Базовые сведения о линейных системах, проблеме Римана–Гильберта и изомонодромных деформациях

Будем рассматривать системы линейных дифференциальных уравнений в комплексной области

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

где $B(z)$ — рациональная матрица размера $p \times p$ с особенностями в точках $a_1, \ldots, a_n$. Систему (1) будем считать определенной на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Чтобы рассмотреть точку $z = \infty$ нужно сделать замену независимой переменной $t = 1/z$ и рассмотреть полученную систему в точке $t = 0$, таким образом особенности системы (1) — суть особенности дифференциальной формы $\omega = B(z)dz$ ее коэффициентов.

Решения системы (1) образуют линейное пространство. Обозначим через $Y(z)$ фундаментальную матрицу системы (1), т.е. матрицу, столбцы которой образуют базис пространства решений системы. Фундаментальная матрица определена на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ с проколами в точках $a_1, \ldots, a_n$. При аналитическом продолжении матрицы $Y(z)$ вдоль петли γ с концом в неособой точке z_0, обходящей какие-то особые точки, ее значение может измениться, то есть матрица $Y(z)$ определена как однозначная функция на универсальном накрытии $\widetilde{\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}}$. Поскольку продолженная фундаментальная матрица $\tilde{Y}(z)$ будет базисом того же пространства решений, то старая матрица с новой связана умножением на постоянную невырожденную матрицу

$$Y(z) = \tilde{Y}(z)G_\gamma.$$

Возникает представление $[\gamma] \to G_\gamma$ (где $[\gamma]$ означает гомотопический класс петли γ):

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to GL(\mathbb{C}, p), \tag{2}$$

ставящее в соответствие петле невырожденную матрицу, называемое **представлением монодромии** системы (1).

Примеры.

• Простейшим примером является уравнение $y' = \frac{1}{2z}y$. Его решение $y(z) = C\sqrt{z}$ определено на $\widetilde{\mathbb{C} \setminus 0}$, а матрицы монодромии равны $G_0 = G_\infty = -1$.

• Еще один пример — это система

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} y,$$

имеющая особые точки 0 и ∞. Фундаментальная матрица этой системы имеет вид:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} 1 & \ln z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрицы монодромии примут вид $G_0 = G_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Особые точки.

• Особая точка $z = a$ системы (1) называется **фуксовой** если матрица коэффициентов $B(z)$ имеет в точке $z = a$ полюс первого порядка (*простой полюс*) (т.е. $B(z) = \frac{B_{-1}}{z-a} + B_0 + B_1(z-a) + \ldots$). Систему, все особые точки которой фуксовы, называют **фуксовой**. *Приведенные выше примеры систем — фуксовы.*

• Точка $z = a$ называется **регулярной** особой точкой, если решения в ней растут не быстрее некоторой степени z, при стремлении z к a внутри некоторого сектора. Т.е. $\exists C : \|Y(z)\|(z-a)^C \to 0$, $z \to a$, $z \in S$, где S — сектор с вершиной в точке $z = a$. Система, все особые точки которой регулярные, называется **регулярной**.

• Остальные особые точки называются иррегулярными.

В этом кратком введении мы коснемся лишь регулярных и фуксовых точек.

Знаменитым вопросом этой теории была следующая проблема, поставленная Риманом, а затем включенная Д. Гильбертом в его список основных проблем, называемая в литературе проблемой Римана–Гильберта или 21-ой проблемой Гильберта.

■ *Для любого ли представления (2) существует фуксова на сфере Римана система, имеющая представление монодромии (2) и набор особых точек $a_1, \ldots, a_n$?*

Такая фуксова система имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \tag{3}$$

следовательно вопрос заключается в исследовании отображения

$$(G_1, \ldots, G_n) \longrightarrow (B_1, \ldots, B_n).$$

В 1989 А.А. Болибрухом был построен контрмпример к проблеме Римана–Гильберта. Известны также сильные достаточные условия положительного решения этой проблемы.

Изомонодромные деформации. Очень важным вопросом оказался следующий: *Будем рассматривать различные системы вида (3), имеющие одно фиксированное представление монодромии (2) и различные положения особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Тогда матрицы коэффициентов B_i будут зависеть от положения особых точек, т.е. $B_i = B_i(a_1, \ldots, a_n)$. Вопрос: Что это за функции?*

Матричные функции $B_i(a)$ ($a = (a_1, \ldots, a_n)$) удовлетворяют системе уравнений в частных производных

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$. Эту систему называют **уравнением Шлезингера**.

Эта система важна потому, что некоторые известные нелинейные уравнения математической физики могут быть представлены как частные случаи уравнения Шлезингера. В случай, когда матрицы B_i двумерные вкладываются уравнение Пенлеве VI и системы Гарнье. В аналог уравнения Шлезингера, записанный для иррегулярных систем вкладываются многие известные уравнения: уравнение Кортевега–де Фриза, уравнения Пенлеве I-V и др.

Этот подход позволяет свести задачу исследования решений этих нелинейных уравнений к задаче построения линейной системы (1) или (3) по заданной монодромии (2), то есть совсем другой задаче. Для некоторых уравнений этот метод оказывается практически единственным возможным.

Достаточно известное уравнение Пенлеве VI:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt} +$$

$$+\frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{w^2}+\gamma\frac{t-1}{(w-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right),$$

имеющее достаточно неприятный вид, но важное для классификации интегрируемых уравнений, может быть переписано в качестве следующей обратной задачи.

Описать поведение коэффициентов двумерной системы

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{B_0(t)}{z}+\frac{B_1(t)}{z-1}+\frac{B_t(t)}{z-t}\right)y,$$

имеющей монодромию (2), как функций от положения t*?*

Этот подход позволил находить разложения решений, алгебраические решения, описывать преобразования Бэклунда и многое другое.