Математические заметки

Том ___ выпуск ___ год ____

УДК 510.223+510.225

О конструктивных множествах в теории множеств Симпсона

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Теория множеств Симпсона **SST** получается из **ZF** удалением аксиомы степени и схемы аксиом подстановки (схема выделения сохраняется), и добавлением аксиом: 1) транзитивного надмножества, 2) транзитивной свертки фундированных отношений, 3) счетности, и 4) декартова произведения. Метаматематически, **SST** есть теория стандартной теоретико-множественной надстройки над универсумом арифметики второго порядка $\mathbf{Z}_2$ (без аксиомы выбора), допускает интерпретацию в $\mathbf{Z}_2$ и равнонепротиворечива с $\mathbf{Z}_2$. Симпсон показал, что построение класса **L** всех конструктивных множеств по Гёделю осуществимо в этой теории, несмотря на отсутствие схемы аксиом подстановки, которая обычно используется для обоснования трансфинитной индукции в **ZF**. Исследуя класс **L** в теории Симпсона, мы доказываем, что класс **L** удовлетворяет самой **SST** без аксиомы счетности, в частности, удовлетворяет схеме аксиом выделения.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: конструктивность; теория множеств Симпсона; арифметика второго порядка

1. Введение

Симпсон [17; гл. VII] провел тщательное исследование взаимосвязей между различными подтеориями арифметики второго порядка $\mathbf{Z}_2$ и теориями множеств без аксиомы степени но с аксиомой **Cntbl** о счетности каждого множества. Как своего рода ядро своих теоретико-множественных схем, Симпсон берет теорию $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$, полученную из теории Цермело **Z** удалением аксиомы степени и схемы выделения и добавлением 1) аксиомы существования транзитивных надмножеств 2) аксиомы существования транзитивной модели для любого фундированного бинарного отношения (*свёртка Мостовского*), 3) аксиомы **Cntbl** о счетности каждого множества, и 4) аксиомы универсальной определенности одного варианта гёделевых операций (куда входит, например, существование $\{u, v\}$ и $u \times v$ для любых множеств u и v). К этой базовой теории Симпсон добавляет схемы выделения для разных классов $\in$-формул, и, как законченный вариант, можно добавить полную схему выделения **Sep** (или Π^{set}_∞-comprehension, как в [17]). Так полученную теорию $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} + \mathbf{Sep}$ мы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

называем *теорией множеств Симпсона* и обозначаем через **SST**. См. ниже §§ 2,3 подробнее об аксиомах этой теории и некоторых их непосредственных следствиях.

С точки зрения оснований математики, теория **SST** важна тем, что она в точности является теорией стандартной интерпретации теории множеств в арифметике второго порядка $\mathbf{Z}_2$ при помощи фундированных деревьев, как показано в [17; § VII.3]. Об этом см. также в статьях [1, 15, 19, 20] и др., или ниже в § 4 этой статьи.

Симпсон установил в [17; § VII.4] что теория **SST** (и даже до какой-то степени $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$) достаточно сильна для выполнения многих типичных теоретико-множественных построений по трансфинитной индукции, включая адекватное построение класса $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$ конструктивных множеств с выводом ряда главных свойств иерархии множеств $\mathbf{L}_\alpha$ — несмотря на отсутствие схемы подстановки, которая обычно используется для этих целей в **ZF**. В этом направлениии, Симпсон фактически получает — в иной терминологической системе — следующий результат в [17] (теорема VII.5.4 и утверждение об аксиоме выбора в ее доказательстве):

Теорема (**SST**). *Класс или множество* **HCL** $\subseteq$ **L** *всех множеств* x, *принадлежащих транзитивному и счетному в* **L** *множеству* $y \in \mathbf{L}$, *удовлетворяет аксиомам* $\mathbf{ZFC}^-$. □

Здесь $\mathbf{ZFC}^-$ — это **ZFC** без аксиомы степени, см. § 2.

Фундаментальное следствие из этой теоремы состоит в *равнонепротиворечивости* теорий $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{ZF}^-$, $\mathbf{ZFC}^-$ (без аксиомы степени), а также арифметики второго порядка $\mathbf{Z}_2$. Этот результат о непротиворечивости известен по крайней мере с 1960х: он отмечен в [14], полное доказательство изложено, например, в [22]. См. также [6, 10, 11, 13, 23] о последних результатах о непротиворечивости в связи с $\mathbf{Z}_2$. См. более подробно об этих результатах в нашей недавней статье [12].

Что касается самого класса **L** в теории **SST**, то, в противоположность его подклассу **HCL**, он остался мало исследованным в монографии [17] в контексте аксиом теории множеств. Указано лишь, что **L** не обязательно удовлетворяет аксиоме счетности (см. ниже пример 1). В положительном же направлении рассмотрен лишь частный случай **Sep** для отношений типа Σ_1 (упражнение VII.5.5 в [17]). Мы заполняем этот пробел следующей теоремой:

Теорема 1 (**SST**). *Класс* **L** *удовлетворяет аксиомам теории* **SST**, *за исключением, возможно, аксиомы счетности* **Cntbl**, *а также таким двум аксиомам*:

(I) *каждое множество можно вполне упорядочить* (ослабление **Cntbl**);

(II) *для каждого множества* X *найдется надмножество* $Y \supseteq X$, *содержащее все свои конечные подмножества.*

В частности, **L** *удовлетворяет схеме выделения* **Sep** *для формул любого типа. Следовательно, класс (или множество)* $\mathbf{L} \cap \mathscr{P}(\omega)$ *удовлетворяет* $\mathbf{Z}_2$.

Теорема 1 – главный результат этой статьи. Она доказана в § 7 ниже на основе изложенных в §§ 5, 6 результатов о конструктивности в контексте **SST**.

2. Теория множеств Симпсона

Теория $\mathbf{ZFC}^-$ получается из теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC** так:

(I) аксиома степени **PS** удаляется — это удаление и символизирует минус в аббревиатуре;

(II) обычная аксиома выбора **AC** по Цермело как в **ZFC** удаляется (ибо без **PS** она неэффективна), а вместо нее вводится *аксиома полного упорядочивания* **WOA**, постулирующая возможность вполне упорядочить любое множество;

(III) схема выделения **Sep** сохраняется, но схема подстановки **Repl** (слишком слабая в отсутствие **PS**) замещается схемой *собирания*:

$\mathbf{Coll}: \forall X \big(\forall x \in X \, \exists y \, \Phi(x,y) \implies \exists Y \, \forall x \in X \, \exists y \in Y \, \Phi(x,y)\big)$.

Известно, что $\mathbf{Coll} + \mathbf{Sep} \implies \mathbf{Repl}$.

См. работы [7, 8] за подробностями о теории $\mathbf{ZFC}^-$. Также см. [9], [18], [5; разд. 2] и др. о различных но эквивалентных формулировках схемы собирания.

- $\mathbf{ZF}^-$ есть $\mathbf{ZFC}^-$ без аксиомы полного упорядочивания **WOA**;
- $\mathbf{Z}^-$ есть $\mathbf{ZF}^-$ без схемы собирания **Coll**. Другими словами, $\mathbf{Z}^-$ содержит аксиомы экстенсиональности, пары $\{x, y\}$, суммы или объединения $\bigcup X$, бесконечности, регулярности, и схему **Sep**. См., например, [21] об этих аксиомах.

Наконец, определим *теорию множеств Симпсона* **SST** как $\mathbf{Z}^-$ с добавленными следующими четырьмя аксиомами **Prod**, **TrCov**, **Beta**, **Cntbl**:

Декартово произведение, Prod: $\forall X, Y$, существует множество $X \times Y$.

Транзитивное накрытие, TrCov: $\forall X$, существует транзитивное множество $Y \supseteq X$.

Аксиома Beta, или **свёртка Мостовского:** любое фундированное отношение A на множестве $D = \mathsf{fld}\, A := \mathtt{dom}\, A \cup \mathtt{ran}\, A$ допускает транзитивное множество X и функцию $\boldsymbol{\mu} : D$ на X, удовлетворяющую

$(*)$ $\boldsymbol{\mu}(d) = \{\boldsymbol{\mu}(j) : j \, A \, d\}$, для всех $d \in D$.

