Задачи про резонансные соотношения (1.11.10)

1. Какими должны быть коэффициенты $b_i(a)$, чтобы семейство уравнений

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i(a)}{z - a_i} y, \qquad a = (a_1, \ldots, a_n),$$

зависящее от a, было изомонодромным?

Рассмотрим комплексное n-мерное пространство наборов чисел

$$\mathbb{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}.$$

Гиперплоскость в $\mathbb{C}^n$, заданная целочисленным уравнением вида

$$\lambda_s = (m, \lambda) = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n, \qquad m_i \in \mathbb{Z},\ m_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 2$$

называется резонансной плоскостью. Изменяя номер s и набор целых чисел $m = (m_1, \ldots, m_n)$, мы получим счетный набор резонансных плоскостей.

Про набор комплексных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ говорят, что он принадлежит области Пуанкаре, если выпуклая оболочка n точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ плоскости одного комплексного переменного не содержит нуля. Если выпуклая оболочка $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ содержит ноль, то говорят, что λ лежит в области Зигеля.

2. а) Докажите, что множество резонансных плоскостей дискретно в области Пуанкаре, в частности, через каждую точку проходит лишь конечное число резонансных плоскостей.

б) Докажите, что в области Зигеля множество резонансных плоскостей всюду плотно.