ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

А. В. СКОРОХОД

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.8
С 44
УДК 519.21

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена теории случайных процессов с независимыми приращениями — одному из важнейших разделов теории случайных процессов. В книге впервые собраны многочисленные важные результаты, полученные при изучении случайных процессов с независимыми приращениями. Эти результаты ранее были разбросаны по различным статьям.

Книга представляет интерес как для специалистов по теории вероятностей, работающих в области случайных процессов, так и для лиц, изучающих теорию случайных процессов и занимающихся ее приложениями к различным областям науки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Глава 1. **Независимые случайные величины** 9

§ 1. Сходимость случайных величин 9
§ 2. Определение и простейшие свойства независимых случайных величин 15
§ 3. Основные неравенства для сумм независимых случайных величин 19
§ 4. Ряды из независимых случайных величин 24
§ 5. Сходимость случайных векторов 33

Глава 2. **Процессы с независимыми приращениями. Определение и свойства траекторий** 36

§ 6. Определение случайного процесса. Процессы с независимыми приращениями 36
§ 7. Стохастически непрерывные процессы 40
§ 8. Стохастическая эквивалентность случайных процессов 43
§ 9. Свойства регулярности процесса с независимыми приращениями 46
§ 10. Условия непрерывности процессов с независимыми приращениями 51

Глава 3. **Анализ стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями** 56

§ 11. Меры, построенные по скачкам процесса 56
§ 12. Независимость значений меры $\nu(t, A)$ на непересекающихся множествах 60
§ 13. Стохастический интеграл по случайной мере 65
§ 14. Распределения величин $\nu(t, A)$ и $\xi_A(t)$ 69
§ 15. Непрерывный процесс с независимыми приращениями 74
§ 16. Строение стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями 80

Глава 4. **Общие свойства процессов с независимыми приращениями** 90

§ 17. Свойства процесса как функции времени 90
§ 18. Интегро-дифференциальное уравнение процесса . . . 99

§ 19. Уравнения для распределений функционалов аддитивного типа от процессов с независимыми приращениями 107
§ 20. Вероятность пребывания процесса в некоторой области 111
§ 21. Одно обобщение понятия стохастического интеграла 112

Глава 5. **Однородные процессы с независимыми приращениями** 126

§ 22. Свойство строгой марковости 126
§ 23. Процессы, имеющие скачки лишь одного знака . . . 129
§ 24. Рост процессов на бесконечности 134
§ 25. Устойчивые процессы 145
§ 26. Однородный процесс Пуассона 164

Глава 6. **Процесс броуновского движения** 169

§ 27. Распределение максимума и минимума процесса броуновского движения 169
§ 28. Распределения аддитивных функционалов 175
§ 29. Вероятность пребывания процесса в криволинейной полосе 180
§ 30. Закон повторного логарифма 186
§ 31. Многомерное броуновское движение 191
§ 32. Метод дифференциальных уравнений для многомерного процесса броуновского движения 194

Глава 7. **Сходимость случайных процессов с независимыми приращениями** 198

§ 33. Процессы, построенные по суммам независимых случайных величин 198
§ 34. Сходимость распределений процессов, построенных по суммам независимых случайных величин 203
§ 35. Условия сходимости распределений стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями 210
§ 36. Одинаково распределенные случайные величины и однородные процессы с независимыми приращениями 213

Глава 8. **Предельные теоремы для функционалов от случайных процессов с независимыми приращениями** 216

§ 37. Постановка задачи 216
§ 38. Об одном виде сходимости в пространстве функций без разрывов второго рода 218
§ 39. Необходимые и достаточные условия J-сходимости 221
§ 40. Предельные теоремы для распределений J-непрерывных функционалов 228
§ 41. Сходимость распределений функционалов при сходимости к непрерывным процессам 235

Глава 9. **Меры, соответствующие процессам с независимыми приращениями** 239
§ 42. Меры на пространстве функций, соответствующие случайным процессам 239
§ 43. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона — Никодима 240
§ 44. Вспомогательные предложения 242
§ 45. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих гауссовским процессам 247
§ 46. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих ступенчатым процессам 261
§ 47. Общие условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих стохастически непрерывным процессам с независимыми приращениями 264
Примечания 270
Литература 275

ГЛАВА 2

ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ

§ 6. Определение случайного процесса. Процессы с независимыми приращениями

Под случайным процессом мы будем понимать совокупность случайных величин $\xi(t)$, зависящих от одного вещественного параметра t, изменяющегося в некотором множестве T. Это множество мы будем называть областью определения случайного процесса $\xi(t)$. В основном будут рассматриваться случайные процессы, определенные на замкнутых слева конечных или бесконечных интервалах. Совместное распределение такой совокупности случайных величин определяется заданием совместных распределений величин $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_k)$ для всех k и произвольных наборов $t_1, t_2, \ldots, t_k$ из области определения случайного процесса. Набор функций распределения

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mathrm{P}\{\xi(t_i) < x_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}, \tag{6.1}$$

когда k пробегают все натуральные числа, а $t_1, t_2, \ldots, t_k$ изменяются в области определения процесса, называется конечномерными распределениями процесса.

Определение. *Процесс $\xi(t)$, определенный на интервале $[a, b)$, называется процессом с независимыми приращениями, если для всех $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ из $[a, b)$ случайные величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ независимы.*

Чтобы определить конечномерные распределения процесса с независимыми приращениями, достаточно знать распределения величины $\xi(t)$ при каждом t и величины $\xi(t_2) - \xi(t_1)$

при $t_1 < t_2$. Действительно, функция (6.1) определяется своей характеристической функцией

$$f_{t_1, \ldots, t_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{M} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi(t_j) \right\} =$$

$$= \int e^{i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j} d_{x_1, \ldots, x_k} F_{t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k) \qquad (6.2)$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$).