Функция $\boldsymbol{\mu}$ и множество X определены этим условием однозначно. Функция $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_A$ называется *функцией свёртки* для A.

Напомним, что бинарное отношение A на множестве $D = \mathsf{fld}\, A$ *фундировано*, если любое непустое $Y \subseteq D$ содержит элемент $y \in Y$, для которого $\forall x \in Y \, \neg\, (x \, A \, y)$.

Счетность Cntbl: $\forall x \, \exists f \, (f : x \to \omega$ 1–1 функция), т. е. все множества счетны.

Понятно, что $\mathbf{SST} \subseteq \mathbf{ZF}^- + \mathbf{Cntbl}$.

Об аксиоме **Beta** см. книгу [17], определение VII.3.8 и замечания в конце § VII.3 о её истории. Вывод **Beta** из **Repl** см. например в [9; теорема 6.15].

В данной формулировке, теория **SST** была рассмотрена в заметке [22], под другим названием и с некоторыми незначительными различиями в аксиомах.

Сам Симпсон подошел к аксиоматике, равносильной нашей **SST**, в [17; VII.3.3 и VII.3.8] и ранее в [16], с позиций, связанных с формальными системами в языке арифметики второго порядка и их отражением в теории множеств. Именно, он ввел теорию $\mathbf{ATR}_0^{\mathrm{set}}$ в $\in$-языке, содержащую такие аксиомы:

(a) аксиомы равенства: $=$ есть отношение эквивалентности, а отношение $\in$ является $=$-инвариантным;

(b) экстенсиональность, бесконечность, регулярность в их обычных **ZF**-формах;

(c) аксиома рудиментарной замкнутости, которая утверждает, для всех множеств u, v, существование множеств $\mathcal{F}_1(u,v) = \{u, v\}$, $\mathcal{F}_2(u,v) = u \smallsetminus v$, $\mathcal{F}_3(u,v) =$

$u \times v$, $\mathcal{F}_4(u,v) = \bigcup u$, а также множеств:

$$\begin{array}{lclcl} \mathcal{F}_5(u,v) & = & \in\restriction u & = & \{\langle x,y\rangle : x,y \in u \wedge x \in y\}\,, \\ \mathcal{F}_6(u,v) & = & u^{-1} & = & \{\langle x,y\rangle : \langle y,x\rangle \in u\}\,, \\ \mathcal{F}_7(u,v) & & & = & \{\langle y,\langle x,z\rangle\rangle : \langle y,x\rangle \in v \wedge z \in u\}\,, \\ \mathcal{F}_8(u,v) & & & = & \{\langle y,\langle z,x\rangle\rangle : \langle y,x\rangle \in v \wedge z \in u\}\,, \\ \mathcal{F}_9(u,v) & & & = & \{z : \exists\, x\, (x \in u \wedge z = v\text{"}\{x\}\}\,, \end{array}$$

где $v\text{"}\{x\} = \mathtt{ran}\,(v\restriction\{x\})$ — этот список гёделевых операций несколько отличается от принятого, например, в книге [9], см. § 6 ниже;

(d) наконец, аксиомы **TrCov**, **Beta**, **Cntbl** как выше; аксиома **Prod** не нужна ибо замещается операцией $\mathcal{F}_3$.

Лемма 1. $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} \subseteq \mathbf{SST}$, *а потому теория* **SST** *тождественна* $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} + \mathbf{Sep}$.

Доказательство. Пусть множества u, v произвольны. Согласно лемме 5 ниже, имеется множество Y, содержащее u, v и все их элементы, и замкнутое относительно конечных подмножеств — а тогда и относительно упорядоченных пар, троек и т. п. Тогда каждая из операций $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_8$ из (c), примененная к u, v, даёт результат, являющийся частью Y, т. е. множеством согласно **Sep**. Что касается $\mathcal{F}_9$, то в наших условиях выполнено $\mathcal{F}_9(u,v) \subseteq \mathscr{P}(Y)$, так что лемма 4(ii) ниже дает нужный результат при $D = u$ и $F(x) = v\text{"}\{x\}$. □

3. Развитие теории Симпсона

Здесь собрано несколько достаточно простых результатов в теории **SST**. В частности, аксиома **TrCov** и схема **Sep** приносят такой результат:

Лемма 2 (**SST**). *Для любого множества* X *существует его* транзитивное замыкание $\mathrm{TC}(X) = \bigcap\{Y \supseteq X : Y \text{ транзитивно}\}$. □

Лемма 3 (**SST**, транзитивная свёртка). *Для любого множества* D *существуют единственные транзитивное множество* X *и функция свёртки* $\tau : D$ на X, *удовлетворяющие* $\tau(x) = \{\tau(y) : y \in x \cap D\}$ *для всех* $x \in D$. □

Доказательство. Применим аксиому **Beta** к отношению $A = \in\restriction D$, которое фундировано по аксиоме регулярности. □

Для краткости, *класс-функцией* назовем любой (определимый) класс, удовлетворяющий обычному определению функции (состоит из упорядоченных пар, и т. д.). В этой терминологии, схема подстановки **Repl** постулирует в **ZF**, что любая класс-функция, область определения которой – множество, сама является множеством (множеством пар). Этой схемы нет в **SST**, но доказывается её важный частный случай: подстановка с транзитивной областью значений.

Лемма 4 (**SST**). *Пусть* F *– класс-функция, определенная на множестве* D. *Тогда* F *и образ* $R = F\text{"}D = \{F(x) : x \in D\}$ *– множества в таких двух случаях*:

(i) R *– транзитивный класс,*

(ii) *существует множество* Y, *для которого* $R \subseteq \mathscr{P}(Y)$.

Доказательство. (i) Отношение $A = \{\langle j, d\rangle : j, d \in D \wedge F(j) \in F(d)\}$ является легитимным множеством по аксиомам **Prod** и **Sep**. Далее, A фундировано, как прообраз класс-отношения $\in\restriction R$, чья фундированность легко следует из аксиомы регулярности. Значит, существуют транзитивное множество X и функция $\boldsymbol{\mu} : D$ на X, удовлетворяющие равенству (∗) из определения аксиомы **Beta**. Однако F удовлетворяет тому же равенству по определению отношения A. Отсюда $F = \boldsymbol{\mu}$ и $R = X$ – множества.

(ii) Аксиома **TrCov** позволяет предположить транзитивность множества Y. Также можно предполагать, что $D \cap Y = \varnothing$; иначе положим $D' = D \times \{Y\}$ и соответственно изменим F. В этих предположениях, берем $D_1 = D \cup Y$ и продолжаем F до F_1 идентичным отображением на Y. Тогда образ $F_1{}''D_1 = R \cup Y$ – транзитивное *множество* согласно (i). Наконец, $R \subseteq F_1{}''D_1$ – множество по **Sep**. □

Скажем, что множество S *замкнуто относительно конечных подмножеств*, если $\forall\, z \subseteq Y\,(z$ конечно $\implies z \in Y)$, или, короче, $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(Y) \subseteq Y$. Для любого X, вводится соответствующее *замыкание* $\mathrm{FSC}(X)$ как наименьшее надмножество $Y \supseteq X$, замкнутое относительно конечных подмножеств (если оно существует).

Лемма 5 (**SST**). *Для любого множества* X *имеется множество* $\mathrm{FSC}(X)$.

Доказательство. Для случая $X = \omega$, через p_k обозначим k-е простое число, так что $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, и т. д. Согласно **Prod** и **Sep**, $A = \{\langle k, n\rangle : k \geqslant 1 \wedge p_k$ делит $n\}$ – множество. Далее, $\mathsf{fld}\, A = \omega \smallsetminus \{0\}$, A фундировано (так как $k\, A\, n \implies k < n$), и

(†) если $u \subseteq \mathsf{fld}\, A$ конечно, то имеется $n \in \mathsf{fld}\, A$, для которого $u = \{k : k\, A\, n\}$.

