

## О конструктивных множествах в теории множеств Симпсона

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Теория множеств Симпсона **SST** является подтеорией теории множеств Цермело – Френкеля **ZF**, полученной удалением аксиомы степени и схемы аксиом подстановки но с добавленными аксиомами счетности, транзитивного замыкания, и транзитивной свертки фундированных отношений. Метаматематически, **SST** является консервативным расширением арифметики второго порядка **Z<sub>2</sub>** (без аксиомы выбора) и допускает интерпретацию в **Z<sub>2</sub>**. Симпсон показал, что построение класса **L** всех конструктивных множеств по Гёделю осуществимо в этой теории, несмотря на отсутствие схемы аксиом подстановки. Исследуя класс **L** в теории Симпсона, мы доказываем, что **L** удовлетворяет самой **SST** без аксиомы счетности, в частности, удовлетворяет схеме аксиом выделения.

Библиография: ЧЧ названий.

**Ключевые слова:** конструктивность; теория множеств Симпсона; арифметика второго порядка; консервативность

### 1. Введение

int

Симпсон [23; гл. VII] провел тщательное исследование взаимосвязей между различными подтеориями арифметики второго порядка **Z<sub>2</sub>** и теориями множеств без аксиомы степени но с аксиомой **Cntbl** о счетности каждого множества. Как своего рода ядро своих теоретико-множественных схем, Симпсон берет теорию **ATR<sub>set</sub><sup>0</sup>**, полученную из теории Цермело **Z** удалением аксиомы степени и схемы выделения и добавлением 1) аксиомы существования транзитивных надмножеств, 2) аксиомы существования транзитивной модели для любого фундированного бинарного отношения, 3) аксиомы **Cntbl** о счетности каждого множества, и 4) аксиомы универсальной определенности гёделевых и некоторых других операций. К этой базовой

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда № 24-44-00099, <https://rscf.ru/project/24-44-00099/>.

теории Симпсон добавляет схемы выделения для разных классов  $\in$ -формул, и, как законченный вариант, полную схему выделения **Sep** (или  $\Pi_{\infty}^{\text{set}}$ -comprehension, как в [23]). Полученную таким образом теорию  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0 + \mathbf{Sep}$  мы называем здесь *теорией множеств Симпсона* и обозначаем через **SST**.

С точки зрения оснований математики, теория **SST** важна тем, что она в точности является теорией стандартной интерпретации теории множеств в арифметике второго порядка  $\mathbf{Z}_2$  при помощи фундированных деревьев, как показано в [23; § VII.3]. Об этом см. также в статьях [2, 21, 25, 26] и др., или ниже в § 4 этой статьи.

Симпсон установил в [23; § VII.4] что теория **SST** (и даже до какой-то степени  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0$ ) достаточно сильна для выполнения многих типичных теоретико-множественных построений по трансфинитной индукции, включая адекватное построение класса  $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_{\alpha}$  конструктивных множеств с выводом ряда главных свойств иерархии множеств  $\mathbf{L}_{\alpha}$  — несмотря на отсутствие схемы подстановки, которая обычно используется для этих целей в **ZF**. В частности, Симпсон доказывает следующее:

hcl    **ТЕОРЕМА 1 (SST).** *Класс **HCL** всех множеств  $x$ , принадлежащих транзитивному и счетному в  $\mathbf{L}$  множеству  $y \in \mathbf{L}$ , удовлетворяет аксиомам  $\mathbf{ZFC}^-$ .*

Здесь  $\mathbf{ZFC}^-$  — это **ZFC** без аксиомы степени.

Приведем фундаментальное следствие из теоремы 1.

lt    **СЛЕДСТВИЕ 1.** *Теории  $\mathbf{Z}_2$ ,  $\mathbf{Z}_2$  с аксиомой счетного выбора,  $\mathbf{Z}^-$ ,  $\mathbf{ZF}^-$ ,  $\mathbf{ZFC}^-$  равнонепротиворечивы.*

Этот результат о непротиворечивости известен по крайней мере с 1960х, хотя полные доказательства как будто не опубликованы.

Что касается самого класса  $\mathbf{L}$  в теории **SST**, то, в противоположность его подклассу **HCL**, он остался мало исследованным в [23] в связи с аксиомами теории множеств. Указано лишь, что  $\mathbf{L}$  не обязательно удовлетворяет схеме подстановки (см. ниже пример 1). В положительном же направлении рассмотрен лишь случай отношений типа  $\Sigma_1$  (упражнение VII.5.5 в [23]). Мы заполняем этот пробел следующей теоремой:

zt    **ТЕОРЕМА 2 (SST).** *Класс  $\mathbf{L}$  удовлетворяет аксиомам **SST**, за исключением, возможно, аксиомы счетности **Cntbl**. В частности,  $\mathbf{L}$  удовлетворяет схеме выделения **Sep** для формул любого типа.*

Следовательно, класс (или множество)  $\mathbf{L} \cap \mathcal{P}(\omega)$  удовлетворяет  $\mathbf{Z}_2$ .

Теорема 2 — главный результат этой статьи. Она доказана в § 8 настоящей статьи на основе результатов о конструктивности в контексте **SST**, изложенных в §§ 5, 6. Эти промежуточные результаты о конструктивности позволят нам дать также и новое упрощенное доказательство теоремы 1 Симпсона, в следующей форме:

ТЕОРЕМА 3 (**SST**). Следующее множество или класс удовлетворяет **ZFC**<sup>−</sup> : 2red

$$\mathbf{L}^* = \begin{cases} \mathbf{L}, & \text{если ординал } \omega_1^{\mathbf{L}} \text{ не существует,} \\ \mathbf{L}_\Omega = \bigcup_{\alpha < \Omega} \mathbf{L}_\alpha, & \text{если ординал } \omega_1^{\mathbf{L}} = \Omega \text{ существует.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix}$$

Теорема 3 доказана в § 9 настоящей статьи. В частности, ключевая теорема 6 в этом разделе утверждает, что, в определенных условиях, класс вида  $K = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{L}_\alpha$  удовлетворяет **ZFC**<sup>−</sup>, что и ведет к доказательству теорем 3 и 1.

## 2. Теория множеств Симпсона

2prel

Теория **ZFC**<sup>−</sup> получается из теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC** так:

- (I) аксиома степени **PS** удаляется — это символизирует минус в аббревиатуре; zfcml
- (II) обычная аксиома выбора **AC** по Цермело как в **ZFC** удаляется (ибо без **PS** она неэффективна), а вместо нее вводится *аксиома полного упорядочивания* **WOA**, постулирующая возможность вполне упорядочить любое множество; zfcml
- (III) схема выделения **Sep** сохраняется, но схема подстановки **Repl** (слишком слабая в отсутствие **PS**) замещается схемой *собирания*: zfcml

$$\mathbf{Coll} : \forall X (\forall x \in X \exists y \Phi(x, y) \implies \exists Y \forall x \in X \exists y \in Y \Phi(x, y)). \quad \text{Col}$$

Известно, что **Coll** + **Sep**  $\implies$  **Repl**.

См. работы [1, 8, 9] за подробностями о теории **ZFC**<sup>−</sup>.

Также см. [10], [24], [7; разд. 2] и др. о различных но эквивалентных формулировках схемы собирания, таких как например следующая форма в [10; гл. 6]:

$$\mathbf{Coll}' : \forall X \exists Y \forall x \in X (\exists y \varphi(x, y) \implies \exists y \in Y \varphi(x, y)).$$

Это выглядит несколько сильнее чем **Coll** выше, но на самом деле **Coll'** следует из **Coll**. Именно, нужно взять  $\Phi(x, y) := \varphi(x, y) \vee (y = 0 \wedge \neg \exists y \varphi(x, y))$  в формуле **Coll**.

- **ZF**<sup>−</sup> есть **ZFC**<sup>−</sup> без аксиомы полного упорядочивания **WOA**; zfm
- **Z**<sup>−</sup> есть **ZF**<sup>−</sup> без схемы собирания **Coll**. zm

Наконец, определим *теорию множеств Симпсона* **SST** как **Z**<sup>−</sup> с добавленными следующими тремя аксиомами **TrCov**, **Beta**, **Cntbl**: zmc

**Транзитивное накрытие**, **TrCov**:  $\forall X$ , существует транзитивное множество  $Y \supseteq X$ . trsu

**Аксиома Beta или коллапс Мостовского**: любое фундированное отношение  $A$  на множестве  $D = \mathbf{fld} A := \mathbf{dom} A \cup \mathbf{ran} A$  допускает транзитивное множество  $X$  и функцию  $\mu : D$  на  $X$ , удовлетворяющую (\*)  $\mu(d) = \{\mu(j) : j A d\}$ , для всех  $d \in D$ . Функция  $\mu$  и множество  $X$  определены этим условием однозначно. Функция  $\mu = \mu_A$  называется *функцией свёртки* для  $A$ . moco xet

Напомним, что бинарное отношение  $A$  на множестве  $D = \mathbf{fld} A$  *фундировано*, если любое непустое  $Y \subseteq D$  содержит элемент  $y \in Y$ , для которого  $\forall x \in Y \neg (x A y)$ .

сoun **Счетность Cntbl**:  $\forall x \exists f (f : x \rightarrow \omega \text{ 1-1 функция})$ , т. е. все множества счетны.

Понятно, что  $\mathbf{SST} \subseteq \mathbf{ZF}^- + \mathbf{Cntbl}$ .

Об аксиоме **Beta** см. книгу [23], определение VII.3.8 и замечания в конце § VII.3 о её истории. Вывод **Beta** из **Repl** см. например в [10; теорема 6.15].

атros **Сам Симпсон** подходит к аксиоматике равносильной нашей  $\mathbf{SST}$  в [23; VII.3.3 и VII.3.8] с несколько иных позиций, относящихся к направлению *reverse mathematics*. Именно, он вводит теорию  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0$  в  $\in$ -языке, содержащую такие аксиомы:

- aeq (a) аксиомы равенства:  $=$  есть отношение эквивалентности, а отношение  $\in$  является  $=$ -инвариантным;
- aei (b) экстенциональность, бесконечность, регулярность в их обычных **ZF**-формах;
- rud (c) аксиома рудиментарной замкнутости, которая утверждает, для всех множеств  $u, v$ , существование множеств  $\mathcal{F}_1(u, v) = \{u, v\}$ ,  $\mathcal{F}_2(u, v) = u \setminus v$ ,  $\mathcal{F}_3(u, v) = u \times v$ ,  $\mathcal{F}_4(u, v) = \bigcup u$ , а также множеств:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_5(u, v) &= \in \upharpoonright u = \{\langle x, y \rangle : x, y \in u \wedge x \in y\}, \\ \mathcal{F}_6(u, v) &= u^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in u\}, \\ \mathcal{F}_7(u, v) &= \{\langle y, \langle x, z \rangle \rangle : \langle y, x \rangle \in v \wedge z \in u\}, \\ \mathcal{F}_8(u, v) &= \{\langle y, \langle z, x \rangle \rangle : \langle y, x \rangle \in v \wedge z \in u\}, \\ \mathcal{F}_9(u, v) &= \{z : \exists x (x \in u \wedge z = v''\{x\})\}, \end{aligned}$$

where  $v''\{x\} = \mathbf{ran} (v \upharpoonright \{x\})$ ;

- a3 (d) наконец, аксиомы **TrCov**, **Beta**, **Cntbl**, как выше.

sst2 **ЛЕММА 1.**  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0 \subseteq \mathbf{SST}$ , а потому  $\mathbf{SST}$  тождественна  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0 + \mathbf{Sep}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть множеств  $u, v$  произвольны. Согласно лемме 5 ниже, существует транзитивное множество  $Y$ , содержащее  $u, v$  и замкнутое относительно конечных подмножеств — а тогда и относительно упорядоченных пар, троек и т. п. Тогда каждая из операций  $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_8$  из (c), примененная к множествам  $u, v \in Y$ , даёт результат, являющийся частью  $Y$ , т. е. множеством согласно **Sep**. Что касается  $\mathcal{F}_9$ , то в наших условиях выполнено  $\mathcal{F}_9(u, v) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ , так что остается сослаться на лемму 4(ii) ниже при  $D = u$  и  $F(x) = v''\{x\}$ .  $\square$

Операции  $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_9$  из (c) можно сравнить с гёделевыми операциями из § 7 ниже.

