Экзамен по курсу «Введение в аналитическую теорию дифференциальных уравнений»

1. Найдите матрицы монодромии следующих уравнений в точке $z = 0$:

$$a) \quad y' = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad b) \quad u'' + \frac{1-2z}{z(1-z)}u' - \frac{1}{4z(1-z)}u = 0.$$

2. Рассмотрим фуксову систему

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \tag{1}$$

определенную на сфере Римана. Собственные числа λ_i^j $(j = 1, \ldots, n)$ матриц B_i называются показателями и совпадают с асимптотиками решений, образующих левелевский базис системы в данной точке.

а) Докажите соотношение Фукса для фуксовых систем, т.е., что сумма всех собственных значений матриц вычетов B_i системы (1) во всех особых точках, включая бесконечность, равна нулю.

(Указание: воспользуйтесь тем, что сумма вычетов матрицы коэффициентов системы по всем особым точкам на сфере Римана равна нулю, а $\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j = \mathrm{tr} B_i$.)

б) Докажите соотношение Фукса для фуксовых уравнений (см (2)). Показателями фуксова уравнения, имеющего в точке $z = a_i$ вид

$$u^{(n)} + \frac{r_i(z)}{z-a_i}u^{(n-1)} + \ldots + \frac{r_{n-1}(z)}{(z-a_i)^{n-1}}u' + \frac{r_n(z)}{(z-a_i)^n}u = 0,$$

называются решения $\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^n$ уравнения

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \ldots + \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+j+1)r_j(0) + \ldots + r_n(0) = 0.$$

Докажите, что сумма показателей фуксова уравнения по всем особым точкам равна

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j = \frac{(m-2)n(n-1)}{2}, \tag{2}$$

где m — число особых точек, а n — порядок уравнения.

3. Рассмотрим разностное уравнение

$$\Delta_h y(z) = f(y(z), z), \qquad \Delta_h y(z) = \frac{y(z+h) - y(z)}{h}$$

с голоморфной в окрестности точки (y_0, z_0) функцией $f(y, z)$. Докажите, что для всех достаточно малых положительных h $(\exists \varepsilon > 0,\ |h| < \varepsilon)$ это уравнение имеет аналитическое в некоторой, не зависящей от ε, окрестности точки $z = z_0$ решение с начальным условием $y(z_0) = y_0$.

Указание: воспользуйтесь методом мажорант и тем соображением, что

$$y(z) \ll y_0 + z\Delta_h y(z).$$

4. Докажите теорему: если интеграл $w = f(z)$ уравнения $w' = \frac{P(w,z)}{Q(w,z)}$, где P и Q — многочлены относительно w и z, таков, что обратная функция $z = \varphi(w)$ имеет бесконечное число ветвей, то уравнение $f(z) = A$ имеет бесконечное число решений при любом значении A, кроме конечного числа исключительных значений, которые можно все определить непосредственно по уравнению.

(Указание: рассмотреть уравнение $\frac{dz}{dw} = \frac{Q(w,z)}{P(w,z)}$ и применить теорему единственности.)

5. а) Имеет ли подвижные точки ветвления следующее уравнение:

$$z(w')^2 - 2w'w + 4z = 0?$$

Какой род имеет риманова поверхность, соответствующая этому уравнению?

б) Найдите формальную нормальную форму следующей линейной системы в окрестности нуля:

$$\begin{cases} x' = x + x^2 + xy^3 + xy^3z + xz^4 \\ y' = -y + x^2y^2 \\ z' = 3z + xy + xyz + x^2y^2z \end{cases}$$

6. Рассмотрим систему

$$y' = A(z)y \tag{3}$$

с голоморфными периодическими коэффициентами $A(z+1) = A(z)$. Легко видеть, что

$$Y(z+1) = Y(z)G, \qquad G \in \mathrm{GL(n,\mathbb{C})}.$$

Матрицу G называют матрицей монодромии. Докажите, что, если оператор G диагонализируем, то система (3) приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$y' = \Lambda y$$

с помощью голоморфной периодической замены вида

$$\tilde{y} = M(z)y, \qquad M(z+1) = M(z).$$

И. Вьюгин, vyugin@gmail.com
15.11.2010