По аксиоме **Beta** существует отображение $\boldsymbol{\mu} : \mathsf{fld}\, A$ на транзитивное множество R, удовлетворяющее $\boldsymbol{\mu}(n) = \{\boldsymbol{\mu}(k) : k\ A\ n)\}$, для всех $n \in \mathsf{fld}\, A$. Понятно, что $R = \mathrm{FSC}(\omega)$ согласно (†).

Теперь общий случай. Предполагаем, по **TrCov**, что X транзитивно. По **Cntbl**, имеется функция $h : \omega$ на X. Она продолжается до класс-функции H, определенной на бо́льшем множестве $R = \mathrm{FSC}(\omega)$ через $H\restriction\omega = h$, а если $u \in R \smallsetminus \omega$ то $H(u) = \{H(v) : v \in u\}$. Тогда $\mathtt{ran}\, H = \mathrm{FSC}(X)$ (класс), и поэтому $\mathtt{ran}\, H$ транзитивно вместе с X. Однако по лемме 4(i), как H так и $\mathtt{ran}\, H = \mathrm{FSC}(X)$ – множества. □

Лемма 6 (**SST**). *Для любых множеств* U *и* V, *существуют как множества* $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(U)$ *и* $U^{<\omega}$, *а также и* $U \times V$ *прямо по аксиоме* **Prod**.

Доказательство. $X = U \cup V = \bigcup\{U, V\}$ – множество даже в $\mathbf{Z}^-$, так что и $\mathrm{FSC}(X)$ – множество по лемме 5. Далее, понятно, что $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(U), U^{<\omega} \subseteq \mathrm{FSC}(U)$. Теперь результат следует из **Sep**. □

Таким образом, **SST** доказывает существование указанных множеств. Заметим, что $\mathbf{Z}^-$ недостаточно сильна даже для вывода существования $\omega \times \omega$!

Лемма 7 (**SST**). *Пусть* E *– строгое полное упорядочение множества* U. *Найдется ординал* λ *и порядковый изоморфизм* $\langle U ; E\rangle$ *на* $\langle \lambda ; \in\rangle$.

Доказательство. В частности, E – фундированное отношение на U. Аксиома **Beta** дает транзитивное множество $\lambda = X$, вполне упорядоченное отношением $\in$, т. е. ординал – и порядково изоморфное данному $\langle U ; E\rangle$. □

Следствие 1 (**SST**). *If* α, β *– ординалы, то существуют (как множества) ординалы* $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$, α^β. (В смысле стандартной арифметики ординалов.)

Доказательство. Достаточно определить вполне упорядоченные множества, представляющие указанные порядковые числа. Декартово произведение $\alpha\times\beta$ (множество по лемме 6), упорядоченное лексикографически, представляет $\alpha\cdot\beta$. Экспонента же α^β представлена множеством

$$W = \{f : D \to \alpha \smallsetminus \{0\} : D \subseteq \beta \text{ is finite}\}$$

с лексикографическим порядком, понимаемым в том смысле, что каждая $f \in D$ продолжена через $f(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \beta \smallsetminus D$. Заметим, что $W \subseteq \mathrm{FSC}(\beta \times \alpha)$ – множество согласно лемме 5. □

Замечание 1. Довольно интересный вопрос: можно ли доказать леммы 5, 6 и следствие 1 в **SST** без аксиомы **Cntbl** вообще, или хотя бы с заменой её более слабой аксиомой полного упорядочения **WOA**? Вопрос имеет определенное значение, поскольку по нашей теореме 1 конструктивная часть **L** универсума **SST** удовлетворяет **SST** без аксиомы **Cntbl** но с **WOA**, причем **L** не обязательно удовлетворяет **Cntbl**, см. пример 1 в конце § 5.

4. Метаматематика теории множеств Симпсона

Выбор аксиом **SST** выглядит достаточно случайным и мало обоснованным сверх чисто технической необходимости в тех или иных доказательствах. Целью этого раздела будет обосновать, что это не совсем так, и что на самом деле **SST** можно считать своего рода теоретико-множественным «когнатом» арифметики второго порядка $\mathbf{Z}_2$ (напомним: без аксиомы выбора). Главные результаты здесь таковы.

1°. Теория **SST** есть консервативное расширение $\mathbf{Z}_2$ в том смысле, что предложение P языка $\mathbf{Z}_2$ является теоремой $\mathbf{Z}_2$ в том и только в том случае, когда релятивизация $(P)^{\mathscr{P}(\omega)}$ является теоремой **SST**.

2°. Существует каноническая интерпретация $\mathbb{V}$ теории **SST** в $\mathbf{Z}_2$ (определение 3), такая, что структура $(\langle\omega\,;\mathscr{P}(\omega)\rangle)^{\mathbb{V}}$ интерпретации изоморфна данному универсуму теории $\mathbf{Z}_2$.

3°. И обратно, в универсуме **SST**, интерпретация $(\mathbb{V})^{\langle\omega\,;\mathscr{P}(\omega)\rangle}$, определенная в структуре $\langle\omega\,;\mathscr{P}(\omega)\rangle$, изоморфна данному универсуму теории **SST**.

Эти результаты можно извлечь из выкладок в [17; VII.3], но они известны фактически с 1960х годов. Для их вывода, рассматривается совокупность WFT всех непустых фундированных деревьев $T \subseteq \mathrm{Seq} = \omega^{<\omega}$. Напомним, что

- $\mathrm{Seq} = \omega^{<\omega}$ = все кортежи натуральных чисел;
- $\langle\rangle \in \mathrm{Seq}$ – пустой кортеж, $\langle k\rangle$ кортеж с k как единственным членом;
- $s^\frown j$ получается присоединением члена $j \in \omega$ к кортежу $s \in \mathrm{Seq}$ справа, а если $s, t \in \mathrm{Seq}$ то $s^\frown t \in \mathrm{Seq}$ обозначает *конкатенацию*;
- $T \subseteq \mathrm{Seq}$ – *дерево*, если $s^\frown j \in T \implies s \in T$;
- $\mathrm{Max}(T) = \{s \in T : \neg\,\exists\, j < \omega\,(s^\frown j \in T)\}$ – *концевые вершины* дерева T;
- дерево $T \subseteq \mathrm{Seq}$ *фундировано*, $T \in \mathrm{WFT}$, если $\neg\,\exists\, g : \omega \to \omega\, \forall\, m\,(g\restriction m \in T)$;
- если T – дерево и $s \in T$ то $T^s = \{t \in \mathrm{Seq} : s^\frown t \in T\}$ – также дерево, и если T фундировано то и T^s фундировано.

Определение 1 (**SST**). Пусть $T \in \mathrm{WFT}$. Существует единственная функция $\mathbf{set}_T$, определенная на T и удовлетворяющая $\mathbf{set}_T(u) = \{\mathbf{set}_T(u^\frown j) : u^\frown j \in T\}$ для всех $u \in T$, в частности, $\mathbf{set}_T(u) = \varnothing$ для $u \in \mathrm{Max}(T)$. Положим $\mathbf{Set}_T = \mathbf{set}_T(\langle\rangle)$. $\square$

Определенным недостатком арифметики второго порядка $\mathbf{Z}_2$ и ее вариантов является то, что кортежи натуральных чисел, деревья, функции $\mathrm{Seq} \to \mathrm{Seq}$ и т. п. объекты формально не входят в область изучения. Это можно поправить подходящей *кодировкой*. См. об этом в книге [17], гл. I, и особенно § II.2 с рядом примеров.