### dev 3. Развитие теории Симпсона

Здесь собрано несколько достаточно простых результатов в теории  $\mathbf{SST}$ . В частности, аксиома **TrCov** и схема **Sep** приносят такой результат:

ЛЕММА 2 (**SST**, ТРАНЗИТИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ). Для любого множества  $X$  существует транзитивное замыкание  $\text{TC}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ транзитивно}\}$ .  $\square$  etc

Применяя **Beta** для случая  $A = \in \downarrow D$ , мы получаем:

ЛЕММА 3 (**SST**, ТРАНЗИТИВНАЯ СВЁРТКА). Для любого множества  $D$  существуют единственные транзитивное множество  $X$  и функция свёртки  $\tau : D$  на  $X$ , удовлетворяющие  $\tau(x) = \{\tau(y) : y \in x \cap D\}$  для всех  $x \in D$ .  $\square$  c12

Для краткости, класс-функцией назовем любой (определимый) класс, удовлетворяющий обычному определению функции (состоит из упорядоченных пар, и т. д.).

ЛЕММА 4 (**SST**). Пусть  $F$  – класс-функция, определенная на множестве  $D$ . Тогда  $F$  и образ  $R = F''D = \{F(x) : x \in D\}$  – множества в таких двух случаях: m212

- (i)  $R$  – транзитивный класс, 1m212
- (ii) имеется множество  $Y$ , для которого  $R \subseteq \mathcal{P}(Y)$ . 2m212

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Согласно **Cntbl**, мы можем предполагать, что  $D \subseteq \omega$ . Также предполагаем, что  $F$  взаимно однозначна; иначе заменим  $D$  множеством

$$D' = \{k \in D : \forall j \in D (j < k \implies F(j) \neq F(k))\}.$$

Тогда отношение  $A = \{\langle j, k \rangle : j, k \in D \wedge F(j) \in F(k)\}$  фундировано, как изоморфное отношению  $\in \downarrow R$ . С другой стороны,  $A$  изоморфно  $\in \downarrow Y$  согласно **Beta**, где  $Y$  – транзитивное множество. Значит транзитивные  $Y$  и  $R$   $\in$ -изоморфны, а потому  $R = Y$  – множество. Наконец,  $F \subseteq X \times R$  – также множество благодаря **Sep**.

(ii) Аксиома **TrCov** позволяет допустить транзитивность множества  $Y$ . Также можно предполагать, что  $D \cap Y = \emptyset$ ; иначе положим  $D' = D \times \{Y\}$  и соответственно изменим  $F$ . В этих предположениях, берем  $D_1 = D \cup Y$  и продолжаем  $F$  до  $F_1$  идентичным отображением на  $Y$ . Тогда образ  $F_1''D_1 = R \cup Y$  – транзитивное множество согласно (i). Наконец,  $R \subseteq F_1''D_1$  – множество по **Sep**.  $\square$

Скажем, что множество  $S$  замкнуто относительно конечных подмножеств, если  $\forall z \subseteq Y (z \text{ finite} \implies z \in Y)$ . Для любого  $X$ , вводится соответствующее замыкание  $\text{FC}(X)$  как наименьшее надмножество  $Y \supseteq X$ , замкнутое относительно конечных подмножеств (если оно существует в данной аксиоматике). PC X

ЛЕММА 5 (**SST**). Для любого множества  $X$ , существует множество  $\text{FC}(X)$ . pc

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая  $X = \omega$ , через  $p_k$  обозначим  $k$ -е простое число, так что  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ , и т. д. Положим  $A = \{\langle k, n \rangle : k \geq 1 \wedge p_k \text{ делит } n\}$ . Тогда  $\text{fld } A = \omega \setminus \{0\}$ ,  $A$  фундировано (поскольку  $k \wedge n \implies k < n$ ), и  $(\dagger)$  для любого конечного  $u \subseteq \text{fld } A$  имеется  $n \in \text{fld } A$ , для которого  $u = \{k : k \wedge n\}$ . По аксиоме **Beta**

существует отображение  $\mu : \mathbf{fld} A$  на транзитивное множество  $R$ , удовлетворяющее  $\mu(n) = \{\mu(k) : k A n\}$ , для всех  $n \in \mathbf{fld} A$ . Понятно, что  $R = \mathbf{FC}(\omega)$  согласно  $(\dagger)$ .

Теперь общий случай. Можно предполагать, по **TrCov**, что  $X$  транзитивно. По **Cntbl**, имеется функция  $h : \omega$  onto  $X$ . Она продолжается до класс-функции  $H$ , определенной на большем множестве  $R = \mathbf{FC}(\omega)$  через  $H \upharpoonright \omega = h$ , а если  $u \in R \setminus \omega$  то  $H(u) = \{H(n) : n \in u\}$ . Тогда  $\mathbf{ran} H = \mathbf{FC}(X)$  (класс), и поэтому  $\mathbf{ran} H$  транзитивно вместе с  $X$ . Однако по лемме 4(i), как  $H$  так и  $\mathbf{ran} H = \mathbf{FC}(X)$  – множества.  $\square$

capr

**ЛЕММА 6 (SST).** *Для любых множеств  $U$  и  $V$ , существуют как множества  $U \times V$ ,  $\mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(U)$ ,  $U^{<\omega}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**  $X = U \cup V = \bigcup\{U, V\}$  – множество даже в  $\mathbf{Z}^-$ , так что и  $\mathbf{FC}(X)$  – множество по лемме 5, и далее  $U \times V \subseteq \mathbf{FC}(X)$  – множество по **Sep**. Далее, имеем  $\mathcal{P}_{\mathbf{fin}}(U), U^{<\omega} \subseteq \mathbf{FC}(U)$ ; используем лемму 5 и опять **Sep**.  $\square$

Таким образом, **SST** доказывает существование декартовых произведений. Заметим, что  $\mathbf{Z}^-$  недостаточно сильна даже для вывода существования  $\omega \times \omega$ !

ord

**ЛЕММА 7 (SST).** *Пусть  $E$  – строгое полное упорядочение множества  $U$ . Найдется ординал  $\lambda$  и порядковый изоморфизм  $\langle U; E \rangle$  на  $\langle \lambda; \in \rangle$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В частности,  $E$  – фундированное отношение на  $U$ . Аксиома **Beta** дает транзитивное множество  $\lambda = X$ , вполне упорядоченное отношением  $\in$ , т. е. ординал.  $\square$

ordC

**СЛЕДСТВИЕ 2 (SST).** *If  $\alpha, \beta$  – ординалы, то существуют (как множества) ординалы  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$ ,  $\alpha^\beta$ . (В смысле стандартной арифметики ординалов.)*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно определить вполне упорядоченные множества, представляющие указанные порядковые числа. Декартово произведение  $\alpha \times \beta$  (множество по лемме 6), упорядоченное лексикографически, представляет  $\alpha \cdot \beta$ . Экспонента же  $\alpha^\beta$  представлена множеством

$$W = \{f : D \rightarrow \alpha \setminus \{0\} : D \subseteq \beta \text{ is finite}\}$$

с лексикографическим порядком, понимаемым в том смысле, что каждая  $f \in D$  продолжена через  $f(\xi) = 0$  для всех  $\xi \in \beta \setminus D$ . Заметим, что  $W \subseteq \mathbf{FC}(\beta \times \alpha)$  – множество согласно лемме 5.  $\square$

dim

#### 4. Метаматематика теории множеств Симпсона

Выбор аксиом **SST** выглядит достаточно случайным и мало обоснованным сверх чисто технической необходимости в тех или иных доказательствах. Целью этого

раздела будет обосновать, что это не совсем так, и что на самом деле **SST** можно считать своего рода теоретико-множественным «когнатом» арифметики второго порядка  $\mathbf{Z}_2$  (напомним: без аксиомы выбора). Главные результаты здесь таковы.

- 1°. Теория **SST** есть консервативное расширение  $\mathbf{Z}_2$  в том смысле, что предложение  $P$  языка  $\mathbf{Z}_2$  является теоремой  $\mathbf{Z}_2$  в том и только в том случае, когда релятивизация  $(P)^{\mathcal{P}(\omega)}$  является теоремой **SST**. dim1
- 2°. Существует интерпретация теории **SST** в  $\mathbf{Z}_2$ , определяемая в  $\mathbf{Z}_2$  и такая, что структура  $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$  интерпретации имеет канонический изоморфизм с самим универсумом теории  $\mathbf{Z}_2$ . dim2

Оба результата изложены в [23; VII.3], но известны фактически с 1960х годов.

Для вывода 1° и 2°, рассматривается совокупность WFT всех непустых фундированных деревьев  $T \subseteq \text{SEQ} = \omega^{<\omega}$ . Напомним, что

- $\text{SEQ} = \omega^{<\omega}$  – все кортежи натуральных чисел;
- $\langle \rangle \in \text{SEQ}$  – пустой кортеж,  $\langle k \rangle$  кортеж с  $k$  как единственным членом;
- $s \smallfrown j$  получается присоединением члена  $j \in \omega$  к кортежу  $s \in \text{SEQ}$  справа, а если  $s, t \in \text{SEQ}$  то  $s \smallfrown t \in \text{SEQ}$  обозначает *конкатенацию*;
- $T \subseteq \text{SEQ}$  – *дерево*, если  $s \smallfrown j \in T \implies s \in T$ ;
- дерево  $T \subseteq \text{SEQ}$  *фундировано*,  $T \in \text{WFT}$ , если  $\neg \exists g : \omega \rightarrow \omega \forall m (g \upharpoonright m \in T)$ ;
- если  $T$  – дерево и  $s \in T$  то  $T^s = \{t \in \text{SEQ} : s \smallfrown t \in T\}$  – также дерево, и если  $T$  фундировано то и  $T^s$  фундировано.

**УПРАЖНЕНИЕ 1 (SST).** Пусть  $T \in \text{WFT}$ . Докажите, что существует единственная функция  $\mathbf{set}_T$ , определенная на  $T$  и удовлетворяющая равенству  $\mathbf{set}_T(u) = \{\mathbf{set}_T(u \smallfrown j) : u \smallfrown j \in T\}$  для всех  $u \in T$ . Полагаем  $\mathbf{Set}_T = \mathbf{set}_T(\langle \rangle)$ . est

Определенным недостатком теорий подобных арифметике второго порядка  $\mathbf{Z}_2$  является то, что кортежи натуральных чисел, деревья, функции  $\text{SEQ} \rightarrow \text{SEQ}$  и т.п. объекты формально не входят в область изучения. Этому можно помочь подходящей *кодировкой*. См. об этом в [23], гл. I, и особенно раздел II.2 с рядом примеров.

В частности, для кодировки кортежей, положим  $s_0 = \langle \rangle$  (пустой кортеж), и если  $n = 2^m(2j + 1) - 1 \geq 1$  то  $s_n = s_m \smallfrown j$ . Тогда  $\text{SEQ} = \{s_n : n < \omega\}$ , и  $n \mapsto s_n$  является биекцией. Соответственно, число  $n = n(s)$  служит *кодом* кортежа  $s = s_n \in \text{SEQ}$ , а каждое множество  $x \subseteq \omega$  служит *кодом* множества кортежей  $\{s_n : n \in x\} \subseteq \text{SEQ}$ . Следуя Симпсону [23; II.2], это позмоляет нам свободно рассматривать кортежи и их множества, оставаясь в рамках теории  $\mathbf{Z}_2$ . Это относится и к множествам  $X \subseteq \omega \times \omega$ ,  $H \subseteq \text{SEQ} \times \text{SEQ}$ , и им подобным.

