Задачи по комплексному анализу (13.09.10)

1. Доказать, что у функции $f(z) = 1/z$ в кольце $K = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ нет первообразной.

2. Доказать, что если функция $f(z)$ голоморфна в точке $z = 0$ и $f(z) \equiv f(2z)$, то $f = \mathrm{const}$ (в окрестности нуля).

3. Какой наименьший порядок n имеет линейное однородное (аналитическое) дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(z)y' + a_n(z)y = 0,$$

имеющее одним из своих решений функцию $y = f(z)$, если

а) $f(z) = \sin z$, б) $f(z) = \ln z$, в) $f(z) = \ln z + \sqrt{z}$?

5. Пусть f голоморфна в круге $\{|z| < R\}$, $R > 1$, докажите, что среднее значение его квадрата модуля по окружности $\{|z| = 1\}$ равно сумме квадратов модулей коэффициентов ряда Тейлора с центром $z = 0$.

6. Докажите, что для любого многочлена $P(z)$ все корни его производной $P'(z)$ принадлежат выпуклой оболочке корней многочлена $P(z)$.

Задачи по комплексному анализу (13.09.10)

1. Доказать, что у функции $f(z) = 1/z$ в кольце $K = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ нет первообразной.

2. Доказать, что если функция $f(z)$ голоморфна в точке $z = 0$ и $f(z) \equiv f(2z)$, то $f = \mathrm{const}$ (в окрестности нуля).

3. Какой наименьший порядок n имеет линейное однородное (аналитическое) дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(z)y' + a_n(z)y = 0,$$

имеющее одним из своих решений функцию $y = f(z)$, если

а) $f(z) = \sin z$, б) $f(z) = \ln z$, в) $f(z) = \ln z + \sqrt{z}$?

5. Пусть f голоморфна в круге $\{|z| < R\}$, $R > 1$, докажите, что среднее значение его квадрата модуля по окружности $\{|z| = 1\}$ равно сумме квадратов модулей коэффициентов ряда Тейлора с центром $z = 0$.

6. Докажите, что для любого многочлена $P(z)$ все корни его производной $P'(z)$ принадлежат выпуклой оболочке корней многочлена $P(z)$.