В частности, для кодировки кортежей, положим $s_0 = \langle\rangle$ (пустой кортеж), и если $n = 2^m(2j+1) - 1 \geqslant 1$ то $s_n = s_m{}^\frown j$. Тогда $\mathrm{Seq} = \{s_n : n < \omega\}$, и $n \mapsto s_n$ является биекцией. Соответственно, число $n = n(s)$ служит *кодом* кортежа $s = s_n \in \mathrm{Seq}$, а каждое множество $x \subseteq \omega$ служит *кодом* множества кортежей $\{s_n : n \in x\} \subseteq \mathrm{Seq}$. Следуя Симпсону [17; § II.2], это позволяет нам свободно рассматривать кортежи и их множества, оставаясь в рамках теории $\mathbf{Z}_2$. Это относится и к множествам $X \subseteq \omega \times \omega$, $H \subseteq \mathrm{Seq} \times \mathrm{Seq}$, и им подобным.

С этой оговоркой, мы можем рассматривать в $\mathbf{Z}_2$ кортежи и деревья, дать адекватное $\mathbf{Z}_2$-определение фундированности, и даже определить, для данных $S, T \in \mathrm{WFT}$, верны ли соотношения $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$ и $\mathbf{Set}_S \in \mathbf{Set}_T$, не определяя самих множеств $\mathbf{Set}_S$, $\mathbf{Set}_T$. Дается следующее определение в $\mathbf{Z}_2$.

Определение 2 ([4; 7.8] или [17; VII.3.13]). Пусть $S, T \in \mathrm{WFT}$. Множество $H \subseteq S \times T$ называется S,T-*бисимуляцией* когда, для всех $s \in S$ и $t \in T$, выполнено:

$$s\,H\,t \iff \left\{\begin{array}{l} \quad \forall\, s' = s^\frown j \in S\ \exists\, t' = t^\frown k \in T\ (s'\,H\,t') \ \wedge \\ \wedge\ \forall\, t' = t^\frown k \in T\ \exists\, s' = s^\frown j \in S\ (s'\,H\,t')\,. \end{array}\right.$$

Положим $S =^* T$, если существует S,T-бисимуляция H, для которой $\langle\rangle\,H\,\langle\rangle$.

Положим $S \in^* T$, когда $S =^* T^{\langle k\rangle}$ для какого-то $k \in \omega$. $\square$

Определение 3. *Структура* $\mathbb{V} = \langle \mathrm{WFT}\,; =^*, \in^* \rangle$ рассматривается в $\mathbf{Z}_2$.

$\mathbb{V}$-*интерпретация* $\lceil \Phi \rceil^{\mathbb{V}}$ любой $\in$-формулы Φ (с параметрами из WFT) естественно понимается через интерпретацию $=, \in$ как $=^*, \in^*$, и релятивизацию всех кванторов к WFT. Так например $\lceil x = y \rceil^{\mathbb{V}}$ есть $x =^* y$. $\square$

Упражнение 1 (**SST**). Пусть $S, T \in \mathrm{WFT}$. Докажите, что $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$, если и только если $S =^* T$ истинно в $\mathbf{Z}_2$-структуре $\langle \omega\,; \mathscr{P}(\omega)\rangle$. То же для $\in$ и $\in^*$. $\square$

Отношение бисимуляции $=^*$ между деревьями из WFT, и соответственно производное отношение $\in^*$, естественно формализуются в $\mathbf{Z}_2$ при помощи изложенной выше кодировки. Отсюда следует, что $\mathbb{V}$-интерпретация $\lceil \Phi \rceil^{\mathbb{V}}$ любой $\in$-формулы Φ с параметрами из WFT является формулой языка $\mathbf{Z}_2$.

Теорема 2 ($\mathbf{Z}_2$).

(i) *$\mathbb{V}$ – правильно определенная структура, т. е. $=^*$ – отношение эквивалентности на* WFT, *а бинарное отношение $\in^*$ на* WFT *$=^*$-инвариантно.*

(ii) *$\mathbb{V}$ удовлетворяет* **SST** *: если Φ – аксиома* **SST**, *то $\lceil \Phi \rceil^{\mathbb{V}}$ – теорема $\mathbf{Z}_2$.*

(iii) *Имеется канонический изоморфизм между подструктурой $\langle \omega\,; \mathscr{P}(\omega)\rangle^{\mathbb{V}}$ интерпретации и собственной структурой $\langle \omega\,; \mathscr{P}(\omega)\rangle$ универсума $\mathbf{Z}_2$.*

Результаты, близкие к разным частям этой теоремы, были известны уже Крайзелю [14], а также из статей [1], [19], [15; теорема 1.1 и следствие 1.1], и др.

Доказательство (набросок). Помимо источников выше, теорема фактически доказана в [17; § VII.3]. Именно, используя лишь подтеорию $\mathbf{ATR}_0 \subseteq \mathbf{Z}_2$ в роли базовой теории арифметики второго порядка, вместо самой $\mathbf{Z}_2$, лемма VII.3.20 в [17] доказывает, что если Φ – аксиома $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$, то $\lceil\Phi\rceil^{\mathbb{V}}$ – теорема $\mathbf{ATR}_0$ (и тогда также теорема $\mathbf{Z}_2$). Таким образом, для вывода (ii) лостаточно проверить **Sep** в $\mathbb{V}$.

Рассуждая в $\mathbf{Z}_2$, пусть $S \in \mathrm{WFT}$, $X = \{k : \langle k\rangle \in S\}$, а $\Phi(x)$ является $\in$-формулой с параметрами из WFT и с x как единственной свободной переменной. По определению, деревья вида $S^k = \{t \in \textsc{Seq} : k^\frown t \in S\}$, $k \in X$, принадлежат $\mathbb{V}$ и исчерпывают (с точностью до $=^*$) все $\in^*$-элементы S в $\mathbb{V}$. Используя схему свёртки из $\mathbf{Z}_2$, положим $Y = \{k \in X : \lceil\Phi(S^{\langle k\rangle})\rceil^{\mathbb{V}}\}$. Множество $T = \{\langle\rangle\} \cup \{t \in S : t(0) \in X\}$ – дерево из WFT. Остается проверить $\lceil T = \{x \in S : \Phi(x)\}\rceil^{\mathbb{V}}$.

Допустим, что $C \in \mathrm{WFT}$, $C \in^* S$, и выполнено $\lceil\Phi(C)\rceil^{\mathbb{V}}$. Тогда $C =^* S^{\langle k\rangle}$ для какого-то $k \in X$, так что выполнено $\lceil\Phi(S^{\langle k\rangle})\rceil^{\mathbb{V}}$, и тогда $k \in Y$. Отсюда имеем $C =^* T^{\langle k\rangle} = S^{\langle k\rangle} \in^* T$. Доказательство обратной импликации аналогично. □

Следствие 2 (из теоремы 2). *Утверждения 1°, 2°, 3° выше справедливы. Значит, теории* $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}^-$, **SST** *взаимно интерпретируемы и, следовательно, равнонепротиворечивы.* □

Упражнение 2. Мы опустили ряд деталей доказательства теоремы 2 и следствия 2, поскольку эти результаты не связаны с доказательством главной теоремы 1 настоящей статьи. Однако хорошим *упражнением* для читателя будет восстановить полное доказательство, следуя выкладкам в цитированных публикациях [1, 14, 15, 17, 19], а также провести вывод 1°, 2°, 3° из теоремы. □

Замечание 2. Пусть $\mathbf{AC}_\omega$ – счетная аксиома выбора в $\mathbf{Z}_2$, и $\mathbf{Z_2}^+ := \mathbf{Z}_2 + \mathbf{AC}_\omega$. Заменив $\mathbf{Z}_2$ на $\mathbf{Z_2}^+$ в теореме, пункт (ii) примет вид:

$$\text{если } \Phi \text{ – аксиома } \mathbf{ZFC}^-, \text{ то } \lceil\Phi\rceil^{\mathbb{V}} \text{ – теорема } \mathbf{Z_2}^+.$$

Этот вариант даже более известен и лучше отражен в литературе, см. [15]. □

5. Конструктивные множества в теории Симпсона

Здесь приведены ключевые определения и некоторые важные результаты из теории конструктивности в изложении [17; § VII.4]. Симпсон получает эти результаты в теории $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$ и в некотоовых ее расширениях внутри **SST** полученных добавлением определенных подсхем схемы **Sep**. Тем более эти результаты верны в cfvjq нашей базовой теории множеств **SST**.