С этой оговоркой, мы можем рассматривать в  $\mathbf{Z}_2$  кортежи и деревья, дать адекватное  $\mathbf{Z}_2$ -определение фундированности, и даже определить, для данных  $S, T \in$

WFT, верны ли соотношения  $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$  и  $\mathbf{Set}_S \in \mathbf{Set}_T$ , не определяя самих множеств  $\mathbf{Set}_S$ ,  $\mathbf{Set}_T$ . Дается следующее определение в  $\mathbf{Z}_2$ .

bis ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([6; 7.8] или [23; VII.3.13]). Пусть  $S, T \in \text{WFT}$ . Множество  $H \subseteq S \times T$  называется  $S, T$ -бисимуляцией когда, для всех  $s \in S$  и  $t \in T$ , выполнено:

$$s H t \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall s' = s \wedge j \in S \exists t' = t \wedge k \in T (s' H t') \wedge \\ \wedge \forall t' = t \wedge k \in T \exists s' = s \wedge j \in S (s' H t'). \end{array} \right.$$

Положим  $S =^* T$ , если существует  $S, T$ -бисимуляция  $H$ , для которой  $\langle \rangle H \langle \rangle$ .

Положим  $S \in^* T$ , когда  $S =^* T^{(k)}$  для какого-то  $k \in \omega$ .

Структура  $\mathbb{V} = \langle \text{WFT}; =^*, \in^* \rangle$  рассматривается в  $\mathbf{Z}_2$ .

$\mathbb{V}$ -интерпретация  $[\Phi]^\mathbb{V}$  любой  $\in$ -формулы  $\Phi$  (с параметрами из WFT) естественно понимается через интерпретацию  $=, \in$  как  $=^*, \in^*$ , и релятивизацию всех кванторов к WFT. Так например  $[x = y]^\mathbb{V}$  есть  $x =^* y$ .  $\square$

est2 УПРАЖНЕНИЕ 2 (**SST**). Пусть  $S, T \in \text{WFT}$ . Докажите, что  $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$ , если и только если  $S =^* T$  истинно в  $\mathbf{Z}_2$ -структуре  $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$ . То же для  $\in$  и  $\in^*$ .  $\square$

Отношение бисимуляции  $=^*$  между деревьями из WFT, и соответственно производное отношение  $\in^*$ , естественно формализуются в  $\mathbf{Z}_2$  при помощи изложенной выше кодировки. Отсюда следует, что  $\mathbb{V}$ -интерпретация  $[\Phi]^\mathbb{V}$  любой  $\in$ -формулы  $\Phi$  с параметрами из WFT является формулой языка  $\mathbf{Z}_2$ .

it1 ТЕОРЕМА 4 ( $\mathbf{Z}_2$ ).

- it11 (i)  $\mathbb{V}$  – правильно определенная структура, т. е.  $=^*$  – отношение эквивалентности на WFT, а бинарное отношение  $\in^*$  на WFT  $=^*$ -инвариантно.
- it12 (ii)  $\mathbb{V}$  удовлетворяет **SST**: если  $\Phi$  – аксиома **SST**, то  $[\Phi]^\mathbb{V}$  – теорема  $\mathbf{Z}_2$ .
- it13 (iii) Имеется канонический изоморфизм между подструктурой  $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle^\mathbb{V}$  интерпретации и собственной структурой  $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$  универсума  $\mathbf{Z}_2$ .

Результаты, близкие к разным частям этой теоремы, были известны уже Крайзелю [19], а также из статей [2], [25], [21; теорема 1.1 и следствие 1.1], и др.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (НАБРОСОК). Помимо источников выше, теорема фактически доказана в [23; § VII.3]. Именно, используя лишь подтеорию  $\mathbf{ATR}^0 \subseteq \mathbf{Z}_2$  в роли базовой теории арифметики второго порядка, вместо самой  $\mathbf{Z}_2$ , лемма VII.3.20 в [23] доказывает, что если  $\Phi$  – аксиома  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0$ , то  $[\Phi]^\mathbb{V}$  – теорема  $\mathbf{ATR}^0$  (и тогда также теорема  $\mathbf{Z}_2$ ). Таким образом, для вывода (ii) лостаточно проверить **Sep** в  $\mathbb{V}$ .

Рассуждая в  $\mathbf{Z}_2$ , пусть  $S \in \text{WFT}$ ,  $X = \{k: \langle k \rangle \in S\}$ , а  $\Phi(x)$  является  $\in$ -формулой с параметрами из WFT и с  $x$  как единственной свободной переменной. По определению, деревья вида  $S^k = \{t \in \text{SEQ}: k \wedge t \in S\}$ ,  $k \in X$ , принадлежат  $\mathbb{V}$  и исчерпывают

(с точностью до  $=^*$ ) все  $\in^*$ -элементы  $S$  в  $\mathbb{V}$ . Используя схему свёртки из  $\mathbf{Z}_2$ , положим  $Y = \{k \in X : \lceil \Phi(S^{\langle k \rangle}) \rceil^\vee\}$ . Множество  $T = \{\langle \rangle\} \cup \{t \in S : t(0) \in X\}$  – дерево из WFT. Остается проверить  $\lceil T = \{x \in S : \Phi(x) \} \rceil^\vee$ .

Допустим, что  $C \in \text{WFT}$ ,  $C \in^* S$ , и выполнено  $\lceil \Phi(C) \rceil^\vee$ . Тогда  $C =^* S^{\langle k \rangle}$  для какого-то  $k \in X$ , так что выполнено  $\lceil \Phi(S^{\langle k \rangle}) \rceil^\vee$ , и тогда  $k \in Y$ . Отсюда имеем  $C =^* T^{\langle k \rangle} = S^{\langle k \rangle} \in^* T$ . Доказательство обратной импликации аналогично.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 3** (из теоремы 4). *Утверждения 1° и 2° выше справедливы. Значит, теории  $\mathbf{Z}_2$ ,  $\mathbf{Z}^-$ ,  $\mathbf{SST}$  взаимно интерпретируемы и, следовательно, равнонепротиворечивы.* red1  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 3.** Мы опустили ряд деталей доказательства теоремы 4, в частности, поскольку эта теорема не связана с доказательством главных результатов настоящей статьи. Однако хорошим *упражнением* для читателя будет восстановить полное доказательство, следуя выкладкам в цитированных публикациях [19, 2, 25, 21, 23], а также вывод 1° и 2° из теоремы. est2  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Пусть  $\mathbf{AC}_\omega$  – счетная аксиома выбора в  $\mathbf{Z}_2$ , и  $\mathbf{Z}_2^+ := \mathbf{Z}_2 + \mathbf{AC}_\omega$ . est2 Заменяя  $\mathbf{Z}_2$  на  $\mathbf{Z}_2^+$  в теореме, пункт (ii) примет вид:

если  $\Phi$  – аксиома  $\mathbf{ZFC}^-$ , то  $\lceil \Phi \rceil^\vee$  – теорема  $\mathbf{Z}_2^+$ .

Этот вариант даже более известен и лучше отражен в литературе, см. [21].  $\square$

## 5. Конструктивные множества в теории Симпсона

Lopr

Здесь приведены ключевые определения и некоторые важные результаты из теории конструктивности в изложении [23; § VII.4]. Симпсон получает эти результаты в теории  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0$  и другими подтеориями  $\mathbf{SST}$  в [23]. Тем более эти результаты верны в нашей базовой теории множеств  $\mathbf{SST}$ .

Также отметим, что в настоящей работе рассматривается только частный случай  $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$  более общего определения *относительной* конструктивности  $\mathbf{L}[u] = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha[u]$  в [23] для случая  $u = \emptyset$ . Поэтому все данные ниже формулировки определений и результатов из [23; гл. VII] сведены именно к этому случаю.

**ЛЕММА 8** ( $\mathbf{SST}$ , [23], лемма VII.4.1). *Пусть  $X$  – транзитивное множество. Существует (единственное) множество  $\mathbf{Def} X$ , состоящее из всех множеств  $Y \subseteq X$ , определимых над  $X \in$ -формулой с параметрами из  $X$ .* si1

*Это множество  $\mathbf{Def} X$  транзитивно и удовлетворяет  $X \cup \{X\} \subseteq \mathbf{Def} X$ .*  $\square$

Доказательство леммы 8 в [23] состоит в выводе существования функции оценки для всех  $\in$ -формул с параметрами из данного транзитивного множества  $X$ . Другой подход к определению  $\mathbf{Def} X$  (он, как и первый, принадлежит Гёделю) связан с тем, что  $\in$ -определимость элиминируется через гёделевы операции, см. § ?? ниже.

Далее, лемма 8 даёт следующий результат:

legi ЛЕММА 9 (**SST**, [23], VII.4.2). Пусть  $\beta \in \text{Ord}$ . Имеется единственная функ-  
jf ция  $f = \mathbb{f}_\beta$ , для которой  $\text{dom } f = \beta$ ,  $f(0) = \emptyset$ ,  $f(\alpha + 1) = \mathbf{Def } f(\alpha)$  при  $\alpha + 1 < \beta$ ,  
и  $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$  для предельных  $\lambda < \beta$ .  $\square$

Функция  $\mathbb{f}_\beta$  называется *конструирующей функцией высоты  $\beta$* .

Ludef ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (**SST**). Положим  $\mathbf{L}_\alpha = \mathbb{f}_{\alpha+1}(\alpha)$  для всех  $\alpha \in \text{Ord}$ .  $\square$

Таким образом, теория **SST** (фактически, даже  $\mathbf{ATR}_{\text{set}}^0$ ) достаточно сильна для построения стандартной конструктивной иерархии:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{L}_0 & = \emptyset, \\ \mathbf{L}_{\alpha+1} & = \mathbf{Def } \mathbf{L}_\alpha \text{ для всех } \alpha, \\ \mathbf{L}_\lambda & = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbf{L}_\alpha \text{ для всех предельных } \lambda, \\ \mathbf{L} & = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha = \text{все конструктивные множества.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

lae ТЕОРЕМА 5 (**SST**). Выплено следующее:

- lae1 (i) каждое  $\mathbf{L}_\alpha$  – транзитивное множество, и  $\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ ;
- lae2 (ii) если  $\alpha < \beta$  то  $\mathbf{L}_\alpha \in \mathbf{L}_\beta$  и  $\mathbf{L}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\beta$ ;
- lae3 (iii) если  $\lambda$  пределен то  $\mathbf{L}_\lambda$  замкнуто относительно операций (c) в разделе 2;
- 4lae (iv) если  $\alpha \in \text{Ord}$  то  $\mathbb{f}_\alpha \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$ ;
- 13c1 (v) (1) если  $\lambda \in \text{Ord}$  пределен, то отображение  $\alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha$  ( $\alpha < \lambda$ ) определимо над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров,  
(2) класс-функция  $\alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha$  ( $\alpha \in \text{Ord}$ ) определима над  $\mathbf{L}$  без параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [23], теорема VII.4.3, об (i), (ii), (iii). Относительно (iv) и (v), см. теорему VII.4.8 и её доказательство в [23], или к примеру лемму 4.1 в [3; § B.5] или доказательство леммы 2.6(ii) в [7].  $\square$

poser ЛЕММА 10 (**SST**). Если  $\lambda \in \text{Ord}$  пределен, то все аксиомы  $\mathbf{Z}^-$  кроме, возможно, схемы **Sep**, выполнены в  $\mathbf{L}_\lambda$ .

В самом же классе  $\mathbf{L}$  верны все аксиомы **SST** кроме, возможно, **Sep** и **Cntbl**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки аксиом  $\mathbf{Z}^-$  без **Sep**, особых отличий от доказательства в **ZF** нет. Рассмотрим, к примеру, аксиому объединения. Пусть  $X \in \mathbf{L}_\lambda$ , т.е.  $X \in \mathbf{L}_\alpha$ ,  $\alpha < \lambda$  (или просто  $\alpha \in \text{Ord}$  для  $\mathbf{L}$ ). Коль скоро  $\mathbf{L}_\alpha$  транзитивно, объединение  $Y = \bigcup X \subseteq \mathbf{L}_\alpha$  определимо над  $\mathbf{L}_\alpha$ , поэтому  $Y \in \mathbf{Def } \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathbf{L}_\lambda \subseteq \mathbf{L}[u]$ , что и требовалось.

