

Нерешенные задачи (24.02.11)

1. (Задача о мероморфном приведении к биркгофовой стандартной форме) Любую ли систему вида

$$z \frac{dy}{dz} = C(z)y, \quad C(z) = C_r z^r + C_{r-1} z^{r-1} + \dots + C_0 + C_{-1} z^{-1} + \dots,$$

определенную в окрестности точки $z = \infty$, мероморфным в окрестности этой точки преобразованием

$$\tilde{y} = M(z)y$$

можно привести к биркгофовой стандартной форме, т.е. к виду

$$z \frac{dy}{dz} = (\tilde{C}_r z^r + \dots + \tilde{C}_0)y?$$

Имеются достаточные условия, но ответ в задаче неизвестен.

2. (Задача 1984-7 из книги «Задачи Арнольда») Построить теорию версальных деформаций фуксовых систем. Верно ли, что регулярные особенности — изомонодромные пределы фуксовых? Какие матрицы монодромии стремятся к матрицам Стокса при нерегулярном вырождении?

Частично решена, см. А. А. Болибрух, «Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых», УМН, 56:4(340) (2001), 135-136, и А. Glutsyuk «On the monodromy group of confluent linear equations», arXiv:math/0304243.

3. (Задача 1987-12 из книги «Задачи Арнольда») Исследовать пространство линейных комплексных уравнений с особенностями на классы изомонодромных (особенно интересны пределы изомонодромных систем со сливающимися особыми точками — их версальные деформации, бифуркационные диаграммы и т. д.).

4. Верно ли, что системы вида

$$y' = B(z)y, \quad B(z) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{B_{i,r_i}}{(z - a_i)^{r_i}} + \dots + \frac{B_{i,1}}{z - a_i} \right)$$

с достаточно малыми коэффициентами $\|B_{i,j}\| < \varepsilon$ разрешимы в явном виде тогда и только тогда, когда они одновременным сопряжением на постоянную матрицу приводятся к верхнетреугольному виду?

Это вопрос о возможности обобщения результата Ю.С. Ильяшенко и А.Г. Хованского о разрешимости фуксовых систем с малыми коэффициентами, см. А.Г. Хованский «О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде», УМН, 2004, том 59, выпуск 4(358), С. 69-146.