Также отметим, что в настоящей работе рассматривается только частный случай $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$ более общего определения *относительной* конструктивности $\mathbf{L}[u] = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbf{L}_\alpha[u]$ в [17] — для значения $u = \varnothing$. Поэтому все данные ниже формулировки определений и результатов из [17; гл. VII] сведены именно к этому случаю.

Лемма 8 (**SST**, [17], лемма VII.4.1). *Пусть X – транзитивное множество. Существует (единственное) множество* $\mathbf{Def}\,X$, *состоящее из всех множеств $Y \subseteq X$, определимых над X $\in$-формулой с параметрами из X.*

Это множество $\mathbf{Def}\,X$ *транзитивно и удовлетворяет* $X \cup \{X\} \subseteq \mathbf{Def}\,X$. □

Доказательство леммы 8 в [17] состоит в выводе существования *функции оценки* для всех $\in$-формул с параметрами из данного транзитивного множества X. Другой подход к определению $\mathbf{Def}\,X$ (он, как и первый, принадлежит Гёделю) связан с тем, что $\in$-определимость элиминируется через гёделевы операции, см. лемма 11 ниже.

Далее, лемма 8 даёт следующий результат:

Лемма 9 (**SST**, [17], VII.4.2). *Пусть* $\beta \in \mathrm{Ord}$. *Имеется единственная функция* $f = \mathbb{f}_\beta$, *для которой* $\mathtt{dom}\, f = \beta$, $f(0) = \varnothing$, $f(\alpha+1) = \mathbf{Def}\, f(\alpha)$ *при* $\alpha + 1 < \beta$, *и* $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$ *для предельных* $\lambda < \beta$. □

Функция $\mathbb{f}_\beta$ называется *конструирующей функцией высоты* β.

Определение 4 (**SST**). Положим $\mathbf{L}_\alpha = \mathbb{f}_{\alpha+1}(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$. □

Таким образом, теория **SST** (фактически, даже $\mathbf{ATR}_0^{\mathrm{set}}$) достаточно сильна для построения стандартной конструктивной иерархии:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{L}_0 & = & \varnothing\,, \\ \mathbf{L}_{\alpha+1} & = & \mathbf{Def}\,\mathbf{L}_\alpha \ \text{ для всех } \ \alpha\,, \\ \mathbf{L}_\lambda & = & \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{L}_\alpha \ \text{ для всех предельных } \lambda\,, \\ \mathbf{L} & = & \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbf{L}_\alpha \ = \text{ все конструктивные множества}\,. \end{array}$$

Теорема 3 (**SST**). *Выполнено следующее*:

(i) *каждое* $\mathbf{L}_\alpha$ – *транзитивное множество, и* $\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$;

(ii) *если* $\alpha < \beta$ *то* $\mathbf{L}_\alpha \in \mathbf{L}_\beta$ *и* $\mathbf{L}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\beta$;

(iii) *если* λ *пределен то* $\mathbf{L}_\lambda$ *замкнуто относительно операций* (c) *в разделе 2*;

(iv) *если* $\beta \in \mathrm{Ord}$ *то* $\mathbb{f}_\beta \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$;

(v) *класс-функция* $\alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{Ord})$ *определима над* $\mathbf{L}$ *без параметров*;

(vi) *существует полное упорядочение* $<_{\mathbf{L}}$ *класса* $\mathbf{L}$, *определимое над* $\mathbf{L}$ *без параметров*;

(vii) *в классе* $\mathbf{L}$ *верны все аксиомы* **SST** *кроме, возможно,* **Sep** *и* **Cntbl**.

Доказательство. См. [17], теорема VII.4.3, об (i), (ii), (iii). Относительно (iv) и (v), см. теорему VII.4.8 и её доказательство в [17], или к примеру лемму 4.1 в [2; § B.5] или доказательство леммы 2.6(ii) в [5]. Относительно (vi) см. лемму VII.4.21 в [17]. Результат (vii) см. [17; следствие VII.4.15]. Наиболее сложная здесь проверка аксиомы **Beta** в $\mathbf{L}$ (теорема VII.4.12 там же) основана на лемме VII.4.10, согласно которой если $A \in \mathbf{L}$ – фундированное отношение, то его функция свёртки $\boldsymbol{\mu}_A$ (см. определение аксиомы **Beta** в § 2 выше) также принадлежит $\mathbf{L}$. □

Схема **Sep** в $\mathbf{L}$ будет доказана ниже в § 7. С другой стороны, для схем **Repl**/**Coll** и аксиомы **Cntbl** имеется такой контрпример.

Пример 1 (VII.4.17 в [17]). Рассуждая в **ZF**, положим $\mathfrak{M} = \mathbf{L}_\vartheta$, где $\vartheta = (\aleph_\omega)^{\mathbf{L}}$. Рассмотрим генерическое расширение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$ генерической последовательностью функций $f_n : \omega$ onto $(\aleph_n)^{\mathbf{L}}$. Тогда $\mathfrak{N}$ – модель **SST**, и в то же время $(\mathbf{L})^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}$, но схемы **Repl**/**Coll** и аксиома **Cntbl** определенно нарушены в $\mathfrak{M} = \mathbf{L}_\vartheta$. □

6. Конструктивность и гёделевы операции

В этом разделе мы доказываем следующую теорему, ключевой результат к доказательству теоремы 1 ниже в § 7.

Теорема 4. *Существует замкнутая беспараметрическая* $\in$*-формула* $\boldsymbol{\sigma}$ *такая, что* **SST** *доказывает следующее*:

(i) *в* $\mathbf{L}$ *истинна* $\boldsymbol{\sigma}$;

(ii) *если* $\boldsymbol{K}$ *транзитивно и* $\boldsymbol{K} \models \boldsymbol{\sigma}$, *то* $\boldsymbol{K} = \mathbf{L}_\lambda$, *где* $\lambda = \boldsymbol{K} \cap \mathrm{Ord}$.

Похожий результат впервые получен, вероятно, в [3]. Также похожий результат отмечен в книге [9], (13.13) перед леммой 13.17 в главе 13.

Мы начинаем доказательство теоремы со списка *гёделевых операций* по [9; гл. 13].

$$
\begin{array}{lclcl}
\mathcal{G}_1(u,v) & = & \{u,v\}\,, & & \\
\mathcal{G}_2(u,v) & = & u \times v\,, & & \\
\mathcal{G}_3(u,v) & = & \in\restriction u & = & \{\langle x,y\rangle : x,y \in u \land x \in y\}\,, \\
\mathcal{G}_4(u,v) & = & u \smallsetminus v\,, & & \\
\mathcal{G}_5(u,v) & = & u \cap v & - & \text{сводится к } \mathcal{G}_4\text{, так как } \ u \cap v = u \smallsetminus (u \smallsetminus v)\,, \\
\mathcal{G}_6(u,v) & = & \bigcup u\,, & & \\
\mathcal{G}_7(u,v) & = & \mathtt{dom}\, u & = & \{x : \exists\, y\, (\langle x,y\rangle \in u\}\,, \\
\mathcal{G}_8(u,v) & = & u^{-1} & = & \{\langle x,y\rangle : \langle y,x\rangle \in u\}\,, \\
\mathcal{G}_9(u,v) & = & & & \{\langle x,y,z\rangle : \langle x,z,y\rangle \in u\}\,, \\
\mathcal{G}_{10}(u,v) & = & & & \{\langle x,y,z\rangle : \langle y,z,x\rangle \in u\}\,.
\end{array}
$$

Их можно сравнить с *рудиментарными операциями* Симпсона $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_9$ в § 2. В частности операции $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_6$ тождественны соответственно операциям $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_6, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_8$. Имеются определенные соответствия и среди остальных операций.