Результат для  $\mathbf{L}$  см. [23; следствие VII.4.15]. Наиболее сложная в этом результате проверка аксиомы **Beta** в  $\mathbf{L}$  (теорема VII.4.12 там же) основана на лемме VII.4.10,

согласно которой если  $A \in \mathbf{L}$  – фундированное отношение, то его функция свёртки  $\mu_A$  (см. определение аксиомы **Beta** в разделе 2) также принадлежит  $\mathbf{L}$ .  $\square$

В то же время, для схем **Repl/Coll** и аксиомы **Cntbl** имеется такой контрпример.

**ПРИМЕР 1.** Рассуждая в **ZF**, положим  $\mathfrak{M} = \mathbf{L}_\vartheta$ , где  $\vartheta = (\aleph_\omega)^\mathbf{L}$ . Рассмотрим генерическое расширение  $\mathfrak{N}$  модели  $\mathfrak{M}$  генерической последовательностью функций  $f_n : \omega \text{ onto } (\aleph_n)^\mathbf{L}$ . Тогда  $\mathfrak{N}$  – модель **SST**, и в то же время  $(\mathbf{L})^\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ , но схемы **Repl/Coll** и аксиома **Cntbl** определено нарушены в  $\mathfrak{M}$ .  $\square$

носо

## 6. Определимость и полные упорядочения конструктивного универсума

abs

Здесь доказываются некоторые более тонкие результаты о конструктивности в теории **SST**. Следующая лемма говорит о параметрах определимости.

**ЛЕММА 11 (SST).** Пусть  $\lambda$  – предельный ординал, и  $Y \in \mathbf{L}_\lambda$ . Тогда  $Y$  определимо над  $\mathbf{L}_\lambda$  (i) формулой с параметрами вида  $\mathbf{L}_\delta$ ,  $\delta < \lambda$ , (ii) формулой с параметрами  $\delta < \lambda$ . lae4

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) По определению,  $Y = \{y \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\alpha \models \varphi(y)\}$ , где  $\alpha < \lambda$  и  $\varphi$  может иметь параметры из  $\mathbf{L}_\alpha$ . Рассуждая индукцией по  $\alpha$ , пусть для простоты  $\varphi(y)$  есть  $\varphi(p, y)$ , с одним параметром  $p \in \mathbf{L}_\alpha$ , т.е.  $p \in \mathbf{L}_{\gamma+1}$ , где  $\gamma < \alpha$ . По индуктивному предположению,  $p = \{z \in \mathbf{L}_\gamma : \mathbf{L}_\gamma \models \psi(z)\}$ , где  $\psi$  имеет параметры из  $\mathbf{L}_\delta$ ,  $\delta < \lambda$ . Тогда  $Y = \{y \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\lambda \models \Phi(y)\}$ , где

$$\Phi(y) := \exists p (y, p \in \mathbf{L}_\alpha \wedge p = \{z : z \in \mathbf{L}_\gamma \wedge \psi(z)\} \wedge \varphi(p, y)^{\mathbf{L}_\alpha}),$$

а  $\varphi(p, y)^{\mathbf{L}_\alpha}$  означает релятивизацию к  $\mathbf{L}_\alpha$ , т.е. все кванторы  $\exists a, \forall a$  меняются на, соответственно,  $\exists a \in \mathbf{L}_\alpha, \forall a \in \mathbf{L}_\alpha$ . Однако  $\Phi$  имеет только  $\mathbf{L}_\gamma$ ,  $\mathbf{L}_\alpha$ , и некоторые  $\mathbf{L}_\delta$ ,  $\delta < \lambda$ , в роли параметров. Этим доказано утверждение (i). Для доказательства (ii) остается использовать теорему 5(v).  $\square$

**ЛЕММА 12 (SST).** Пусть  $\lambda$  – предельный ординал. Существует функция  $H : D = \omega \times \lambda \times \lambda^{<\omega}$  на  $\mathbf{L}_\lambda$ , определяемая над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров. new1

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждое  $Y \in \mathbf{L}_\lambda$  имеет вид  $Y = \{y \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\lambda \models \varphi(y)\}$  по лемме 11, для какого-то  $\alpha < \lambda$ , где  $\varphi$  содержит параметры  $\delta < \lambda$ .

Пусть  $n \in \omega$ ,  $\alpha < \lambda$ , и  $p = \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle \in \lambda^k$ . Через  $\varphi_n$  обозначим  $n$ -ю беспараметрическую  $\in$ -формулу. Если

(†)  $\delta_1, \dots, \delta_k < \lambda$  и  $\varphi_n$  есть  $\varphi_n(v_1, \dots, v_k, v)$  с  $k+1$  свободными переменными, new1\*

то определим множество

$$H(n, \alpha, p) = \{y \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\lambda \models \varphi(\delta_1, \dots, \delta_k, y)\}.$$

Если же  $(\dagger)$  неверно, то просто положим  $H(n, \alpha, p) = \emptyset$ . Функция  $H$  определима над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров по теореме 5(v), поскольку она задана через определенное отображение  $\alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha$ .  $\square$

13c3 ЛЕММА 13 (**SST**). *Существует полное упорядочение  $<_{\mathbf{L}}$  класса  $\mathbf{L}$ , определенное над  $\mathbf{L}$  без параметров. Если  $\lambda$  – предельный ординал, то существует полное упорядочение  $<_{\mathbf{L}_\lambda}$  множества  $\mathbf{L}_\lambda$ , определенное над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $\lambda$ -утверждения, используем функцию  $H : D \xrightarrow{\text{onto}} \mathbf{L}_\lambda$  леммы 12. Множество  $D = \omega \times \lambda \times \lambda^{<\omega} \subseteq \mathbf{L}_\lambda$  определимо над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров. Значит, для определения  $<_{\mathbf{L}_\lambda}$  достаточно показать, что  $D$  допускает полное упорядочение  $<_D$ , определенное над  $\mathbf{L}_\lambda$  без параметров. С этой целью, если

$$d = \langle n, \alpha, u = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle \rangle \in D, \quad d' = \langle n', \alpha', u' = \langle \gamma'_1, \dots, \gamma'_{m'} \rangle \rangle \in D,$$

то положим  $\mu(d) = \max\{\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  и определим  $d <_D d'$  если и только если:

- 13c4  $(\ddagger)$  либо  $\mu(d) < \mu(d')$ ,  
 либо  $\mu(d) = \mu(d')$  и  $m < m'$ ,  
 либо  $\mu(d) = \mu(d')$ ,  $m = m'$ , и  $u < u'$  лексикографически в  $\lambda^m$ ,  
 либо же  $\mu(d) = \mu(d')$ ,  $m = m'$ ,  $u = u'$ , и  $n < n'$ .

Теперь полное упорядочение  $<_{\mathbf{L}}$  класса  $\mathbf{L}$  определяется так, что  $x <_{\mathbf{L}} y$  если либо (1)  $\lambda_x < \lambda_y$ , где  $\lambda_x$  – наименьший предельный ординал, для которого  $x \in \mathbf{L}_{\lambda_x}$ , либо же (2)  $\lambda_x = \lambda_y$  и  $x <_{\mathbf{L}_\lambda} y$ .  $\square$

## 7. Конструктивность и гёделевы операции

В этом разделе изложен предварительный материал к доказательству теоремы 2 ниже в §8. Мы начинаем со списка *гёделевых операций* по книге [10; гл. 13].

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(u, v) &= \{u, v\}, \\ \mathcal{G}_2(u, v) &= u \times v, \\ \mathcal{G}_3(u, v) &= \in \upharpoonright u = \{\langle x, y \rangle : x, y \in u \wedge x \in y\}, \\ \mathcal{G}_4(u, v) &= u \setminus v, \\ \mathcal{G}_5(u, v) &= u \cap v \quad - \quad \text{сводится к } \mathcal{G}_4, \text{ так как } u \cap v = u \setminus (u \setminus v), \\ \mathcal{G}_6(u, v) &= \bigcup u, \\ \mathcal{G}_7(u, v) &= \text{dom } u = \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in u)\}, \\ \mathcal{G}_8(u, v) &= u^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in u\}, \\ \mathcal{G}_9(u, v) &= \{\langle x, y, z \rangle : \langle x, z, y \rangle \in u\}, \\ \mathcal{G}_{10}(u, v) &= \{\langle x, y, z \rangle : \langle y, z, x \rangle \in u\}. \end{aligned}$$

Их можно сравнить с *рудиментарными операциями* Симпсона  $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_9$  в § 2. В частности операции  $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_6$  тождественны соответственно операциям  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_6, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_8$ . Имеются определенные соответствия и среди остальных операций.

Главное приложение гёделевых операций к теории конструктивности состоит в возможности элиминировать определение **Def** посредством следующей леммы.

ЛЕММА 14 (СЛЕДСТВИЕ 13.8 в [10]). *Если множество  $X$  транзитивно, то  $\mathbf{Def} X = \mathbf{Def}^* X$ , где  $\mathbf{Def}^* X = \mathbf{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X)$ , а через  $\mathbf{cl}(Y)$  обозначено замыкание множества  $Y$  относительно операций  $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{10}$ .* defG

Также существенную роль играют вопросы *абсолютности* в связи с гёделевыми операциями, которые мы изложим по [27; § 11].

Пусть  $\mathbf{K}$  – транзитивное множество или класс. Вводятся такие его свойства (A)–(F), из которых затем (лемма 15) будут получены важные следствия.

(A) Класс  $\mathbf{K}$  замкнут относительно операций  $\mathcal{G}_i, i = 1, \dots, 10$ . ka

(B)  $\mathbf{K}$  замкнут относительно операций  $\mathcal{G}_i'' X := \{\mathcal{G}_i(u, v) : u, v \in X\}, i = 1, \dots, 10$ , и операции  $\mathcal{G}^*(X) = \bigcup_{1 \leq i \leq 10} \mathcal{G}_i'' X$ . kb

(C)  $\omega \in \mathbf{K}$ . kc

Функция замыкания  $\mathbf{fcl}_X$  множества  $X$  вводится условиями:  $\mathbf{dom}(\mathbf{fcl}_X) = \omega$ ,  $\mathbf{fcl}_X(0) = X$ , и  $\mathbf{fcl}_X(n+1) = \mathcal{G}^*(\mathbf{fcl}_X(n)) = \{\mathcal{G}_i(u, v) : u, v \in \mathbf{fcl}_X(n) \wedge 1 \leq i \leq 10\}$ .

