Прямые и обратные задачи монодромии для многомерных фуксовых систем и уравнения математической физики

1. а). Известно, что представление Бурау — это представление группы кос над полем рациональных функций от одного переменного (коэффициенты многочленов рациональные). Придавая этому переменному значения из некоторого поля нулевой характеристики, получим представления группы кос над этим полем. Известно (Бланше, Сысоева и др.), что для ïочти всехӟначений переменной полученные неэквивалентные представления. Задача состоит в описаниии исключительного множества параметров, пробегая которое мы не меняем класса представления Бурау над числовым полем.

б). Является ли неприводимым или приводимым приведенное представление Бурау, а также аналогичный вопрос для его числовых специализаций.

в). Вопрос аналогичный вопросу а) для представлений Лоуренс-Краммера. В этом случае участвуют уже два формальных параметра. Выяснить как меняется класс представления Лоуренс-Краммера при числовой специализации одной или двух переменных.

г). Вопрос аналогичный вопросу б) для представлений Лоуренс-Краммер (частичный ответ можно найти в недавней работе Levaillant and Walles в arXive и в PhD Levaillant в arXive).

2. Методом Лаппо-Данилевского можно доказать разрешимость многомерной проблемы Римана-Гильберта на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n, \quad n \geq 2$ и дивизором особенностей $H = \cup_{i<j}\{z \in \mathbb{C}^n | \, z_i = z_j\}$ или $H = \cup_{i<j}\{z \in \mathbb{C}P^n | \, z_i = z_j\}$ для представлений Бурау и Лоуренс–Краммер (ограниченных на соответствующую группу крашенных кос) для малых значений параметров. Исследовать вопрос о разрешимости многомерной проблемы Римана-Гильберта для произвольных значений параметров.

3. Вопросы аналогичные вопросам из задач 1 и 2 для обобщенных представлений Бурау и Лоуренс-Краммер, отвечающих конечным комплексным группам отражений (в частности, и для конечных групп Коксетера).

4. Найти контрпример или доказать разрешимость многомерной проблемы Римана-Гильберта на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n, \quad n \geq 2$, когда дивизор H является конфигураций с единичным алгебраическим препятствием (то есть препятствия нет) $R_\infty = 1$. Здесь $R_\infty = Ker\theta$, где $\theta : \pi_1(X_n \backslash H) \to \mathbb{C}[\pi_1(X_n \backslash H)]^\wedge$ есть естественный гомоморфизм фундаментальной группы дополнения к дивизору особенностей в пополнение её группового кольца относительно топологии, определяемой идеалом равным ядру гмоморфизма аугментации. Р.Хейн доказавл, что R_∞ является алгебраическим препятствием к разрешимости проблемы Римана-Гильберта и контрпримеры в многомерном случае на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n, \quad n \geq 2$ основаны на

нетривиальности этого препятствия (когда дивизор состоит не из гиперплоскостей и в фундаментальной группе имеются элементы конечного порядка, которые обязательно принадлежат R_∞. В одномерном случае фундаментальная группа дополнения к дивизору особенностей свободная группа конечного ранга и для нее $R_\infty = 1$, однако контрпримеры существуют (А.Болибрух, И.Вьюгин).

5. а). Прямая задача монодромии: описание монодромии обощенных вариантов уравнений Книжника–Замолодчикова на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n, \quad n \geq 2$ (уравнения Чередника, уравнения Коно). В частности, найти обобщенный вариант теоремы Дринфельда–Коно такого описания, основанного на R-матрицах и их обобщениях. Некоторые элементы такого описания имеются в работах Голубевой и Лексина, Энриквеса).

б). Описать представления монодромии систем Жордана-Похгаммера с различными параметрами в терминах представлений Лоуренс–Краммера (для равных значений параметра Коно доказал, что получаем представления Бурау, сама Лоуренс строила новые представления групп кос как представления монодромии фуксовых систем типа Книжника-Замолодчикова).

г). Найти описание монодромии систем Коно в терминах R-матриц Замолодчикова (то есть решений тетраэдальных (симплициальных) уравнений Замолодчикова), которые определяют линейные представления высших групп крс Манина–Шехтмана.

6. Знание явного вида некоторых многомерных фуксовых систем типа уравнений Книжника-Замолодчикова, связанных с системами корней групп Коксетера, приводит к решениям уравнениям WDDV. Расширить класс такого типа решений используя корневые системы комплексных групп отражений.

7. Построить теорию изомонодромных деформации Шлезингера для многомерных фуксовых систем с особенностями на объединении конечного числа гиперплоскостей (имеются попытки Klares и Лексина).