Лемма 10 (**SST**). *Если* u, v – *множества, и* $i = 1, 2, \dots, 10$, *то* $\mathcal{G}_i(u,v)$ – *также множество.*

Доказательство. Для $\mathcal{G}_1$ – аксиома пары, для $\mathcal{G}_3$ – лемма 6, для $\mathcal{G}_3$ – та же лемма (для $u \times u$) и схема выделения, для $\mathcal{G}_{4,5}$ – опять схема выделения, для $\mathcal{G}_6$ – лемма 2 и схема выделения (поскольку $\bigcup u \subseteq \mathrm{TC}(u)$). Для операций $\mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_{10}$, имеем $\mathcal{G}_i(u,v) \subseteq \mathrm{FSC}(\mathrm{TC}(u))$, и результат дается леммами 2, 5 и схемой **Sep**. $\square$

Важное приложение гёделевых операций к теории конструктивности состоит в возможности элиминировать определение **Def** посредством следующей леммы, доказательство которой (исходно – в **ZF**) легко формализуется в **SST**.

Лемма 11 (следствие 13.8 в [9]). *Если множество* X *транзитивно, то* $\mathbf{Def}\, X = \mathbf{Def}^* X$, *где* $\mathbf{Def}^* X = \mathbf{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathscr{P}(X)$, *а через* $\mathbf{cl}(Y)$ *обозначено замыкание множества* Y *относительно операций* $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{10}$. $\square$

Также существенную роль играют вопросы *абсолютности* в связи с гёделвыми операциями, которые мы изложим по книге [21; § 11]. Пусть $\boldsymbol{K}$ – транзитивное множество или класс. Рассматриваются такие требования (A)–(G) к $\boldsymbol{K}$, из которых выводятся полезные свойства абсолютности (лемма 12 ниже).

(A) Класс $\boldsymbol{K}$ замкнут относительно операций $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \dots, 10$.

(B) $\boldsymbol{K}$ замкнут относительно операций $\mathcal{G}_i{}''X := \{\mathcal{G}_i(u,v) : u, v \in X\}$, $i = 1, \dots, 10$, и операции $\mathcal{G}^*(X) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant 10} \mathcal{G}_i{}''X$.

(C) $\omega \in \boldsymbol{K}$.

Для дальнейшего напомним, что *функция гёделева замыкания* $\mathbf{gcl}_X$ множества X вводится так: $\mathtt{dom}\,(\mathbf{gcl}_X) = \omega$, $\mathbf{gcl}_X(0) = X$, и

$$\mathbf{gcl}_X(n+1) = \mathcal{G}^*(\mathbf{gcl}_X(n)) = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant 10}\{\mathcal{G}_i(u,v)\colon u,v \in \mathbf{gcl}_X(n)\}.$$

Понятно, что $\mathbf{Def}^* X = \bigcup_n \mathbf{gcl}_X(n)$.

(D) Если $X \in \boldsymbol{K}$, то функция замыкания $\mathbf{gcl}_X$ принадлежит $\boldsymbol{K}$.

(E) Если $X \in \boldsymbol{K}$, то $\mathbf{Def}^* X \in \boldsymbol{K}$.

В дополнение к понятию конструирующей последовательности $\mathbb{f}_\beta$ длины β (см. лемму 9), назовем *модифицированной конструирующей последовательностью* (сокращенно МКП) длины $\beta \in \mathrm{Ord}$ функцию $\mathbb{f}^*_\beta$, для которой $\mathtt{dom}\,(\mathbb{f}^*_\beta) = \beta$, $\mathbb{f}^*_\beta(0) = \varnothing$, $\mathbb{f}^*_\beta(\lambda) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \mathbb{f}^*_\beta(\alpha)$ для предельных $\lambda < \beta$, и если $\alpha + 1 < \beta$ то

$$\mathbb{f}^*_\beta(\alpha+1) = \mathbf{Def}^*(\mathbb{f}^*_\beta(\alpha)).$$

Соответственно, положим $\mathbf{L}^*_\alpha = \mathbb{f}^*_{\alpha+1}(\alpha)$. Тогда $\mathbb{f}^*_\beta = \mathbb{f}_\beta$ и $\mathbf{L}^*_\alpha = \mathbf{L}_\alpha$ в **SST** по лемме 11, но мы не утверждаем, что эти равенства сохраняются при релятивизации к произвольному транзитивному множеству. И последние два свойства:

(F) Если $\alpha \in \mathrm{Ord} \cap \boldsymbol{K}$, то $\mathbb{f}^*_{\alpha+1} \in \boldsymbol{K}$.

(G) Если $x \in \boldsymbol{K}$ то $\exists\, \alpha \in \mathrm{Ord} \cap \boldsymbol{K}\, (x \in \mathbf{L}^*_\alpha)$.

Лемма 12 ([21], § 11). *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *– транзитивное множество или класс;*

(1) *формулы* $x = \mathcal{G}_i(u,v)$, $1 \leqslant i \leqslant 10$, *абсолютны для* $\boldsymbol{K}$;

(2) *если выполнено* (A), *то формулы* $Y = \mathcal{G}_i``(X)$, $1 \leqslant i \leqslant 10$, *и* $Y = \mathcal{G}^*(X)$ *абсолютны для* $\boldsymbol{K}$;

(3) *если выполнены* (A),(B),(C), *то формула* $C = \mathbf{gcl}_X$ *абсолютна для* $\boldsymbol{K}$;

(4) *если выполнены* (A),(B),(C),(D), *то формула* $Y = \mathbf{Def}^* X$ *абсолютна для* $\boldsymbol{K}$;

(5) *если выполнены* (A)–(E), *то формула* $f = \mathbb{f}^*_{\alpha+1}$ *абсолютна для* $\boldsymbol{K}$,

(6) *если выполнены* (A)–(F), *то формулы* $X = \mathbf{L}^*_\alpha$, $x \in \mathbf{L}^*_\alpha$ *абсолютны для* $\boldsymbol{K}$.

Доказательство. См. элементарные выкладки в [21; § 11], . □

Лемма 13 (**SST**). *Класс* $\mathbf{L}$ *удовлетворяет требованиям* (A)–(G). *Другими словами,* $\omega \in \mathbf{L}$, *и все соответствующие функции, т. е.*

$\mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}_i``$, $\mathcal{G}^*$, $X \mapsto \mathbf{gcl} X$, $X \mapsto \mathbf{Def}^* X$, $\beta \mapsto \mathbb{f}^*_\beta$, $\alpha \mapsto \mathbf{L}^*_\alpha$,
а также $x \mapsto \alpha_x :=$ *наименьший ординал* α, *для которого* $x \in \mathbf{L}^*_\alpha$,

принимают значения в $\mathbf{L}$ *на аргументах из* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Это также известный результат из основ теории конструктивности. Мы поэтому дадим лишь наброски доказательств.

Для (A) действует непосредственная проверка. Например, для $\mathcal{G}_6$, пусть $u, v \in \mathbf{L}_\alpha$. Тогда $\mathcal{G}_6(u,v) = \bigcup u \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ по транзитивности $\mathbf{L}_\alpha$, откуда

$$\bigcup u = \{z \in \mathbf{L}_\alpha \colon \mathbf{L}_\alpha \models \exists\, y \in u\,(z \in y)\} \in \mathbf{Def}\, \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathbf{L}.$$

Для $\mathcal{G}_8(u,v) = u^{-1}$, если $\langle x,y\rangle \in u \in \mathbf{L}_\alpha$, то $x, y \in \mathbf{L}_\alpha$ по транзитивности, и тогда множества $\{y\}$ и $\{y,x\}$ принадлежат $\mathbf{L}_{\alpha+1}$, $\langle y,x\rangle = \{\{y\},\{y,x\}\} \in \mathbf{L}_{\alpha+2}$, и наконец $u^{-1} \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$. Остальные операции $\mathcal{G}_i$ рассматриваются аналогично этим двум.

В сущности, если $u,v\in X\in \mathbf{L}_\alpha$ и $i\leqslant 10$, то заведомо $\mathcal{G}_i(u,v)\in\mathbf{L}_{\alpha+5}$, и тогда $\mathcal{G}_i``(X)$ и $\mathcal{G}^*(X)$ принадлежат $\mathbf{L}_{\alpha+6}$, откуда следует (B).