(D) Если  $X \in \mathbf{K}$ , то функция замыкания  $\mathbf{fcl}_X$  принадлежит  $\mathbf{K}$ . kd

(E) Если  $X \in \mathbf{K}$ , то  $\mathbf{Def}^* X \in \mathbf{K}$ . ke

В дополнение к понятию конструирующей последовательности  $\mathbb{F}_\beta$  длины  $\beta$  (см. лемму 9), назовем *модифицированной конструирующей последовательностью* (сокращенно МКП) длины  $\beta \in \mathbf{Ord}$  функцию  $\mathbb{F}_\beta^*$ , для которой  $\mathbf{dom}(\mathbb{F}_\beta^*) = \beta$ ,  $\mathbb{F}_\beta^*(0) = \emptyset$ ,  $\mathbb{F}_\beta^*(\lambda) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathbb{F}_\beta^*(\alpha)$  для предельных  $\lambda < \beta$ , и если  $\alpha + 1 < \beta$  то

$$\mathbb{F}_\beta^*(\alpha + 1) = \mathbf{Def}^*(\mathbb{F}_\beta^*(\alpha)).$$

Соответственно, положим  $\mathbf{L}_\alpha^* = \mathbb{F}_{\alpha+1}^*(\alpha)$ . Тогда  $\mathbb{F}_\beta^* = \mathbb{F}_\beta$  и  $\mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha$  в **SST** по лемме 14, но мы не утверждаем, что эти равенства сохраняются при релятивизации к произвольному транзитивному множеству. И последние свойства:

(F) Если  $\alpha \in \mathbf{Ord} \cap \mathbf{K}$ , то  $\mathbb{F}_{\alpha+1}^* \in \mathbf{K}$ . kf

(G) Если  $x \in \mathbf{K}$  то  $\exists \alpha \in \mathbf{Ord} \cap \mathbf{K} (x \in \mathbf{L}_\alpha^*)$ . kg

ЛЕММА 15 ([27], § 11). *Пусть  $\mathbf{K}$  – транзитивное множество или класс;* gabs

(1) *формулы  $x = \mathcal{G}_i(u, v), 1 \leq i \leq 10$ , абсолютны для  $\mathfrak{M}$ ;* gabs1

gabs2  
gabs3  
gabs4  
gabs5  
gabs6

- (2) если выполнено (A), то формулы  $Y = \mathcal{G}_i''(X)$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , и  $Y = \mathcal{G}^*(X)$  абсолютны для  $\mathfrak{M}$ ;
- (3) если выполнены (A),(B),(C), то формула  $C = \mathbf{fcl}_X$  абсолютна для  $\mathfrak{M}$ ;
- (4) если выполнены (A),(B),(C),(D), то формула  $Y = \mathbf{Def}^* X$  абсолютна для  $\mathfrak{M}$ ;
- (5) если выполнены все (A)–(E), то формула  $f = \mathbb{F}_{\alpha+1}^*$  абсолютна для  $\mathfrak{M}$ ,
- (6) если выполнены все (A)–(F), то формула  $X = \mathbf{L}_\alpha^*$  абсолютна для  $\mathfrak{M}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. элементарные выкладки в [27; § 11].  $\square$

le5

ЛЕММА 16 (SST). Класс  $\mathbf{L}$  удовлетворяет требованиям (A)–(F). Другими словами, все соответствующие функции, т. е.

$$\mathcal{G}_i, \quad \mathcal{G}_i'', \quad \mathcal{G}^*, \quad X \mapsto \mathbf{fcl} X, \quad X \mapsto \mathbf{Def}^* X, \quad \beta \mapsto \mathbb{F}_\beta^* = \mathbb{F}_\beta, \quad \alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha,$$

а также  $x \mapsto \alpha_x :=$  наименьший ординал  $\alpha$ , для которого  $x \in \mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha$ ,

принимают значения в  $\mathbf{L}$  на аргументах из  $\mathbf{L}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это также известный результат из основ теории конструктивности. Мы поэтому дадим лишь наброски доказательств.

Для (A) действует непосредственная проверка. Например, для  $\mathcal{G}_6$ , пусть  $u, v \in \mathbf{L}_\alpha$ . Тогда  $\mathcal{G}_6(u, v) = \bigcup u \subseteq \mathbf{L}_\alpha$  по транзитивности  $\mathbf{L}_\alpha$ , откуда

$$\bigcup u = \{z \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\alpha \models \exists y \in u (z \in y)\} \in \mathbf{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathbf{L}.$$

Для  $\mathcal{G}_8(u, v) = u^{-1}$ , если  $\langle x, y \rangle \in u \in \mathbf{L}_\alpha$ , то  $x, y \in \mathbf{L}_\alpha$  по транзитивности, и тогда множества  $\{y\}$  и  $\{y, x\}$  принадлежат  $\mathbf{L}_{\alpha+1}$ ,  $\langle y, x \rangle = \{\{y\}, \{y, x\}\} \in \mathbf{L}_{\alpha+2}$ , и наконец  $u^{-1} \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$ . Остальные операции  $\mathcal{G}_i$  рассматриваются аналогично  $\mathcal{G}_6$  или  $\mathcal{G}_8$ .

В сущности, если  $u, v \in X \in \mathbf{L}_\alpha$  и  $i \leq 10$ , то заведомо  $\mathcal{G}_i(u, v) \in \mathbf{L}_{\alpha+5}$ , и тогда  $\mathcal{G}_i''(X)$  и  $\mathcal{G}_i'''(X)$  принадлежат  $\mathbf{L}_{\alpha+6}$ , откуда и из леммы 15(1) следует (B).

$$\mathbf{h}_2(u) = \mathbf{h}_3(u) \cup \mathbf{h}_3(\mathbf{h}_3(u)) \cup \mathbf{h}_3(\mathbf{h}_3(\mathbf{h}_3(u))) \cup \dots \subseteq \mathbf{L}_{\alpha+\omega},$$

и наконец  $\mathbf{h}_2(u) \in \mathbf{L}_{\alpha+\omega+1}$ , что и требовалось. Абсолютность (б) для  $\mathbf{h}_3$  и  $\mathbf{h}_3$  следует из доказанного для  $\mathbf{h}_{1i}$ .

В частности, для  $\mathbf{h}_4 - \mathbf{h}_7$  это следует из определений и теоремы 5(i),(ii),(iv).  $\square$

fura3

## 8. Схема выделения в конструктивном универсуме

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ТЕОРЕМА 2, ОКОНЧАНИЕ). Мы рассуждаем в SST. Согласно лемме 10, достаточно проверить, что схема аксиом выделения **Sep** выполнена в  $\mathbf{L}$ .

Пусть напротив, схема **Sep** нарушена в  $\mathbf{L}$ , т. е. существуют: транзитивное множество  $B \in \mathbf{L}$ , скажем,  $B = \mathbf{L}_\alpha$  для какого-то  $\alpha$ , и формула  $\varphi(p, x)$  с параметром  $p \in \mathbf{L}$ , для которых множество  $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathbf{L}}(p, b)\}$  не принадлежит  $\mathbf{L}$ . (Заметим, что  $Y$  – множество в базовом универсуме SST, так как эта теория включает

**Sep.)** Беря  $<_{\mathbf{L}}$ -наименьшую пару множеств  $B, p \in \mathbf{L}$  с этими свойствами, мы сводим общий случай к следующему:

- (I)  $\varphi(\cdot)$  – беспараметрическая формула, не содержащая  $\forall$  (заменено на  $\neg \exists \neg$ ), ls\*  
и выполнено равенство  $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathbf{L}}(b)\} \notin \mathbf{L}$ .

Если  $\exists y \psi(y, x_1, \dots, x_k)$  – одна из экзистенциальных подформул формулы  $\varphi$  (возможно, и сама  $\varphi$ , если она начинается с  $\exists$ ), то положим  $S_\psi(x_1, \dots, x_k)$  равным  $<_{\mathbf{L}}$ -наименьшему множеству  $y \in \mathbf{L}$ , удовлетворяющему  $\psi^{\mathbf{L}}(y, x_1, \dots, x_k)$  – если такие  $y$  есть, а иначе  $S_\psi(x_1, \dots, x_k) = \emptyset$ . Таким образом, каждая  $S_\psi : \mathbf{L}^k \rightarrow \mathbf{L}$  является *скулемовской класс-функцией*, определенной над  $\mathbf{L}$  без параметров, где  $k = k(j) < \omega$  – арность. Добавим к списку функций  $S_\psi$  также функцию  $S(x) = x$  и следующие функции, определенные в обозначениях § 7.

- (II)  $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i'', \mathcal{G}^*, X \mapsto \mathbf{fcl}X, X \mapsto \mathbf{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X),$  fun  
 $\beta \mapsto \mathbb{F}_\beta^* = \mathbb{F}_\beta, \alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha, \alpha \mapsto \alpha + 1,$   
и  $x \mapsto \alpha_x :=$  наименьший ординал  $\alpha$ , для которого  $x \in \mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha$ ,

и пусть  $\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_n$  – этот полный расширенный список класс-функций. Мы предполагаем для простоты, что функции  $\beta \mapsto \mathbb{F}_\beta^* = \mathbb{F}_\beta, \alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha^*, \alpha \mapsto \alpha + 1$  принимают значение  $\emptyset$ , когда аргумент в  $\mathbf{L}$  не является ординалом. Тогда каждая функция из (II) становится класс-функцией, определенной над  $\mathbf{L}$  без параметров.

**ЛЕММА 17.**  $\mathcal{G}_i : \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbf{L}$ , и  $f : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$  для всех прочих класс-функций  $f$  из (II). vsop

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В неочевидных случаях следует из леммы 16. Например, для  $\beta \mapsto \mathbb{F}_\beta^*$ , если  $\beta \in \text{Ord}$ , то  $\mathbb{F}_\beta^* \in \mathbf{L}$  по лемме 16 в отношении свойства (D).  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Следующие формулы истинны в  $\mathbf{L}$  :

- (1)  $\forall u, v \exists x (x = \mathcal{G}_i(u, v)), i = 1, \dots, 10,$  nab1
- (2)  $\forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}_i'' X), i = 1, \dots, 10,$  nab2
- (3)  $\forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}^*(X) := \{\mathcal{G}_i(u, v) : 1 \leq i \leq 10 \wedge u, v \in X\}),$  nab3
- (4)  $\forall X \exists Y (Y = \mathbf{fcl}(X)),$  nab4
- (5)  $\forall X \exists Y (Y = \mathbf{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X)),$  nab5
- (6)  $\forall \alpha \in \text{Ord} \exists f (f = \mathbb{F}_{\alpha+1}^*),$  nab6
- (7)  $\forall \alpha \in \text{Ord} \exists \beta \in \text{Ord} (\beta = \alpha + 1),$  nab7
- (8)  $\forall x \exists \alpha \in \text{Ord} (x \in \mathbf{L}_\alpha^*).$  □ nab8

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Например, для формулы (4), пусть  $X \in \mathbf{L}$ . Тогда  $Y = \mathbf{fcl}X \in \mathbf{L}$  по лемме 17, а формула  $Y = \mathbf{fcl}X$  абсолютна для  $\mathbf{L}$  по лемме 15.  $\square$

Рассмотрим замыкание  $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{L}$  множества  $B \cup \{B\} \in \mathbf{L}$  относительно многократного действия класс-функций  $\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_n$ . Таким образом,  $\mathfrak{M}$  – класс, определимый без параметров, возможно, собственный класс.

- Mls1 Следствие 5. (I) Все формулы (1)–(8) следствия 4 истинны в  $\mathfrak{M}$ .  
 Mls2 (II)  $\mathfrak{M}$  – элементарная подструктура в  $\mathbf{L}$  для  $\varphi(b)$  из (I) при любом  $b \in B$ .  $\square$

Доказательство. (I)

(II) Стандартное теоретико-модельное рассуждение дает искомый результат.  $\square$

Далее, простое комбинаторное рассуждение приносит класс-функцию  $F$ , заданную на подходящем множестве  $P$ , для которой  $\mathfrak{M} = F'' P = \{F(p) : p \in P\}$ .

Именно, определим  $P$  как совокупность всех пар  $p = \langle T, f \rangle$ , где  $T = T_p \subseteq \omega^{<\omega}$  – конечное дерево,  $f = f_p$  – функция с  $\text{dom } f = T$ , если  $t \in \text{Max}(T)$  (множество всех концевых вершин), то  $f(t) \in B \cup \{B\}$ , а если  $t \in T \setminus \text{Max}(T)$ , то  $f(t) \in \{0, 1, \dots, n\}$ , причем если  $f(t) = j$  и  $k = k(j)$  (арность функции  $\mathbf{h}_j$ ), то  $\{1, \dots, k\} = \{\ell : t^\frown \ell \in T\}$ . В этом случае, определим

$$F_p(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in \text{Max}(T), \\ \mathbf{h}_j(F_p(t^\frown 1), \dots, F_p(t^\frown k)), & \text{при } t \notin \text{Max}(T), j = f(t), k = k(j) \end{cases}$$

для всех  $t \in T$ , и окончательно  $F(p) = F_p(\langle \rangle)$  для пустого кортежа  $\langle \rangle \in T$ . Равенство  $\mathfrak{M} = F'' P = \{F(p) : p \in P\}$  очевидно по построению.

