

# Задачи, поставленные на семинаре по аналитической теории дифференциальных уравнений 28.12.2011

1. (В.П. Лексин) Найти интегральные представления для решений верхнетреугольных уравнений Шлезингера (то есть матрицы  ${}_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, n$  предполагаются верхнетреугольными). Для матриц  ${}_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, n$  размера  $2 \times 2$  такие представления гипергеометрического типа имеются.

2. (В.П. Лексин) Для объемов неевклидовых многомерных симплексов Т. Коппо написал систему фуксовых уравнений с нильпотентными коэффициентами, которой удовлетворяет флаг вложенных друг в друга таких симплексов. Доказать интегрируемость (или опровергнуть это) такой системы.

3. (Юлия Бибило) Построить такое, явно заданное, изомонодромное (в обобщенном смысле) семейство систем с иррегулярными особыми точками

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_i+1} \frac{B_{ik}}{(z-a_i)^k} \right) y,$$

зависящее хотя бы от одного параметра  $\tau$  ( $a_i = a_i(\tau)$ ,  $B_{ik} = B_{ik}(\tau)$ ).

4. (Ренат Гонцов) Для любой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z-a_i} \right) y$$

существуют  $a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$  и  $B_{n+1}, \dots, B_{n+k}$  такие, что система

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^{n+k} \frac{B_i}{z-a_i} \right) y$$

разрешима в квадратурах. (Это утверждение и идея доказательства имеются в препринте Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованского [1])

Вопросы: 1) Доказать это утверждение.

2) Можно ли сделать то же самое для систем с иррегулярными особыми точками?

5. (Ренат Гонцов) Доказать, что множество фуксовых систем, разрешимых в квадратурах, — счетное объединение алгебраических множеств. (В препринте Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованского [1] имеются соображения на этот счет, но нет доказательства)

6. (Ренат Гонцов) В статье Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованского [2] доказано утверждение: набор матриц Стокса нерезонансной системы с иррегулярными особыми точками лежит в группе Галуа этой системы.

Вопросы: 1) Верно ли, что группа Галуа это замыкание группы монодромии-Стокса?

2) Доказать это утверждение для резонансных систем.

7. (Ренат Гонцов) Как меняется группа Галуа при изомонодромных слияниях особых точек?

8. (Ренат Гонцов) Обобщить результат А.А. Болибруха о том, что по данным монодромии скалярного фуксова уравнения можно построить фуксову систему имеющую тот же набор особых точек и те же данные монодромии, на случай уравнений и систем, заданных на компактной римановой поверхности (см. также работы [4, 5, 6]).

## Список литературы

- [1] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами // Препринт ИПМ АН СССР е 117, М., 1974.
- [2] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский Группы Галуа, операторы Стокса и теорема Рамиса // Функц. анализ и его прил., 1990, том 24, выпуск 4, страницы 31Ц42.
- [3] Singer M., Van Der Put M. Galois Theory of Linear Differential Equations // Springer 2002.

- [4] *А. А. Боллбрух* Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. МИАН, 2002, том 238, страницы 55–69.
- [5] *И. В. Вьюгин* Проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и родственные задачи // УМН, 2011, том 66, выпуск 1(397), страницы 37–64.
- [6] *И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов* О построении системы линейных дифференциальных уравнений по скалярному уравнению // Тр. МИАН, 2010, том 271, страницы 335–351.