Далее, $\omega=\{k\in\mathbf{L}_\omega : k$ – ординал$\}\in\mathbf{L}_{\omega+1}$, откуда имеем (C).

И так далее, следуя практике работы с конструктивной иерархией в **ZF**. □

Следствие 3 (**SST**). *$\forall\exists$-замыкания формул леммы 12, т. е. предложения*

$$\begin{array}{lll}\forall\, u,v\,\exists\, x\,(x=\mathcal{G}_i(u,v)), & \forall\, X\,\exists\, Y\,(Y=\mathcal{G}_i``(X)), & \forall\, X\,\exists\, Y\,(Y=\mathcal{G}^*(X)),\\ \forall\, X\,\exists\, C\,(C=\mathbf{gcl}_X), & \forall\, X\,\exists\, Y\,(Y=\mathbf{Def}^* X), & \forall\,\alpha\in\mathrm{Ord}\,\exists\, f\,(f=\mathbb{f}^*_{\alpha+1}),\\ \forall\,\alpha\in\mathrm{Ord}\,\exists\, X\,(X=\mathbf{L}^*_\alpha), & \forall\, x\,\exists\,\alpha\in\mathrm{Ord}\,(x\in\mathbf{L}^*_\alpha) & \end{array}$$

все истинны в $\mathbf{L}$.

Доказательство. Например, для первой формулы, пусть $u,v\in\mathbf{L}$. Тогда $x=\mathcal{G}_i(u,v)\in\mathbf{L}$ по лемме 13. Но формула $x=\mathcal{G}_i(u,v)$ абсолютна для $\mathbf{L}$ по лемме 12. Следовательно, предложение $x=\mathcal{G}_i(u,v)$ истинно в $\mathbf{L}$. □

Лемма 14 (**SST**). *Пусть $\boldsymbol{K}$ – транзитивное множество, в котором истинны все 8 формул следствия 3, и $\omega\in\boldsymbol{K}$. Тогда $\boldsymbol{K}=\mathbf{L}_\lambda$, где $\lambda=\mathrm{Ord}\cap\boldsymbol{K}$.*

Доказательство. Коль скоро $\boldsymbol{K}\models\forall\, u,v\,\exists\, x\,(x=\mathcal{G}_i(u,v))$, а формула $x=\mathcal{G}_i(u,v)$ абсолютна для $\boldsymbol{K}$ по лемме 12(1), мы сразу имеем (A) для $\boldsymbol{K}$.

Аналогично, раз формулы $\forall\, X\,\exists\, Y\,(Y=\mathcal{G}_i``(X))$ и $\forall\, X\,\exists\, Y\,(Y=\mathcal{G}^*(X))$ истинны в $\boldsymbol{K}$, а формулы $Y=\mathcal{G}_i``(X)$ и $Y=\mathcal{G}^*(X))$ абсолютны для $\boldsymbol{K}$ по лемме 12(2) (коль скоро (A) уже установлено), то мы имеем и (B) для $\boldsymbol{K}$.

Продолжая один пункт за другим, мы проверяем все требования (A)–(G) для данного множества $\boldsymbol{K}$, опираясь на лемму 12 на каждом шаге. Последнее требование (G) влечет $\boldsymbol{K}=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}\cap\boldsymbol{K}}\mathbf{L}^*_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}\cap\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_\alpha=\mathbf{L}_\lambda$, где $\lambda=\mathrm{Ord}\cap\boldsymbol{K}$ – наименьший ординал, не принадлежащий (транзитивному) множеству $\boldsymbol{K}$. □

Доказательство (теорема 4). Определим искомую формулу как конъюнкцию всех восьми формул следствия 3 и формулы $\exists\, x\,(x=\omega)$. Следствие 3 и лемма 14 доказывают теорему. □

7. Схема выделения в конструктивном универсуме теории Симпсона

Доказательство (теорема 1). **Мы рассуждаем в SST.** Благодаря утверждению (vii) теоремы 3, достаточно проверить, что схема аксиом выделения **Sep** выполнена в $\mathbf{L}$, а также в $\mathbf{L}$ верны предложения (I) и (II) теоремы 1

Пусть напротив, схема **Sep** *нарушена* в $\mathbf{L}$, т. е. существуют: транзитивное множество $B\in\mathbf{L}$, скажем, $B=\mathbf{L}_\alpha$ для какого-то α, и формула $\varphi(p,x)$ с параметром $p\in\mathbf{L}$, для которых множество $Y=\{b\in B : \varphi^{\mathbf{L}}(p,b)\}$ не принадлежит $\mathbf{L}$. (Y – множество в базовом универсуме **SST**, так как эта теория включает **Sep**.) Используя полное упорядочение $<_{\mathbf{L}}$ теоремы 3(vi), берем $<_{\mathbf{L}}$-наименьшую пару множеств $B,p\in\mathbf{L}$ с указанными свойствами. Этим общий случай сводится к следующему:

(I) $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ – беспараметрическая формула, не содержащая $\forall$ (заменено на $\neg\exists\neg$), и выполнено равенство (‡) $Y=\{b\in B : \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{L}}(b)\}\notin\mathbf{L}$.

Вместе с $\boldsymbol{\varphi}$, также рассматривается:

(II) формула $\boldsymbol{\sigma}$ теоремы 4, аналогично записанная без $\forall$.

Если $\exists y\,\psi\,(y,x_1,\dots,x_k)$ – экзистенциальная подформула одной из формул $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}$, и $x_1,\dots,x_k\in\mathbf{L}$, то положим $S_\psi(x_1,\dots,x_k)$ равным $<_{\mathbf{L}}$-наименьшему элементу $y\in\mathbf{L}$, для которого $\psi^{\mathbf{L}}(y,x_1,\dots,x_k)$ — если такие y есть, а иначе $S_\psi(x_1,\dots,x_k)=\varnothing$. Таким образом, каждая $S_\psi:\mathbf{L}^k\to\mathbf{L}$ является *скулемовской класс-функцией*, определимой над $\mathbf{L}$ без параметров, где $k=k(j)<\omega$ – арность. Добавим к списку функций S_ψ также функцию $S(x)=x$, и пусть $\boldsymbol{h}_0,\dots,\boldsymbol{h}_n$ – этот полный список класс-функций. Каждая $\boldsymbol{h}_j$ – класс-функция, определенная над $\mathbf{L}$ без параметров.

Следующий шаг состоит в использовании процедуры *гёделева коллапса*. В рамках аксиоматики **ZFC** он состоит в выборе элементарной подмодели $\mathfrak{M}\subseteq M$ заданной мощности κ в заданном транзитивном множестве например вида $M=\mathbf{L}_\Omega$, где $\Omega>\kappa$ – определенный кардинал, и затем в транзитивной свёртке множества $\mathfrak{M}$ по лемме 3. Однако в **SST** существование кардиналов над ω недоказуемо, и поэтому гёделеву процедуру следует адаптировать. Именно, 1) мы берем весь класс $\mathbf{L}$ в роли начальной структуры M, 2) $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{L}$ строится как элементарная подмодель $\mathbf{L}$ относительно некоторого *конечного* числа формул – и случай когда $\mathfrak{M}$ – собственный класс, не исключается, и 3) рассматриваем транзитивную свёртку $\mathfrak{N}$ множества $\mathfrak{M}$. При этом $\mathfrak{N}$ получится именно множеством по лемме 4, даже в случае, когда $\mathfrak{M}$ – собственный класс.

Реализуя этот план, рассмотрим замыкание $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{L}$ множества $B\cup\omega\cup\{\omega,B\}\in\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}$ относительно многократного действия класс-функций $\boldsymbol{h}_0,\dots,\boldsymbol{h}_n$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ – класс, определимый без параметров, возможно, собственный класс.