Заметим, что  $P$  – в самом деле множество (в **SST**), поскольку оно определяется при помощи схемы **Sep** и операций леммы 6.

Пусть теперь класс-функция  $\tau : \mathfrak{M}$  на транзитивное множество или класс  $\mathfrak{N}$  является транзитивной свёрткой, т. е.,  $\tau(x) = \{\tau(y) : y \in x \cap \mathfrak{M}\}$  для всех  $x \in \mathfrak{M}$ . Для построения  $\mathfrak{N}$ ,  $\tau$  достаточно использовать лемму 3 для множеств вида  $M_\alpha = \mathfrak{M} \cap \mathbf{L}_\alpha$ ,  $\alpha \in \text{Ord}$ , и потом определить  $\tau$  как объединение всех полученных транзитивных свёрток  $\tau_\alpha : M_\alpha$  на транзитивное множество  $N_\alpha$ .

Согласно лемме 4(i) для суперпозиции  $F$  и  $\tau$ ,  $\mathfrak{N}$  – множество. Сверх того, коль скоро само  $B$  транзитивно, мы имеем

- 1ls (IV)  $B = \tau(B) \in \mathfrak{N}$ , и  $b = \tau(b) \in \mathfrak{N}$  для всех  $b \in B$ .

Отсюда, поскольку  $\tau : \mathfrak{M}$  на  $\mathfrak{N}$  есть  $\in$ -изоморфизм, мы получаем из 5:

- Nls (E) множество  $\mathfrak{N}$  – элементарная подструктура в  $\mathbf{L}$  по отношению к формуле  $\varphi(b)$  из (I) при любом  $b \in B$  и по отношению к универсальным замыканиям формул 4, с тем же ограничением  $\forall \alpha \in \text{Ord}$  для формул (4), (5), (6).

Соединяя (E) и (I) выше, мы получаем равенство (\*)  $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathfrak{N}}(b)\}$ .

Остается проверить, что множество  $\mathfrak{N}$  само принадлежит  $\mathbf{L}$ , что вместе с (\*) дает  $Y \in \mathbf{L}$  с искомым противоречием. Для этого заметим, что согласно (E), и поскольку универсальные замыкания формул 4(1–7) истинны в  $\mathbf{L}$ , имеет место:

- NN (F) универсальные замыкания формул 4(1–7) истинны в  $\mathfrak{N}$ , и потому:  
 (1) если  $u, v \in \mathfrak{N}$ , то  $\mathcal{G}_i(u, v) \in \mathfrak{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,

- (2) если  $X \in \mathfrak{N}$  то  $\mathbf{cl}X \in \mathfrak{N}$ ;
- (3) если  $X \in \mathfrak{N}$  то  $\{\mathcal{G}_i(u, v) : 1 \leq i \leq 10 \wedge u, v \in X\} \in \mathfrak{N}$ ;
- (4) если  $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$  то  $\mathbb{F}_\alpha \in \mathfrak{N}$ ;
- (5) если  $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$  то  $\mathbf{L}_\alpha \in \mathfrak{N}$ ;
- (6) если  $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$  то  $\alpha + 1 \in \mathfrak{N}$ .
- (7) если  $x \in \mathfrak{N}$  то  $x \in \mathbf{L}_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$ ;

Более подробно, формально мы должны записать (1) в виде  $\mathfrak{N} \models \forall u, v \exists \mathcal{G}_i(u, v)$ . Однако операции  $\mathcal{G}_i$  абсолютны для транзитивных множеств, откуда следуют как равенство  $\mathcal{G}_i(u, v) = (\mathcal{G}_i(u, v))^{\mathfrak{N}}$  и из него само утверждение (1). Точно таким же образом, мы имеем  $\mathbf{cl}X = (\mathbf{cl}X)^{\mathfrak{N}}$ , поскольку операция  $\mathbf{cl}$  абсолютна для транзитивных множеств, замкнутых относительно всех  $\mathcal{G}_i$  — отсюда следует (2). Аналогично для (3).

Отсюда, в частности, следует, что транзитивное множество  $\mathfrak{N}$  является *адекватным* в смысле определения (13.12) в [10] (после теоремы 13.16).

Но тогда конструктивное построение абсолютно для  $\mathfrak{N}$ , т.е.  $\mathbf{L}_\alpha = (\mathbf{L}_\alpha)^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$  для всех ординалов  $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$ . (См. об этой абсолютности там же в [10] после теоремы 13.16, в связи с предложениями (13.12) и (13.13).)

Из упомянутой абсолютности следует  $\mathfrak{N} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord} \cap \mathfrak{N}} \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_\lambda \in \mathbf{L}$  согласно (E)(4), где  $\lambda = \text{Ord} \cap \mathfrak{N}$  — предельный ординал в силу (E)(7), что и требовалось.  $\square$

## 9. Доказательство теорем 1 и 3

mas

Главное содержание этого раздела состоит в формулировке удобного достаточного условия для вывода принципа отражения (лемма 20 ниже) и, как следствие, вывода схем аксиом **Sep** и **Coll** в подходящих областях конструктивного универсума, с доказательством указанных теорем в самом конце.

Начинаем с ключевого определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (SST).** Определим  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$  как следующую формулу:

sig

- либо (A)  $\Omega = \text{Ord}$ ,  $K = \mathbf{L}$ , и ординал  $\omega_1^{\mathbf{L}}$  не существует, другими словами, в  $\mathbf{L}$  истинно, что все ординалы счетны,
- либо (B) ординал  $\Omega = \omega_1^{\mathbf{L}}$  существует, и  $K = \mathbf{L}_\Omega = \mathbf{L}_{\omega_1^{\mathbf{L}}}$ .

ssu

Таким образом,  $K = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{L}_\alpha$  в обоих случаях (A), (B).  $\square$

**ЛЕММА 18 (SST +  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$ ).** Если  $\alpha \in \Omega$ , то  $\mathbf{L}_\alpha$  счетно в  $\mathbf{L}$ .

2coun

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\alpha_0 \in \Omega$ . Тогда ординал  $\alpha = \alpha_0 + \omega$  также принадлежит  $\Omega$  и кроме того  $\alpha$  пределен. По определению 3, существует функция  $f \in \mathbf{L}$ ,  $f : \omega$  на  $\alpha$ . Лемма 12 приносит множество  $D = \omega \times \alpha \times \alpha^{<\omega} \in \mathbf{L}$  и функцию  $H \in \mathbf{L}$ ,  $H : D$  на  $\mathbf{L}_\alpha$ . Комбинируя  $f$  и  $H$  в  $\mathbf{L}$ , получаем функцию  $h \in \mathbf{L}$ ,  $h : \omega$  на  $\mathbf{L}_\alpha$ .  $\square$

z33mz

ЛЕММА 19 (**SST** +  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$ ). Пусть  $X \in K$ , а  $F : X \rightarrow K$  – класс-функция, определенная над  $\mathbf{L}$ . Тогда  $\text{ran } F = \{F(x) : x \in X\} \subseteq \mathbf{L}_\gamma$  для некоторого  $\gamma \in \Omega$ , поэтому  $F, \text{ran } F$  – множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 18, мы не ограничивая общности предполагаем, что  $X = \omega$ . Для  $k < \omega$ , через  $\delta_k$  обозначим наименьший ординал  $\delta \in \Omega$ , для которого  $F(k) \in \mathbf{L}_\delta$ . Предположим противное, т. е. в наших обозначениях множество  $\{\delta_k : k < \omega\}$  неограничено в  $\Omega$ . Тогда  $\Omega = \bigcup_{k < \omega} \delta_k$ .

В случае (А), для любого  $k$  найдется функция  $h \in \mathbf{L}$ ,  $h : \omega$  на  $\delta_k$ ; через  $h_k$  обозначим  $<_{\mathbf{L}[u]}$ -наименьшую из таких  $f$ . Если  $n = 2^k(2j + 1) - 1$ , то положим  $G(n) = h_k(j)$ . По построению,  $G$  является определимой класс-функцией  $\omega$  на  $\Omega = \text{Ord}$ . Следовательно,  $\Omega$  и  $G$  – множества по лемме 4(i) ибо  $\Omega$  транзитивно. Получаем противоречие, так как  $\text{Ord}$  не является множеством в **SST**.

В случае (В), имеем  $\Omega = \omega_1^{\mathbf{L}}$ . Определим  $h_k$  и  $G$  при помощи полного порядка  $<_{\mathbf{L}_\Omega}$  на  $\mathbf{L}_\Omega$  вместо  $<_{\mathbf{L}}$ . Тогда  $G$  – класс-функция  $\omega$  на  $\Omega = \omega_1^{\mathbf{L}}$ , определенная над  $\mathbf{L}_\Omega$  поскольку порядок  $<_{\mathbf{L}_\Omega}$  обладает этим же свойством. Таким образом,  $G \in \mathbf{L}_{\Omega+1} \subseteq \mathbf{L}$ , и поэтому ординал  $\Omega$  счетен в  $\mathbf{L}$ , опять с противоречием.  $\square$

z35mz

СЛЕДСТВИЕ 6 (**SST** +  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$ ). Пусть  $\alpha \in \Omega$ ,  $m < \omega$ , и  $G_1, \dots, G_m : K \rightarrow K$  суть класс-функции, определимые над  $\mathbf{L}$ . Существует предельный ординал  $\beta \in \Omega$ ,  $\beta > \alpha$ , удовлетворяющий  $G_k \restriction \mathbf{L}_\beta \subseteq \mathbf{L}_\beta$  для всех  $k = 1, \dots, m$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $G(x) = \langle G_1(x), \dots, G_m(x) \rangle$ . Лемма 19 приносит класс-последовательность  $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$  ординалов из  $\Omega$ , для которой  $G \restriction \mathbf{L}_{\alpha_n} \subseteq \mathbf{L}_{\alpha_{n+1}}, \forall n$ . Опять имеем  $\beta = \sup_n \alpha_n \in \Omega$  по лемме 19.  $\square$

В предположении  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$ , скажем, что ординал  $\beta \in \Omega$  отражает формулу  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , если эквивалентность  $\varphi^K(x_1, \dots, x_n) \iff \varphi^{\mathbf{L}_\beta}(x_1, \dots, x_n)$  выполнена для всех  $x_j \in \mathbf{L}_\beta$ . Следующая лемма об отражении выводится из следствия 6.

z36mz

ЛЕММА 20 (**SST** +  $\mathfrak{A}(\Omega, K)$ ). Если  $\alpha \in \Omega$  и  $\varphi$  – беспараметрическая формула, то существует предельный ординал  $\beta \in \Omega$ ,  $\beta > \alpha$ , который отражает каждую подформулу формулы  $\varphi$ , включая и саму  $\varphi$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, предполагаем, что  $\varphi$  не содержит  $\forall$  (иначе меняем  $\forall$  на  $\neg \exists \neg$ ). Фиксируем перечисление  $\psi_1, \dots, \psi_n$  всех подформул формулы  $\varphi$  (включая, возможно, и её саму), начинающихся с  $\exists$ .

Если  $j \leq n$ , то определяем класс-функцию  $G_j$  следующим образом.

Пусть  $\psi_j$  есть  $\exists y \vartheta_j(y, x_1, \dots, x_m)$ . Если  $p = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \in K$  и и имеется  $y \in K$ , для которого  $\vartheta_j^K(y, x_1, \dots, x_m)$ , то через  $G_j(p)$  обозначим  $<_{\mathbf{L}}$ -наименьшее из таких множеств  $y$ . В противном случае берем  $G_j(p) = \emptyset$ . Класс-функция  $G_j$  определима над  $\mathbf{L}$ , поскольку таковым является полное упорядочение  $<_{\mathbf{L}}$ .