Если процесс $\xi(t)$ имеет независимые приращения и $\varphi_t(\lambda) = \mathrm{M} e^{i\lambda \xi(t)}$, а $\varphi_{t_1, t_2}(\lambda) = \mathrm{M} e^{i\lambda [\xi(t_2) - \xi(t_1)]}$, то, используя независимость величин $\xi(t_1)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, ..., $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, получаем

$$f_{t_1, \ldots, t_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{M} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi(t_j) \right\} =$$

$$= \mathrm{M} \exp\{ i(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) \xi(t_1) + i(\lambda_2 + \ldots + \lambda_k) \times$$
$$\times (\xi(t_2) - \xi(t_1)) + \ldots + i\lambda_k (\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})) \} = \varphi_{t_1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) \times$$
$$\times \varphi_{t_1, t_2}(\lambda_2 + \ldots + \lambda_k) \ldots \varphi_{t_{k-1}, t_k}(\lambda_k).$$

Ввиду удобства этой формулы конечномерные распределения процессов с независимыми приращениями часто задаются с помощью характеристических функций $\varphi_t(\lambda)$ и $\varphi_{t_1, t_2}(\lambda)$.

Рассмотрим примеры процессов с независимыми приращениями.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, а $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — точки из $[a, b)$. Положим

$$\xi(t) = \sum_{t_k < t} \xi_k.$$

Этот процесс будет иметь независимые приращения. $\xi(t)$ будет представлять собой ступенчатую функцию, имеющую скачки лишь в точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и непрерывную справа. Этот пример можно обобщить следующим образом. Пусть последовательность независимых случайных величин ξ_k такова, что сумма ряда $\sum_{1}^{\infty} \xi_k$ не зависит от порядка суммирования слагаемых (см. теорему 5 § 4). Тогда таким же

свойством будет обладать и любая подпоследовательность величин ξ_k. Пусть, далее, t_k — некоторая последовательность чисел из $[a, b)$. Положим $\xi(t) = \sum_{t_k < t} \xi_k$. Эта сумма имеет смысл, так как ряд сходится и его сумма не зависит от порядка суммирования. Процесс $\xi(t)$ будет иметь независимые приращения. Так как $\xi(a) = 0$, то для определения конечномерных распределений этого процесса достаточно знать распределения $\xi(t') - \xi(t)$ для всех $t < t'$. Пусть $\varphi_{t, t'}(\lambda)$ — характеристическая функция $\xi(t') - \xi(t)$. Если $\eta_n = \sum_{\substack{k \leqslant n \\ t \leqslant t_k \leqslant t'}} \xi_k$, то $\mathrm{P}\{\eta_n \to \xi(t') - \xi(t)\} = 1$, поэтому $e^{i\lambda\eta_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} e^{i\lambda(\xi(t') - \xi(t))}$. Значит, на основании теоремы Лебега (§ 3, теорема 4)

$$\mathrm{M}\, e^{i\lambda\eta_n} \to \varphi_{t, t'}(\lambda).$$

Если $\varphi_k(\lambda)$ — характеристическая функция величины ξ_k, то

$$\varphi_{t, t'}(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \prod_{\substack{t \leqslant t_k < t' \\ k \leqslant n}} \varphi_k(\lambda)$$

(из свойств сходимости ряда $\sum_1^n \xi_k$ вытекает, что последнее произведение не зависит от порядка сомножителей). Процессы, рассмотренные в этом примере, называются дискретными.

2. Процесс Пуассона. Процессом Пуассона называется случайный процесс с независимыми приращениями, у которого $\xi(t') - \xi(t)$ для всех $t < t'$ имеет пуассоновское распределение, т. е. существует такое $a(t, t')$, что для всех целых $k \geqslant 0$

$$\mathrm{P}\{\xi(t') - \xi(t) = k\} = \frac{a(t, t')^k}{k!} e^{-a(t, t')}.$$

Если процесс задан на $[a, b)$, то удобно считать, что $\xi(a) = 0$. Тогда $\xi(t)$ тоже будет иметь распределение Пуассона с некоторым параметром $\lambda(t)$:

$$\mathrm{P}\{\xi(t) = k\} = \frac{[\lambda(t)]^k}{k!} e^{-\lambda(t)}.$$

Так как $\lambda(t) = \mathrm{M}\,\xi(t)$, $a(t, t') = \mathrm{M}[\xi(t) - \xi(t')]$, то $a(t, t') = \lambda(t') - \lambda(t)$. Если $\lambda(t) = kt$ и процесс определен при

$t \geqslant 0$, то он называется однородным процессом Пуассона с параметром λ. Для пуассоновского процесса

$$\varphi_{t,\,t'}(\lambda) = \mathrm{M} \exp\{i\lambda[\xi(t') - \xi(t)]\} = \\ = \exp\{[\lambda(t') - \lambda(t)](e^{i\lambda} - 1)\}.$$

3. Винеровский процесс. Процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ называется винеровским, если $\xi(t)$ и $\xi(t') - \xi(t)$ имеют нормальные распределения. Пусть $\mathrm{M}\,\xi(t) = a(t)$, $\mathrm{D}\,\xi(t) = b(t)$, тогда при $t < t'$

$$\mathrm{M}(\xi(t') - \xi(t)) = a(t') - a(t);$$
$$\mathrm{D}[\xi(t') - \xi(t)] = b(t') - b(t)$$

(так как $\mathrm{D}\,\xi(t') = \mathrm{D}\,\xi(t) + \mathrm{D}[\xi(t') - \xi(t)]$ ввиду независимости $\xi(t') - \xi(t)$ и $\xi(t)$). Значит, функция распределения величины $\xi(t') - \xi(t)$ будет определяться формулой

$$\mathrm{P}\{\xi(t') - \xi(t) < x\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi[b(t') - b(t)]}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(z - a(t') + a(t))^2}{2[b(t') - b(t)]}\right\} dz.$$