Лемма 15. (i) *$\omega,B\in\mathfrak{M}$ и $\omega\cup B\subseteq\mathfrak{M}$;*

(ii) *$\mathfrak{M}$ – элементарная подструктура в $\mathbf{L}$ для $\boldsymbol{\varphi}(b)$ из* (I) *при любом $b\in B$, и потому $Y=\{b\in B:\boldsymbol{\varphi}^{\mathfrak{M}}(b)\}$ согласно равенству* ($\ddagger$) *в* (I)*;*

(iii) *формула $\boldsymbol{\sigma}$ истинна в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Стандартные теоретико-модельные следствия из построения $\mathfrak{M}$ при помощи сколемовских функций. □

Далее, простое комбинаторное рассуждение приносит класс-функцию F, заданную на подходящем множестве P, для которой $\mathfrak{M}=F\,``\,P=\{F(p):p\in P\}$.

Именно, определим P как совокупность всех пар $p=\langle T,f\rangle$, где $T=T_p\subseteq\omega^{<\omega}$ – конечное дерево, $f=f_p$ – функция с $\mathtt{dom}\,f=T$, если $t\in\mathrm{Max}(T)$ (множество всех концевых вершин), то $f(t)\in B\cup\{B\}$, а если $t\in T\smallsetminus\mathrm{Max}(T)$, то $f(t)\in\{0,1,\dots,n\}$, причем если $f(t)=j$ и $k=k(j)$ (арность функции $\boldsymbol{h}_j$), то $\{1,\dots,k\}=\{\ell:t^\frown\ell\in T\}$. В этом случае, определим

$$F_p(t)=\begin{cases} f(t)\,, & \text{при}\quad t\in\mathrm{Max}(T)\,,\\ \boldsymbol{h}_j(F_p(t^\frown 1),\dots,F_p(t^\frown k))\,, & \text{при}\quad t\notin\mathrm{Max}(T),\ j=f(t),\ k=k(j)\end{cases}$$

для всех $t\in T$, и окончательно $F(p)=F_p(\langle\rangle)$ для пустого кортежа $\langle\rangle\in T$. Равенство $\mathfrak{M}=F\,``\,P=\{F(p):p\in P\}$ очевидно по построению.

Заметим, что P – в самом деле множество (в **SST**), поскольку оно определяется при помощи схемы **Sep** и операций леммы 6.

Пусть теперь класс-функция $\tau:\mathfrak{M}$ на транзитивное множество или класс $\mathfrak{N}$ является транзитивной свёрткой, т. е., $\tau(x)=\{\tau(y):y\in x\cap\mathfrak{M}\}$ для всех $x\in\mathfrak{M}$. Для построения $\mathfrak{N},\tau$ достаточно использовать лемму 3 для множеств вида $M_\alpha=\mathfrak{M}\cap\mathbf{L}_\alpha$,

$\alpha \in \mathrm{Ord}$, и потом определить τ как объединение всех полученных транзитивных свёрток $\tau_\alpha : M_\alpha$ на транзитивное множество N_α.

Соласно лемме 4(i) для суперпозиции F и τ, $\mathfrak{N}$ является множеством.

Следствие 4. (i) *$\omega, B \in \mathfrak{N}$ и $x = \tau(x) \in \mathfrak{N}$ для всех $x \in B \cup \omega$;*

(ii) *$Y = \{b \in B : \varphi^{\mathfrak{N}}(b)\}$, следовательно, $Y \in \mathbf{Def}\,\mathfrak{N}$;*

(iii) *Формула $\boldsymbol{\sigma}$ истинна в $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. (i) выполнено поскольку множества B, ω транзитивны, и по построению выполнено $B \cup \omega \cup \{\omega, B\} \subseteq \mathfrak{M}$. Для вывода (ii) заметим, что $\tau : \mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$ есть $\in$-изоморфизм, и используем пункт (ii) леммы 15. Наконец, (iii) дается леммой 15(iii), опять же из-за того, что $\tau : \mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$ есть $\in$-изоморфизм. □

Однако, согласно выбору формулы $\boldsymbol{\sigma}$, множество $\mathfrak{N}$ имеет вид $\mathbf{L}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Отсюда следует $Y \in \mathbf{Def}\,\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_{\alpha+1}$, так что $Y \in \mathbf{L}$. Но это противоречит выбору множества Y в начале § 7. Вывод **Sep** в $\mathbf{L}$ этим противоречием закончен.

Завершая доказательство теоремы, заметим, что предложение (I) теоремы 1 выполнено в $\mathbf{L}$ поскольку каждое множество $\mathbf{L}_\lambda$ с предельным индексом λ, очевидно, замкнуто относительно конечных подмножеств. Далее, отсюда следует существование декартовых произведений в $\mathbf{L}$ по лемме 6. И уже отсюда и теоремы 3(vi) следует полная упорядочиваемость каждого множества в $\mathbf{L}$.

□ (теорема 1)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Krysztof R. Apt and W. Marek. Second order arithmetic and related topics. *Ann. Math. Logic*, 6:177–229, 1974.

[2] Jon Barwise, editor. *Handbook of mathematical logic. Reprint*, volume 90 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1982.

[3] G. Boolos. On the semantics of the constructible levels. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 16:139–148, 1970.

[4] Keith Devlin. *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory.* Undergraduate Texts Math. New York: Springer-Verlag, 2 edition, 1993.

[5] Keith J. Devlin. *Constructibility.* Perspect. Log. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: Association for Symbolic Logic (ASL), 2016.

[6] Victoria Gitman. Parameter-free schemes in second-order arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, page 1–19, 2025. Published online by Cambridge University Press: 27 January 2025.

[7] Victoria Gitman, Joel David Hamkins, and Thomas A. Johnstone. What is the theory ZFC without power set? *Math. Log. Q.*, 62(4-5):391–406, 2016.

[8] Victoria Gitman and Richard Matthews. ZFC without power set II: Reflection strikes back. *Fundam. Math.*, 264(2):149–178, 2023.

[9] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, The third millennium revised and expanded edition, 2003. Pages xiii + 769.

[10] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. On the significance of parameters in the Choice and Collection schemata in the 2nd order Peano arithmetic. *Mathematics*, 11(3), 2023. Article No 726.

[11] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Jensen Δ^1_n reals by means of ZFC and second-order Peano arithmetic. *Axioms*, 13(2), 2024. Article No 96.

[12] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Notes on the equiconsistency of ZFC without the power set axiom and 2nd order pa. *Axioms*, 14(12), 2025.

[13] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Parameterfree Comprehension does not imply full Comprehension in second order Peano arithmetic. *Studia Logica*, 113:109–124, 2025.

[14] Georg Kreisel. A survey of proof theory. *J. Symb. Log.*, 33:321–388, 1968.

[15] W. Marek. ω-models of second order arithmetic and admissible sets. *Fundam. Math.*, 98:103–120, 1978.

[16] Stephen G. Simpson. Set theoretic aspects of ATR_0 . Logic colloquium '80, Eur. Summer. Meet., Prague 1980, Stud. Logic Found. Math. 108, 255-271 (1982)., 1982.

[17] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic.* Perspectives in Logic. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: ASL, 2nd edition, 2009. Pages xvi + 444.

[18] Andrzej M. Zarach. Replacement $\nrightarrow$ collection. In *Gödel '96. Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy*, pages 307–322. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[19] P. Zbierski. Models for higher order arithmetics. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 19:557–562, 1971.

[20] P. Zbierski. Non standard interpretations of higher order theories. *Fundam. Math.*, 112:175–186, 1981.

[21] Т. Йех. *Теория множеств и метод форсинга.* "Мир", Москва, 1973. Пер. с англ. В.И. Фуксона под ред. В.М. Гришина, оригинал Thomas Jech, Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 217, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[22] В. Г. Кановей. Теории Цермело без аксиомы степени и Цермело–Френкеля без аксиомы степени равнонепротиворечивы. *Матем. заметки*, 30(3):407–419, 1981.

[23] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Независимость схемы свертки в арифметике второго порядка от счетного выбора без параметров. *Матем. Заметки*, 117(2):257–269, 2025.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва
E-mail: kanovei@iitp.ru

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru