Задачи по линейным дифференциальным уравнениям (20.09.10)

1. Вычислите монодромии систем

$$a)\ y' = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad b)\ y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/z^2 & -1/z \end{pmatrix} y.$$

Пусть имеется многочлен от двух переменных

$$P(x,y) = C_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \ldots + C_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m},$$

тогда выпуклая оболочка множества $M = \{(\alpha_k, \beta_k) | 1 \leqslant k \leqslant m\}$ *точек плоскости называется диаграммой Ньютона многочлена* $P(x,y)$.

2. Докажите, что диаграмма Ньютона произведения двух многочленов $P(x,y)Q(x,y)$ — это сумма диаграмм Ньютона многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Под суммой двух фигур Ω_1 *и* Ω_2 *понимается фигура*

$$\Omega = \{(p_1 + p_2, q_1 + q_2) | (p_1, q_1) \in \Omega_1,\ (p_2, q_2) \in \Omega_2\}.$$

3. Докажите, что фундаментальное решение $Y(z)$ (с начальным условием $Y(z_0) = I$) линейной системы $y' = B(z)y$ можно представить в виде ряда

$$Y(z) = I + \int_{z_0}^{z} B(\xi_1) d\xi_1 + \ldots + \frac{1}{k!} \int_{z_0}^{z} \ldots \int_{z_0}^{z} B(\xi_1) \ldots B(\xi_k)\, d\xi_1 \ldots d\xi_k + \ldots,$$

который равномерно сходится в любом связном компакте, лежащим в области аналитичности матрицы коэффициентов $B(z)$.
(Указание. Воспользуйтесь формулой $Y(z) = Y(z_0) + \int_{z_0}^{z} B(\xi) Y(\xi) d\xi$.)

Пример. Решение уравнения $y' = y$ *с начальным условием* $y(0) = 1$ *выражается рядом*

$$y(z) = 1 + z + \ldots + \frac{1}{k!} z^k + \ldots = e^z.$$