Винеровский процесс $W(t)$, определенный при $t \geqslant 0$ и обладающий свойствами $\mathrm{M}\,W(t) = 0$, $\mathrm{D}\,W(t) = t$, будет называться процессом броуновского движения. Характеристическая функция величины $\xi(t') - \xi(t)$ для винеровского процесса задается формулой

$$\varphi_{t,\,t'}(\lambda) = \exp\left\{i\lambda[a(t') - a(t)] - \frac{\lambda^2}{2}[b(t') - b(t)]\right\}.$$

Кроме случайных процессов с числовыми значениями, мы будем рассматривать случайные векторные процессы, т. е. такие процессы, для которых $\xi(t)$ при каждом t является случайным вектором в $R^{(m)}$. Совокупность функций

$$\mathrm{P}_{t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_k}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \mathrm{P}\{\xi(t_1) \in A_1, \\ \xi(t_2) \in A_2, \ldots, \xi(t_k) \in A_k\},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — всевозможные борелевские множества из $R^{(m)}$, $t_1, \ldots, t_k$ пробегают область определения процесса, а k — все натуральные числа, называется конечномерными распределениями процесса $\xi(t)$. Эти конечномерные распреде-

ления можно задать с помощью характеристических функций

$$\varphi_{t_1, \ldots, t_k}(z_1, \ldots, z_k) = \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{k} (\xi(t_j), z_j)\right\} =$$

$$= \int \exp\left\{i \sum_{j=1}^{k} (z_j, x_j)\right\} \mathrm{P}_{t_1, \ldots, t_k}(dx_1, \ldots, dx_k),$$

здесь аргументы $z_1, \ldots, z_k$ являются векторами из $R^{(m)}$, (z, x) — скалярное произведение векторов z и x из $R^{(m)}$. Определение случайного процесса с независимыми приращениями для векторных процессов такое же, как и для числовых. Примером векторного процесса с независимыми приращениями может служить m-мерный винеровский процесс. Так называется процесс, у которого $\xi(t)$ и $\xi(t') - \xi(t)$ имеют m-мерные нормальные распределения. Если $\mathrm{M}\xi(t) = a(t)$, а дисперсионный оператор вектора $\xi(t)$ есть $B(t)$, то тогда $\mathrm{M}(\xi(t') - \xi(t)) = a(t') - a(t)$, дисперсионный оператор величины $\xi(t') - \xi(t)$ будет $B(t') - B(t)$ и характеристическая функция величины $\xi(t') - \xi(t)$ задается формулой

$$\varphi_{t, t'}(z) = \mathrm{M}\, e^{i(z, \xi(t') - \xi(t))} =$$

$$= \exp\left\{i(z, a(t') - a(t)) - \frac{1}{2}(B(t')z - B(t)z, z)\right\}.$$

Распределение $\xi(t') - \xi(t)$ в том случае, когда $B(t') - B(t)$ — обратимый оператор, определяется плотностью распределения

$$\mathrm{P}_{t, t'}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [\det(B(t') - B(t))]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}([B(t') - B(t)]^{-1}[x - a(t') + a(t)],\right.$$

$$\left. x - a(t') + a(t))\right\},$$

здесь $\det(C)$ — определитель оператора C в ортогональном базисе.

§ 7. Стохастически непрерывные процессы

Процесс $\xi(t)$ называется стохастически непрерывным в точке t_0, принадлежащей области определения процесса $\xi(t)$, если для любой последовательности t_n, принадлежащей области определения процесса и сходящейся к t_0, $\xi(t_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi(t_0)$.

Это определение эквивалентно следующему: процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен в точке t_0, если для всех $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $P\{|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} < \mu$, как только $|t - t_0| < \delta$. (Эквивалентность обоих определений устанавливается точно таким же образом, каким устанавливается эквивалентность определений непрерывности функций, принадлежащих Коши и Гейне.)

Если процесс стохастически непрерывен во всех точках некоторого множества E, то мы будем говорить, что он стохастически непрерывен на E. Процессы, стохастически непрерывные во всей области определения, будут называться просто стохастически непрерывными. Процессы, стохастически непрерывные на замкнутых отрезках, обладают некоторыми свойствами, аналогичными тем, которыми обладают функции, непрерывные на замкнутых отрезках.

Определения. 1) *Процесс $\xi(t)$ называется ограниченным по вероятности на множестве E, если*

$$\lim_{C \to \infty} \sup_{t \in E} P\{|\xi(t)| > C\} = 0.$$

2) *Процесс $\xi(t)$ называется равномерно стохастически непрерывным на множестве E, если для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{t_1 \in E \\ |t_1 - t| < \delta}} P\{|\xi(t_1) - \xi(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 1. *Если процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен на замкнутом отрезке $[a, b]$, то он:* а) *ограничен по вероятности на этом отрезке,* б) *равномерно стохастически непрерывен на этом отрезке.*

Доказательство пункта а). Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $t_n \in [a, b]$ такие, что $P\{|\xi(t_n)| > n\} \geqslant \varepsilon$. Не ограничивая общности, можем считать, что t_n сходится к некоторому пределу $t_0 \in [a, b]$. Тогда, ввиду стохастической непрерывности $\xi(t)$ в точке t_0, получим

$$P\{|\xi(t_0)| > x\} \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} [P\{|\xi(t_n)| > 2x\} - P\{|\xi(t_n) - \xi(t_0)| > x\}] \geqslant \varepsilon$$

для каждого $x > 0$. Это же невозможно, так как $\lim_{x \to \infty} P\{|\xi(t_0)| > x\} = 0$. Пункт а) доказан.

Для доказательства пункта б) предположим, что для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ найдутся последовательности t_n и t_n' такие, что $|t_n - t_n'| \to 0$, а $\mathrm{P}\{|\xi(t_n) - \xi(t_n')| > \varepsilon\} \geqslant \mu$. Опять можем считать, что $t_n \to t_0$, $t_n' \to t_0$. Тогда из последнего соотношения будет вытекать, что в точке t_0 нарушается стохастическая непрерывность процесса $\xi(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Так как определение стохастической непрерывности, ограниченности по вероятности, равномерной стохастической непрерывности не зависит от размерности пространства, то доказанная теорема справедлива и для процессов с векторными значениями.

