Задачи по нелинейным уравнениям (4.10.10)

1. Докажите теорему существования и единственности решений дифференциального уравнения

$$w' = f(w, z)$$

с аналитической правой частью методом мажорантных функций.

2. Правая часть уравнения $\frac{dw}{dz} = f(w, z)$ аналитична и обращается в бесконечность в точке (w_0, z_0). Докажите, что решение этого уравнения, равное w_0 в пределе при $z \to z_0$, имеет алгебраическую особенность в точке $z = z_0$.

Пример: $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w}$ (Указание: $\frac{dz}{dw} = 2w \Rightarrow z = w^2 + C \Rightarrow w = \sqrt{z - C}$).

3. Что можно сказать по коэффициентам ($a_i(z)$ — мероморфные функции, $i = 1, \ldots, n$) алгебраического уравнения

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z)w + a_n(z) = 0$$

о ветвлении функции $w(z)$ при аналитическом продолжении вдоль некоторой петли для малых n ($n \leqslant 4$)?

Задачи по нелинейным уравнениям (4.10.10)

1. Докажите теорему существования и единственности решений дифференциального уравнения

$$w' = f(w, z)$$

с аналитической правой частью методом мажорантных функций.

2. Правая часть уравнения $\frac{dw}{dz} = f(w, z)$ аналитична и обращается в бесконечность в точке (w_0, z_0). Докажите, что решение этого уравнения, равное w_0 в пределе при $z \to z_0$, имеет алгебраическую особенность в точке $z = z_0$.

Пример: $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w}$ (Указание: $\frac{dz}{dw} = 2w \Rightarrow z = w^2 + C \Rightarrow w = \sqrt{z - C}$).

3. Что можно сказать по коэффициентам ($a_i(z)$ — мероморфные функции, $i = 1, \ldots, n$) алгебраического уравнения

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z)w + a_n(z) = 0$$

о ветвлении функции $w(z)$ при аналитическом продолжении вдоль некоторой петли для малых n ($n \leqslant 4$)?