Экзамен по курсу «Линейные аналитические дифференциальные уравнения и изомонодромные деформации»

1. Вычислите локальные монодромии системы

$$y' = \left[\frac{1}{z}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] y.$$

2. Докажите, что, если у двух линейных систем в иррегулярной особой точке $z = 0$ совпадают матрицы Стокса, монодромия, экспоненциальная часть, и лучи Стокса выбраны одинаково, то эти системы локально мероморфно эквивалентны.

3. Построим по скалярному фуксову в точке $z = 0$ уравнению

$$u^{(n)} + \frac{r_1(z)}{z}u^{(n-1)} + \ldots + \frac{r_n(z)}{z^n}u = 0$$

фуксову в $z = 0$ систему с помощью стандартной замены

$$y = (y^1, \ldots, y^n)^T, \quad y^1 = u, \quad y^2 = zu', \ldots, \quad y^n = z^{n-1}u^{(n-1)}.$$

Докажите, что все главные угловые миноры матрицы $U(0)$ (миноры, полученные пересечением первых k столбцов и первых k строк, при $k = 1, \ldots, n$) из левелевского разложения фундаментальной матрицы $Y(z) = U(z)z^A z^E$ отличны от нуля.

Указание. Воспользуйтесь тем, что по начальному куску левелевского базиса фуксова уравнения можно построить фуксово уравнение меньшего порядка, а также тем, что левелевский базис системы получается из левелевского базиса исходного уравнения и теоремой Левеля.

4. Докажите, что неприводимое представление вида $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ может быть реализовано как представление монодромии фуксовой на $\overline{\mathbb{C}}$ системы с особыми точками a_1, a_2, a_3.

5. Докажите, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено следующее утверждение: Фуксова система

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z - a_i}\right) y,$$

с достаточно малыми коэффициентами $\|B_i\| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$ имеет верхнетреугольную группу монодромии тогда и только тогда, когда набор матриц B_i, $i = 1, \ldots, m$ может быть общим сопряжением на постоянную матрицу приведен к верхнереугольному виду.

6. Докажите, что представление, четырьмя заданное образующими

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underline{1} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \underline{1} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \underline{1} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

не может быть представлением монодромии никакой фуксовой системы.

Указание. Воспользуйтесь видом жордановой структуры матриц монодромии и докажите, что невозможно так подобрать левелевские нормирования, чтобы построенное по ним расслоение с логарифмической связностью было тривиальным. Жорданову структуру легко найти, глядя лишь на диагональные и подчеркнутые элементы матриц монодромии.

7. а) Докажите, что при дробно-линейных преобразованиях независимой переменной z фуксовы уравнения и системы переходят в фуксовы уравнения и системы.

Известно, что двумерное представление, задаваемое четырьмя образующими G_0, G_1, G_∞, G_t, реализуется как представление монодромии фуксова уравнения

$$y'' + b_1(z)y' + b_2(z)y = 0$$

с особыми точками $0, 1, \infty, t$, соответствующими образующим монодромии, и еще некоторой особой точкой $w = w(t)$, в которой монодромия тривиальная. Если двигать t так, чтобы матрицы монодромии сохранялись ($G_0, G_1, G_\infty, G_t = const$), точка $w(t)$ будет вести себя как решение следующего известного нелинейного уравнения

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt} + $$
$$+ \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{w^2} + \gamma\frac{t-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right),$$

зависящего от четырех комплексных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, называемого уравнением Пенлеве 6.

б) Укажите какие-нибудь симметрии уравнения Пенлеве 6, т.е. преобразования набора $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, w, t)$, переводящие одно уравнение этого типа в другое.