qoutient group F/F' the word W has the form $W = z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$, where not all of k_i are equal to zero. We will give a description of $R_2(G)$.

Let $d = GCD(k_1, \ldots, k_m)$ and $H = \{(A_1, \ldots, A_m) \in GL_2(K)^m \mid W(A_1, \ldots, A_m) = E_2\}$. H is an affine variety. Let s be the number of irreducible components of H having dimension at least $4m - 2$. The following theorem holds.

Theorem. *The number of irreducible components of $R_2(G)$ is equal to $d + s$.*

Corollary 1. *Let $G = \langle x, y, z \mid [x, y] = z^t \rangle$, where $t \geq 2$. Then the number of irreducible components of $R_2(G)$ is equal to $\frac{t(t+1)}{2}$.*

Corollary 2. *Let $r, t \in \mathbb{N}$, $(r, t) = 1$, and $G = \langle x, y, z_1, z_2 \mid [x, y] = z_1^r z_2^t \rangle$. Then $R_2(G)$ is an irreducible variety.*

References

[1] A. Lubotzky, and A. Magid. Varieties of representations of finitely generated groups. Memoirs AMS. 58 (1985), 1–116.

[2] S. Liriano. Algebraic geometric invariants for a class of one-relator groups. J. Pure Appl. Algebra, 132(1) (1998),105–118.

[3] H.M. Hilden, M.T. Lozano, and J.M. Montesinos-Amilibia. On the character variety of tunnel number 1 knots. J. London Math. Soc. (2), 62(3) (2000), 938–950.

Belarusian State University, Minsk (Belarus)
E-mail: al.admiralova@gmail.com, benyashvv@gmail.com

Bijections of a group which commute with its automorphisms

O. V. Bryukhanov

Given a group G, take $\Phi \leq \mathrm{Aut}G$ and consider the set of all bijections $\sigma : G \to G$ of G onto itself with the property

$$\sigma(\varphi(g)) = \varphi(\sigma(g))$$

for all $\varphi \in \Phi$ and $g \in G$. This set of bijections constitutes a group with respect to composition, where $\sigma_1\sigma_2(g) = \sigma_2(\sigma_1(g))$ for $g \in G$. We denote this group by $\mathrm{B}_\Phi(G)$ and call it the group of Φ-commuting bijections of G.

In the case when the subgroup Φ of automorphisms coincides with the group of inner automorphisms of G, Borodin, Neshchadim, and Simonov computed [**1, 2**] the groups $\mathrm{B}_\Phi(G)$ for arbitrary abelian groups, for arbitrary free nonabelian groups, and for the dihedral groups $D_n, n \in \mathbb{N} \cup \infty$. In [**2**], the question was posed of a general description of the group $\mathrm{B}_\Phi(G)$ for an arbitrary group G and an arbitrary subgroup $\Phi \leq \mathrm{Aut}G$. The article [**3**] provides an answer to that question.

In the [**3**], we obtain the structure of these groups of bijections as the structure of the centralizer of a subgroup of the permutation group of a set of arbitrary cardinality.

Theorem 1. *Let G be a group, let $\Phi \leq \mathrm{Aut}G$, and let $\mathrm{B}_\Phi(G)$ be the group of Φ-commuting bijections of G. If $G = \bigsqcup_{\alpha\in I} g_\alpha^\Phi$ and $K_\Phi = \bigsqcup_{\alpha\in I'} \mathrm{K}_\alpha$ for $I' \subseteq I$, where $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(g_\alpha^\Phi) | \sigma \in \mathrm{B}_\Phi(G)\}$. Let $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G), \alpha \in I'$, be the group of Φ-commuting self-bijections of the Φ-orbit g_α^Φ. Then*

$$\mathrm{B}_\Phi(G) = \overline{\prod}_{\alpha\in I'} \mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} S(\mathrm{K}_\alpha),$$

where $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) = \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha))/\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha)$.

In particular, we show that the centralizer of the regular representation of a group on itself is isomorphic to the group itself. Using the structure of such bijection groups for the free two-generated Burnside group of exponent 3, we compute the group of its bijections commuting with its inner automorphisms. These results and more general result can be found in the [3].

References

[1] A. A. Simonov, M. V. Neshchadim and A. N. Borodin, *Constructions of quandles over groups and rings*, Sib. Math. J., 65, no. 3(2024), 627–638.

[2] A. N. Borodin, M. V. Neshchadim and A. A. Simonov, *Group bijections commuting with inner automorphisms,* Sib. Math. J., 65, no. 5(2024), 1015–1025.

[3] O. V. Bryukhanov, *Bijections of a group which commute with its automorphisms,* Sib. Math. J., 66, no. 3(2025), 664–671.

NSTU,Novosibirsk,(Russia)
E-mail: bryuolegvad@ya.ru

On lattice of Hall subgroups of a finite group

A. A. Buturlakin

The talk is based on a joint paper with Yang Nanying [**1**].

Let π be a set of primes. A Hall π-subgroup of a finite group is a π-subgroup whose index is not divisible by primes from π. Denote by E_π the class of finite groups having a Hall π-subgroup.

We prove the following statement.

Theorem 1. *Let π_1 and π_2 be sets of primes. Then $E_{\pi_1} \cap E_{\pi_2} \subseteq E_{\pi_1 \cap \pi_2}$.*

This gives an affirmative answer to Question 18.38 of [**2**].

This theorem together with the main result of [**3**] provides the following.

Theorem 2. *Let π be a set of primes of size $k \geqslant 3$ and let l be an integer such that $2 \leqslant l < k$. Assume that a finite group G has a Hall ρ-subgroup for every $\rho \subseteq \pi$ with $|\rho| = l$. Then G has a solvable Hall π-subgroup.*

References

[1] *N. Yang, A.A. Buturlakin*,A generalization of the Arad—Ward theorem on Hall subgroups, J. of Algebra, V. 679 (2025), pp..28–36.

[2] *V. D. Mazurov and E. I. Khukhro (eds.)*, The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.

[3] *A.A. Buturlakin, A.P. Khramova*, A criterion for the existence of a solvable π-Hall subgroup in a finite group, Comm. in Algebra, V. 48, Iss. 3 (2020), pp.1305–1313.

IM SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru

On characterization of groups by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph

M. Zh. Chen, N. V. Maslova, M. R. Zinov'eva

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group G is a graph whose vertex set is the set of prime divisors of $|G|$ and in which two distinct vertices r and s are adjacent if and only if there exists an element of order rs in G. We say that a finite group G is recognizable by Gruenberg–Kegel graph if for every finite group H the equality $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ implies that $G \cong H$. A finite group G is recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph if for every finite group H the isomorphism between $\Gamma(H)$ and $\Gamma(G)$ as abstract graphs (i. e. unlabeled graphs) implies that $G \cong H$. In 2022, P. J. Cameron and the second author proved that if a finite group is recognizable by Gruenberg–Kegel graph, then the group is almost simple. It is clear that if a finite group is recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph, then the group is recognizable by Gruenberg–Kegel graph.

There are still not so many examples of finite groups which can be recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph. In 2006, A. V. Zavarnitsine proved that a finite simple sporadic group J_4 is the unique finite group with exactly 6 connected components of its Gruenberg–Kegel graph. In 2022, P. J. Cameron and the second author proved that the groups $E_8(2)$ and ${}^2G_2(27)$ are recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph, and recently M. Lee and T. Popiel proved that a sporadic simple group S is recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph if and only if

$$S \in \{\mathbb{B}, Fi_{23}, Fi'_{24}, J_4, Ly, \mathbb{M}, O'N, Th\}.$$

We prove the following theorem.

Theorem. *Finite simple exceptional groups of Lie type ${}^2E_6(2)$ and $E_8(q)$ for $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$ are recognizable by isomorphism type of Gruenberg–Kegel graph.*

Acknowledgements. The first author is supported by the National Natural Science Foundation of China (project No. 12461063). The work of the second author was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2025-1549). This research continues the project which was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067).

Hainan University, Haikou (China), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: mzchen@hainanu.edu.cn,butterson@mail.ru,zinovieva-mr@yandex.ru

n-valued quandles

T. A. Kozlovskaya

An n-valued rack is a triple $\mathcal{X} = (X, *, \bar{*})$ in which X is a non-empty set with n-valued multiplications $*$ and $\bar{*}$ such that

$$x * y = [(x * y)_1, (x * y)_2, \ldots, (x * y)_n], \quad x \bar{*} y = [(x \bar{*} y)_1, (x \bar{*} y)_2, \ldots, (x \bar{*} y)_n], \quad x, y \in X,$$

i.e. $x * y$ and $x \bar{*} y$ are multisets in $Sym^n(X)$. The next axioms hold

(M1) *Invertibility*: for any $x, y \in X$ the element x lies in the n^2-multiset $(x * y) \bar{*} y$ and in the n^2-multiset $(x \bar{*} y) * y$.

(M2) *Self-distributivity*: for any $x, y, z \in X$ the n^2-multiset $(x * y) * z$ is a subset of the n^3-multiset $(x * z) * (y * z)$.

An n-valued rack $\mathcal{X} = (X, *, \bar{*})$ is said to be an *n-valued quandle* if the next axiom holds

(M3) *Idempotency*: for any $x \in X$ the multiset $x * x$ contains x.

Let Q be a quandle with multiplication m and its inverse $\bar{m}$ that means that for any $q, h \in Q$ the following holds $\bar{m}(m(q, h), h) = m(\bar{m}(q, h), h) = q$. Further, let $A \subset Aut(Q)$ be a subgroup of order n. Then the set of orbits $X = Q/A$ can be equipped with an n-valued multiplication $\mu \colon X \times X \to (X)^n$ by the rule $\mu(x, y) = x * y = \pi(m(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)))$, where $\pi \colon Q \to X$ is the canonical projection.

Theorem. *The multiplication μ defines an n-valued quandle structure on the orbit space $X = Q/A$, called the coset n-valued quandle of (G, A), with the inverse operation*

$$x \bar{*} y = \pi(\bar{m}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y))).$$

.A non-empty set X with rack (quandle) operations $*_i$, $i \in I$ is called an I-multi-rack (respectively, an I-multi-quandle) if for any $i, j \in I$ the distributivity axioms hold

$$(x *_i y) *_j z = (x *_j z) *_i (y *_j z), \quad x, y, z \in X.$$

If $|I| = n$, then we will call it an n-multi-rack (respectively, an n-multi-quandle). Suppose $(X, *_1, *_2, \ldots, *_n)$ is an n-multi-rack. Then we can define an n-valued rack $(X, *)$ with the operation $x * y = [x *_1 y, x *_2 y, \ldots, x *_n y]$, $x, y \in X$.

Theorem. *Let X be a non-empty set with n quandle (rack) operations $*_i$ such that for any pair $1 \leq i, j \leq n$ of indeces the following identities hold*

$$(x *_i y) *_j z = (x *_j z) *_i (y *_j z), \quad x, y, z \in X.$$

Then an n-valued multiplication

$$x * y = [x *_1 y, x *_2 y, \ldots, x *_n y]$$

defines an n-valued quandle (correspondingly, rack) structure on X.

This work has been supported by the grants the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102.

Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk (Russia)
E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

On Cayley isomorphism property of normal Cayley digraphs over abelian groups

G. K. Ryabov

A Cayley digraph Γ over a finite group G is said to be *CI* if for every Cayley digraph Γ' over G isomorphic to Γ, there is an isomorphism from Γ to Γ' which is at the same time an automorphism of G. Studying of CI-property of Cayley digraphs goes back to the Ádám conjecture [**1**] and was initiated in the classical paper by Babai and Frankl [**2**]. In the talk, we will discuss a CI-property of *normal* Cayley digraphs over abelian groups, i.e. such Cayley digraphs Γ that the group G_r of all right translations of G is normal in $Aut(\Gamma)$. At first, we reduce the case of an arbitrary abelian group to the case of an abelian p-group. Further, we obtain several results on CI-property of normal Cayley digraphs over abelian p-groups. The results of the talk are published in [**3**].

References

[1] *A. Ádám*, Research Problem 2-10, J. Combin. Theory, **2** (1967), 393.

[2] *L. Babai, P. Frankl*, Isomorphisms of Cayley graphs I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **18**, North-Holland, Amsterdam (1978), 35–52.

[3] *G. Ryabov*, On CI-property of normal Cayley digraphs over abelian groups, accepted to Journal of Algebra and its Applications (2025), https://arxiv.org/abs/2503.00859.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia)
Hebei Normal University, Shijiazhuang (China)
E-mail: gric2ryabov@gmail.com

Automorphisms and antiautomorphisms of quandles

B. Sangare

A quandle is a pair $(Q, *)$ such that $*$ is a binary operation satisfying

(Q1) the map $S_a : Q \to Q$, defined by $S_a = b * a$ is an automorphism for all $a \in Q$,

(Q2) for all $a \in Q$, we have $S_a(a) = a$.

Let G be a group and $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Then the set G with binary operation $a*b = \phi(ab^{-1})b$ forms a quandle $\mathrm{Alex}(G, \phi)$ called as the *generalized Alexander quandle*.

- A. A. Simonov, M. V. Neshchadim, and A. N. Borodin constructed some quandles analogous of $\mathrm{Alex}(G, \phi)$:
  - $Q_1 := (G, *_1) : \ x *_1 y = y\phi(y^{-1}x), \ x, y \in G$ and $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$,
  - $Q_2 := (G, *_2) : \ x *_2 y = y\phi(yx^{-1}), \ x, y \in G$ and $\phi \in \mathrm{AAut}(G)$,

  where $\mathrm{AAut}(G)$ is the set of antiautoòrphisms of group G.
- E. Markhinina, T. Nasybullov also constructed quandles with parameter $c \in G$:
  - $L_1 := (G, \circ_1) : \ x \circ_1 y = yc^{-1}y^{-1}xc, \ x, y \in G$,
  - $L_2 := (G, \circ_2) : \ x \circ_2 y = yc^{-1}xy^{-1}c, \ x, y \in G$.

Question : Find automorphisms and antiautomorphisms of G, which induces automorphisms or antiautomorphisms on this quandles.
We have solved this questions and the following theorems describes theses results.

Let G be a group and $i \in \{1, 2\}$.

1) If $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ and φ commutes with ϕ, then:
   a) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Q_i})$,
   b) $\varphi \in \mathrm{AAut}(\mathrm{Q_i})$ if and only if G is abelian.
2) If $\varphi \in \mathrm{AAut}(G)$ and φ commutes with ϕ, then $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Q_i})$ if and only if ϕ is a central automorphism.

Let G be a group, let $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ and $i \in \{1, 2\}$. Then

1) φ induces an automorphism on $L_i(G)$ if and only if $c^{-1}\varphi^{-1}(c) \in Z(G)$,
2) If φ fixes c then φ induces an antiautomorphism on $L_i(G)$ if and only if $x = [x, c^{-1}]$, where $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab, \ a, b \in G$.

Let G be a group, $\varphi \in \mathrm{AAut}(G)$ such that φ fixes c and $i \in \{1, 2\}$. Then φ induces an antiautomorphism on $L_i(G)$ if and only if $[c^2, x^{-1}] = 1, \ x \in G$.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sangrebirama686@gmail.com

On Groups with the Same Index Set as Nilpotent Groups

W. Zhou

This is a joint work with Ilya Gorshkov.

We investigate the connection between the index set (i.e., the set of conjugacy class sizes) of a finite group and its structural properties. In particular, we address two open problems posed by A. R. Camina and R. D. Camina in 2006 [**1, 2**].

First, we construct a series of finite groups that share the same index sets as nilpotent groups but have trivial centers, thus providing counterexamples to one of Camina's questions. Second, we obtain the following complete solution to another problem of Camina.

Theorem. *Let G be an A-group such that* $\mathrm{N}(G)$ *contains* $|G||_p$ *for all* $p \in \pi(G)$ *and* $|G||$. *Then* $\mathrm{N}(G) = 1$, *that is,* G *is an abelian group.*

Here, $\mathrm{N}(G)$ denotes the index set of G. For a prime p, $|G||_p$ is the largest p-power dividing some element of $\mathrm{N}(G)$, and $|G||$ denotes the product $\prod_{p\in\pi(G)} |G||_p$.

References

[1] A. R. Camina, R. D. Camina, Recognising nilpotent groups, *Journal of Algebra*, **300**(1) (2006), 16–24.

[2] A. R. Camina, R. D. Camina, The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: a survey, *Asian-European Journal of Mathematics*, **4**(4) (2011), 559–588.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Россия)
E-mail: zhouwyx@outlook.com

Cactus groups and its linear representation by automorphisms of free module

K. V. Zimireva

Cactus groups can be considered as analogous to braid groups, since there is a geometric interpretation of their elements by strands on a plane or in space. The cactus group was appeared in the works of S. L. Devadoss [**1**] and M. Davis, T. Januszkiewicz [**2**].

A cactus group J_n is generated by a_i, $2 \leqslant i \leqslant n$, with defining relations:

$$a_i^2 = 1,\ 2 \leqslant i \leqslant n, \quad (a_i a_k a_j a_k)^2 = 1,\ i \leqslant j,\ i + j \leqslant k,$$
$$a_i a_k a_j a_k = a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i,$$
$$4 \leqslant j + 2 \leqslant i \leqslant n; \quad j < k < i; \quad 2 \leqslant i + j - k \leqslant n; \quad 2k \leqslant i + j.$$

We construct a linear representation of J_n which is based on the work [**3**], where faithful linear representation of generalized cactus groups was constructed. The general construction of this linear representation does not give an explicit linear representation of the cactus group J_n.

Let $\mathbb{S} = \{\langle (i_1, i_2), (i_2, i_3) \ldots, (i_k, i_{k+1}) \rangle \mid i_j < i_{j+1},\ 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1,\ (i_j, i_{j+1}) \in S_n\}$. Let us define mappings $f_i : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ for $2 \leqslant i \leqslant n$, which acts on $K \in \mathbb{S}$ according to the rule $f_i(K) = \langle (j_1, j_2), \ldots, (j_k, j_{k+1}) \rangle$, where $i_l \leqslant i$ for some maximal l and

$$j_s = \begin{cases} i - i_{l-s+1} + 1, & 1 \leqslant s \leqslant l, \\ i_s, & l < s \leqslant k + 1. \end{cases}$$

Theorem. From the general construction of the R.Yu's linear representation for the group J_n we obtain a representation $\Pi : J_n \to \mathrm{Aut}(V)$ by automorphisms of the free $\mathbb{Z}[t]$-module V with basis e_K, $K \in \mathbb{S}$, in which the images of the generators a_i are the automorphisms φ_i acting as follows:

$$\phi_i(e_K) = \begin{cases} -e_K, & K = W_i, \\ e_K, & i < i_1, \\ e_{f_i(K)} + 2te_{W_i}, & W_i \not\subset f_i(K) \text{ and } i_1 \leqslant i < i_{k+1}, \\ e_{f_i(K)}, & W_i \subset f_i(K) \text{ or } i_{k+1} \leqslant i. \end{cases}$$

This work has been supported by the grants of the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102.

References

[1] S. L. Devadoss, Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad, Contemp. Math., **239** (1999), 91–114.

[2] M. Davis, T. Januszkiewicz, R. Scott, Fundamental groups of blow-ups. Adv. Math. **177(1)** (2003) 115–179.

[3] R. Yu, Linearity of generalized cactus groups. Journal of Algebra **635** (2023) 256–270.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

VI. Секция «Теория колец»

Грубый подход к изучению дифференцирований

А. А. Арутюнов

В докладе излагается комбинаторно-геометрический подход к изучению дифференцирований в групповых алгебрах, основанный на понятиях графа Кэли, группоида действия и грубой геометрии, предложенный в [**4, 5**].

Для группы G с конечным порождающим множеством S рассматривается граф Кэли $\Gamma(G, S)$, который наделяется словной метрикой. Доказывается, что любые два графа Кэли конечно порожденной группы квазиизометричны.

Вводится понятие *группоида действия* Γ_λ, ассоциированного с действием $\lambda : G \times G \to G$ группы на себе. По нему строится граф действия $\mathrm{sk}(\lambda; G, S)$. При действии левыми сдвигами он совпадает с графом Кэли, а при действии сопряжениями — с диаграммой сопряженности $\mathrm{sk}[u]$. Все такие графы для фиксированного действия квазиизометричны.

Характер на группоиде — это функция $\chi : \mathrm{Hom}(\Gamma_\lambda) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$. На графе действия характер определяется как функция на ребрах, суммирующаяся в нуль на каждом цикле. Доказывается, что эти два понятия эквивалентны.

Пространство операторов $B(\mathbb{C}[G], \lambda)$, порожденное характерами, удовлетворяет индуктивному тождеству:

$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + uv \cdot v^{-1}(u^{-1} \cdot \alpha(u)).$$

Частными случаями являются:

- Для действия сопряжениями дифференцирования с «обычным» правилом Лейбница: $\alpha(uv) = u\alpha(v) + v\alpha(u)$.
- *Дифференцирования Фокса*, соответствующие действию левыми сдвигами: $\alpha(uv) = \alpha(u) + u\alpha(v)$.

Также могут быть описаны и (σ, τ)-*дифференцирования*, удовлетворяющие «скрученному» правилу Лейбница: $D(ab) = D(a)\tau(b) + \sigma(a)D(b)$ [**2**], а также структуры DG-алгебр на групповой алгебре, [**1**].

В рамках подхода изучаются не только внутренние и внешние дифференцирования, но и квазивнутренние дифференцирования, тривиальные на эндоморфизмах. Оказывается, что пространство квазивнутренних дифференцирований $\mathrm{QInn}(\mathbb{C}[G])$ образует идеал в алгебре всех дифференцирований $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$.

Устанавливается связь размерности факторпространства $\mathrm{QInnDer}(\Gamma_{[u]})/\,\mathrm{Inn}(\Gamma_{[u]})$ для дифференцирований, сосредоточенных на бесконечном классе сопряженности $[u]$, с числом концов графа $\mathrm{sk}_{[u]}$: $\dim = e(\mathrm{sk}_{[u]}) - 1$, [**3**].

Литература

[1] Arutyunov, A. and Muravev, O. (2025). Description of DG-algebra structures via characters on a groupoid. *Communications in Mathematics*, 33(3), Paper no. 13. doi: 10.46298/cm.15775

[2] Alekseev, A., Arutyunov, A., and Silvestrov, S. (2023). On (σ, τ) - derivations of group algebra as category characters. In *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-031-32009-5_5

[3] Arutyunov, A. (2023). Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups. *European Journal of Mathematics*, 9(2). doi: 10.1007/s40879-023-00642-z

[4] Arutyunov, A. A. and Mishchenko, A. S. (2019). A smooth version of Johnson's problem on derivations of group algebras. *Sbornik: Mathematics*, 210(6), 756–782. doi: 10.1070/sm9119

[5] Arutyunov, A. A. and Mishchenko, A. S. (2013). Reduction of the calculus of pseudodifferential operators on a noncompact manifold to the calculus on a compact manifold of doubled dimension. *Mathematical Notes*, 94(3-4), 455–469. doi: 10.1134/s0001434613090174

ИПУ РАН, Москва (Россия)
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

Кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности

Д. С. Баженов

Доклад посвящён рассмотрению различных фактов из теории колец с ограниченным градуированным индексом нильпотентности. В частности, демонстрируется, что ситуация заметно отличается от (неградуированным) колец с (неградуированным) ограниченным индексом нильпотентности.

Пусть R — градуированное по группе G ассоциативное кольцо. Будем говорить, что оно имеет ограниченный градуированный индекс нильпотентности, если для любого однородного нильпотентного элемента $a \in R$ для некоторого n выполняется $a^n = 0$. Если при этом есть однородные элементы $a \in R$, при которых $a^{n-1} \neq 0$, говорят, что кольцо имеет градуированный индекс нильпотентности n.

Пусть R — правое gr-кольцо Голди и

$$T_k^{gr} = P^{gr}(R) \cap l_R\left(P(R)^k\right),$$

где $k \geqslant 1$. Тогда R называется правым T-gr-кольцом Голди, если для любого натурального k R/T_k^{gr} — правое gr-кольцо Голди.

В работах **[1]** доказано много важных свойств как просто колец с ограниченным индексом нильпотентности, так и полупервичных и первичных с тем же свойством. Возникает вопрос об их выполнении в градуированном случае, и, как выясняется, почти на все эти результаты для обычного и для gr-первичного случаев можно найти контрпримеры.

Теорема 1. Существует градуированное кольцо R градуированного индекса нильпотентности 2 такое, что:

- в R существуют подмножества X_1, X_2 такие, что $X_1^2 = X_2^2 = X_2X_1 = 0$, но $X_1X_2 \neq 0$;
- в R есть gr-нильподкольцо B и его однородный элемент b такие, что $(b\mathbb{Z} + BbB)^2 \neq 0$, причём конечно порождено, но не нильпотентно и содержит элемент, не лежащий ни в одном нильпотентном градуированном идеале кольца B, а следовательно, и в их сумме;
- R содержит три ортогональных однородных идемпотента e_1, e_2, e_3 таких, что $e_1Re_2Re_3 \neq 0$.

Литература

[1] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца // М.,2014.

[2] Năstăsescu C., van Oystæyen F. Graded and Filtered Rings and Modules. // Lect. Notes Math. Springer, 1979.

Huawei, Москва

Многочлены над некоммутативными кольцами с делением

А. Г. Гутор, С. В. Тихонов

Пусть R—некоммутативное ассоциативное кольцо с делением. $R[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами в R, считаем, что переменная x коммутирует с элементами кольца R. Таким образом, всякий многочлен из $R[x]$ имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_0, \ldots, a_n \in R.$$

Основные свойства многочленов над кольцами с делением описаны в [**1**, Ch. 5, §16] (см. также [**2**], [**3**]).

Для $a \in R$ определим $P(a)$ как элемент $P(a) = a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0$. Назовём элемент $a \in R$ (правым) корнем многочлена $P(x)$, если $P(a) = 0$. Теорема Гордона-Моцкина ([**1**, Th. 16.4]) говорит, что многочлен степени n из $R[x]$ может иметь корни не более чем в n классах сопряженности кольца R. Кроме того, если $P(x)$ имеет два различных корня в классе сопряженности, то $P(x)$ имеет бесконечно много корней в этом классе (см. [**1**, Th. 16.11] и [**3**, Prop. 3]).

Нами получена следующая

Теорема 1 [**4**, Th. 2.5]**.** *Пусть R—кольцо с делением, $P(x) \in R[x]$. Предположим, что $c \in R$ не является центральным элементом и $P(c) \neq 0$. Тогда в классе сопряженности $[c]$ бесконечно много элементов, не являющихся корнями многочлена $P(x)$.*

Также доказана следующая теорема, обобщающая результат, полученный в [**5**] для алгебр кватернионов.

Теорема 2 [**4**, Th. 2.4]**.** *Пусть R—кольцо с делением, R_0 — подкольцо с делением кольца R. Всякий многочлен $P(x) \in R[x]$ может быть однозначно представлен в виде*

$$P(x) = cG(x)H(x),$$

где $c \in R^*$—старший коэффициент многочлена $P(x)$, $H(x)$ — унитарный многочлен с коэффициентами в R_0, $G(x) \in R[x]$—унитарный многочлен, не имеющий правых неконстантных делителей из $R_0[x]$.

Литература

[1] Lam T. Y. A first course in noncommutative rings. Springer-Verlag. 1991.

[2] Gordon B., Motzkin T.S. On the zeros of polynomials over division rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965), pp.218–226.

[3] Bray Y., Whaples G. Polynomials with coefficients from a division ring. *Can. J. Math.* **35** (1983), pp.509–515.

[4] Goutor A.G., Tikhonov S.V. Polynomials over division rings, arXiv:2509.03748.

[5] Beck B. Sur les ‘equations polynomiales dans les quaternions. *Enseign. Math.(2)* **25** (1979), no. 3–4, pp.193–201 (1980).

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
E-mail: goutor7@gmail.com;tikhonovsv@bsu.by

О простых и полупростых конечномерных алгебрах Новикова и их автоморфизмах

В. Н. Желябин, А. П. Пожидаев

Алгебра N над полем F называется *алгеброй Новикова*, если она удовлетворяет следующим тождествам

$$(x, y, z) = (y, x, z), \ (xy)z = (xz)y,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$.

В докладе на II Всесоюзной школе «Алгебры Ли и их приложения в математике и физике» (Москва, 1984) С. П. Новиковым был поставлен вопрос: существуют ли простые неассоциативные вещественные алгебры, удовлетворяющие вышеуказанным тождествам.

В 1987 году Е. Зельманов [**1**] доказал, что каждая конечномерная простая алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль является полем. Первый пример простой алгебры Новикова над полем ненулевой характеристики был дан В. Т. Филипповым [**2**] (конструкция Гельфанд–Дорфман, см. далее). Изучение простых конечномерных алгебр Новикова над полем характеристики $p > 0$ проводилось в основном в работах J. M. Osborn [**3**] и X. Xu [**4**]; в итоге такие алгебры были описаны, но с большими ограничениями на поле, которые в нашей работе полностью снимаются. Заметим, что близкие результаты были получены в работе В.Н.Желябина и А.С.Захарова [**5**], но там было ограничение на алгебраическую замкнутость поля.

Напомним, что алгебра называется *дифференциально простой* относительно дифференцирования d, если в ней нет нетривиальных идеалов инвариантных относительно d. Основная конструкция алгебр Новикова (*Гельфанд–Дорфман*) следующая: пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием d и $\alpha \in A$; определяем произведение $\circ$ на A правилом

$$a \circ b = a \cdot d(b) + \alpha \cdot a \cdot b.$$

Полученную алгебру Новикова обозначаем $A_D = (A, d, \alpha)$, а также $A(d) := (A, d, 0)$; здесь $D = d + R_\alpha$ — *обобщенное дифференирование*. Заметим, что алгебра Новикова (A, d, α) над полем характеристики не 2 проста тогда и только тогда, когда $(A; \cdot)$ дифференциально проста относительно d [**6**].

Пусть A — произвольная алгебра. Положим $A^2 := \langle \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i, b_i \in A, \ n \in \mathbb{N} \rangle$. Напомним, что A называется *простой*, если $A^2 \neq 0$ и A не содержит собственных идеалов. Положим $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A^2$, и $A^{(m)} = A^{(m-1)} A^{(m-1)}$ для всех целых $m \geq 1$; A называется *разрешимой* , если $A^{(m)} = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$; A *полупроста*, если она не имеет разрешимых идеалов.

Теорема 1. *Пусть N — конечномерная полупростая алгебра Новикова над полем F. Тогда N классически полупроста, т.е. является прямой суммой простых алгебр.*

Теорема 2. *Пусть N — неассоциативная конечномерная простая алгебра Новикова над полем F характеристики $p > 0$. Тогда N получается по конструкции Гельфанд–Дорфман из ассоциативной коммутативной дифференциально простой алгебры.*

Пусть $B_{k,p}(F)$ — алгебра усеченных многочленов от k неизвестных над полем F характеристики $p > 0$. Легко видеть, что

$$Aut_d A := \{\phi \in Aut A : \phi d = \alpha d \phi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\phi \in F^*\} \leq Aut A.$$

Автоморфизм ϕ алгебры (A, d, a) назовём (скалярно) *стандартным*, если $\phi = \alpha\psi$ для некоторого обратимого (скаляра) $\alpha \in A$ и $\psi \in Aut_d A$.

Теорема 3. *Пусть A — ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p > 0$, $A \ncong B_{1,2}(F)$. Тогда $\phi \in AutA(d)$ тогда и только тогда, когда ϕ скалярно стандартен.*

Обозначим $B_{\beta,\gamma} = (B_{1,2}(F), (\beta + \gamma x_1)\partial_1, \beta)$ при $\beta, \gamma \in F^*$. Положим

$$\mathrm{Aut}^*_{d,a}A \quad := \quad \{\phi \in AutA : \phi d = \alpha d\phi \text{ для некоторого обратимого } \alpha \in A, \phi(a) = D(\alpha)\}.$$

Теорема 4. *Пусть $A_D \ncong B_{\beta,\gamma}$. Тогда $AutA_D \cong \mathrm{Aut}^*_{d,a}A$.*

Литература

[1] Zelmanov E.I., A class of local translation-invariant Lie algebras, Soviet Math. Dokl. 292 (6) (1987) pp.1294–1297.

[2] Filippov V.T., A class of simple nonassociative algebras, Math. Notes 45 (1) (1989) pp.68–71.

[3] Osborn J.M., Novikov algebras, Nova J. Algebra Geom. 1 (1) (1992) pp.1–13.

[4] Xu X., Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0, J. Algebra 246 (2) (2001) pp.673–707.

[5] Zhelyabin V. N., Zakharov A. S., On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p, Sib. Math. J. 65 (3) (2024) pp.680–687.

[6] Zhelyabin V. N., A. S. Tikhov, Novikov–Poisson algebras and associative commutative derivation algebras, Algebra and Logic 47 (2) (2008) pp.107–117.

ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: vicnic@math.nsc.ru, app@math.nsc.ru

О классификации конечных локальных колец с радикалом индекса нильпотентности три

Е. В. Журавлев, О. А. Минниахметова

Пусть R – конечное локальное кольцо с единицей, $\mathrm{char}R = p$ – простое число, J – радикал Джекобсона и $Z(R)$ – центр кольца R, $R/J \cong GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$,

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0,$$

Тогда R – конечномерное векторное пространство над F и

$$R = F \oplus J,\ J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ – отмеченный базис J над F (см. [**1, 2**]), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2, v_3 \in J^2$. Так как $u_iu_j \in J^2$, то $u_iu_j = a_{ij}^{(1)}v_1 + a_{ij}^{(2)}v_2 + a_{ij}^{(3)}v_3$, для некоторых $a_{ij}^{(k)} \in F$, $i, j = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$. Матрицы $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{2\times 2}$, $k = \overline{1,3}$. линейно независимы и, если R – коммутативно, то являются симметрическими.

Пусть Σ – множество всех таких элементов поля $F = GF(p^r)$, что для любых $a, b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^\rho = b$ (равносильно – для любых $a, b \in \Sigma$ не существует такого натурального числа k, что $a^{p^k} = b$). Пусть Γ – множество всех таких элементов Σ, что $a \neq b + 1$ для любых $a, b \in \Gamma$.

Теорема. *Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей,* $\mathrm{char}R = p = 2$ *и условиями:*

$$R/J \cong F \subseteq Z(R),\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0.$$

где J – радикал Джекобсона кольца R, $F = GF(2^r)$ – конечное поле.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix};$

(4) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$, *где $\beta \in \Gamma$, $\eta = 0$ или η – некоторый элемент F, такой, что $\eta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$;*

При $\mathrm{char}R = p^2 = 4$ рассматриваемый тип колец был классифицирован в работе [**3**].

Пусть R – конечное локальное кольцо с единицей e, $\mathrm{char}R = p^3$, b – элемент R мультипликативного порядка $p^r - 1$ такой, что $b + J$ – примитивный элемент $F \cong R/J$, и $\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0$. Тогда существуют $u \in J$ и $\sigma \in \mathrm{Aut}(R_0)$ такие, что $R = R_0 \oplus R_0u$, где $R_0 = GR(p^{3r}, p^3) = K_0 + K_0p + K_0p^2$ – кольцо Галуа, $K_0 = \langle b \rangle \cup \{0\}$, $ur_0 = r_0^\sigma u$, для любого $r_0 \in R_0$ (см. [**1, 2**]), и

$$J = Fu \oplus F(pe) \oplus J^2,\ J^2 = Fu^2 \oplus F(pu) \oplus F(pe)^2.$$

Так как $\mathrm{Aut}(R_0) = \{\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{r-1}, \tau^r = id\}$, где τ – автоморфизм Фробениуса, то количество таких колец равно r. Причем при $b \in Z(R)$ единственным кольцом указанного типа является

$$R = GR(p^{3r}, p^3)[x]/(x^3, p^2x, px^2).$$

Исследование выполнено за счет гранта РНФ https://rscf.ru/project/24-21-00155/.

Литература

[1] Chikunji C.J. On a class of finite rings, Commun. Algebra, 27 (10), 5049–5081 (1999).
[2] Raghavendran R. Finite associative rings, Compos. Math., 21, pp.195–229 (1969).
[3] Журавлев Е.В., Минниахметова О.А. О классификации конечных локальных колец характеристики 4, МАК: Математики - Алтайскому краю, 7, с.14-15 (2025).

Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: evzhuravlev@mail.ru
Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: olya-filina@mail.ru

О шпехтовости почти коммутативных L-многообразий

А. В. Кислицин

Пусть F—поле, $F\langle X\rangle$—свободная ассоциативная алгебра, A — ассоциативная алгебра полем F, E—подпространство алгебры A, порождающее A как алгебру. Под *тождеством пары* (A, E) понимается такой многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, что $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$ при всех $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. В этом случае будем также говорить о тождестве пространства E, а само пространство E назовем *мультипликативным векторным пространством*.

Класс всех пар, в которых выполняются все тождества пары (A, E) назовем L-*многообразием, порожденным парой* (A, E) (*пространством* E). Если L-многообразие $\mathcal{M}$ определено тождествами $f_i = 0$ $(i \in I)$, то будем записывать: $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle f_i = 0 \,|\, i \in I\rangle$.

L-многообразие называется *почти коммутативным*, если само оно некоммутативно, но всякое его собственное L-подмногообразие коммутативно. Строение многообразий ассоциативных колец и линейных алгебр хорошо изучено **[1, 2]**. L-многообразие назовем *шпехтовым*, если всякое его подмногообразие определено конечным набором тождеств **[3]**.

В работе **[4]** для случая конечного поля описаны ненильпотентные почти коммутативные L-многообразия, порожденные алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — почти коммутативное L-многообразие мультипликативных векторных пространств над бесконечным полем F, порожденное линейной алгеброй. Тогда $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle xyz = 0, x^2 = 0\rangle$, если $\mathrm{char}\, F \neq 2$, и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle xyz = 0\rangle$, если $\mathrm{char}\, F = 2$.*

Полученное описание совпадает с описанием многообразий почти коммутативных линейных алгебр над бесконечным полем **[2]**.

Всякое коммутативное L-многообразие является шпехтовым **[5]**. Поскольку любое нильпотентное L-многообразие является шпехтовым, то, учитывая теорему 1 и результаты работ **[3, 4]**, можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Всякое почти коммутативное L-многообразие, порожденное линейной алгеброй, является шпехтовым.*

В случае, если L-многообразие порождено мультипликативным векторным пространством, не являющимся линейной алгеброй, утверждение теоремы неверно. Например, L-многообразие мультипликативных векторных пространств над полем $\mathbb{Z}_2$, порожденное пространством $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_{\mathbb{Z}_2}$, является почти коммутативным L-многообразием, не определяемым конечным набором тождеств **[6]**.

Литература

[1] Мальцев Ю.Н. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец// Сиб. мат. журн. 1976. Т.17. №5. с.1086–1096.

[2] Finogenova O.B. Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects// Serdica Math. J. 2012. №38. pp.473–496.

[3] Кислицин А.В. О шпехтовости L-многообразий векторных пространств над произвольным полем// Алгебра и логика. 2018. Т.57. №5. с.556–566.

[4] Кислицин А.В. О ненильпотентных почти коммутативных L-многообразиях векторных пространств// Сибирский математический журнал. 2018. Т.59. №3. с.580–586.

[5] Исаев И.М., Кислицин А.В. Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств// Алгебра и логика. 2013. Т.52. №4.с.435–460.

[6] Кислицин А.В. Критические векторные пространства и экстремальные L-многообразия// Математический сборник. Принято в печать.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул (Россия)
E-mail: kislitsin@altspu.ru

О решеточных изоморфизмах бесконечных матричных колец

С. С. Коробков

Рассматриваются ассоциативные кольца. Пусть R и R^{φ} — кольца с изоморфными решётками подколец $L(R)$ и $L(R^{\varphi})$ соответственно. Изоморфизм φ решётки $L(R)$ на решётку $L(R^{\varphi})$ назовём *решёточным изоморфизмом* (иначе *проектированием*) кольца R на кольцо R^{φ}. При этом кольцо R^{φ} будем называть проективным образом кольца R. Будем говорить, что некоторый класс колец $\mathcal{K}$ решёточно определяется, если проективный образ каждого кольца $R \in \mathcal{K}$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Назовём кольцо R *периодическим кольцом* (*кольцом без кручения* или *смешанным кольцом*), если его аддитивная группа R^{+} является периодической группой (группой без кручения или смешанной группой).

Теорема 1. *Классы периодических колец, колец без кручения и смешанных колец решёточно определяются в классе всех ассоциативных колец.*

Назовём элемент r кольца R *алгебраическим*, если r является корнем некоторого примитивного многочлена из кольца $x\mathbf{Z}[x]$. Если каждый элемент кольца R является алгебраическим, то само R будем называть *алгебраическим кольцом*.

Теорема 2. *Класс алгебраических колец решёточно определяются в классе всех ассоциативных колец.*

Теорема 3. *Пусть K — периодическое алгебраическое кольцо с единицей, $R = M_n(K)$ и $n \geqslant 2$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^{φ}. Тогда $R^{\varphi} = M_n(K')$, где K' — периодическое алгебраическое кольцо с единицей, решёточно изоморфное кольцу K.*

Теорема 4. *Кольцо матриц $R = M_n(K)$, где $n \geqslant 3$, K — периодическое алгебраическое кольцо с единицей, решёточно определяется в классе всех ассоциативных колец и, если аддитивная группа кольца R примарна, то каждый решёточный изоморфизм φ кольца R на кольцо R^{φ} индуцируется кольцевым изоморфизмом или антиизоморфизмом R на R^{φ}.*

Теорема 4 обобщает полученные ранее в **[1]** – **[4]** результаты о решёточной определяемости матричных колец.

Литература

[1] Barnes D. W., Lattice isomorphisms of associative algebras, J. Aust. Math. Soc., 6, № 1 (1966), pp.106–121.

[2] Коробков С. С., Решёточная определяемость некоторых матричных колец, Матем. сб., 208:1 (2017), с.97–110.

[3] Коробков С.С., Проектирования конечных ненильпотентных колец, Алгебра и логика, 58, № 1 (2019), с.69–83.

[4] Коробков С. С., Решёточная определяемость конечных матричных колец // Международная конференция «Мальцевские чтения-24»: тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 11–15 ноября 2024 г.)—Новосибирск, 2024. с. 209.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: ser1948@gmail.com

О консервативности альтернативных алгебр

А. В. Кухарев

Понятие консервативной алгебры было введено И. Л. Кантором в [**1**] при изучении обобщений алгебр Йордана. Пусть на векторном пространстве V заданы линейный оператор $A\ : V \to V$ и билинейное отображение $B\ : V \times V \to V$. Определим новое билинейное отображение $[A, B] : V \times V \to V$ по формуле

$$[A, B](x, y) = A(B(x, y)) - B(A(x), y) - B(x, A(y)).$$

Рассмотрим алгебру $M = (V, B)$, заданную на векторном пространстве V с умножением $B : V \times V \to V$. Через L_a обозначим оператор левого умножения в M, то есть $L_a(x) = B(a, x)$.

Алгебра $M = (V, B)$ называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* на том же векторном пространстве V, для которого выполняется соотношение

$$[L_a, [L_b, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B]$$

для всех $a, b \in V$.

Эквивалентно, это условие можно записать в виде тождества

$$b(a(xy) - (ax)y - x(ay)) - a((bx)y) + (a(bx))y + (bx)(ay) - a(x(by))+$$
$$(ax)(by) + x(a(by)) = -(a * b)(xy) + ((a * b)x)y + x((a * b)y),$$

где $a, b, x, y \in V$, $xy := B(x, y)$ и $x * y := B^*(x, y)$.

Известно, что все ассоциативные алгебры, алгебры Ли, алгебры Йордана, алгебры Лейбница и алгебры Зинбеля являются консервативными (см. [**2**]). Примерами неконсервативных алгебр являются простая 7-мерная алгебра Мальцева и некоторые левокоммутативные алгебры. Также известны примеры коммутативных неконсервативных алгебр. Например, эволюционная двумерная алгебра E_2, определяемая тождествами $e_1^2 = e_2^2 = e_1$, не является консервативной.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о консервативности альтернативных алгебр. Напомним, что алгебра называется альтернативной, если в ней выполняются тождества $x(xy) = (xx)y$ и $(yx)x = y(xx)$. Очевидно, каждая ассоциативная алгебра альтернативна. Известным примером неассоциативной альтернативной алгебры является алгебра октонионов. Получен следующий результат.

Теорема 1. *Алгебра октонионов не является консервативной.*

Литература

[1] Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Том 16. С. 407–499.

[2] Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Y. Conservative algebras of 2-dimensional algebras // Linear Algebra and its Applications, 486 (2015), 255-274.

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)
E-mail: kukharev.av@mail.ru

Квазидействия, грубые неподвижные точки и неподвижность на короне

О. В. Муравьев

Главным объектом изучения будет являться метрическое пространство с грубым действием группы на нем. В первую очередь нас интересуют динамические характеристики такого действия, а именно грубые неподвижные точки (точки орбита которых ограничена) и неподвижные точки на короне пространства о которых можно думать, как о неподвижных асимптотических направлениях. Данные точки во многом изучаются благодаря геометрии самой группы, например, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть конечнопорожденная группа G действует на метрическом пространстве X грубо и $\exists\, x_o \in X$, т.ч. отображение $\phi : G \to G(x_0)$ – грубое. Тогда перестановки концов пространства X, которые содержат концы орбиты $G(x_0)$, под действием группы G описываются поведением концов группы G при действие на себе левым умножением. То есть если $\gamma_1, \gamma_2 \in Ends(G)$ и для какого-то $g \in G$ имеем $g\gamma_1 = \gamma_2$, то и $g\phi(\gamma_1) = \phi(\gamma_2)$, а значит аналогичное выполнено и для концов пространства X в которых содержатся γ_1, γ_2. В частности можно заметить несколько случаев, которые гарантируют нам наличие неподвижного конца:*

(1) $Ends(G) = 1$.
(2) $Ends(G) = 2$ *и* $G = K \rtimes \mathbb{Z}$, $|K| < \infty$.
(3) *Все концы* $G(x_0)$ *лежат внутри одного конца пространства* X.

Кроме того, можно доказать следующее утверждение, которое в некотором смысле описывает возможные действия групп на пространствах с достаточно большим, но конечным числом концов.

Теорема. *Пусть группа грубо действует на линейно связном (M–связном) метрическом пространстве X, с сохранением компонент линейной связности (M–связности). При этом константа борнологичности такого действия глобально ограничена. Тогда, если $e(X) = n \geq 3$, то в X существует грубая неподвижная точка.*

Как следствие из данной теоремы можно доказать знаменитую теорему Хопфа о числе концов конечнопорожденных групп, рассмотрев действие группы на своем графе Кэли, которое конечно удовлетворяет условиям теоремы, но грубых неподвижных точек иметь не может.

ИПУ РАН, Москва (Россия)
E-mail: oleg-muravev2001.mur@yandex.ru

Тривиальность внешних дифференцирований в $\ell_p(G)$ для групп с ограниченными сопряжениями

А. В. Наянзин

Пусть A – некоторая ассоциативная алгебра, M – некоторый бимодуль над A. *Дифференцированием* называется оператор $d\colon A \to M$, удовлетворяющий правилу Лейбница: $d(ab) = d(a)b + ad(b)$. Дифференцирование вида $d_m(a) = ma - am$, $a \in A, m \in M$ называется *внутренним.* Широко изучается вопрос, при каких условиях на алгебру A все дифференцирования в ней являются внутренними. Например это так для всех непрерывных дифференцирований в алгебрах фон Неймана [**4**], и в алгебрах вида $\ell_1(G)$, где G – дискретная группа [**3**].

Мы рассмотрим дифференцирования $\ell_1(G) \to \ell_p(G)$, где G является конечно порожденной группой, удовлетворяющей условию ограниченности сопряжений. По группе G мы определим граф сопряженности, вершинами которого являются элементы группа, и две вершины соединены ребом, если они получаются сопряжением на образующую. Таким образом мы получаем обобщенную метрику на группе, определенную как длину кратчайшего пути. Условие *ограниченности сопряжений* звучит следующим образом: для каждого ограниченного подмножества $B \subseteq G$ верно, что

$$\sup_{g\in G} \operatorname{diam}\left(g^{-1}Bg\right) < \infty.$$

То есть в таких группах сопряжения не слишком сильно меняют расстояния между элементами группы. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – группа с условием ограниченности сопряжений, размер всех конечных классов сопряженности в которой равномерно ограничен. Тогда каждое непрерывное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_p(G)$ является внутренним.*

Этот результат может быть выведен из более ранних работ. В частности, в [**2**] он доказан для всех аменабельных групп. Отметим, что найденные нами примеры групп с ограниченными сопряжениями являются аменабельными.

Однако, наше доказательство опирается на иные идеи и является более простым. Мы будем использовать описание дифференцирований, предложенное в работе [**1**], которое позволяет отождествить их с характерами на некотором группоиде. Кроме того, фактически дословное повторение наших рассуждений применимо, например, к случаю (σ, τ)-дифференцирований.

Литература

[1] Арутюнов А. А., Мищенко А. С., Штерн А. И. Деривации групповых алгебр *Фундам. и прикл. мат.* — 2016. — Т. 21, №6. — С. 65–78.

[2] Johnson B. E. *Cohomology in Banach Algebras.* — Providence: Am. Math. Soc., 1972.

[3] Johnson B. E., Ringrose J. R. Derivations of operator algebras and discrete group algebras *Bull. London Math. Soc.* — 1969. — Vol. 1, №1. — P. 70–74. — DOI: 10.1112/blms/1.1.70.

[4] Sakai Sh. Derivations of W*-algebras // *Ann. Math.* — 1966. — Vol. 83, №2. — P. 273–279. —

Институт проблем управления РАН им. Трапезникова, Москва (Россия)
E-mail: naianzin.av@phystech.edu

Нильпотентные формальные матрицы над кольцами вычетов

Ц. Д. Норбосамбуев

Пусть p – простое число, $l, n_1, n_2, \ldots, n_l$ – натуральные, причем $l \geqslant 2$ и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_l > 0$. Рассмотрим кольцо формальных матриц:

$$K_l = \left\{ a_{ij} + p^{min(n_i,n_j)}\mathbb{Z} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}, i, j = 1, \ldots, l \right\};$$

пусть $A = \left(a_{ij} + p^{min(n_i,n_j)}\mathbb{Z}\right)_{i,j=1}^{l}, A' = \left(a'_{ij} + p^{min(n_i,n_j)}\mathbb{Z}\right)_{i,j=1}^{l} \in K_l$ тогда

$$A \cdot A' = \left(\sum_{j=1}^{l} S_{ijk} \cdot a_{ij} \cdot a'_{jk} + p^{min(n_i,n_k)}\mathbb{Z} \right)_{i,k=1}^{l},$$

где S_{ijk} – система множителей (см. [1]).

Теорема [1]. *Матрица $A \in K_l$ обратима $\Leftrightarrow$ когда всякий диагональный r_i-блок матрицы A обратим в соответствующем матричном кольце.*

Теорема [2]. *При $l = 2$ и $n_1 > n_2 > 0$ матрица $A \in K_l$ нильпотентна $\Leftrightarrow$ когда числа a_{11} и a_{22} кратны p.*

Теорема. *Матрица $A \in K_l$ нильпотентна $\Leftrightarrow$ когда всякий диагональный r_i-блок матрицы A нильпотентен в соответствующем матричном кольце.*

Следствие. *Множество $Nil(K_l)$ образует идеал в кольце K_l $\Leftrightarrow$ когда $n_1 > n_2 > \cdots > n_l$, т.е. все диагональные блоки K_l есть 1-блоки (имеют размер 1×1).*

Следствие. *При $p > 2$ кольцо K_l является 2-хорошим кольцом.*

Теорема. *Пусть $p = 2$, тогда верны следующие утверждения:*

1) Если все диагональные r_i-блоки в K_l имеют порядок не меньше 2, то K_l – 2-хорошее кольцо.

2) Если в K_l есть ровно один диагональный 1-блок, то K_l – ω-хорошее кольцо.

3) Если в K_l есть два или более диагональных 1-блока, то K_l не является хорошим кольцом.

Теорема. *Кольцо K_l не является ниль-хорошим кольцом.*

Работа выполнена при финансовой поддержке поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Литература

[1] Тимошенко Е.А., Степанова А.Ю. *Кольца обобщённых матриц, представляющих эндоморфизмы конечной примарной группы.* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. №94. с.57–66.

[2] Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М. В. *Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов.* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. №91. с.31–40.

НОМЦ ТГУ, Томск (Россия)
E-mail: nstsddts@yandex.ru

О ниль-алгебрах Новикова

А. С. Панасенко

Алгебра называется *алгеброй Новикова*, если она удовлетворяет тождествам левосимметричности

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)$$

и правокоммутативности

$$(xy)z = (xz)y.$$

Алгебра, антиизоморфная алгебре Новикова, является алгеброй Новикова только если она коммутативна. В связи с этим возникают различные понятия нильпотентности элементов алгебры. Будем использовать следующие обозначения и терминологию.

Определим степень элемента $x \in A$ следующим образом. Положим $x^1 = x$ и $x^n = x^{n-1}x$ при $n > 1$. Элемент x алгебры Новикова назовем *нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Алгебру Новикова назовем *ниль-алгеброй*, если каждый элемент в ней нильпотентен. Односторонний идеал I назовем *ниль-идеалом*, если каждый элемент в I нильпотентен.

Теорема. *Пусть I — правый ниль-идеал индекса 2 алгебры Новикова A. Если $x \in A$ и $x^n \in I$, то $x^{2n+2} = 0$.*

Определим правую степень алгебры A следующим образом. Положим $A^{[1]} = A$ и $A^{[n]} = A^{[n-1]}A$ при $n > 1$. Алгебра A называется *правонильпотентной*, если $A^{[k]} = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Как хорошо известно, правонильпотентность алгебры Новикова эквивалентна ее разрешимости [**1**].

Следствие. *Пусть I—идеал алгебры Новикова A. Если $x \in A$ и $x^n \in I$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $x^{s_k} \in I^{[k]}$, где $s_k = 2s_{k-1}+2$ и $s_1 = n$. В частности, если I—правонильпотентный идеал и A/I—ниль-алгебра, то A — ниль-алгебра.*

Литература

[1] Shestakov I., Zhang Z., Solvability and nilpotency ofNovikov algebras. Comm. Algebra 48:12 (2020). pp.5412–5420.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.panasenko@g.nsu.ru

Классификация простых правоальтернативных сингулярных 10-мерных супералгебр

С. В. Пчелинцев

Простая правоальтернативная супералгебра $B = A \oplus M$ над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3, с чётной частью A и нечётной частью M называется *сингулярной*, если $A^2 = 0$.

Всюду ниже B – сингулярная супералгебра. Элементы пространства $\{q \in M | qB = 0\}$ называются *переключателями*, а его размерность – *индексом* B.

В [**1**] классифицированы сингулярные супералгебры индекса 1.

Переключатель p называется *невырожденным*, если $ap = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in A$. В [**2**] доказано, что всякая конечномерная сингулярная супералгебра B содержит невырожденный переключатель p и имеет структуру расширенного дубля (понятие расширенного дубля было введено в [**3**]). Элемент $x \in M$ определяет линейный оператор ψ_x, действующий на чётной части A по правилу: $a^{\psi_x} = a'$, если $ax = a'p$.

Пусть $\dim(B) = 10$ – это наименьшая размерность сингулярных супералгебр индекса ≥ 2. Доказано, что B содержит невырожденный переключатель p такой, что спектр оператора $\Lambda_0(R_p^2)$ на пространстве A имеет только 2 значения $\{\pm 1\}$.

Будем говорить, что алгебра B имеет *диагональный тип*, если найдётся вырожденный переключатель $x \neq 0$ такой, что оператор ψ_x имеет диагональную форму в некотором базисе весового подпространства A_1 (или A_{-1}) оператора R_p^2, отвечающего собственному значению 1 (или -1 соответственно); в противном случае, будем говорить, что супералгебра B имеет *жорданов тип*.

В [**4**] доказано, что сингулярные 10-мерные супералгебры диагонального типа образуют двух-параметрическое семейство.

Основным результатом является следующий: *сингулярные* 10*-мерные супералгебры жорданова типа образуют однопараметрическое семейство.*

Попутно описаны их группы автоморфизмов.

Литература

[1] Pchelintsev S.V., Shashkov O.V., Linearly generated singular superalgebras. *J. Algebra*, 546 (2020) pp.580—603.

[2] Pchelintsev S., Shashkov O., A finite-dimensional singular superalgebra is algebraically generated, J. Algebra, **645**: 1, May 2024, pp.86–93.

[3] Пчелинцев С.В., Шашков О.В., Алгебраически порожденные супералгебры. Известия вузов. Математика, 2021, №6, с.67—83.

[4] Пчелинцев С.В., О классификации правоальтернативных сингулярных 10-мерных супералгебр диагонального типа, Сиб. Матем. Журн., 66:1, 2025, с.-88–105.

Фининсовый университет при Правительстве РФ, Москва (Россия)
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Дифференцирования в инверсных полугруппах

Р. Ю. Репеев

Рассматривается класс инверсных полугрупп, определенный следующим образом. Пусть даны две группы G и H, а также гомоморфизм $\varphi : G \to H$. Тогда полугруппа $I := G \overset{\varphi}{\sqcup} H$ задается на множестве $G \sqcup H$ с операцией $\circ$:

$$u \circ v = \begin{cases} u \cdot_G v, & u, v \in G \\ u \cdot_H v, & u, v \in H \\ \varphi(u) \cdot_H v, & u \in G, v \in H \\ u \cdot_H \varphi(v), & u \in H, v \in G \end{cases}$$

В докладе исследуются дифференцирования над полугрупповой алгеброй $\mathbb{C}[I]$. Используется категорный метод, предложенный в работах **[1, 2]** для изучения дифференцирований над групповыми алгебрами. Суть метода заключается в построении подходящей категории, на морфизмах которой задается функция, называемая характером, и дифференцирования описываются в терминах характеров.

Для группы G строится малая категория Γ_G, называемая группоидом присоединенного действия, с $Obj(\Gamma_G) = G$ и $Hom(\Gamma_G) = G \times G$, где морфизм $\psi = (u, v)$ идет из источника $s(\psi) = v^{-1}u$ в цель $t(\psi) = uv^{-1}$. Морфизмы $\psi = (u_1, v_1)$ и $\xi = (u_2, v_2)$ называются компонируемыми, если $t(\xi) = s(\psi)$, а их композиция задается как

$$\xi \circ \psi = (v_2 u_1, v_2 v_1).$$

Для полугруппы $I = G \overset{\varphi}{\sqcup} H$ строится группоид $\Gamma = \Gamma_G \sqcup \Gamma_H$.

Характером на группоиде Γ называется функция $\chi : Hom(\Gamma) \to \mathbb{C}$ такая, что для любых компонируемых морфизмов $\psi, \xi \in Hom(\Gamma)$ выполняется

$$\chi(\xi \circ \psi) = \chi(\xi) + \chi(\psi).$$

Характер χ на группоиде Γ называется локально финитным, если для всех элементов $v \in I$ выполняется $\chi(u, v) = 0$ почти всегда, то есть для всех элементов $u \in I$ кроме конечного числа. Пространство локально финитных характеров на Γ обозначается $X(\Gamma)$.

Теорема. *Для полугруппы $I = G \overset{\varphi}{\sqcup} H$ имеет место изоморфизм алгебр Ли:*

$$Der(\mathbb{C}[I]) \cong X(\Gamma_G \sqcup \Gamma_H) \cong X(\Gamma_G) \oplus X(\Gamma_H) \cong Der(\mathbb{C}[G]) \oplus Der(\mathbb{C}[H])$$

Литература

[1] Арутюнов А. А., Мищенко А. С., Штерн А. И., Деривации групповых алгебр, Фундамент. и прикл. матем., 21:6 (2016), с.65–78

[2] Арутюнов А. А., Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, 308, МИАН, М.,2020, с.28–41

ИПУ РАН, Москва (Россия)
E-mail: roman.repeev@gmail.com

Фробениусовы G-формы на скрещенных алгебрах

П. П. Соколов

Скрещенные алгебры были введены для построения топологических инвариантов [**2**]. Скрещенная алгебра L – это G-градуированная алгебра с фробениусовой G-формой и некоторым представлением $G \to Aut(L)$. Фробениусова G-форма η на градуированной алгебре L – это симметрическая билинейная ассоциативная форма, которая дополнительно удовлетворяет двум условиям:

(1) $\eta(L_g \otimes L_h) = 0$, при $gh \neq 1 \in G$;
(2) $\eta|_{L_g \otimes L_{g^{-1}}}$ невырождена для всех $g \in G$.

Известно, что нейтральная компонента градуировки скрещенной алгебры является фробениусовой коммутативной алгеброй. Также, известно некоторое описание коммутативных фробуниусовых алгебр и фробениусовых форм на них [**1**].

Далее рассматриваются ассоциативные алгебры с единицей над полем. Рассмотрим фробениусову G-алгебру L, тогда, верно следующее:

Лемма. *Для любого $g \in G$ и любого $0 \neq a \in L_g$ выполнено $aL_{g^{-1}} \neq 0$.*

Лемма. *Пусть η – произвольная симметрическая билинейная ассоциативная форма на L, тогда ограничение $\eta|_{L_g \otimes L_{g^{-1}}}$ не вырождено для всех $g \in G$ тогда и только тогда, когда $\eta|_{L_1 \otimes L_1}$ не вырождено.*

Лемма. *Пусть η_1, η_2 – две фробениусовы G-формы на L, тогда $\eta_1 \equiv \eta_2$ тогда и только тогда, когда $\eta_1|_{L_1 \otimes L_1} \equiv \eta_2|_{L_1 \otimes L_1}$.*

Теорема. *Фробениусовы G-формы на L находятся во взаимнооднозначном соответствии с классическими фробениусовыми формами на L_1.*

Следствие. *Пусть S – скрещенная алгебра, тогда любая фробениусова G-форма на S определяется фробениусовой формой на коммутативной фробениусовой алгебре S_1.*

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС» № 23-7-2-14-1.

Литература

[1] Abrams L., Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras. J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), pp.569–587.
[2] Turaev V., Homotopy field theory in dimension 2 and group-algebras. arXiv (1999).

НГУ, Новосибирск (Россия)
E-mail: p.sokolov@g.nsu.ru

О роде алгебр с делением и алгебраических групп

С. В. Тихонов

Пусть F—поле, $\mathrm{Br}(F)$—его группа Брауэра.

Род $\mathbf{gen}(D)$ конечномерной центральной алгебры с делением D над полем F определяется как набор классов $[D'] \in \mathrm{Br}(F)$, где D'—центральная F-алгебра с делением, имеющая такие же максимальные подполя, что и алгебра D.

Различные варианты понятия рода центральных простых алгебр рассмотрены в [**1**] и [**2**].

Похожим образом можно определить род абсолютно почти простой алгебраической группы. Говорят, что две абсолютно почти простые алгебраические группы G_1 и G_2 над полем F имеют одинаковые классы F-изоморфизма максимальных F-торов, если каждый максимальный F-тор группы G_1 F-изоморфен некоторому максимальному F-тору группы G_2, и наоборот. Алгебраическая F-группа G' называется F-формой алгебраической F-группы G, если G и G' изоморфны над сепарабельным замыканием F^{sep} поля F.

Пусть G — абсолютно почти простая алгебраическая группа над полем F. Род $\mathbf{gen}(G)$ группы G определяется как множество классов F-изоморфизма F-форм G' группы G, имеющих те же классы F-изоморфизма максимальных F-торов, что и G (см. [**1**, Определение 6.1]).

В [**3**] получены следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть K—конечное расширение некоторого поля, являющегося чисто трансцендентным расширением бесконечной степени трансцендентности некоторого своего подполя. Пусть также D—центральная K-алгебра с делением. Тогда $\mathbf{gen}(D)$ состоит из таких классов $[D']$, что $[D]$ и $[D']$ порождают одну подгруппу в группе $\mathrm{Br}(K)$.*

В частности, род всякой центральной K-алгебры с делением экспоненты два тривиален.

Теорема 2. *Пусть K—конечное расширение некоторого поля, являющегося чисто трансцендентным расширением бесконечной степени трансцендентности некоторого своего подполя. Пусть $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Пусть также G—простая алгебраическая группа типа G_2 над K. Тогда род $\mathbf{gen}(G)$ тривиален.*

Литература

[1] Черноусов В.И., Рапинчук А.С., Рапинчук И.А. Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя. *Успехи математических наук.* **70**: 1 (2015), с.89–122.

[2] Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A., Rowen L., Saltman D. Division algebras with common subfields. *Manuscripta Math.* **169**: 1-2 (2022), c.209–249.

[3] Tikhonov S.V. Genus of division algebras over fields with infinite transcendence degre. *Archiv der Mathematik.* **125** (2025), pp.115—121.

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
E-mail: tikhonovsv@bsu.by

Группы с однозначным умножением и E-группы без кручения ранга 2

Е. А. Тимошенко, А. Г. Тисовский, А. В. Царев

Абелеву группу A назовём *E-группой*, если кольцо эндоморфизмов группы A коммутативно, а аддитивная группа этого кольца изоморфна A. Класс E-групп содержится в классе *групп с однозначным умножением*, т. е. в классе абелевых групп, на которых можно задать ровно одну структуру ассоциативного кольца, содержащего единицу (с точностью до изоморфизма). Легко видеть, что группа без кручения ранга 1 будет группой с однозначным умножением тогда и только тогда, когда она является E-группой, т. е. изоморфна одной из описанных ниже групп вида $\mathbb{Q}^{(L)}$.

Для подмножества L множества всех простых чисел через $\mathbb{Q}^{(L)}$ обозначается подкольцо поля рациональных чисел, порождённое элементами $1/p$ такими, что $p \in L$; для $L = \varnothing$ считаем, что $\mathbb{Q}^{(L)}$—кольцо целых чисел. Если M—ещё одно подмножество множества всех простых чисел, причём $L \not\subset M$ и $M \not\subset L$, а целое число $m > 0$ не делится ни на какое простое $p \in L \cup M$, то определим подкольцо $R(L, M, m)$ кольца $\mathbb{Q}^{(L)} \times \mathbb{Q}^{(M)}$, полагая

$$R(L, M, m) = \bigl\{(x, y) \in \mathbb{Q}^{(L)} \times \mathbb{Q}^{(M)} \bigm| \varphi(x + m\mathbb{Q}^{(L)}) = y + m\mathbb{Q}^{(M)}\bigr\},$$

где φ—единственный кольцевой изоморфизм $\mathbb{Q}^{(L)}/m\mathbb{Q}^{(L)} \to \mathbb{Q}^{(M)}/m\mathbb{Q}^{(M)}$.

Напомним, что группа без кручения A называется:

— *однородной*, если все её ненулевые элементы имеют один и тот же тип;

— *сильно неразложимой*, если для подгрупп B, C группы A и числа $k > 0$ включение $kA \subset B \oplus C \subset A$ возможно лишь при $B = 0$ или $C = 0$.

Теорема 1. *Чтобы группа без кручения A ранга 2 являлась группой с однозначным умножением, необходимо и достаточно выполнение одного из условий:*

(i) *$A \cong \mathbb{Q}^{(L)} \oplus C$, где C есть группа без кручения ранга 1, которая является модулем над кольцом $\mathbb{Q}^{(L)}$ и не изоморфна никакой группе вида $\mathbb{Q}^{(M)}$;*

(ii) *группа A изоморфна аддитивной группе некоторого кольца $R(L, M, m)$;*

(iii) *A — однородная сильно неразложимая E-группа.*

Следствие. *Группа без кручения A ранга 2 является E-группой в точности тогда, когда выполнено условие* (ii) *либо условие* (iii) *из теоремы* 1.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Томский государственный университет, Томск (Россия)
E-mail: tea471@mail.tsu.ru
Московский педагогический государственный университет, Москва (Россия)
E-mail: ag.tisovsky@gmail.com
Московский педагогический государственный университет, Москва (Россия)
E-mail: an-tsarev@yandex.ru

The algebraic and geometric classification of commutative post-Lie algebras

K. K. Abdurasulov

The post-Lie operad was defined by Vallette **[1]** as the Koszul dual of the commutative triassociative operad; he also proved that both these operads are Koszul. To be precise, a post-Lie algebra is a vector space P with two bilinear operations $\circ$ and $[\cdot,\cdot]$ such that $(\mathrm{P},[\cdot,\cdot])$ is a Lie algebra and the two operations satisfy the following relations:

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z)-(x\circ z)\circ y + x\circ(z\circ y) &= x\circ[y,z],\\ [x,y]\circ z &= [x\circ z,y]+[x,y\circ z].\end{aligned}$$

The first of these relations implies that if $[x,y]=0$ then $(\mathrm{P},\circ)$ is a pre-Lie algebra (also called a left-symmetric algebra).

If $\circ$ is commutative then the post-Lie algebra $(\mathrm{P},\circ,[\cdot,\cdot])$ gives a commutative post-Lie algebra. It looks like the algebraic study of commutative post-Lie algebras (CPA for short) starts in **[2]**, where Burde and Dekimpe proved that any CPA structure on a complex finite-dimensional semisimple Lie algebra is trivial.

In our work, we developed a method for the classification of n-dimensional CPAs and gave the algebraic classification of 3-dimensional CPA and, as a further step, obtained the geometric classification of complex CPAs in dimension three.

Theorem 1. *Nontrivial complex 3-dimensional* CPA*s are described by 9 mutually non-isomorphic algebras and 7 one-parameter families.*

Theorem 2. *The variety of 3-dimensional* CPA*s has dimension 9 and consists of 8 irreducible components. In particular, it contains 5 rigid algebras.*

Proposition 1. *Let* P *be a simple n-dimensional Lie algebra, then it is rigid in the variety of n-dimensional commutative post-Lie algebras.*

References

[1] Vallette B., Homology of generalized partition posets, Journal of Pure and Applied Algebra, 208 (2007), 2, pp.699–725.

[2] Burde D., Dekimpe K., Post-Lie algebra structures on pairs of Lie algebras, Journal of Algebra, 464 (2016), pp.226–245.

CMA-UBI, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal; Romanovsky Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent (Uzbekistan)
E-mail: abdurasulov0505@mail.ru

Anti-Rota-Baxter and $\mathcal{O}$-operators on 3-dimensional Lie algebras

M. E. Azizov

The investigation of operator identities on Lie algebras, such as Rota-Baxter operators and their generalizations, is motivated by quantum groups, and Poisson-type structures. In particular, $\mathcal{O}$-operators, introduced by Kupershmidt **[1]** as a reformulation of classical r-matrices connect solutions of the classical Yang-Baxter equation (CYBE) with the construction of new algebraic structures such as pre-Lie and dendriform algebras. An $\mathcal{O}$-operator $\mathcal{O}: V \to \mathfrak{g}$ associated to a representation (ρ, V) of a Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\_, \_])$ satisfies

$$[\mathcal{O}(u), \mathcal{O}(v)] = \mathcal{O}\big(\rho(\mathcal{O}(u))v - \rho(\mathcal{O}(v))u\big), \qquad \forall u, v \in V,$$

which ensures that V becomes a Lie algebra under the induced bracket.

A natural analogue, called an *anti-$\mathcal{O}$-operator*, reverses the defining relation:

$$[\mathcal{O}(u), \mathcal{O}(v)] = \mathcal{O}\big(\rho(\mathcal{O}(v))u - \rho(\mathcal{O}(u))v\big).$$

When the underlying module is the adjoint representation $(\rho, V) = (\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$, an anti-$\mathcal{O}$-operator coincides with an *anti-Rota-Baxter operator*. These operators naturally induce *anti-pre-Lie algebras* , which arise from symmetric bilinear cocycles in analogy with the skew-symmetric structures of classical pre-Lie algebras **[2]**.

As an explicit example, we obtained all anti-$\mathcal{O}$-operators on the Heisenberg algebra $n_3(\mathbb{C})$. The resulting linear maps $\mathcal{O}_i : V \to n_3(\mathbb{C})$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ are given by:

- $\mathcal{O}_1(v_1) = 0, \quad \mathcal{O}_1(v_2) = 0, \quad \mathcal{O}_1(v_3) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3;$
- $\mathcal{O}_2(v_1) = 0, \quad \mathcal{O}_2(v_2) = b_2e_2, \quad \mathcal{O}_2(v_3) = c_2e_2 + c_3e_3 \quad (b_2 \neq 0);$
- $\mathcal{O}_3(v_1) = 0, \quad \mathcal{O}_3(v_2) = ic_1b_3\, e_1 + b_2e_2 + b_3^2e_3,$

  $$\mathcal{O}_3(v_3) = c_1^2e_1 - \left(\frac{ic_1b_3\,b_2}{b_3^2}\right)e_2 + \left(\frac{ic_1b_3(c_2-b_3^2)-b_2c_1^2}{b_3^2}\right)e_3 \quad (b_3 \neq 0);$$
- $\mathcal{O}_4(v_1) = a_2e_2 + a_3e_3, \quad \mathcal{O}_4(v_2) = \left(\frac{b_3a_2}{a_3}\right)e_2 + b_3e_3,$

  $$\mathcal{O}_4(v_3) = -\frac{a_2^2}{a_3}e_2 - a_2e_3 \quad (a_3 \neq 0).$$

Anti-$\mathcal{O}$-operators introduce a bilinear product on the underlying vector space that yields a Lie-admissible structure, i.e. in the strong case, the induced anti-pre-Lie algebra is compatible with the Lie algebra, and the operator acts as a homomorphism of Lie algebras from the sub-adjacent Lie algebra.

References

[1] Kupershmidt B. A., What a Classical r-Matrix Really Is, Mathematical Physics 6 (1999), pp.448—488.

[2] Liu G., Bai C., Anti-pre-Lie algebras, Novikov algebras and commutative 2-cocycles on Lie algebras, Journal of Algebra, 609 (2022), pp.337–379.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent (Uzbekistan)
E-mail: azizovmajidkhan@gmail.com

Idempotents and automorphisms of quandle algebras

V. G. Bardakov

Recall that a *quandle* is an algebraic system $(X, *)$ with one binary operation $(a, b) \mapsto a*b$ satisfying the following axioms:

(Q1) $a * a = a$ for all $a \in X$.

(Q2) For any $a, b \in X$ there is a unique $c \in X$ such that $a = c * b$.

(Q3) Right distributivity: $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ for all $a, b, c \in X$.

Quandles for which left multiplications are bijections are called *Latin quandles*.

Let K be a unital ring without zero divisers. We discuss the following general problem.

Problem 1.*Find idempotents in quandle algebra $K[X]$.*

Description of idempotents important for studying automorphism of quandle algebras. In particular, it is easy to see that if a quandle algebra $K[X]$ has only trivial idempotents (elements of X), then $Aut(\mathbb{Z}[X]) \cong Aut(X)$.

There are examples of quandle algebras which have only trivial idempotents and there are examples of quandle algebras which have a lot of idempotents.

Theorem.

(1) (B.–Elhamdady, 2025) $K[Core(\mathbb{Z})]$ *has only trivial idempotents.*

(2) (M. Elhamdadi–B. Nunez–M. Singh–D. Swain, 2023) *Let FQ_n be a free quandle of rank $n \geq 1$. Then $\mathbb{Z}[FQ_n]$ has only trivial idempotents.*

(3) (B.–Passi–Singh, 2019) *If a quandle X contains a trivial subquandle with more than one element, then $K[X]$ has non-trivial idempotents.*

The following problems are also seen interesting.

Problems 2. Let X be a finite Latin quandle, $\mathbb{Z}[X]$ be its quandle algebra.

(1) Is it true that $\mathbb{Z}[X]$ has only trivial idempotents?

(2) Is it true that if $u \in \mathbb{Z}[X]$ is an idempotent, then the augmentation map $\varepsilon(u) = 1$ (can not be 0)?

If we take a field instead of $\mathbb{Z}$, then the answer on the first question is negative.

This work has been supported by the grants the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102

Sobolev Institute of Mathematics and Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk (Russia)

E-mail: bardakov@mail.math.nscu.ru

Two generalizations of perspective Abelian groups

A. R. Chekhlov, P. V. Danchev, Ö. Taşdemir

All groups considered are additive and Abelian. The authors generalize in two different ways the class of perspective abelian groups, as defined in [**1**], to the so-called *IC-groups* and *TP-groups*, respectively.

Recall that two direct summands K and L of a group M are called perspective, which is hereafter denoted by $K \overset{P}{\sim} L$, if there exists a subgroup N of M such that $M = K \oplus N = L \oplus N$.

- A group G is *IC* (*Internal Cancelation*) if $G = A \oplus B = A' \oplus B'$ with $A \cong A'$ assures that $B \cong B'$.

Note that every torsion-free group of rank 2 is IC, because it is either decomposable or indecomposable. But there exists a torsion-free group of rank 3 which is *not* IC.

- A group G is *TP* (*Transitive Perspective*) if $G = A \oplus B = A' \oplus B'$ with $A \overset{P}{\sim} A'$ ensures that $B \overset{P}{\sim} B'$.

We obtain numerous results in these two directions that can be viewed as a successful start on the description of their rather more complicated structures and properties. Due to the limited scope, we will only state the following main outlines.

Theorem. (1) *Let G be a divisible Abelian group. Then, G is IC if, and only if, each p-primary component of G and the torsion free part of G have finite rank.*

(2) *Each finite group is IC, and any IC bounded group is finite.*

(3) *Let G be a reduced countable p-group having finite all Ulm-Kaplansky invariants. Then, G is IC.*

(4) *The reduced torsion-complete p-group G is IC if, and only if, every its Ulm-Kaplansky invariant is finite for any $n < \omega$.*

(5) *The reduced algebraically compact torsion-free group G is IC if, and only if, for each prime p, the p-rank $r_p(G)$ is finite.*

(6) *The fully decomposable torsion-free group G is IC if, and only if, all homogeneous components of G have finite ranks.*

(7) *The direct sum of cyclic p-groups G is IC if, and only if, all homogeneous components of G have finite ranks.*

(8) *A reduced countable p-group is perspective if, and only if, it has finite all Ulm-Kaplansky invariants.*

(9) *Let G is a divisible group. If G is TP, then it is perspective and so IC.*

(10) *Let G be a divisible torsion-free group. If A and A' are its two direct summands with equal finite ranks or co-ranks, then $A \overset{P}{\sim} A'$.*

References

[1] Călugăreanu G., Chekhlov A., *Perspective Abelian groups*, Commun. Algebra **53**, no. 8 (2025), pp.3418–3429.

Affiliations: Tomsk (Russia), Sofia (Bulgaria), Edirne (Türkiye)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru, danchev@math.bas.bg, ozgurtasdemir@trakya.edu.tr

PostLie algebras and braces

V. Yu. Gubarev

A space L with two bilinear operations $[,]$ and $\cdot$ is called a postLie algebra [2, 5] if $[,]$ is a Lie bracket and the next two identities hold

$$x \cdot [y, z] = [x \cdot y, z] + [y, x \cdot z],$$
$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z + y \cdot (x \cdot z) = [y, x] \cdot z.$$

Moreover, one may define a new Lie product on the space L as follows: $[[x, y]] = x \cdot y - y \cdot x + [x, y]$.

There are series of works (mainly written by D. Burde and his coauthors, see the survey [1]) devoted to the study of properties of both Lie products $[,]$ and $[[,]]$ which apear in a postLie algebra, e.g., when one of them is abelian/nilpotent/solvable/ perfect/reductive/ (semi)simple, it is true that the other is so?

A set G with two binary operations $\cdot$ and $\circ$ is called a (skew) brace [3], if $(G, \cdot)$ and $(G, \circ)$ are groups and the identity

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c)$$

holds for all $a, b, c \in G$.

A notion of a brace is equivalent to the following notions appeared in different contexts: Hopf—Galois structure, regular subgroup of the holomorph, and postgroup.

N.P. Byott, C. Tsang (see, e.g. [4]), and others study (finite) braces when it is supposed that one of the groups $(G, \cdot)$ and $(G, \circ)$ is abelian/nilpotent/solvable/(semi)simple/almost simple.

We will discuss similarity of connections between properties of both Lie products on a given finite-dimensional postLie algebra and properties of both group products on a given finite brace.

References

[1] Burde D., Crystallographic actions on Lie groups and post-Lie algebra structures, Commun. Math. **29** (2021), pp.67–89.

[2] Burde D., Dekimpe K., Vercammen K., Affine actions on Lie groups and post-Lie algebra structures, Linear Algebra Appl. **437**:5 (2012), pp.1250–1263.

[3] Guarnieri L., Vendramin L., Skew braces and the Yang-Baxter equation, Math. Comp. **86** (2017), pp.2519–2534.

[4] Tsang C., Hopf-Galois structures of isomorphic-type on a non-abelian characteristically simple extension, Proc. Am. Math. Soc. **147**:12 (2019), pp.5093–5103.

[5] Vallette B., Homology of generalized partition posets, J. Pure Appl. Algebra **208**:2 (2007), pp.699–725.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vsevolodgu@math.nsc.ru

Linear-in-degree monomial Rota – Baxter of weight zero and averaging operators on $F[x, y]$ and $F_0[x, y]$

A. F. Khodzitskii

Given an algebra A over a field F, a linear operator R on A is called a Rota—Baxter operator, if the following relation

$$R(a)R(b) = R\big(R(a)b + aR(b) + \lambda ab\big)$$

holds for all $a, b \in A$. Here $\lambda \in F$ is a fixed scalar called a weight of R. Rota—Baxter operator is an algebraic generalization of the integral operator.

Let A be an algebra over a field F, then a linear operator T on A is called averaging operator, if the relations $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$ hold for all $a, b \in A$.

Denote by $F_0[x, y]$ the ideal in $F[x, y]$ generated by the set $\{x, y\}$. Let M be one of the algebras $F[x, y]$, $F_0[x, y]$. A linear operator L on M is called monomial, if $L(t) = \alpha_t z$ for any $t \in M$ and some $z \in M$, $\alpha_t \in F$. Monomial Rota—Baxter operators on $F[x]$ appeared in [**1**], and such operators on $F[x]$ were described in [**2**].

In [**3**], a class of Rota—Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ constructed by homomorphic averaging operators was described. In [**4**], various classes of monomial Rota—Baxter of weight zero and averaging operators on $F[x, y]$ and $F_0[x, y]$ were described. Moreover, we studied relationship between monomial averaging and Rota—Baxter operators of weight zero on polynomial algebras.

We continue these both studies by formulating the following problem: find all monomial Rota—Baxter operators R of weight zero on $F[x, y]$ ($F_0[x, y]$) having the form

$$R(x^n y^m) = \gamma_{n,m} T(x^n y^m), \quad \gamma_{n,m} \in F,$$

where T is a linear-in-degree averaging operator defined by the formula

$$T(x^n y^m) = \alpha_{n,m} x^{\alpha n + \beta m + \gamma} y^{pn + qm + c}$$

for some $\alpha, \beta, \gamma, p, q, c \in \mathbb{N}$ and $\alpha_{n,m} \in F$. We classify all such monomial averaging operators on $F_0[x, y]$ ($F[x, y]$) and completely solve the problem.

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation https://rscf.ru/project/23-71-10005/.

References

[1] Guo L., Rosenkranz M., Zheng S.H. Rota-Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) **275** (2015) pp.481–507.

[2] Yu H. Classification of monomial Rota-Baxter operators on $k[x]$. J. Algebra Appl. **15** (2016), 1650087, p.16.

[3] Khodzitskii A. Monomial Rota-Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators, Mediterr. J. Math. **20** (2023), article number:251.

[4] Khodzitskii A. Monomial Rota-Baxter operators of weight zero and averaging operators on the polynomial algebra (2024), arXiv:2412.18236, p.25.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.khodzitskii@g.nsu.ru

On finite associative rings with the compressed zero-divisor graphs of small orders

A. S. Monastyreva

For any associative ring R and any element $a \in R$, denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}$, $r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. $D(R)$ denotes the set of all (one-sided and two-sided) zero-divisors of R. Also, $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is an equivalence relation. We denote by $[x]$ the equivalence class of an element $x \in D(R)$.

Denote by $\Gamma_\sim(R)$ the graph whose set of vertices is $\{[x];\ x \in D(R)^*\}$ and two vertices $[x]$ and $[y]$ (not necessarily distinct) are joined by an edge (or a loop) if and only if $xy = 0$ or $yx = 0$. We refer to $\Gamma_\sim(R)$ as *the compressed zero-divisor graph* of R [**1**].

In [**1**], it was proved that all vertices in $\Gamma_\sim(R)$ fall into two types. Really, let R be an associative ring (maybe, R is infinite) and $x \in D(R)^*$. If $x^2 = 0$ then $yz = 0$ or $zy = 0$ for all $y, z \in [x]$. If $x^2 \neq 0$ then $yz \neq 0$ and $zy \neq 0$ for all $y, z \in [x]$. So, if $x^2 = 0$ then $[x]$ is a vertex with a loop; if $x^2 \neq 0$ then $[x]$ is a vertex without any loop.

In [**1, 2**], we found the graphs containing at most four vertices that can be realized as the compressed zero-divisor graphs of some finite associative ring. In this paper, we study properties and structure of such finite associative rings that its compressed zero-divisor graphs have no more than four vertices.

The research was funded by the Russian Science Foundation `https://rscf.ru/project/24-21-00155/)`.

References

[1] Zhuravlev E.V., Monastyreva A.S., Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings, Sib. Math. J., **61(1)** (2020), pp.76–84.

[2] Monastyreva A.S., The Compressed Zero-divisor Graphs of Order 4, J. Alg. Appl., **21(9)** (2022), 2250179.

Altai State University, Barnaul (Russia)
E-mail: `akuzmina1@yandex.ru`

Varieties of nilpotent of class two diassociative loops of exponent 4

M. Rasskazova

Let L be a diassociative loop from the variety $\mathbf{D_4}$. It means that L has a central subgroup $C(L)$, which is elementary abelian $2-$ group such that $L/C(L)$ is elementary abelian $2-$ group too. Moreover, every two elements of L generate a subgroup of L.

Let F_n be a free $n-$generated loop from $\mathbf{D}_4$. We define below some subspaces in $Z_n = C(F_{\mathbf{D}_4}(n))$ and prove that for every of those subspaces $V \subseteq Z_n$ we have a subvariety $\mathbf{D_4}(V)$ such that F_n/V is the free $n-$generated loop of the variety $\mathbf{D_4}(V)$.

Definition. Let

(i) $A_n = A = Ass(F_n) = (F_n, F_n, F_n)$,

(ii) $K_n = K = [F_n, F_n]$,

(iii) $AK = A_n + K_n$,

(iv) $Q_n = Q = F_n^2 = \{x^2 | x \in F_n\}$,

(v) $W_n = W = A_n \cap K_n$,

(vi) $M_n = Mouf(F_n) \subseteq A_n$, where $Mouf(F_n) = \{\ ((xy)(zx))(x(yz)x)^{-1} \mid x, y, z \in F_n\ \}$,

(vii) $T_n = Q_n \cap M_n$.

We have the following diagram of inclusions.

$$\begin{array}{ccccccc} M_n & \to & A_n & \to & AK_n & \to & Z_n, \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ T_n & \to & W_n & \to & K_n & \to & Q_n. \end{array} \qquad \text{(Di)}$$

Finally, we calculate the dimensions of all defined above subspaces of Z_n and prove that for $n = 2, 3$ does not exists other subvariety of $\mathbf{D_4}$.

All those result was obtained in collaboration with A.Grishkov (Brazil), L.Sabinina (Mexico) and A.Zavarnitsin. (Russia)

University of ABC (Brazil)

Generalized derivations of infinite-dimensional Lie algebras

Z. Kh. Shermatova

The concept of reverse derivations, regarded as a special case of Jordan derivations, was first introduced by Herstein (1957) [**3**]. In the anticommutative case, reverse derivations coincide with antiderivations, which were extensively studied by Filippov [**1**]. In particular, he proved that any prime Lie algebra admitting a nonzero antiderivation satisfies the standard identity of degree 5. Later, Filippov extended this idea by introducing δ-derivations [**1**], which have since been widely studied for various classes of algebras. Subsequently, Leger and Luks (2000) further generalized this concept, introducing the notion of generalized derivations [**4**].

Definition. *Let $f : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ be a linear map. If there exist linear maps $f', f'' : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ such that*

$$[f(x), y] + [x, f'(y)] = f''([x, y]),$$

then f is called a generalized derivation. If $f = f'$, then f is called a quasi-derivation. If $f = f' = \delta f''$, then f'' is called a δ-derivation.

By $\mathrm{G}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L})$ we denote the set of all generalized derivations of $\mathfrak{L}$; by $\mathrm{Q}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L})$ the set of all quasi-derivations; by $\mathfrak{Der}_\delta(\mathfrak{L})$ the set of all δ-derivations for a fixed δ; and by $\mathfrak{Der}_{[\delta]}(\mathfrak{L})$ the set of all δ-derivations for all $\delta \in \mathbb{C}$. Obviously, $\mathrm{Q}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L})$ and $\mathrm{G}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L})$ are Lie subalgebras of $\mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ such that

$$\mathfrak{Der}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{Der}_{[\delta]}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Q}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{G}\mathfrak{Der}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}).$$

The Witt algebra and its central extension, the Virasoro algebra, are among the most important examples of infinite-dimensional Lie algebras. The Witt algebra serves as a fundamental building block in the construction of many algebraic structures and continues to attract considerable attention in pure algebra.

Definition. *The Witt algebra* W *is the algebra with basis $\{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ and multiplication defined by $[L_i, L_j] = (i - j)L_{i+j}$.*

In this work, we compute the generalized derivations of the Witt algebra.

Theorem. $\mathrm{G}\mathfrak{Der}(\mathrm{W}) = \mathfrak{Der}(\mathrm{W}) \oplus \mathfrak{Der}_{\frac{1}{2}}(\mathrm{W})$.

References

[1] Filippov, V. *On Lie algebras that satisfy an identity of degree* 5, *Algebra and Logic*, **34** (1995), no.6, pp.379–394.

[2] Filippov, V. *On δ-derivations of Lie algebras*, *Siberian Mathematical Journal*, **39** (1998), no.6, pp.1218–1230.

[3] Herstein, I. N. *Jordan derivations of prime rings*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8** (1957), pp.1104–1110.

[4] Leger, G., and Luks, E. *Generalized derivations of Lie algebras*, *Journal of Algebra*, **228** (2000), no.1, pp.165–203.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Academy of Science of Uzbekistan (Tashkent)
E-mail: zarina_shermatova91@mail.ru

Structural properties of nvolutive algebras

K. M. Tulenbaev

In this article we started to study Involutive algebras. We found the multilinear parts of Involutive algebras. Involutive algebras were appeared in work [**1**].

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field of characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, defines multiplication. An algebra $(A, \circ)$ is called *Involutive*, if

$$(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = -a_3 \circ (a_2 \circ a_1),$$

for all $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Theorem 1. Let A be Involutive algebra then multilinear parts are $P(3) = 8, P(4) = 30, P(5) = 210, P(6) = 1890$.

The author is grateful to grant BR28713025 MES RK.

References

[1] Kupershmidt B.A., *Phase Spaces of Algebras*, University of Tennessee, Knoxville, 2010.

Institute Of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: tulen75@hotmail.com

VII. Секция «Теория моделей»

О рангах эквациональности для теорий двух одноместных функций

А. В. Васенёва

В работе исследуется ранг эквациональности для теорий в сигнатурах, содержащих две одноместные функции. Показано, что в отличие от случая одной функции, где ранг тождественно равен нулю, для двух функций ранг эквациональности может принимать любое натуральное значение.

Определение [1]. *Рангом эквациональности* $\mathrm{ER}(\varphi(\bar{x},\bar{y}))$ формулы $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ (относительно модели M) называется минимальная длина вложенных цепей пересечений $\bigcap\limits_i \varphi(M,\bar{a}_i)$, в которые входит $\varphi(M,\bar{a})$, дающих максимальное пересечение, при этом каждое следующее пересечение в цепи получается добавлением копии $\varphi(M,\bar{a}_j)$ для некоторого j, не уменьшающей общее пересечение.

Напомним [2, 3, 4], что формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ называется *нормальной для переменных* $\bar{u}$ (относительно теории T), если для любых модели M теории T и кортежей $\bar{a},\bar{b}$ из M той же длины, что и $\bar{y}$, условие $\varphi(M,\bar{a})\cap\varphi(M,\bar{b})\neq\varnothing$ влечёт $\varphi(M,\bar{a})=\varphi(M,\bar{b})$. Формула φ теории T называется *нормальной*, если φ нормальна относительно любого разбиения ее множества свободных переменных на две части. Теория T называется *нормальной*, если любая формула теории T эквивалентна в T некоторой булевой комбинации нормальных формул. По определению любая нормальная формула $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ имеет наименьшее значение ранга эквациональности: $\mathrm{ER}(\varphi(\bar{x},\bar{y}))=0$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две одноместные функции. Определим формулу $\varphi(x,y,z)$ следующим образом: $\varphi(x,y,z)=(f(x)=y)\wedge(g(x)=z)$.

Случай одной функции: Для формулы $\psi(x,y)=(f(x)=y)$ ранг эквациональности тождественно равен 0, так как для любых параметров $a\neq b$ множества $\{x:f(x)=a\}$ и $\{x:f(x)=b\}$ не пересекаются (нормальность теории).

Случай двух функций: ситуация принципиально меняется. Формула $\varphi(x,y,z)$ в общем случае уже не является нормальной, и её ранг эквациональности может принимать произвольные натуральные значения.

Теорема. *Для любого натурального $n\geq 0$ существует структура M_n такая, что для формулы $\varphi(x;y,z)=(f(x)=y)\wedge(g(x)=z)$ выполняется $\mathrm{ER}(\varphi)=n$.*

Литература

[1] Васенёва А. В. Ранги эквациональности семейств формул (Equational ranks for families of formulae) // Model Theory and Algebra 2024. Novosibirsk: NSTU Publiser, 2024. pp.189–192.

[2] Палютин Е.А. Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика. 1980. Т.19, № 5. с.582–614.

[3] Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol.89, No.4. pp.666–672.

[4] Белеградек О. В. Теория моделей локально свободных алгебр // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сибирское отделение.–1988.—Т.8: Теория моделей и ее применения.—с.3-25.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.v.vaseneva@gmail.com

О характеризации dp-c-минимальных теорий

В. В. Вербовский

Будем рассматривать линейно упорядоченные структуры M и их элементарные теории. Назовем формулу $\varphi(x, \bar{y})$ *выпуклой*, если для любого кортежа $\bar{a}$ множество $\varphi(M, \bar{a})$ выпукло.

Определение. Будем говорить, что зависимая теория *dp-c-минимальна*, если не существует inp-паттерна глубины 2, где одна из формул выпукла.

Определение. Пусть T — теория языка L, пусть Δ — множество L-формул вида $\varphi(x; \bar{y})$, и пусть $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T.

Пусть теория T стабильна относительно Δ. Пусть $s \in S_\Delta(M)$. Для (частичного) типа $p(x)$ над малым подмножеством $A \subseteq \mathbb{M}$ s-U-ранг определяется по ординальной рекурсии:

- Базисный случай: $s\text{-U}(p) \geq 0 \Leftrightarrow p \cup s$ согласовано.
- Непредельный случай: для непредельного ординала α, $s\text{-U}(p) \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow$ существуют $B \succ A$ и $q \in S(B)$ такие, что q расширяет p, $q \cup s$ согласовано, q ветвится над A, и $s\text{-U}(q) \geq \alpha$.
- Предельный случай: для предельного ординала λ $s\text{-U}(p) \geq \lambda \Leftrightarrow s\text{-U}(p) \geq \beta$ для любого $\beta < \lambda$.

s-U-ранг типа p определяется как $s\text{-U}(p) = \sup\{\alpha : s\text{-U}(p) \geq \alpha\}$.

Δ-$\mathcal{M}$-U-ранг типа p в модели $\mathcal{M}$ определяется как $\sup\{s\text{-U}(p) : s \in S_\Delta(M)\}$.

Δ-U-ранг типа p определяется как $\sup\{\Delta\text{-}\mathcal{M}\text{-U}(p) : \mathcal{M} \models T\}$.

Если Δ состоит из формул $x < y$ и $z < x$ (а рассматриваемая теория содержит аксиомы, утверждающие, что $<$ — линейный порядок), то Δ-U-ранг называется U-o-рангом.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны для элементарной теории T упорядоченной структуры:*

(1) *T является dp-c-минимальной;*

(2) *для любой формулы $\varphi(x; \bar{y})$ существует натуральное число n_φ такое, что для любого сечения s в любой модели $\mathcal{M} \models T$ количество φ-типов, согласованных с s, не превышает n_φ;*

(3) *T является o-стабильной, и каждый полный 1-тип над моделью теории T имеет U-o-ранг 1.*

Вопрос. Являются ли dp-c-минимальные теории dp-минимальными?

Исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP23484665).

Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)
E-mail: viktor.verboskiy@gmail.com

Применения полумодельных расстояний, вопросы теории моделей и новые кластеризации многозначных логических высказываний с использованием полумоделей

А. А. Викентьев

Сходство экспертных высказываний так и их различие имеет фундаментальное значение в машинном обучении. В настоящее время достаточно хорошо развиты теория и методы машинного обучения на основе эмпирических данных и другие в этом русле. Наряду с анализом данных, существует потребность в анализе знаний высказываний экспертов. Это необходимо для распознавания высказываний экспертов, ускорения поиска высказываний, наиболее подходящих конкретной решаемой задаче. Упорядочение знаний экспертов по степени близости дает возможность ранжировать их источники (экспертов, интернет-пользователей и т.д.) по похожести. В качестве примеров приложений разрабатываемых методов можно привести медицинские экспертные системы, рекомендательные системы по поиску телефильмов, выбору туристических маршрутов, кластеризации различных высказываний и распознавание новых высказываний по полученным кластеризациям.

Доклад также посвящен *обобщению и уточнению результата Мустафина-Лахлана с формулы на богатые множества формул(типов)*, доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[2]

Будут сформулированы несколько достаточных условий на теорию, влекущих бесконечное число счетных моделей. Продолжено изучение двукардинальных моделей и их автоморфизмов в классе теорий с покрытиями и его обобщения. Все это служит для введения новых расстояний на классах эквивалентных формул и типов на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий, а также новых кластеризаций многозначных логических формул–знаний, например, логики Лукасевича с привлечением многозначных полумоделей моделей. Найдены новые кластеризации по метрикам для множеств формул различных других логик, изучены различных индексы качества кластеризаций для сравнений и введения коллективных метрик.

Проведены модельные эксперименты с помощью программы, поддерживающей все нужные алгоритмы для получение кластеризаций. Коллективные расстояния имеют более высокие индексы кластеризаций по сравнению с другими метриками. Разработаны способы использование лучших кластеризаций для локальной структуризации баз знаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания ИМ СОРАН 2024-25 гг, кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: vikent@math.nsc.ru

[2]Некоторые из них вошли в диссертацию автора «Теории с покрытием и формульные подмножества», ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., с.134 для семейств формул модели с $\varkappa$–компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми эквивалентными моделями со свойством $\varkappa$–отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов вложенной модели и наличием реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых,сильных, вычислимых(стабильных) типов или неразличимых элементов.

О сечениях некоторых полей формальных степенных рядов

Н. Ю. Галанова

Начиная с работ Дедекинда, Хана, Артина и Шрайера, Маклейна, Капланского и др. рассматриваются подходы к классификации линейно упорядоченных полей. Одно из направлений – теория сечений. Сечением л. у. поля F называется пара его непустых подмножеств A, B таких, что $A < B$ и $A \cup B = F$. Свойства сечений (симметричность, алгебраичность, фундаментальность, конфинальность и др.) сохраняются при изоморфизме(автоморфизме) [**1**].

Теорема 1. *Пусть F – л. у. поле, $\overline{F}$ его вещественное замыкание. Пусть группы архимедовых классов G_F и $G_{\overline{F}}$ – изоморфны. Тогда F вкладывается в поле формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$ так, что $F \subset \overline{F} \subset \mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]]$ и, сечение поля F является симметричным iff оно производится некоторым рядом из $\mathbb{R}[[G_{\overline{F}}]] \setminus F$.*

Пусть как в [**2**], α – ординал, $L = \{\xi_i\}_{i\in\alpha}$ – множество, подобное α, $G = \{g = \prod\limits_{j=1}^{n} \xi_{i_j}^{q_{i_j}}, n \in \mathbb{N}, \xi_{i_j} \in L, q_{i_j} \in \mathbb{Q}\}$ – л. у. абелева делимая группа по умножению с лексикографическим порядком, продолжающим порядок, заданный на L; обозначим $l(g) = \{\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_n}\}$;

$\mathbb{R}[[G]]$ – поле рядов Хана $u = \sum\limits_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}$, $supp(u) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ – инверсно вполне упорядоченное подмножество G; $K = qf\mathbb{R}[[G, \aleph_0]]$.

Определим $K^{finl} = \{x \in \mathbb{R}[[G]] \mid card(\bigcup\limits_{g\in supp(x)} l(g)) < \infty\}$. Пусть H_1 – наименьшие по включению подполе $\mathbb{R}[[G]]$, содержащие K^{finl} и все усечения ряда $x_{\omega_1} = \sum\limits_{i\in\alpha} \xi_i^{-1}$.

Теорема 2. *K^{finl} – поле Райнера (Rayner field, см. [**3**]) такое, что $K \subsetneq \overline{K} \subsetneq K^{finl} \subsetneq \mathbb{R}[[G;\aleph_1]] \subsetneq \mathbb{R}[[G]]$; при этом, ряды из $\mathbb{R}[[G]] \setminus K^{finl}$ порождают в полях K, $\overline{K}$ и K^{finl} симметричные неалгебраические сечения; ряды из $\overline{H_1(x_{\omega_1})} \setminus H_1$ порождают в H_1 симметричные неалгебраические сечения типа $(\aleph_1, \aleph_1)$.*

Вопросы: будут ли поля $H_1, \mathbb{R}[[G;\aleph_1]]$ упорядоченно изоморфны? Существует ли поле Хана с симметричными сечениями различной конфинальности?

Литература

[1] Пестов Г.Г. К теории упорядоченных полей и групп: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск 2003.

[2] Галанова Н.Ю. Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 83 (2023), с.5-16 doi:10.17223/19988621/83/1

[3] L.S.Krapp, S.Kuhlmann, M.Serra. Generalised power series determined by linear recurrence relations. Journal of Algebra. 681 (2025), pp.152-189 https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.05.012

ТГУ, Томск (Россия)
E-mail: galanova@math.tsu.ru

Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий сильных и лексикографических произведений графов-звезд

Д. Ю. Емельянов

В данном исследовании продолжается анализ алгебр распределений бинарных изолирующих формул [2], где рассматриваются соответствующие алгебры для теорий сильных и лексикографических произведений звезд-графов.

Определение. *Сильное произведение $G \boxtimes H$ графов G и H является таким графом, что множество вершин $G \boxtimes H$ является декартовым произведением $V(G) \times V(H)$; и различные вершины (u, u') и (v, v') смежны в $G \boxtimes H$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и u' примыкает к v', или $u' = v'$ и u примыкает к v, или u примыкает к v, а u' примыкает к v'.*

Определение. *Лексикографическое произведение $G \cdot H$ графов G и H — это граф, такой, что множество вершин графа $G \cdot H$ есть $V(G) \times V(H)$; любые две вершины (u, v) и (x, y) смежны в $G \cdot H$ тогда и только тогда, когда либо u смежна x в G, либо $u = x$ и v смежна y в H.*

Описаны алгебры и получены графы для теорий сильных и лексикографических произведений звезд-графов между собой до сотых порядков. Для данных теорий приводятся таблицы Кэли, получена алгебра $\mathfrak{S}$, описывающая произведения графов звезд между собой. Замечено, что данные теории пораждают изоморфные алгебры при равных диаметрах графов.

Алгебру для теорий сильных и лексикографических произведений графов-звезд обозначим через $\mathfrak{S}$. Она будет иметь метки $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваться следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Теорема. *Если $\mathfrak{B}$—алгебра для теории сильных и лексикографических произведений графов-звезд между собой, то она будет задаваться алгеброй $\mathfrak{S}$, которая изоморфна алгебре симплексов.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева, проект № FWNF-2022-0012.

Литература

[1] *Graph symmetry: algebraic methods and applications*, eds. Hahn G., Sabidussi G.,Springer, 1997, vol.497, p.418.

[2] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2023. с. 330. doi: 10.17212/978-5-7782-5028-4

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Об аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановочных полигонов над вполне упорядоченным моноидом

Е. Л. Ефремов

Конгруэнцией алгебраической структуры называется эквивалентность, сохраняющая операции и предикаты, определённые в этой структуре. Умножение конгруэнций в общем случае не является коммутативной операцией. Алгебраические структуры, для которых умножение конгруэнций коммутативно, называются *конгруэнц-перестановочными.*

Пусть S—моноид с единицей 1. (Левым) *полигоном над* S называется алгебра ${}_SA$ сигнатуры $\Sigma = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$, состоящей из одноместных операций, причём

- $s(ta) = (st)a$ для всех $a \in A$, $s, t \in S$,
- $1a = a$ для всех $a \in A$.

Если существует $a \in A$ такой, что ${}_SA = {}_SSa$, то полигон ${}_SA$ называется *циклическим.* Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если он не представим в виде объединения двух непересекающихся подполигонов.

Строение конгруэнц-перестановочных унаров изучено в [**1**]. В [**2**] приводится описание аксиоматизируемых классов конгруэнц-перестановочных унаров. В настоящей работе продолжается изучение вопроса аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановочных полигонов.

Теорема 1. *Пусть S—коммутативный вполне упорядоченный моноид, ${}_SA$— связный конгруэнц-перестановочный полигон. Тогда ${}_SA$ имеет наименьший относительно включения циклических подполигонов.*

Класс $\mathcal{K}$ алгебраических структур сигнатуры Σ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество Γ предложений сигнатуры Σ, что

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \vDash \Gamma.$$

Теорема 2. *Пусть S—коммутативный вполне упорядоченный моноид, $\mathcal{K}$ — аксиоматизируемый класс конгруэнц-перестановочных полигонов над S. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любого ${}_SA \in \mathcal{K}$*

$$|\{{}_SSa \mid a \in A\}| \leqslant n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025г.).

Литература

[1] Ефремов Е.Л., Шамич Н.И. Строение связных конгруэнц-перестановочных унаров // Вычислительные технологии и прикладная математика: Материалы III научной конференции с международным участием (7-11 октября 2024 г., Комсомольск-на-Амуре)—Комсмольск-на-Амуре: Изд.-во Комсомольского-на-Амуре гос. университета, 2024, с.162.

[2] Ефремов Е.Л., Обидова Ш.К. Аксиоматизируемость класса конгруэнц-перестановочных унаров // Синтаксис и семантика логических систем: материалы 8-й Всероссийской конференции, посвященной памяти И. К. Шаранхаева.—Иркутск: Издательство ИГУ, 2024, с.36.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)
E-mail: efremov-el@mail.ru

О строении конечных полугрупп, над которыми класс подпрямо неразложимых полигонов аксиоматизируем

И. Б. Кожухов

Решётку конгруэнций универсальной алгебры A обозначим Con$A$. Хорошо известно, что Con$A$—полная решётка с наименьшим элементом $\Delta = \{(a,a)|a \in A\}$ и наибольшим элементом $\nabla = A \times A$.

Алгебра A называется подпрямо неразложимой, если она не разлагается в нетривиальное подпрямое произведение нетривиальных алгебр. Интерес к таким алгебрам объясняется известной теоремой Биркгофа (см. [**1**, теорема 7.3]), утверждающей, что всякая универсальная алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Нетрудно видеть, что для нетривиальной алгебры A условие её подпрямой неразложимости равносильно наличию наименьшей нетривиальной (т.е. отличной от Δ) конгруэнции.

Вопросам аксиоматизируемости класса подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами посвящён ряд работ. Рассмотрим следующие условия на полугруппу S:

(A) все подпрямо неразложимые полигоны над S конечны и их порядки ограничены в совокупности;

(B) класс подпрямо неразложимых полигонов над S аксиоматизируем.

В работе [**2**] исследовались коммутативные моноиды S, удовлетворяющие условию (B). Там было доказано, что для таких моноидов имеет место импликация $(B) \Rightarrow (A)$. В работе [**3**] было доказано, что условие (A) на полугруппу S влечёт выполнение в ней тождества вида $a^{r+m} = a^r$. Наконец, в работе [**4**] была доказана конечгность групп, удовлетворяющих условию (B). Автор предполагает, что коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условию (B), является полурешёткой полугрупп вида $T = A \cup G$, где G – конечная группа, являющаяся идеалом полугоруппы T и удовлетворяющая тождеству $a^m = 1$.

Литература

[1] Кон П. Универсальная алгебра. М., Мир, 1968,—с.353.

[2] Степанова А. А., Ефремов Е. Л. Аксиоматизируемость класса подпрямо неразложимых полигонов над коммутативным моноидом. Алгебра и логика, 62:2 (2023), —с.266–296.

[3] Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами. Матем. заметки СВФУ, 2014, т.21, № 3 (83),—с.60-67.

[4] Кожухов И.Б., Храмченок Д.С. Об аксиоматизируемости класса подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами. В сб. Algebra and Model Theory, изд-во НГТУ, Новосибирск, 2024, т.15,—с.32-41.

НИУ МИЭТ, МГУ, РАНХиГС, Москва (Россия)
E-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Наследование типов предгеометрий в булевых алгебрах структур

С. Б. Малышев

В работе исследуются предгеометрии с алгебраическим оператором замыкания на семействе регулярных обогащений и ограничений предикатных структур, образующих булеву алгебру $\mathcal{B}(M)$. Основное внимание уделено наследованию типов предгеометрий при операциях объединения структур.

Операции, определённые в булевой алгебре $\mathcal{B}(M)$, имеют следующий вид:

- **Пересечение структур.** Для структур $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ их пересечение $M_1 \cap M_2$ определяется как структура с сигнатурой $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, где Σ_i — сигнатура структуры M_i. Предикат сохраняется в пересечении, если он присутствует в обеих структурах и имеет одинаковую интерпретацию.
- **Объединение структур.** Для $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ объединение $M_1 \cup M_2$ есть структура с сигнатурой $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Каждый предикат в объединённой структуре берётся из той из исходных структур, где он определён; если предикат входит в обе сигнатуры, то предполагается, что его интерпретация совпадает.
- **Дополнение.** Для подмножества $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ операция дополнения структуры по Σ_0 состоит в удалении всех предикатов, чьи символы принадлежат множеству Σ_0.

Теорема. *Пусть $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ — локально конечные структуры. Если для любого конечного множества $A \subseteq M$ выполняется неравенство:*

$$\dim_{M_1 \cup M_2}(A) \leq \dim_{M_1}(A) + \dim_{M_2}(A),$$

то объединение $M_1 \cup M_2$ является локально конечной предгеометрией.

Исследование вносит вклад в понимание того, как геометрические свойства моделей взаимодействуют с операциями над структурами в рамках булевых алгебр предикатных расширений и ограничений.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

Гибриды голографичных йонсоновских теорий

Н. М. Мусина, И. О. Тунгушбаева, А. Р. Ешкеев

Пусть L – счетный язык первого порядка сигнатуры σ, σ – конечная предиктная сигнатура, T – йонсоновская L-теория, C_T – семантическая модель теории T.

Дадим определение гибрида йонсоновских теорий и голографичной йонсоновской теории.

Определение 1 [1]. Пусть T_1, T_2 – йонсоновские теории рассматриваемого языка, C_1, C_2 - их семантические модели, соответственно. Гибридом $H(T_1, T_2)$ первого рода называется теория $Th_{\forall\exists}(C_1 \diamond C_2)$, если она йонсоновская. Здесь $\diamond \in \{\times, \oplus, \}$, где $\times$ обозначает декартовое произведение, $\oplus$ – прямую сумму.

Определение 2. Йонсоновская теория T называется голографичной, если $S_n^J(T)$ конечно, где $n = \parallel \sigma \parallel$ и $S_n^J(T)$ есть множество всех полных $\forall\exists$-типов от n свободных переменных.

Определения 1 и 2 принадлежит профессору Ешкееву А.Р.

Теорема. Пусть σ – предикатная конечная сигнатура, и пусть T_1, T_2 – голографичные йонсоновские теории в сигнатуре σ. Тогда существует гибрид $H(T_1, T_2)$, который также является голографичной йонсоновской теорией. Более того, если T_1 и T_2 – совершенные йонсоновские теории, то и гибрид $H(T_1, T_2)$ является совершенной голографичной йонсоновской теорией.

Замечание. В качестве операции объединения моделей при построении гибрида берётся только декартово произведение:

$$H(T_1, T_2) = Th_{\forall\exists}(C_{T_1} \times C_{T_2}),$$

где C_{T_1} и C_{T_2} — семантические модели теорий T_1 и T_2 соответственно.

Все понятия, которые здесь не определены, можно извлечь из [1,2].

Исследование профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP23489523).

Литература

[1] YeshkeyevA.R. Similarities of Hybrids from Jonsson Spectrum and S-Acts / A.R.Yeshkeyev, Ulbrikht O.I., N. M.Mussina // Lobachevskii Journal of Mathematics,—2023.—No. 44(12).—pp.5502–5518.

[2] Ешкеев А.Р. Теории и их модели: монография: в 2 т.—Караганда: Издательство Карагандинского университета имени академика Е.А. Букетова, 2024.—Т. 1.—с.275.

Карагандинский национальный исследовательский университет им.Е.А.Букетова (Казахстан)
E-mail: nazerke.mussina@bk.ru, intng@mail.ru, aibat.kz@gmail.com

Свойства унарных мультиопераций при представлении двоичными матрицами

Н. А. Перязев

Пусть $B(A)$—множествов всех подмножеств A.Отображение из A в $B(A)$ называется унарной мультиоперацией на A. Используем обозначение $M_A^{(1)}$ для всех таких мультиопераций.

Пусть $S \subseteq M_A^{(1)}$. Алгебра $\mathfrak{F} =< S; *, \cap, \mu, \varepsilon, \theta, \pi >$ с ниже определенными операциями подстановки $(f * g)$, пересечения $(f \cap g)$, обратимости (μf) и нульместными операциями ε, θ, π называется *алгеброй унарных мультиопераций* над A:

$(f * g)(a) = \{b \mid \text{существует } c \in g(a) \text{ такой, что } b \in f(c)\}$;

$(f \cap g)(a) = f(a) \cap g(a)$; $(\mu f)(a) = \{b \mid a \in f(b)\}$;

$\varepsilon(a) = \{a\}$; $\theta(a) = \varnothing$; $\pi(a) = A$.

Мощность множества A называется рангом алгебры. Впервые описание всех минимальных алгебр унарных мультиопераций (УМО) для произвольных конечных рангов получено в [1].

Теорема. *Минимальными алгебрами УМО (и только они) $\langle f \rangle$ являются алгебры, удовлетворяющие одному из следующих условий: 1. $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f = f, f^2 = f$.*

2. $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f = f, f^2 = \pi$.

3. $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f \cap f = \varepsilon, f * \mu f = \mu f * f = \pi, f^2 = f$.

4. $f \cap \varepsilon = \varepsilon, \mu f \cap f = \varepsilon, f * \mu f = \mu f * f = \pi, f^2 = \pi$.

5. $f \cap \varepsilon = \theta, \mu f = f, f^2 = \pi$.

6. $f \cap \varepsilon = \theta, \mu f = f^{p-1}, f^p = \varepsilon$, где p простое число.

7. Существует непустое множество $B \subset A$ такое, что

$f(a) = B$ для всех $a \in A$ или

$f(b) = \{b\}$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \backslash B$ или

$f(b) = A$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \backslash B$ или

$f(b) = B$ для всех $b \in B$ и $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in A \backslash B$.

Хорошо известно представление унарных мультиопераций двоичными матрицами. В докладе будут представлены свойства матриц, соответствующие свойствам, которыми обладают мультиоперации, порождающие минимальные алгебры, а также некоторые следствия.

Литература

[1] Перязев Н.А. Минимальные алгебры унарных мультиопераций // Международная конференция «Мальцевские чтения». Тезисы докл. — Новосибирск, 2015.—с.193.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Иркутский государственный университет (Россия)

E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Степени семантической и синтаксической жесткости инъективных унаров

И. А. Сахаров

В работе изучаются вопросы, связанные с семантической и синтаксической жёсткостью таких структур, как унары. Семантическая жесткость показывает, насколько элементы структуры могут быть связаны между собой автоморфизмами. Синтаксическая жесткость показывает, как добавление в сигнатуру структуры констант влияет на семантическую жесткость этой структуры. Понятия $\forall$-семантической и $\forall$-синтаксической жёсткости структуры $\mathcal{M}$ и их обозначения $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M})$, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M})$ можно найти в [**1**]. Введём обозначение:

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{M}) = \left(deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M})\right)$$

Структура $\mathcal{A} = (A; f)$, где f – унарная операция на A, называется унаром. Классы инъективных, слабо-, квази- и псевдоинъективных унаров обозначим **Inj**, **WInj**, **QInj**, **PInj**, соответственно.

Теорема 1. *1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u \in \mathbf{Inj}$ такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, \infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, u)$. Кроме того, существует унар $\mathcal{C}_{(0,2)} \in \mathbf{Inj}$ такой, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0, 2)$.*

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in \mathbf{Inj}$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, \infty) \mid u \in \omega\} \cup \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, 2)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $K \in \{\mathbf{WInj}, \mathbf{QInj}\}$.*

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u \in K$ такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, \infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, u)$. Кроме того, существуют унары $\mathcal{C}_{(0,1)}, \mathcal{C}_{(0,2)} \in K$ такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,1)}) = (0, 1)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_{(0,2)}) = (0, 2)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in K$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, \infty) \mid u \in \omega\} \cup \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, 1), (0, 2)\}.$$

Теорема 3. *1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, \mathcal{C}_u \in \mathbf{PInj}$ такие, что $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0, u)$.*

2) Для любого унара $\mathcal{A} \in \mathbf{PInj}$

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Литература

[1] Sudoplatov S. V. Variations of Rigidity // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. с. 119–136. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.119

Дальневосточный Федеральный Университет, Владивосток (Россия)
E-mail: sakharov.ial@dvfu.ru

О группах автоморфизмов унарных алгебр

А. А. Степанова, А. С. Морозов, Е. Л. Ефремов

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ называется *унарной*, если её сигнатура Σ состоит только из символов унарных операций. Если $|\Sigma| = 1$, то $\mathfrak{A}$ называется *унаром*. В докладе приводится несколько примеров групп, для которых устанавливается связь с группами автоморфизмов некоторых унарных алгебр.

Пусть $\mathbb{Z}_{2^\infty} = \langle 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \rangle$ — квазициклическая 2-группа, т.е. аддитивная группа с определяющими соотношениями $1 + 1 = 0$,

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

для любого $n \in \omega$.

Теорема 1. *Квазициклическая 2-группа не изоморфна никакой группе автоморфизмов унара.*

Теорема 2. *Квазициклическая 2-группа изоморфна группе автоморфизмов некоторой унарной алгебры.*

Теорема 3. *Любая конечнопорожденная абелева группа изоморфна группе автоморфизмов некоторого унара.*

Работа А.А. Степановой и Е.Л. Ефремова выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025 г.).

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: stepltd@mail.ru

Об аксиоматизируемости классов полигонов и полумодулей

Д. С. Храмченок

Класс универсальных алгебр называется *(конечно) аксиоматизируемым*, если существует (конечная) система аксиом, моделями которой в точности являются элементы данного класса. Универсальная алгебра называется *(конечно) подпрямо неразложимой*, если не существует ее разложения в (конечное) нетривиальное подпрямое произведение других алгебр. В силу теоремы Биркгофа каждая нетривиальная алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Множество X называется полигоном над полугруппой S, если определено отображение $\cdot : X \times S \to X$, такое, что для всех $x \in X$ и $v, w \in S$ выполняется равенство $(xv)w = x(vw)$. Подалгебра B универсальной алгебры A называется *большой* в A (A называется *существенным расширением* B), если любой гомоморфизм $g : A \longrightarrow C$ такой, что $g|_B$ - мономорфизм, сам является мономорфизмом (обозначается $B \subseteq' A$). Полигон X называется *однородным*, если все его нетривиальные подполигоны являются большими в X. Коммутативный по сложению моноид M с нейтральным элементом 0_M называется *полумодулем* над полукольцом S с нулем 0_S, если определено отображение $\cdot : M \times S \to M$, такое, что для всех $m, n \in M$ и $s, t \in S$ выполняется:

1) $m(st) = (ms)t$
2) $(m + n)s = ms + ns$
3) $m(s + t) = ms + mt$
4) $0_M s = m0_S = 0_M$

Теорема 1. Классы подпрямо неразложимых, конечно подпрямо неразложимых и однородных полигонов над конечной полугруппой S являются конечно аксиоматизируемыми. Если S - группа, то ее конечность является не только достаточным, но и необходимым условием для аксиоматизируемости этих классов.

Теорема 2. Класс подпрямо неразложимых правых R-модулей над конечным ассоциативным кольцом R является конечно аксиоматизируемым.

Теорема 3. Мощности полигонов из классов однородных, подпрямо неразложимых и конечно подпрямо неразложимых полигонов над полугруппой S не превосходят $|(S^1)^{S^1}|$. В случае, когда соответствующий класс аксиоматизируем, мощности всех полигонов из этого класса не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. Пусть R—ассоциативное кольцо, X—подпрямо неразложимый правый R-модуль, $m = max\{|R|, \aleph_0\}$. Тогда $|X| \leqslant 2^m$. Если класс подпрямо неразложимых правых R-модулей является аксиоматизируемым, то мощности всех модулей в нем не превосходят некоторого $k \in \mathbb{N}$.

МГУ им. Ломоносова, НИУ МИЭТ,Москва (Россия)
E-mail: dmitrii.khramchenok@math.msu.ru

О глобальной сепарабелбности размытых моделей

Г. Э. Яхъяева

Теория размытых моделей является альтернативным подходом к формализации неточности и/или неполноты знаний по отношению к формализации с помощью нечетких множеств, предложенных Лотфи Заде [**1**]. Данная статья посвящена исследованию и формальному описанию на языке размытых моделей понятия независимости групп объектов предметной области. Наш подход основан на семантическом описании предметной области с помощью размытой модели [**2**].

Рассмотрим размытые модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}, \mathfrak{B}_{\mu_{B_1}}, ..., \mathfrak{B}_{\mu_{B_k}}$ одной сигнатуры σ такие, что $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A} (i = \overline{1,k})$. Модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_1}}, ..., \mathfrak{B}_{\mu_{B_k}}$ будем называть **взаимно независимыми** подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, если для любых положительных конъюнктов $\varphi_i \in S_p(\sigma_{B_i})(i = \overline{1,n})$ выполняется условие

$$\mu_A(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{B_i}(\varphi_i).$$

Рассмотрим класс размытых моделей $\{\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}\}_{i\in I}$ сигнатуры σ. Будем говорить, что размытая модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ **раскладывается в сепарабельное объединение** моделей $\{\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}\}_{i\in I}$, и записывать $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i\in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$, если

1) $A = \bigcup_{i\in I} B_i$;

2)для любых $i, j \in I(i \neq j)$ имеем $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \nsubseteq \mathfrak{B}_{\mu_{B_j}}$.

Модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ называется **локально сепарабельной**, если найдется такой класс моделей $\{\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}\}_{i\in I}$, что $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i\in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ и для любых $i, j \in I(i \neq j)$ модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ и $\mathfrak{B}_{\mu_{B_j}}$ взаимно независимы в модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.

Модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ называется **глобально сепарабельной**, если для любого класса моделей $\{\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}\}_{i\in I}$ такого, что $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i\in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ и для любых $i_1, ..., i_k \in I(i_j \neq i_s)$ модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_{i_1}}}, ..., \mathfrak{B}_{\mu_{B_{i_k}}}$ взаимно независимы в модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.

Модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ называется **запутанной**, если она не является локально сепарабельной.

Разложение модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ в сепарабельное объединение $\bigsqcup_{i\in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ называется **нормальным**, если для любого $i \in I$ модель $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ является запутанной.

В работе [**3**] описан критерий существования локальной сепарабельности размытой модели, доказана теорема об единственности нормального разложения локально сепарабельной размытой модели.

В данной работе мы описываем критерий существования глобальной сепарабельности размытой модели, доказываем теорему об единственности нормального разложения глобально сепарабельной размытой модели, приводим алгоритм нахождения нормального разложения для глобально сепарабельной модели.

Литература

[1] Palchunov D., Yakhyaeva G. Fuzzy logics and fuzzy model theory. Algebra and Logic, vol. 54, no. 1, 2015, pp.74–80.

[2] Yakhyaeva G.E. On the Local Coordination of Fuzzy Valuations. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2023, vol. 46, pp. 130–144 DOI: 10.26516/1997-7670.2023.46.130

[3] Яхъяева Г. Э. Взаимная независимость подмоделей размытой модели. Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. (в печати)

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: gul_nara@mail.ru

On algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories: piecewise monotonic case

A. B. Altayeva, B. Sh. Kulpeshov

Algebras of binary isolating formulas [**1, 2**] are a tool for describing relationships between elements of the sets of realizations of a type at the binary level.

The notion of *weak circular minimality* was studied initially in [**3**].

Theorem 1. [**4**] *(piecewise monotonic case) Let M be an $\aleph_0$–categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structure of convexity rank greater than 1, $dcl(\{a\}) = \{a\}$ for some $a \in M$. Suppose that there exists a convex-to-right formula $R(x, y)$ such that $r(y) :=$ rend $R(M, y)$ is piecewise monotonic-to-left on M. Then M is isomorphic up to binarity to $M'_{s,m,k} := \langle M, K^3, E_1^2, E_2^2, \dots, E_s^2, E_{s+1}^2, R^2\rangle$, where M is a circularly ordered structure, M is densely ordered, $s \geq 1$; E_{s+1} is an equivalence relation partitioning M into m infinite convex classes without endpoints; E_i for every $1 \leq i \leq s$ is an equivalence relation partitioning every E_{i+1}-class into infinitely many infinite convex E_i-subclasses without endpoints so that the induced order on E_i-subclasses is dense without endpoints; $R(M, a)$ has no right endpoint in M and $r^k(a) = a$ for all $a \in M$ and some $k \geq 2$, where $r^k(y) := r(r^{k-1}(y))$; for every $1 \leq i \leq s+1$ and any $a \in M$*

$$M'_{s,m,k} \models \neg E_i^*(a, r(a)) \wedge \forall y(E_i(y, a) \to \exists u[E_i^*(u, r(a)) \wedge E_i^*(u, r(y))]),$$

$m \geq 4$, k is even and k divides m; r is monotonic-to-left on every E_{s+1}-class and r is monotonic-to-right on M/E_{s+1}.

Theorem 2. *The algebra $\mathfrak{P}_{M'_{s,4,4}}$ of binary isolating formulas with piecewise monotonic-to-left function r has $8s + 9$ labels, is non-commutative and strictly $(2s + 3)$-deterministic for every $s \geq 1$.*

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No.AP22685890).

References

[1] S.V. Sudoplatov, Classification of countable models of complete theories, Novosibirsk: NSTU, 2018.

[2] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2014, vol.14, pp.380–407.

[3] B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson, Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly, 2005, vol. 51, issue 4, pp.377–399.

[4] B.Sh. Kulpeshov, Definable functions in the $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Siberian Mathematical Journal, 2009, vol. 50, issue 2, pp.282–301.

International Information Technology University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: vip.altayeva@mail.ru, b.kulpeshov@kbtu.kz

On strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width

B. Sh. Kulpeshov, Ye. K. Netaliyeva

In the present lecture, we study strongly minimal partial orderings in the signature containing only the symbol of binary relation for a partial order. We use for partial orderings such characteristics as the height of a structure that is the supremum of lengths of ordered chains, and the width of a structure that is the supremum of lengths of antichains, where an antichain is the set of pairwise incomparable elements. We also differ trivial width and non-trivial width. Recently in [**1**], strongly minimal partial orderings having a finite non-trivial width were described, and in [**2**], strongly minimal partial orderings of height two having an infinite non-trivial width were described.

We say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ has *up-degree* (*down-degree*) m for some $m \in \omega$ if there exist exactly m elements of $\mathcal{M}$ being an immediate successor (predecessor) of a. We say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ has *down-height* n for some $n \in \omega$ if there exist $b_1, b_2, \ldots, b_n \in M$ such that $a > b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ and for any $b_1, b_2, \ldots, b_n \in M$ with $a > b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ the element b_n is minimal in $\mathcal{M}$. Similarly, we can define the notion of *up-height*.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite partial ordering having an infinite non-trivial width. Then $\mathcal{M}$ is strongly minimal iff the following holds:*

(1) $\mathcal{M}$ is a partial ordering of height n for some $2 \le n < \omega$;

(2) $\mathcal{M}$ contains only finitely many connected components, all of them have the height at most n, at least one of them has the height n, and exactly one of them is infinite;

(3) The only infinite connected component is non-trivial, has the height l for some $2 \le l \le n$, and contains an infinite co-finite set A of elements with down-height k_1 and up-height k_2 for some $0 \le k_1, k_2 \le l - 1$; and if the complement of A in the component contains both exactly m_1 elements of infinite up-degree and exactly m_2 elements of infinite down-degree for some $0 \le m_1, m_2 < \omega$ with $m_1 + m_2 \ge 1$ then almost all (except finitely many) elements of A have down-degree m_1 and up-degree m_2.

This research has been funded by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No.AP19674850).

References

[1] B.Sh. Kulpeshov, In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, vol. 45, issue 12, pp. 6515–6525.

[2] B.Sh. Kulpeshov, Ye.K. Netaliyeva, Strongly minimal partial orderings of height two // Herald of the Kazakh-British Technical University, 2025, vol. 22, issue 1, pp. 223–228.

Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan); Nazarbayev University, Astana (Kazakhstan)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, yeldana.netaliyeva@nu.edu.kz

On degrees of rigidity and co-rigidity

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

We continue to study and describe possibilities of degrees $\deg_4(\mathcal{N}) = \big(\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{N}), \deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{N}), \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{N}), \deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{N}) \big)$ of rigidity of a structure $\mathcal{N}$ [1, 2] spreading these characteristics to infinite ordinals and introducing correspondent degrees

$\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = \Big(\deg_{\text{co-rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{N}), \deg_{\text{co-rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{N}), \deg_{\text{co-rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{N}), \deg_{\text{co-rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{N}) \Big)$ of co-rigidity.

For $s \in \{\rm sem, synt\}$ and a cardinality λ we put $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{N}) = \lambda$ if there is a set $A \subseteq N$ such that $|A| = \lambda$, $\mathcal{N}$ is semantically / syntactically A-rigid, for $s = \rm sem$ / $s = \rm synt$, respectively, and there are no sets of less cardinality producing correspondent rigidity. For $s \in \{\rm sem, synt\}$ we put $\deg_{\text{co-rig}}^{\exists\text{-}s}(\mathcal{N}) = \lambda$ if there is a set $A \subseteq N$ such that $|A| = \lambda$, $\mathcal{N}$ is semantically / syntactically $(N \setminus A)$-rigid, for $s = \rm sem$ / $s = \rm synt$, respectively, and there are no sets of greater cardinalities producing the correspondent rigidity.

For $s \in \{\rm sem, synt\}$ we put $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{N}) = \lambda$ if each set $A \subseteq N$ with $|A| \leq \lambda$ is extensible to a set $A' \subseteq N$ with $|A'| = \lambda$ such that $\mathcal{N}$ is semantically / syntactically A'-rigid, for $s = \rm sem$ / $s = \rm synt$, respectively, and this property does not hold for less cardinalities. For $s \in \{\rm sem, synt\}$ we put $\deg_{\text{co-rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{N}) \geq \mu$ if each set $A \subseteq N$ with $|A| \geq \mu$ has a subset A' with $|A'| = \mu$ such that $\mathcal{N}$ is semantically / syntactically $(N \setminus A')$-rigid, for $s = \rm sem$ / $s = \rm synt$, respectively, and there are no sets A' of greater cardinalities producing the correspondent rigidity. If the lower bound always can be increased, then the we put $\deg_{\text{co-rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{N}) = \sup \mu$. Otherwise we take the greatest μ for $\deg_{\text{co-rig}}^{\forall\text{-}s}(\mathcal{N})$.

Theorem. *If $\mathcal{N}$ is a union of $\lambda \geq 2$ copies of a graph Γ, forming disjoint connected components such that $\deg_4(\Gamma) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ and $\deg_4^{\rm co}(\Gamma) = (\mu_1', \mu_2', \mu_3', \mu_4')$, then the following possibilities hold:* 1) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda\mu_1, \lambda\mu_2, (\lambda-1)|\Gamma| + \mu_3, (\lambda-1)|\Gamma| + \mu_4)$ *for finite λ and positive μ_1, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma| - \lambda\mu_1, \lambda|\Gamma| - \lambda\mu_2, |\Gamma| - \mu_3, |\Gamma| - \mu_4) = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$ *for finite Γ and* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$, *otherwise;* 2) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda - 1, \lambda\mu_2, (\lambda - 1)|\Gamma| + \mu_3, (\lambda-1)|\Gamma| + \mu_4)$ *for finite λ, $\mu_1 = 0$ and $\mu_2 > 0$, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma| - \lambda + 1, \lambda|\Gamma| - \lambda\mu_2, |\Gamma| - \mu_3, |\Gamma| - \mu_4) = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$ *for finite Γ and* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma|, \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4') = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$, *otherwise;* 3) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda - 1)|\Gamma| + \mu_3, (\lambda - 1)|\Gamma| + \mu_4)$ *for finite λ and $\mu_2 = 0$, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma| - \lambda + 1, \lambda|\Gamma| - \lambda + 1, |\Gamma| - \mu_3, |\Gamma| - \mu_4) = (\lambda\mu_1' - \lambda + 1, \lambda\mu_2' = \lambda + 1, \mu_3', \mu_4')$ *for finite Γ and* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma|, \lambda|\Gamma|, \mu_3', \mu_4') = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$, *otherwise;* 4) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda\mu_1, \lambda\mu_2, \lambda|\Gamma|, \lambda|\Gamma|)$ *for infinite λ and positive μ_1, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$; 5) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda, \lambda\mu_2, \lambda|\Gamma|, \lambda|\Gamma|)$ *for infinite λ, $\mu_1 = 0$ and $\mu_2 > 0$, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma|, \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4') = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$; 6) $\deg_4(\mathcal{N}) = (\lambda, \lambda, \lambda|\Gamma|, \lambda|\Gamma|)$ *for infinite λ and $\mu_2 = 0$, with* $\deg_4^{\rm co}(\mathcal{N}) = (\lambda|\Gamma|, \lambda|\Gamma|, \mu_3', \mu_4') = (\lambda\mu_1', \lambda\mu_2', \mu_3', \mu_4')$.

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850), and was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No.FWNF-2022-0012.

References

[1] Sudoplatov S.V. Variations of rigidity // Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics.— 2024.— Vol.47.—pp.119–136.

[2] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Variations of rigidity for ordered theories //Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics.—2024.— Vol.48.— pp.129–144.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan); Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

On approximations by stable theories

B. Sh. Kulpeshov, I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov

We continue to study approximations of theories transforming approximations by finite [1], ω-categorical [2], and strongly minimal theories [3] to approximations by stable ones [4].

Recall that accumulation points for the class of theories of finite (respectively, ω-categorical, strongly minimal) structures, outside this class, are called *pseudofinite* (*pseudo-countably-categorical, pseudo-strongly-minimal*). Models of pseudofinite (pseudo-countably categorical, pseudo-strongly-minimal) theories are called *pseudofinite* (*pseudo-countably-categorical, pseudo-strongly-minimal*), too. An elementary theory T of an infinite structure $\mathcal{M}$ which is not stable is said to be *pseudo-stable* if any sentence true in $\mathcal{M}$ has a stable model $\mathcal{N}$. In this case, the models $\mathcal{N}$ are called *approximations* of the model $\mathcal{M}$, and the model $\mathcal{M}$ itself is said to be *pseudo-stable*. We denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the set of all complete theories of a signature Σ. Besides we denote by $\mathcal{T}_{\rm pst}$ the class of pseudo-stable theories.

Theorem 1. *For any signature Σ, $\mathcal{T}_{\rm pst}\cap\mathcal{T}_\Sigma\neq\emptyset$ iff Σ contains at least one predicate symbol of arity ≥ 2, or at least one functional symbol of arity ≥ 2, or al least two unary functional symbols.*

Theorem 2. *For any infinite partial ordering $\mathcal{M}=\langle M,<\rangle$, whose all connected components are chains, the following conditions are equivalent:* 1) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *is pseudo-stable;* 2) $\mathcal{M}$ *consists of infinitely many finite or pseudofinite connected components such that either finite cardinalities of these components are unbounded and there are infinitely many components of some finite cardinality, or some connected component is infinite; here* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *is pseudofinite and pseudo-countably-categorical, and it is pseudo-strongly-minimal iff $\mathcal{M}$ has infinitely many singletons.*

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850), and was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No.FWNF-2022-0012.

References

[1] Väänänen J. Pseudo-finite model theory // Matematica Contemporanea.—2003.— Vol.24.— pp.169–183.
[2] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-countably-categorical formulae and theories // Mathematical Notes.—2025.—Vol. 117, No.3.—pp.442–457.
[3] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics.—2024.—Vol.45, No.12.—pp.6515–6525.
[4] Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models/ S.Shelah.—Amsterdam: North-Holland, 1990.—p.705.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan); Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz,inessa7772@mail.ru,sudoplat@math.nsc.ru

On preservation of properties by Henkin construction

T. E. Rajabov, S. V. Sudoplatov

We continue to study various properties [1, 2] which are preserved under given conditions. These preservations generalize the notion of (p, q)-preserving formula [3, 4, 5] and its variations for correspondent type-definable sets.

Let T_0 be a consistent theory. Following Henkin construction [6, 7, 8] we extend the signature $\Sigma(T_0)$ by new constants and extend the theory T_0 till a complete theory T such that if $\exists y\varphi(y) \in T$ then $\varphi(c) \in T$ for some constant c. A *canonical model* $\mathcal{M}$ of T [8] is represented by all infinite equivalence classes $[t] = \{q \mid (q \approx t) \in T\}$, where terms t, q do not have free variables. Thus the canonical model $\mathcal{M}$ for the theory T, and its restriction $\mathcal{M} \upharpoonright \Sigma(T_0) \models T_0$ are characterized by the following *preserving condition*: a $\Sigma(T_0)$-formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ is ($\forall$-) $\exists$-partially $(\{[c_1]\}, \ldots, \{[c_n]\}, M)$-preserving whenever $\exists x\varphi(c_1, \ldots, c_n, x) \in T$.

Theorem. *For any expansion $\mathcal{M}$ of a model $\mathcal{M}_0$ of a theory T_0 by naming all elements by infinitely many constants the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{M}$ satisfies the preserving condition;*

(2) *$\mathcal{M} \upharpoonright \Sigma(T_0)$ satisfies the preserving condition;*

(3) *$\mathcal{M}$ is a canonical model of a completion of T_0.*

This research was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No.FWNF-2022-0012.

References

[1] Sudoplatov S.V. Formulas and properties, their links and characteristics // Mathematics.—2021.—Vol.9, Issue 12. 1391.—p.16.

[2] Rajabov T.E., Sudoplatov S.V. On kinds of preservations for properties // Traditional international April mathematical conference. Collection of abstracts.—Almaty: IMMM, 2025.—pp.281–282.

[3] Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports.—2012.—Vol.9.—pp.161–184.

[4] Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. Part1.— Novosibirsk: Edition of NSTU, 2018.—p.326.

[5] Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulae.— Novosibirsk : Edition of NSTU, 2023.—p.330.

[6] Henkin L. The completeness of the first-order functional calculus // The Journal of Symbolic Logic.—1949.—Vol.14.—pp.159–166.

[7] Ershov Yu.L., Palyutin E.A. Mathematical Logic. — Moscow : Fizmatlit, 2011.—p.356.

[8] Hodges W. Model theory.—Cambridge: Cambridge University Press, 1993.—p.772.

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: temurboy264@gmail.com,sudoplat@math.nsc.ru

Stability of the theory of pseudofinite acts over monoids

A. A. Stepanova, E. L. Efremov, S. G. Chekanov

Let S be a monoid with identity 1. A structure $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ of the language $L_S = \{s \mid s \in S\}$ consisting of unary operation symbols is *a (left) S-act* if $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ and $1a = a$ for all $s_1, s_2 \in S$ and $a \in A$. A monoid S is called *linearly ordered* if the S-act ${}_SS$ is linearly ordered.

The structure $\mathfrak{M}$ of a language L is called *pseudofinite* if every sentence true in $\mathfrak{M}$ has a finite model. The class of all pseudofinite S-acts is denoted by $\mathcal{PF}$.

Let us say that a class C of structures is *stable* if the complete theory of any structure $\mathcal{M}$ from C is stable. If a class K of S-acts is stable then S is called a *K-stabilizer.* If K is the class of all S-acts then K-stabilizer is called *stabilizer*. In **[1]** it is proved that a monoid S is a stabilizer if and only if S is a linearly ordered monoid.

Here we consider questions of stability for class of pseudofinite S-acts.

Theorem 1. Let S be a finite monoid. Then the following conditions are equivalent:

(1) S is a stabilizer;

(2) S is a $\mathcal{PF}$-stabilizer;

(3) S is a linearly ordered monoid.

A monoid S is called *Noetherian,* respectively *Artinian,* if it satisfies the ascending chain condition on ideals, respectively if it satisfied the descending chain condition on ideals.

Theorem 2. Let S be a commutative Noetherian and Artinian monoid. Then the following conditions are equivalent:

(1) S is a stabilizer;

(2) S is a $\mathcal{PF}$-stabilizer;

(3) S is a linearly ordered monoid.

This research has been supported by RF Ministry of Education and Science (Suppl. Agreement No. 075-02-2025-1638/1 of 27.02.2025).

References

[1] Mustafin T.G. Stability of the theory of polygons, Tr. Inst. Mat. Sib. Otd. (SO) Akad. Nauk SSSR 8 (1988), pp.92-108 (in Russian); translated in Model Theory and Applications, American Math. Soc. Transl.,Providence R.I. (1999).

Far Eastern Federal University, Vladivostok (Russia)
E-mail: stepltd@mail.ru, efremov-el@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru

VC dimension of definable subsets of fractal models

A. R. Yeshkeyev, A. K. Issayeva, N. V. Popova

We work in a fixed inductive theory T in the signature L. $K(T)$ — the Kaiser class of the theory T.

- —For a model $A : A^0 := Th_{\forall\exists}(A)$.
- —For a class $\mathcal{D} \subseteq K(T) : \mathcal{D}^0 := \bigcap_{A\in\mathcal{D}} Th_{\forall\exists}(A)$.
- —$(K_T^0)^* = Th(C_{K_T^0})$ the center of the theory K_T^0 (not used here, fixed for context).

Definition 2.[A.R. Yeshkeyev](***Fractal subclass of models***)

A subclass $\mathcal{F} \subseteq K(T)$ is called **fractal** if there exists a finite family of elementary endomorphisms of the Kaiser class

$$\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \mathrm{Endel}(K(T)), \qquad m < \infty$$

such that

$$\mathcal{F} = \bigcup f_i(\mathcal{F}).$$

Definition 3.[A.R. Yeshkeyev](Fractal Jonsson theory—semantic aspect)

If $\mathcal{F} \subseteq K(T)$ **is fractal** and $\mathcal{F}^0 = T$, then we call T a **fractal Jonsson theory** (in the semantic sense).

Well-known next facts about PAC-learning

Definition 4.[2]

Let X be a set and $F \subseteq P(X)$. The pair (X, F) is called a set system. We say that $A \subseteq X$ is shattered by F if for every $S \subseteq A$ there is $F \in F$ such that $F \bigcap A = S$. A family F is said to be a VC-class on X if there is some $n < \omega$ such that no subset of X of size n is shattered by F. In this case the VC-dimension of F, denoted by $VC(F)$, is the smallest integer n such that no subset of X of size $n+1$ is shattered by F. If no such n exists, we write $VC(F) = \infty$.

Theorem 1.[2] The following are equivalent for a hypothesis class H with domain X:

(1) - H has finite VC dimension.

(2) - H is PAC learnible(PAC stands for Probably Approximately Correct).

Definition 2. [A.R. Yeshkeyev] Jonsson theory T is J-o-minimal theory if T^*-o-minimal

Definition 3. Let T is fractal J-o minimal theory and $\phi(x, y)$ is a some $\exists$-formula (with a partition of the free variables).

Say that $\phi(x, y)$ has the J-independence property (or JIP) if there are in $M, M \in \mathcal{F}$, where $\mathcal{F} \subseteq K(T)$ theory T $(a_i)_{i<\omega}$ and $(b_s)_{s\subseteq\omega}$ such that $\phi(a_i, b_s)$ holds iff $i \in s$. Say that ϕ is $JNIP$ if not. The theory T is $JNIP$ if all formulas are $JNIP$.

Lemma 1. *I*f theory T is fractal J-o-minimal theory, then T has a $JNIP$-formula.

Theorem 2. *F*or all fractal J-o-minimal Jonsson theory is $JNIP$-theory

All the necessary information about Jonsson theory which is uncertain in this thesis, can be extracted from the monograph[1].

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

References

[1] A.R. Yeshkeyev, *Theories and their models.* Karaganda, Kazakhstan: izd. KarU [in Russian], Volume 1,2. (2024).

[2] V. N. Vapnik, A. Ya. Chervonenkis, *On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities* Reprint of Theor., Probability Appl., 16 (1971), no. 264—280.

Karaganda Buketov National Research University, Karaganda (Kazakhstan)
E-mail: isaevaaiga@gmail.com

Properties P-stability of hereditary Jonsson teories

G. E. Zhumabekova

Let T be an arbitrary Jonsson theory in a signature σ, and let C_T be its semantic model. Let $A \subseteq C_T$, and let P be a new unary predicate symbol. Consider the (generally incomplete) theory in the signature $\sigma_P(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ defined as follows:

$$T_P^J(A) = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(C_T, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{\text{“}P \subseteq\text{”}\},$$

where $\{\text{“}P \subseteq\text{”}\}$ is an infinite set of sentences expressing that the interpretation of P is an existentially closed submodel in the signature σ.

Let $S_p^J(A)$ denote the set of all $\exists$-completions of the theory $T_P^J(A)$. Let λ be an arbitrary cardinal.

Definiton 1. [1] *A Jonsson theory T is said to be J-P-*superstable *if there exists a cardinal λ_0 such that for all $\lambda \geq \lambda_0$, the theory T is J-P-λ-stable.*

Definiton 2. [1] *The Jonsson theory is said to be hereditary, if in any of its permissible enrichment, any expansion of it in this enrichment will be Jonsson theory.*

Definiton 3. [2] *Let A be a Jonsson subset of the semantic model C_T, where T is a Jonsson theory. An $\exists$-complete type p is said to be J-*multidimensional *if it is orthogonal to any complete $\exists$-type over A. If T has a J-multidimensional type, then T is called a* J-multidimensional theory. *Otherwise, T is called a* J-non-multidimensional theory.

Definiton 4. [1] *A Jonsson theory T is called J-superstable if it is J-λ-stable for some cardinal λ and $\lambda \geq 2^\omega$.*

Theorem 1. *Let T be an $\exists$-complete, J-superstable Jonsson theory, C_T its semantic model, and T^* the center of the Jonsson theory. Then the following conditions are equivalent:*

(a) *the theory T is J-non-multidimensional;*
(b) *the theory T is J-P-superstable.*

Theorem 2. *If T is a J-P-superstable perfect Jonsson theory, then T is hereditary.*

The research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686827 "The central types of hereditary Jonsson theories").

References

[1] Yeshkeyev A.R. Theories and their models. Karaganda, Kazakhstan: izd. KarU [in Russian], Volume 1,2. (2024)—p.275.

[2] Kassymetova M.T. Model-theoretic properties of J-non multidimensional theories / M.T. Kassymetova, G. E.Zhumabekova // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series,—2024.—No. 44(116). —pp.119-126.

Buketov Karaganda National Research University, Karaganda (Kazakhstan)
E-mail: galkatai@mail.ru

VIII. Авторский указатель