Согласно следствию 6, существует ординал  $\beta \in \Omega$ ,  $\beta > \alpha$ , удовлетворяющий  $G_j'' \mathbf{L}_\beta \subseteq \mathbf{L}_\beta$  для всех индексов  $j = 1, \dots, n$ . Отсюда, индукцией по построению подформул, легко получается, что  $\beta$  отражает каждую подформулу формулы  $\varphi$ , в частности, и саму  $\varphi$ , что и требовалось.  $\square$

**ТЕОРЕМА 6** ( $\mathbf{SST} + \mathfrak{A}(\Omega, K)$ ). *Схемы аксиом **Sep** и **Coll** верны в  $K$ . Следовательно  $\mathbf{ZFC}^-$  в целом выполнена в  $K$  по лемме 10.*

z37mz

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для схемы **Sep**, рассмотрим беспараметрическую формулу  $\varphi(x, y)$ , и пусть  $\alpha \in \Omega$  и  $p \in X = \mathbf{L}_\alpha$ . Требуется доказать, что  $Y = \{x \in X : \varphi^K(x, p)\} \in K$ . По лемме 20, имеется предельный ординал  $\beta \in \Omega$ ,  $\beta > \alpha$ , отражающий  $\varphi(x, y)$ , так что

$$Y = \{x \in X : \varphi^{\mathbf{L}_\beta}(x, p)\} = \{x \in X : \mathbf{L}_\beta \models \varphi(x, p)\} \in \mathbf{L}_{\beta+1} \subseteq K.$$

Для схемы **Coll**, рассмотрим беспараметрическую формулу  $\varphi(x, y, z)$ , и пусть  $\alpha \in \Omega$ ,  $p \in X = \mathbf{L}_\alpha$ , и выполнено  $\forall x \in X \exists y \in K \varphi^K(x, y, p)$ . Лемма 20 приносит предельный ординал  $\beta \in \Omega$ ,  $\beta > \alpha$ , отражающий формулу  $\exists y \varphi(x, y, z)$  и все её подформулы, включая  $\varphi(x, y, z)$ , так что

$$\forall x \in X \exists y \in \mathbf{L}_\beta \varphi^{\mathbf{L}_\beta}(x, y, p), \text{ and } \forall x \in X \exists y \in \mathbf{L}_\beta \varphi^K(x, y, p). \quad \square$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** (ТЕОРЕМЫ 1 и 3). Теорема 1 элементарно следует из теоремы 3, поэом докажем последнюю. Собственно, вся работа уже сделана.

**Случай (б) теоремы 3.** Рассуждая в **SST**, мы имеем случай (В) определения 3 с  $u = \emptyset$ ,  $\Omega = \omega_1^{\mathbf{L}}$ ,  $K = \mathbf{L}^* = \mathbf{L}_{\omega_1^{\mathbf{L}}}$ . Тогда выполнено  $\mathfrak{A}(\omega_1^{\mathbf{L}}, \mathbf{L}^*)$ , и поэтому  $\mathbf{L}^*$  удовлетворяет  $\mathbf{ZFC}^-$  согласно теореме 6.

**Случай (а) теоремы 3.** Аналогично, но через случай (А) определения 3.  $\square$

## 10. Some other models

2om

Here we briefly describe three other interpretations of  $\mathbf{ZFC}^-$  in **SST** designed rather similar to  $\mathbf{L}^*$  of Theorem 3.

**Model 1.** Consider the least ordinal  $\langle \rangle$  such that the set  $\mathbf{L}_{\langle \rangle}$  is not countable in  $\mathbf{L}_{\langle \rangle+1}$  — provided such ordinals exist, and otherwise  $\langle \rangle =$  all ordinals. Put  $\mathbf{L}^\dagger = \bigcup_{\alpha \in \langle \rangle} \mathbf{L}_\alpha$ . It is demonstrated in [12] that  $\mathbf{L}^\dagger$  is an interpretation of  $\mathbf{ZFC}^-$  in **SST**.

**Model 2: a version of Model 1.** Consider the least ordinal  $\Xi$  such that the difference  $\mathbf{L}_{\Xi+1} \setminus \mathbf{L}_\Xi$  contains no sets  $x \subseteq \omega$  — the first *index ordinal* as defined in [4] — provided such ordinals exist, and otherwise  $\Xi =$  all ordinals. Arguments close to those in [12] show that  $\mathbf{L}^\ddagger = \bigcup_{\alpha \in \Xi} \mathbf{L}_\alpha$  is an interpretation of  $\mathbf{ZFC}^-$  in **SST**.

**Model 3.** Simpson defines in [23; VII.4.22] the set or class **HCL** of all sets  $x$  which belong to transitive sets  $X \in \mathbf{L}$ , countable in  $\mathbf{L}$ , and proves that **HCL** is an interpretation of **ZFC**<sup>−</sup> in **SST** yet again. But it looks like **HCL** is just equal to  $\mathbf{L}^*$  of Theorem 3.

## 11. Ramified analytical hierarchy — a shortcut ?

Cutting Theorem 1 to the equiconsistency of  $\mathbf{PA}_2$  and  $\mathbf{PA}_2^-$  (second order arithmetic with, resp., without the countable Choice  $\mathbf{AC}_\omega$ ), one may want to manufacture a true second-order arithmetical proof, not involving set theories like  $\mathbf{Z}^-$ ,  $\mathbf{ZFC}^-$ ,  $\mathbf{ZF}^-$ , **TMC**. The above proof (Section ??) definitely does not belong to this type, since it involves **TMC** in quite significant way. In this section, we survey a possible approach to this problem.

Using earlier ideas of Kleene [18] and Cohen [5], a transfinite sequence of countable sets  $\mathbf{A}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  is defined in e.g. [4; § 3] by induction so that

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathcal{P}_{\text{fin}}(\omega) = \text{all finite sets } x \subseteq \omega \\ \mathbf{A}_{\alpha+1} &= \mathbf{Def} \mathbf{A}_\alpha \text{ for all } \alpha \\ \mathbf{A}_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbf{A}_\alpha \text{ for all limit } \lambda \\ \mathbf{A} &= \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{A}_\alpha = \text{all ramified analytic sets} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{Def} \mathbf{A}_\alpha = \{x \subseteq \omega : x \text{ is definable over } \mathbf{A}_\alpha \text{ with parameters}\}$  in the 2nd line. Thus a set  $x \subseteq \omega$  belongs to  $\mathbf{Def} \mathbf{A}_\alpha$  iff  $x = \{n : \mathbf{A}_\alpha \models \varphi(n)\}$  for some formula  $\varphi$  of  $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$  with parameters in  $\mathbf{A}_\alpha$ , and  $X \models \dots$  means the formal truth in the  $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$ -structure  $\langle \omega; X \rangle$ . The following is routine.

**LEMMA 21.** *If  $x \in \mathbf{A}_\alpha$  and  $y \subseteq \omega$  is arithmetical in  $x$  then  $y \in \mathbf{A}_\alpha$ . □*

In spite of obvious similarities with the Gödel constructible hierarchy (1), the ramified analytic hierarchy is collapsing below  $\omega_1$ :

**LEMMA 22 COHEN.** *There is an ordinal  $\beta_0 < \omega_1^{\mathbf{L}}$  such that  $\mathbf{A}_{\beta_0} = \mathbf{A}_{\beta_0+1} = \mathbf{A}_\gamma$  for all  $\gamma > \beta_0$ . Then obviously  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\beta_0}$  and  $\mathbf{A} \models \mathbf{PA}_2^-$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** By the cardinality argument, there is an ordinal  $\beta$  with  $\mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}_{\beta+1}$ . Then  $\mathbf{A}_\beta \models \mathbf{Sep}$ . Let  $\kappa = \beta^+$ , the least cardinal bigger than  $\beta$ . Consider a countable elementary submodel  $M$  of  $\mathbf{L}_\kappa$  containing  $\beta$ , and let  $H : M \xrightarrow{\text{onto}} \mathbf{L}_\lambda$  be the Mostowski collapse. Let  $\beta_0 = H(\beta)$ ; then  $\beta_0 < \lambda$ . As the construction of the sets  $\mathbf{A}_\alpha$  is obviously absolute for  $\mathbf{L}$ , we have  $\mathbf{A}_{\beta_0} \models \mathbf{Sep}$  as well, and then  $\mathbf{A}_{\beta_0} = \mathbf{A}_{\beta_0+1}$ , as required. □

The following theorem is essentially Lemma 2.2 in [22].

ТЕОРЕМА 7 **ZF**.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\beta_0}$  satisfies  $\mathbf{PA}_2$  with the choice schema  $\mathbf{AC}_\omega$ .

b0pa

To sketch a proof of this profound result, we need to have a look at the ramified analytic hierarchy from a somewhat different angle. This involves a “shift” of Gödel’s hierarchy and ensuing classification of ordinals:

- Let  $\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{L}_{\omega+\alpha}$  for all  $\alpha$ . In particular,  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{L}_\omega =$  all hereditarily finite sets, but still, similarly to (1),  $\mathbf{M}_{\alpha+1} = \mathbf{Def} \mathbf{M}_\alpha$ ,  $\forall \alpha$ , and the union is taken at limit steps. (See e.g. note 2 on p. 499 in [4] or Section 5 in [11] where “ $\mathbf{L}_0 =$  hereditarily finite sets” is defined outright.) Needless to say that  $\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha$  for all  $\alpha \geq \omega^2$ .
- An ordinal  $\alpha$  is an *index* if  $(\mathbf{M}_{\alpha+1} \setminus \mathbf{M}_\alpha) \cap \mathcal{P}(\omega) \neq \emptyset$ , [4, 20, 22].

We’ll refer to a result, established in [4], Theorems 1 and 9 by a complex mixture of set theoretic and recursion theoretic methods. A set  $E \subseteq \omega \times \omega$  is a *code* (or *arithmetical copy*, as in [4, 20]) of  $\mathbf{M}_\alpha$  if it is isomorphic to  $\in \upharpoonright \mathbf{M}_\alpha$  via a bijection of  $\mathbf{fld} E$  onto  $\mathbf{M}_\alpha$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) If  $\alpha \leq \beta_0 + 1$  then  $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha \cap \mathcal{P}(\omega)$ .

BP2

(ii) If  $\beta$  is an index then there is a code of  $\mathbf{M}_\beta$  in  $\mathbf{M}_{\beta+1}$ .

BP1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО SKETCH. (ii) Suppose that  $\beta$  is limit. Argue as in Section 8 with  $B = \omega$  and  $\mathbf{M}_\beta = \mathbf{L}_{\omega+\beta}$  instead of  $\mathbf{L}$ , so that  $Y = \{k \in \omega : \varphi^{\mathbf{M}_\beta}(k)\} \notin \mathbf{M}_\beta$ . In the notation of Section 8, we still have  $N = \mathbf{M}_\lambda$  for a limit  $\lambda$ . Note that  $\lambda < \beta$  is impossible since  $Y \in \mathbf{M}_{\lambda+1} \setminus \mathbf{M}_\beta$ . And  $\lambda > \beta$  is impossible as well since  $N$  is the transitive collapse of  $M \subseteq \mathbf{M}_\beta$ .

Thus  $\lambda = \beta$ , and hence  $\mathbf{M}_\beta$  is  $\in$ -isomorphic to  $M$ .

On the other hand,  $M \in \mathbf{M}_{\beta+1}$  as a definable subset of  $\mathbf{M}_\beta$ . Moreover, the inductive construction of  $M$  as the closure of  $\omega$  under a finite list of functions definable over  $\mathbf{M}_\beta$ , can be represented as a construction of a relation  $E \subseteq \omega \times \omega$ , still definable over  $\mathbf{M}_\beta$ , and such that  $\langle \omega; E \rangle$  is isomorphic to  $\langle M; \in \rangle$ , hence to  $\langle \mathbf{M}_\beta; \in \rangle$  by the above.

In other words,  $E \in \mathbf{M}_{\beta+1}$  is a code of  $\mathbf{M}_\beta$ , as required.

If  $\beta = \nu + k$ , where  $\nu$  is limit and  $1 \leq k < \omega$ , then we have to go back to Section 8 and, using  $\sigma$ , define a closed formula  $\sigma_k$  by induction on  $k$ , such that, for any transitive set  $M$ ,  $(\sigma_k)^M$  holds iff  $M = \mathbf{L}_{\nu+k}$  for some limit ordinal  $\nu$ . Namely, put  $\sigma_0 := \sigma$  as in Section 8, then let  $\sigma_{k+1}$  say: “there is a transitive set  $X$  with  $(\sigma_k)^X$  and (all sets) =  $\mathbf{Def} X$ ”.

Then go through the arguments in the limit case, *mutatis mutandis*.

(i) This claim goes by induction, using (ii) as the key argument. See [4] for details.

□ (Proposition)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО THEOREM 7. The equality  $\mathbf{A}_{\beta_0} = \mathbf{A}_{\beta_0+1}$  implies **Comprehension** in  $\mathbf{A}_{\beta_0}$ . The proof of  $\mathbf{AC}_\omega$  takes more effort. We claim that:

(I)  $\beta_0$  is not an index, whereas each  $\alpha < \beta_0$  is an index;

172i

(II)  $\beta_0$  is a limit ordinal — Lemma 2.5 in [22].

172iii

To prove (I), note that, by the choice of  $\beta_0$  and Proposition 1(i),  $\beta_0$  is not an index since  $(\mathbf{M}_{\beta_0+1} \setminus \mathbf{M}_{\beta_0}) \cap \mathcal{P}(\omega) = (\mathbf{A}_{\beta_0+1} \setminus \mathbf{A}_{\beta_0}) \cap \mathcal{P}(\omega) = \emptyset$ , whereas every  $\alpha < \beta_0$  is an index by similar reasons.

To verify (II), suppose to the contrary that  $\beta_0 = \alpha + 1$ . By (I) and Proposition 1(ii), there is a code  $x \subseteq \omega$  of  $\mathbf{M}_\alpha$  in  $\mathbf{M}_{\beta_0}$ , hence, in  $\mathbf{A}_{\beta_0}$  by Proposition 1(i). In particular,  $x$  codes all sets in  $\mathbf{M}_\alpha \cap \mathcal{P}(\omega)$ . Therefore we can extract a part  $y \subseteq \omega$  of  $x$ , which codes all those sets so that

17\*

$$\mathbf{M}_\alpha \cap \mathcal{P}(\omega) = \{(y)_n : n < \omega\}, \quad (2)$$

(see Section ?? on  $(x)_n$ ), and in addition  $y$  is arithmetical in  $x$ .

Then  $y \in \mathbf{A}_{\beta_0}$  by Lemma 21. But each  $z \in \mathbf{A}_{\beta_0}$  is arithmetical in  $y$  by (2). This is a contradiction since  $\mathbf{A}_{\beta_0} \models \mathbf{PA}_2^-$  by Lemma 22.

Now, coming to  $\mathbf{AC}_\omega$ , we are going to prove that

17ac

$$\forall n \exists x \Phi(n, x) \implies \exists y \forall n \Phi(n, (y)_n) \quad (3)$$

holds in  $\mathbf{A}_{\beta_0}$ , where  $\Phi$  is a  $\mathbf{PA}_2$  formula possibly with parameters in  $\mathbf{A}_{\beta_0}$ .

By Lemma 13, there exists a well-ordering  $<_{\mathbf{L}_{\beta_0}}$  of  $\mathbf{M}_{\beta_0}$ , definable over  $\mathbf{M}_{\beta_0}$ . ( $\beta_0$  is limit by (II).) Assuming that the left-hand side of (3) holds in  $\mathbf{A}_{\beta_0}$ , we let  $x_n$  be the  $<_{\mathbf{L}_{\beta_0}}$ -least element  $x \in \mathbf{A}_{\beta_0} = \mathbf{M}_{\beta_0} \cap \mathcal{P}(\omega)$  satisfying  $\mathbf{A}_{\beta_0} \models \Phi(n, x)$ .

The set  $y = \{(n, j) : j \in x_n\}$  is then definable over  $\mathbf{M}_{\beta_0}$ , hence  $y \in \mathbf{Def} \mathbf{M}_{\beta_0} = \mathbf{M}_{\beta_0+1}$ . We conclude that  $y \in \mathbf{A}_{\beta_0+1}$  by Proposition 1(i). Finally  $y \in \mathbf{A}_{\beta_0}$ , because  $\mathbf{A}_{\beta_0} = \mathbf{A}_{\beta_0+1}$  by the choice of  $\beta_0$ . Thus  $y$  witnesses the right-hand side of (3) since  $(y)_n = x_n$  by construction.  $\square$

The construction of the ramified analytical hierarchy is purely analytical and can be described by suitable  $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$  formulas. In principle, the proof of Theorem 7 remains valid in  $\mathbf{TMC}$  *mutatis mutandis*. For instance, as  $\omega_1$  may not exist in  $\mathbf{TMC}$ , the case  $\beta_0 = \text{Ord}$  has to be taken care of. Let

anall

$$\beta_0 = \begin{cases} \text{the least } \beta \text{ with } \mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}_{\beta+1} & - \text{ if such ordinals } \beta \text{ exist,} \\ \text{Ord, the class of all ordinals} & - \text{ otherwise,} \end{cases} \quad (4)$$

so that  $\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \in \beta_0} \mathbf{A}_\alpha$  in both cases. It can be an interesting problem to maintain the construction and the proof of Theorem 7 entirely by analytical means on the base of  $\mathbf{PA}_2^-$ , thereby giving a pure analytical proof of the ensuing equiconsistency of  $\mathbf{PA}_2^-$  and  $\mathbf{PA}_2$ .

In this study, the methods of second-order arithmetic and set theory were employed to giving a full, and self-contained in major details, proof of Theorem 1 on the formal equiconsistency of such theories as second-order arithmetic  $\mathbf{PA}_2^-$  and Zermelo–Fraenkel  $\mathbf{ZFC}^-$  without the Power Set axiom (Theorem 1). In addition, Theorems 3 and 2 contain new results related to constructible sets.

The following problems arise from our study.

ПРОБЛЕМА 1. Regarding the axiom **TrCov** (Transitive superset, Section 2), is it really independent of the rest of **TMC** axioms? On the other hand, can **TrCov** be eliminated from the above proofs of the main results? pro1

ПРОБЛЕМА 2. Find a purely analytical proof of Theorem 7 in  $\mathbf{PA}_2^-$  that does not involve  $\mathbb{V}$  of Definition 1, or any similar derived set-theoretic structure, explicitly or implicitly. pro1+

We expect that the methods and results of this paper can be used to strengthen and further develop Cohen’s set-theoretic forcing method in its recent applications to theories  $\mathbf{ZFC}^-$  and  $\mathbf{PA}_2$  in [17]. The technique of definable generic forcing notions has been recently applied for some definability problems in modern set theory, including the following applications:

- a model of **ZFC** in [13], in which minimal collapse functions  $\omega \xrightarrow{\text{onto}} \omega_1^{\mathbf{L}}$  first appear at a given projective level;
- a model of **ZFC** in [14], in which the Separation principle fails for a given projective class  $\Sigma_n^1$ ,  $n \geq 3$ ;
- a model of **ZFC** in [15], in which the full basis theorem holds in the absence of analytically definable well-orderings of the reals;.
- a model of **ZFC** in [16], in which the Separation principle holds for a given effective class  $\Sigma_n^1$ ,  $n \geq 3$ .

It is a common problem related to all these results to establish their  $\mathbf{PA}_2$ -consistency versions similar to Theorem 1.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carolin Antos and Victoria Gitman. Modern class forcing. In A. Daghighi et al., editors, *Research Trends in Contemporary Logic*. College Publications, forthcoming. [PhilArchive LINK](#), accessed: 2022-12-06.
- [2] Krzysztof R. Apt and W. Marek. Second order arithmetic and related topics. *Ann. Math. Logic*, 6:177–229, 1974.

- [3] Jon Barwise, editor. *Handbook of mathematical logic. Reprint*, volume 90 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1982.
- [4] George Boolos and Hilary Putnam. Degrees of unsolvability of constructible sets of integers. *Journal of Symbolic Logic*, 33(4):497–513, 1969.
- [5] P. J. Cohen. A minimal model for set theory. *Bull. Am. Math. Soc.*, 69:537–540, 1963.
- [6] Keith Devlin. *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory*. Undergraduate Texts Math. New York: Springer-Verlag, 2 edition, 1993.
- [7] Keith J. Devlin. *Constructibility*. Perspect. Log. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: Association for Symbolic Logic (ASL), 2016.
- [8] Victoria Gitman, Joel David Hamkins, and Thomas A. Johnstone. What is the theory ZFC without power set? *Math. Log. Q.*, 62(4-5):391–406, 2016.
- [9] Victoria Gitman and Richard Matthews. ZFC without power set II: Reflection strikes back. *Fundam. Math.*, 264(2):149–178, 2023.
- [10] Thomas Jech. *Set theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, The third millennium revised and expanded edition, 2003. Pages xiii + 769.
- [11] Carl G. Jockusch, jun. and Stephen G. Simpson. A degree-theoretic definition of the ramified analytical hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 10:1–32, 1976.
- [12] V. G. Kanovei. Theory of Zermelo without power set axiom and the theory of Zermelo–Fraenkel without power set axiom are relatively consistent. *Math. Notes*, 30:695–702, 1981.
- [13] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Definable minimal collapse functions at arbitrary projective levels. *J. Symb. Log.*, 84(1):266–289, 2019.
- [14] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Models of set theory in which separation theorem fails. *Izvestiya: Mathematics*, 85(6):1181–1219, 2021.
- [15] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. The full basis theorem does not imply analytic wellordering. *Ann. Pure Appl. Logic*, 172(4):46, 2021. Id/No 102929.
- [16] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. A model in which the Separation principle holds for a given effective projective Sigma-class. *Axioms*, 11(3), 2022. Article No 122.
- [17] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Jensen  $\Delta_n^1$  reals by means of ZFC and second-order Peano arithmetic. *Axioms*, 13(2), 2024. Article No 96.
- [18] S. C. Kleene. Quantification of number-theoretic functions. *Compos. Math.*, 14:23–40, 1958.
- [19] Georg Kreisel. A survey of proof theory. *J. Symb. Log.*, 33:321–388, 1968.
- [20] Stephen Leeds and Hilary Putnam. An intrinsic characterization of the hierarchy of constructible sets of integers. Logic Colloqu. '69, Proc. Summer School Colloqu. math. Logic, Manchester 1969, 311–350 (1971)., 1971.
- [21] W. Marek.  $\omega$ -models of second order arithmetic and admissible sets. *Fundam. Math.*, 98:103–120, 1978.
- [22] W. Marek and M. Srebrny. Gaps in the constructible universe. *Ann. Math. Logic*, 6:359–394, 1974.
- [23] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: ASL, 2nd edition, 2009. Pages xvi + 444.

- [24] Andrzej M. Zarach. Replacement  $\nrightarrow$  collection. In *Gödel '96. Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy*, pages 307–322. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [25] P. Zbierski. Models for higher order arithmetics. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 19:557–562, 1971.
- [26] P. Zbierski. Non standard interpretations of higher order theories. *Fundam. Math.*, 112:175–186, 1981.
- [27] Т. Йех. *Теория множеств и метод форсинга*. “Мир”, Москва, 1973. Пер. с англ. В.И. Фуксона под ред. В.М. Гришина, оригинал Thomas Jech, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 217, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

### **В. Г. Кановей**

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича  
 Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва  
*E-mail:* [kanovei@iitp.ru](mailto:kanovei@iitp.ru)

### **В. А. Любецкий**

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича  
 Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва  
*E-mail:* [lyubetsk@iitp.ru](mailto:lyubetsk@iitp.ru)