

Задачи (25.10.10)

1. Докажите, что если один из элементов фундаментальной матрицы $Y(z)$ линейной системы

$$y' = B(z)y$$

тождественно равен нулю, то представление монодромии этой системы приводимо.

2. Докажите, что многочлены семейства

$$P_k(x) = x^{a_k} x^{tb_k} (x - \alpha)^{tc_k},$$

где $a_k, b_k, c_k < B \ll t$ ($t > B^3$), в совокупности линейно независимы.

3. Покажите, что если функции f_1, f_2 являются решением линейной системы

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

то функции $f_1^2, f_1 f_2, f_2^2$ тоже являются решением некоторой линейной системы. Как выглядит эта система и как выражается ее монодромия через монодромию исходной системы?

4. а) Докажите, что при дробно-линейных преобразованиях независимой переменной z фуксовы уравнения и системы переходят в фуксовы уравнения и системы.

Известно, что двумерное представление, задаваемое четырьмя образующими G_0, G_1, G_∞, G_t , реализуется как представление монодромии фуксова уравнения

$$y'' + b_1(z)y' + b_2(z)y = 0$$

с особыми точками $0, 1, \infty, t$, соответствующими образующим монодромии, и еще некоторой особой точкой $w = w(t)$, в которой монодромия тривиальная. Если двигать t так, чтобы матрицы монодромии сохранялись ($G_0, G_1, G_\infty, G_t = \text{const}$), точка $w(t)$ будет вести себя как решение следующего известного нелинейного уравнения

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-t} \right) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{w-t} \right) \frac{dw}{dt} + \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{w^2} + \gamma \frac{t-1}{(w-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(w-t)^2} \right),$$

зависящего от четырех комплексных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, называемого уравнением Пенлеве 6.

б) Укажите какие-нибудь симметрии уравнения Пенлеве 6, т.е. преобразования набора $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, w, t)$, переводящие одно уравнение этого типа в другое.