Легко видеть, что процесс $g(\xi(t))$ будет также стохастически непрерывным, если стохастически непрерывен $\xi(t)$, а $g(x)$ — непрерывная функция. Из теорем о предельном переходе под знаком математического ожидания (§ 1, теоремы 4, 5) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен, то:*

а) *функция $\mathrm{M}\, g(\xi(t))$ является непрерывной по t для всякой непрерывной ограниченной функции $g(x)$;*

б) *функция $\mathrm{M}\, g(\xi(t))$ непрерывна по t, если $g(x)$ непрерывна и существует $\alpha > 1$ такое, что*

$$\sup_t \mathrm{M}\, |g(\xi(t))|^{\alpha} < \infty.$$

Замечание. Непрерывность $\mathrm{M}\, g(\xi(t))$ по t для любой ограниченной измеримой функции $g(x)$ необходима для стохастической непрерывности $\xi(t)$, но не достаточна, так как $\mathrm{M}\, g(\xi(t))$ зависит лишь от распределения $\xi(t)$, а стохастическая непрерывность определяется распределениями приращений $\xi(t') - \xi(t)$. Однако для процессов с независимыми приращениями непрерывность $\mathrm{M}\, g(\xi(t))$ для всякой непрерывной ограниченной функции будет уже достаточна для стохастической непрерывности $\xi(t)$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $f_t(\lambda) = \mathrm{M} \exp\{i\lambda\xi(t)\}$, где $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями. Если $f_t(\lambda)$ непрерывна по t в точке t_0, то $\xi(t)$ стохастически непрерывен в точке t_0.*

Доказательство. Пусть $t_n \to t_0$, $t_n > t_0$. Тогда

$$f_{t_n}(\lambda) = f_{t_0}(\lambda)\, \mathrm{M} \exp\{i\lambda[\xi(t_n) - \xi(t_0)]\}.$$

Так как $f_{t_n}(\lambda) \to f_{t_0}(\lambda)$, то для всех λ, для которых $f_{t_0}(\lambda) \neq 0$, $\mathrm{M} \exp\{i\lambda[\xi(t_n) - \xi(t_0)]\} \to 1$. Можно указать некоторую окрестность $(-\delta, \delta)$ точки $\lambda = 0$, в которой $f_{t_0}(\lambda) \neq 0$. Значит, при $|\lambda| < \delta$

$$\mathrm{M} \exp\{i\lambda[\xi(t_n) - \xi(t_0)]\} \to 1.$$

Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения $\xi(t_n) - \xi(t_0)$, тогда при $|\lambda| < \delta$

$$\int \cos \lambda x \, dF_n(x) \to 1.$$

Интегрируя последнее соотношение по λ в пределах от 0 до δ, получим на основании теоремы Лебега

$$\int \frac{\sin \delta x}{\delta x} dF_n(x) \to 1.$$

Так как $\sup_{|x| > \varepsilon} \frac{\sin \delta x}{\delta x} < 1$, то из последнего соотношения вытекает, что $\mathrm{P}\{|\xi(t_n) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} \to 0$. Аналогично доказывается, что $\xi(t_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi(t_0)$, если $t_n \to t_0$, $t_n < t_0$. Теорема доказана.

§ 8. Стохастическая эквивалентность случайных процессов

Вернемся к примеру 1 из § 6. В этом примере процесс $\xi(t)$ определялся с помощью набора случайных величин ξ_1, ξ_2, ... и последовательности значений параметра t_1, t_2, ... соотношением

$$\xi(t) = \sum_{t_k < t} \xi_k. \tag{8.1}$$

Ряд в правой части (8.1) определяет $\xi(t)$ с вероятностью 1, т. е. можно изменить значения $\xi(t)$, если происходит некоторое событие $\mathfrak{A}_t$, вероятность которого 0, и при этом новое значение $\xi^*(t)$ можно рассматривать как сумму правой части (8.1). Если мы изменим таким образом значения $\xi(t)$ при каждом t и получим процесс $\xi^*(t)$, то может оказаться, что $\xi(t)$ и $\xi^*(t)$ как функции t будут весьма различаться, так как несмотря на то, что $\mathrm{P}\{\mathfrak{A}_t\} = 0$, может оказаться, что $\bigcup_t \mathfrak{A}_t$ имеет положительную вероятность или даже достоверно.

Процесс же $\xi^*(t)$ мы с таким же основанием должны считать суммой ряда (8.1), как и процесс $\xi(t)$. Такие процессы для нас в некотором смысле неразличимы, мы их будем называть стохастически эквивалентными. Вообще, два процесса $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ называются стохастически эквивалентными, если области определения этих процессов совпадают и для всех t из области определения $P\{\xi(t)=\xi'(t)\}=1$. Стохастически эквивалентные процессы будут иметь одинаковые конечномерные распределения, однако как функции t они могут вести себя различно. Рассмотрим следующий пример: пусть $\chi_A(s)$ — характеристическая функция множества A на прямой, имеющего лебегову меру нуль, а τ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$; положим $\xi(t)=\chi_A(t+\tau)$. Процесс $\xi(t)$ принимает значения 0 и 1, причем значение 1 он принимает с вероятностью 0. Значит, он будет стохастически эквивалентен процессу $\xi'(t)$, который тождественно равен нулю при всех t. Процессы $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ ведут себя по-разному как функции t: $\xi(t)$ имеет разрывы на множестве $\overline{\{A+\tau\}}$, а $\xi'(t)$ всюду непрерывен, $\sup_t \xi(t)=1$, а $\sup_t \xi'(t)=0$.

Если мы можем определить случайный процесс лишь с точностью до стохастической эквивалентности, то естественно выбирать среди всех стохастически эквивалентных друг другу процессов такой, который бы имел более регулярные свойства как функция t (например, процесс $\xi'(t)$ в предыдущем примере). Такими свойствами являются непрерывность, отсутствие разрывов второго ряда, интегрируемость по Риману, измеримость и др. Если процесс является непрерывным или не имеет разрывов второго рода, то он обладает еще одним важным свойством. В теории случайных процессов часто приходится иметь дело с вероятностями

$$P\{a(t)<\xi(t)<b(t),\quad t\in[\alpha,\ \beta]\}. \tag{8.2}$$

Как показывает рассмотренный выше пример, вероятности событий такого вида не определяются конечномерными распределениями процесса. Если же $\xi(t)$ — непрерывная функция t с вероятностью 1, то для непрерывных $a(t)$ и $b(t)$

$$P\{a(t)<\xi(t)<b(t),\quad t\in[\alpha,\ \beta]\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty} P\{a(t_k)<\xi(t_k)<b(t_k),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, \tag{8.3}$$

если $t_1, t_2, \ldots$ — всюду плотная на $[\alpha, \beta]$ последовательность. Таким образом, конечномерные распределения в этом случае будут определять и вероятности вида (8.2).

Оказывается, среди стохастически эквивалентных процессов существуют процессы, обладающие свойством, которое обеспечивает выполнение для них формулы (8.3). Это свойство сепарабельности случайного процесса, и состоит оно в следующем.

Определение. *Процесс (с числовыми значениями) $\xi(t)$ называется сепарабельным относительно последовательности $t_1, t_2, \ldots$, всюду плотной в области определения процесса, если для всех t из области определения $\xi(t)$*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|t-t_n| \leq \delta} \xi(t_n) \geqslant \xi(t) \geqslant \lim_{\delta \to 0} \inf_{|t-t_n| \leq \delta} \xi(t_n). \qquad (8.4)$$

Если $\xi(t)$ — векторный процесс, то он называется сепарабельным, если каждая из его компонент $\xi^1(t), \xi^2(t), \ldots, \xi^m(t)$ сепарабельна относительно одной и той же последовательности $t_1, t_2, \ldots$ Если обозначить через N множество значений параметра $\{t_1, t_2, \ldots\}$, то процессы, сепарабельные относительно последовательности t_n, мы будем называть N-сепарабельными.

Легко видеть, что выполнение условия (8.4) обеспечивает справедливость формулы (8.3), если $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны. В дальнейшем мы будем рассматривать только сепарабельные процессы. Это возможно на основании следующей теоремы.

Теорема. *Если процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен на $[a, b]$, то для всякого счетного всюду плотного на $[a, b]$ множества N существует процесс $\xi'(t)$, стохастически эквивалентный $\xi(t)$ и N-сепарабельный.*

Доказательство. Положим

$$\xi_1(t) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|t-t_n| \leq \delta} \xi(t_n),$$

$$\xi_2(t) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{|t-t_n| \leq \delta} \xi(t_n).$$

(Случайные величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ являются обобщенными: они могут принимать бесконечные значения определенного знака.) Если $t_{n_k} \to t$, то $\xi(t_{n_k}) \xrightarrow{P} \xi(t)$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ вероятность события

$$\{\xi(t_{n_k}) - \varepsilon < \xi(t) < \xi(t_{n_k}) + \varepsilon\}$$

стремится к 1 при $n_k \to \infty$. Но

$$\overline{\lim_{n_k \to \infty}} \xi(t_{n_k}) \leqslant \xi_1(t), \qquad \underline{\lim_{n_k \to \infty}} \xi(t_{n_k}) \geqslant \xi_2(t),$$

значит, вероятность события

$$\{\xi_1(t) + \varepsilon \geqslant \xi(t) \geqslant \xi_2(t) - \varepsilon\}$$

равна 1 для всех $\varepsilon > 0$. Обозначим $\mathfrak{A}_t = \{\xi_1(t) \geqslant \xi(t) \geqslant \xi_2(t)\}$, тогда $P\{\mathfrak{A}_t\} = 1$. Положим $\xi'(t) = \xi(t)$, если происходит событие $\mathfrak{A}_t$, и $\xi'(t) = \xi_1(t)$, если событие $\mathfrak{A}_t$ не происходит. Легко видеть, что $P\{\xi'(t) = \xi(t)\} = P\{\mathfrak{A}_t\} = 1$, так что $\xi'(t)$ стохастически эквивалентен $\xi(t)$. Далее, так как при $t = t_k$

$$\xi_1(t_k) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|t_n - t_k| \leqslant \delta} \xi(t_n) \geqslant \xi(t_k) \geqslant \lim_{\delta \to 0} \inf_{|t_n - t_k| \leqslant \delta} \xi(t_n) = \xi_2(t_k),$$

то $\xi(t_k) = \xi'(t_k)$ для всех $t_k \in N$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|t_n - t| \leqslant \delta} \xi'(t_n) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|t_n - t| \leqslant \delta} \xi(t_n) = \xi_1(t), \tag{8.5}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \inf_{|t_n - t| \leqslant \delta} \xi'(t_n) = \xi_2(t). \tag{8.6}$$

Так как по построению $\xi_1(t) \geqslant \xi'(t) \geqslant \xi_2(t)$, то (8.5) и (8.6) убеждают нас в справедливости теоремы.

§ 9. Свойства регулярности процесса с независимыми приращениями

Сейчас будет показано, что сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода. Это означает следующее: если событие $\mathfrak{B}_t$ заключается в том, что существуют $\xi(t-0)$ и $\xi(t+0)$, то $P\{\bigcap_t \mathfrak{B}_t\} = 1$. При доказательстве этого факта мы будем использовать понятие числа ε-колебаний функции. Функция $x(t)$ имеет на множестве E не менее k ε-колебаний, если существуют такие точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, принадлежащие E, что $|x(t_i) - x(t_{i-1})| \geqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, k$. Пусть r — максимальное из чисел k, для которых $x(t)$ имеет не менее k ε-колебаний. Такое число r будет называться числом ε-колебаний функции $x(t)$ на множестве E. Если такого числа r не существует, то мы будем считать, что $x(t)$ имеет бесконечное число ε-колебаний на множестве E.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $x(t)$, определенная на $[a, b]$, имела в каждой точке пределы справа и слева, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\varepsilon > 0$ она имела конечное число ε-колебаний на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть t_0 — точка разрыва второго рода функции $x(t)$. Тогда или $|x(t)| \to \infty$, или можно указать два предельных значения $x(t)$ при одностороннем стремлении t к t_0. В обоих случаях существует монотонная последовательность t_n, сходящаяся к t_0, для которой

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |x(t_n) - x(t_{n+1})| > 0.$$

Таким образом, наличие разрыва второго рода влечет бесконечность числа ε-колебаний $x(t)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. С другой стороны, если $x(t)$ имеет бесконечное число ε-колебаний, то легко убедиться в существовании такой точки t_0, что для всякого $\delta > 0$ в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ функция $x(t)$ имеет бесконечное число ε-колебаний. Если бы существовали $x(t_0 - 0)$ и $x(t_0 + 0)$, то для достаточно малых $\delta > 0$ на интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $x(t)$ имела бы не более двух ε-колебаний (при $|x(t_0) - x(t_0 - 0)| \geqslant \varepsilon$ и $|x(t_0) - x(t_0 + 0)| > \varepsilon$). Значит, t_0 будет точкой разрыва второго рода. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $x(t)$ сепарабельна относительно множества $N \subset [a, b]$. Обозначим через $\nu_\varepsilon(E)$ число ε-колебаний $x(t)$ на множестве E. Тогда*

$$\nu_{6\varepsilon}([a, b]) \leqslant 3\nu_\varepsilon(N) + 1.$$

Доказательство. Пусть число ε-колебаний $x(t)$ на N равно n и точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ из N таковы, что для $k = 0, \ldots, n-1$ $|x(t_k) - x(t_{k+1})| \geqslant \varepsilon$. Заметим, что тогда при $t < t_0$, $t \in N$ $x(t_0) - \varepsilon < x(t) < x(t_0) + \varepsilon$ и при $t > t_n$, $t \in N$ $x(t_n) - \varepsilon < x(t) < x(t_n) + \varepsilon$ (иначе $x(t)$ имела бы больше чем n ε-колебаний). Поэтому на $[a, t_0]$ и $[t_n, b]$ $x(t)$ не имеет 6ε-колебаний. Далее, для всякого $s \in (t_k, t_{k+1}) \cap N$ справедливо одно из неравенств $|x(s) - x(t_k)| < \varepsilon$ или $|x(s) - x(t_{k+1})| < \varepsilon$. Если $|x(t_k) - x(t_{k+1})| \leqslant 3\varepsilon$ и, значит, $x(s) \in [\min[x(t_k), x(t_{k+1})] - \varepsilon, \max[x(t_k), x(t_{k+1})] + \varepsilon]$ при $s \in (t_k, t_{k+1}) \cap N$, то $x(s)$ при $s \in [t_k, t_{k+1}]$ не имеет ни одного 6ε-колебания. Если $|x(t_k) - x(t_{k+1})| > 3\varepsilon$, то существует такое $u \in (t_k, t_{k+1})$,

что при $s<u$, $s\in N\cap(t_k, t_{k+1})$ $|x(s)-x(t_k)|<\varepsilon$, а при $s>u$, $s\in N\cap(t_k, t_{k+1})$ $|x(s)-x(t_{k+1})|<\varepsilon$ (иначе нашлись бы точки $s_1<s_2\in N\cap(t_k, t_{k+1})$ такие, что $|x(t_{k+1})-x(s_1)|<\varepsilon$, $|x(t_k)-x(s_2)|<\varepsilon$, а значит, $|x(t_k)-x(s_1)|>\varepsilon$, $|x(t_{k+1})-x(s_2)|>\varepsilon$, $|x(s_1)-x(s_2)|>\varepsilon$; это же противоречило бы тому, что $x(t)$ имеет на $[a, b]$ ровно n ε-колебаний). Тогда при $s\in[t_k, u]$ $x(s)\in(x(t_k)-\varepsilon, x(t_k)+\varepsilon)$, а при $s\in[u, t_{k+1}]$ $x(s)\in[x(t_{k+1})-\varepsilon, x(t_{k+1})+\varepsilon]$ для всех $s\in N$, а значит, и для всех s. Таким образом, $x(t)$ имеет на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ не более двух 6ε-колебаний. Поэтому число 6ε-колебаний $x(t)$ на $[a, b]$ не превосходит $3n+1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказанной теоремы вытекает, что если $x(t)$ — функция с векторными значениями, то в обозначениях теоремы

$$\nu_\varepsilon([a, b])\leqslant 3m\,\nu_{\frac{\varepsilon}{6m}}(N)+m,$$

где m — размерность пространства. Действительно, если обозначить через $\nu_\varepsilon^k(A)$ число ε-колебаний функции $x^k(t)$ (k-й координаты $x(t)$), то для любого множества A будет справедливо неравенство

$$\nu_\varepsilon(A)\leqslant\sum_1^m\nu_{\frac{\varepsilon}{m}}^k(A)\leqslant m\nu_{\frac{\varepsilon}{m}}(A).$$

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3. *Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, определенный при $t\in[a, b]$. Тогда $\xi(t)$ с вероятностью* 1 *не имеет разрывов второго рода.*

Доказательство. Как следует из теоремы 1, нам достаточно показать, что с вероятностью 1 процесс $\xi(t)$ имеет конечное число ε-колебаний для всех $\varepsilon>0$. Для этого достаточно показать, что с вероятностью 1 процесс $\xi(t)$ имеет конечное число ε-колебаний на множестве сепарабельности, каково бы ни было $\varepsilon>0$ (ввиду теоремы 2). Пусть $\mathfrak{S}_k$ — событие, заключающееся в том, что число $\frac{1}{k}$-колебаний на множестве N конечно. Нам достаточно показать, что для всех k $P\{\mathfrak{S}_k\}=1$. Действительно, $\bigcap_k\mathfrak{S}_k$ есть событие, заклю-

чающееся в том, что число ε-колебаний $x(t)$ на множестве N конечно для всех $\varepsilon = \frac{1}{k}$, а значит, и для всех $\varepsilon > 0$. Заметим, наконец, что достаточно показать, что число ε-колебаний процесса $\xi(t)$ конечно для каждого множества $[t, t+h] \cap N$ при достаточно малых $h > 0$. Этот факт мы и будем доказывать. Так как процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен, то на основании теоремы § 7 он будет равномерно стохастически непрерывным, поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $h > 0$, чтобы при $|t' - t''| < h$

$$\mathrm{P}\left\{|\xi(t') - \xi(t'')| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Возьмем отрезок Δ длины h, и пусть точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in \Delta \cap N$. Обозначим через p_m вероятность того, что на множестве $\{t_1, \ldots, t_n\}$ $\xi(t)$ будет иметь не менее m ε-колебаний. Пусть $\mathfrak{A}_k$ — событие, заключающееся в том, что

$$|\xi(t_2) - \xi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \quad |\xi(t_{k-1}) - \xi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\xi(t_k) - \xi(t_1)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и $\xi(t)$ на множестве $\{t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n\}$ имеет не менее $m-1$ ε-колебаний. Если $\xi(t)$ имеет на множестве $\{t_1, \ldots, t_n\}$ не менее m ε-колебаний, то обязательно произойдет хотя бы одно из событий $\mathfrak{A}_k$. Поэтому

$$p_m \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{\mathfrak{A}_k\}.$$

Заметим теперь, что число ε-колебаний на множестве $\{t_k, \ldots, t_n\}$ не зависит от $\xi(t_i)$ при $i \leqslant k$, так как эта величина выражается через $\xi(t_j) - \xi(t_k)$ при $j > k$. Вероятность того, что $\xi(t)$ на множестве $\{t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n\}$ будет иметь не менее $m-1$ ε-колебаний, не превосходит p_{m-1}. Поэтому

$$\mathrm{P}\{\mathfrak{A}_k\} \leqslant p_{m-1}\,\mathrm{P}\left\{|\xi(t_2) - \xi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, |\xi(t_{k-1}) - \xi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2},\right.$$

$$\left.|\xi(t_k) - \xi(t_1)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

значит,

$$p_m \leqslant p_{m-1} \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}\left\{|\xi(t_2)-\xi(t_1)|<\frac{\varepsilon}{2}, \ldots, |\xi(t_{k-1})-\xi(t_1)|<\frac{\varepsilon}{2}, \right.$$
$$\left. |\xi(t_k)-\xi(t_1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\} = p_{m-1}\,\mathrm{P}\left\{\sup_{2\leqslant k\leqslant n}|\xi(t_k)-\xi(t_1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Используя теорему 2 § 3 и то, что $\mathrm{P}\left\{|\xi(t_n)-\xi(t_k)|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant\frac{1}{3}$, получаем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{2\leqslant k\leqslant n}|\xi(t_k)-\xi(t_1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\,\mathrm{P}\left\{|\xi(t_n)-\xi(t_1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $p_m\leqslant\frac{1}{2}p_{m-1}\leqslant\frac{1}{2^m}$. Пусть L_n — последовательность конечных множеств, для которых $L_{n-1}\subset L_n$ и $\bigcup\limits_n L_n=\Delta\cap N$. Тогда

$$\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon(\Delta\cap N)=\lim_{n\to\infty}\nu_\varepsilon(L_n)\}=1,$$

значит,

$$\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon(\Delta\cap N)\geqslant m\}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon(L_n)\geqslant m\}\leqslant\frac{1}{2^m}.$$

Из полученного неравенства вытекает, что величина $\nu_\varepsilon(\Delta\cap N)$ конечна, так как

$$\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon(\Delta\cap N)=\infty\}=\lim_{m\to\infty}\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon(\Delta\cap N)\geqslant m\}=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Приведенное доказательство справедливо и для векторных процессов.

Замечание 3. Из сепарабельности процесса легко вывести, что $\xi(t)$ лежит между $\xi(t-0)$ и $\xi(t+0)$ в одномерном случае, а в многомерном $\xi^k(t)$ лежит между $\xi^k(t-0)$ и $\xi^k(t+0)$, если $\xi^k(t)$ — k-я координата $\xi(t)$.

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{A}_t$ — событие, заключающееся в том, что $\xi(t+0)\neq\xi(t)$. Тогда $\mathrm{P}\{\mathfrak{A}_t\}=0$. Действительно, обозначим через $\mathfrak{A}_t^{(k)}$ событие $\left\{|\xi(t+0)-\xi(t)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$. Так как $\mathrm{P}\{\lim\limits_{\varepsilon\to0,\,\varepsilon>0}\xi(t+\varepsilon)=\xi(t+0)\}=1$, то $\mathrm{P}\{|\xi(t+0)-$

$-\xi(t+\varepsilon)|\geqslant\frac{1}{2k}\}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$, а значит, $P\{|\xi(t+0)-$ $-\xi(t)|\geqslant\frac{1}{k}\}\leqslant P\{|\xi(t+0)-\xi(t+\varepsilon)|\geqslant\frac{1}{2k}\}+P\{|\xi(t)-$ $-\xi(t+\varepsilon)|\geqslant\frac{1}{2k}\}\to 0$ ввиду стохастической непрерывности $\xi(t)$, т. е. $P\{\mathfrak{A}_t^{(k)}\}=0$, но $P\{\mathfrak{A}_t\}\leqslant\sum_k P\{\mathfrak{A}_t^{(k)}\}$, так что $P(\mathfrak{A}_t)=0$. Введем процесс $\tilde{\xi}(t)=\xi(t+0)$. Он будет стохастически эквивалентен процессу $\xi(t)$, так как $P\{\xi(t)\neq\tilde{\xi}(t)\}=$ $=P\{\mathfrak{A}_t\}=0$. Таким образом, существует процесс, стохастически эквивалентный $\xi(t)$ и непрерывный справа. Точно таким же образом устанавливается существование процесса, стохастически эквивалентного $\xi(t)$ и непрерывного слева. Мы иногда будем использовать это обстоятельство, предполагая заранее, что процесс обладает какой-либо односторонней непрерывностью.

§ 10. Условия непрерывности процессов с независимыми приращениями

В предыдущем параграфе было установлено, что стохастически непрерывный сепарабельный процесс не имеет разрывов второго рода. Из замечания 3 § 9 вытекает, что для непрерывности процесса $\xi(t)$ в точке t_0 достаточно, чтобы $\xi(t_0+0)=\xi(t_0-0)$. Обозначим через ν_ε число точек t, для которых $|\xi(t+0)-\xi(t-0)|>\varepsilon$. Непрерывность $\xi(t)$ эквивалентна утверждению: $\nu_\varepsilon=0$ для всех $\varepsilon>0$ или, что то же самое, $\nu_{\frac{1}{k}}=0$ для всех натуральных k. Мы используем эти соображения при нахождении условий непрерывности процесса $\xi(t)$.

Теорема 1. *Для того чтобы сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ был с вероятностью* 1 *непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ и $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$*

$$\lim_{\max_k|t_k-t_{k-1}|\to 0}\sum_{k=1}^{n}P\{|\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})|>\varepsilon\}=0. \quad (10.1)$$

Доказательство необходимости. Если процесс с вероятностью 1 непрерывен, то он будет с вероятностью 1 и равномерно непрерывным на замкнутом отрезке $[a, b]$. Обозначим через Δ_h случайную величину:

$$\Delta_h = \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} |\xi(t_1) - \xi(t_2)|.$$

Из равномерной непрерывности $\xi(t)$ вытекает, что $\Delta_h \to 0$ с вероятностью 1 при $h \to 0$, значит, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \to 0} P\{\Delta_h > \varepsilon\} = 0. \tag{10.2}$$

Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| \leqslant \Delta_h.$$

Поэтому

$$P\{\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| > \varepsilon\} \leqslant P\{\Delta_h > \varepsilon\}. \tag{10.3}$$

Заметим, что

$$P\{\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| > \varepsilon\} = P\{|\xi(t_1) - \xi(t_0)| \leqslant \varepsilon\} +$$

$$+ P\{|\xi(t_1) - \xi(t_0)| \leqslant \varepsilon, \quad |\xi(t_2) - \xi(t_1)| > \varepsilon\} + \ldots +$$

$$+ P\{|\xi(t_1) - \xi(t_0)| \leqslant \varepsilon, \ldots, |\xi(t_{n-1}) - \xi(t_{n-2})| \leqslant \varepsilon,$$

$$|\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})| > \varepsilon\} = P\{|\xi(t_1) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} +$$

$$+ P\{|\xi(t_1) - \xi(t_0)| \leqslant \varepsilon\} P\{|\xi(t_2) - \xi(t_1)| > \varepsilon\} +$$

$$+ \ldots + \prod_{j=1}^{n-1} P\{|\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| \leqslant \varepsilon\} P\{|\xi(t_n) -$$

$$- \xi(t_{n-1})| > \varepsilon\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P\{|\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| > \varepsilon\} \times$$

$$\times P\{|\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})| > \varepsilon\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P\{|\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| > \varepsilon\} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} P\{|\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| \leqslant \varepsilon\}.$$

Но

$$\prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}\{|\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| \leqslant \varepsilon\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \mathrm{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\}.$$

Таким образом, учитывая (10. 3), получаем неравенство

$$\mathrm{P}\{\Delta_h > \varepsilon\} \geqslant \mathrm{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{|\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| > \varepsilon\}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{|\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| > \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{P}\{\Delta_h > \varepsilon\}}{\mathrm{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\}}.$$

Из этого неравенства, ввиду (10.2), вытекает доказательство необходимости условия теоремы.

Доказательство достаточности. Как уже было выяснено перед формулировкой теоремы, для доказательства непрерывности $\xi(t)$ с вероятностью 1 достаточно показать, что $\mathrm{P}\{\nu_{\frac{1}{k}} = 0,\ k = 1, 2, \ldots\} = 1$, т. е. достаточно показать, что $\mathrm{P}\{\nu_{\frac{1}{k}} = 0\} = 1$ для натуральных k. Покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\{\nu_\varepsilon = 0\} = 1$.

Пусть $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = b$ и $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\nu_\varepsilon^{(n)}$ число индексов i, для которых $|\xi(t_{i+1}^{(n)}) - \xi(t_i^{(n)})| > \frac{\varepsilon}{2}$. Легко видеть, что если при некотором t $|\xi(t+0) - \xi(t-0)| > \varepsilon$, то при достаточно больших n $|\xi(t_i^{(n)}) - \xi(t_{i+1}^{(n)})| > \frac{\varepsilon}{2}$, если только $t_i^{(n)} < t < t_{i+1}^{(n)}$. Поэтому для любой последовательности $n_k \to \infty$

$$\nu_\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu_\varepsilon^{(n_k)}. \tag{10.4}$$

Пусть $\Psi_\varepsilon(x)=1$ при $|x|>\frac{\varepsilon}{2}$, $\Psi_\varepsilon(x)=0$ при $|x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\nu_\varepsilon^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\Psi_\varepsilon\left(\xi\left(t_k^{(n)}\right)-\xi\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right),$$

$$M\nu_\varepsilon^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}M\Psi_\varepsilon\left(\xi\left(t_k^{(n)}\right)-\xi\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P\left\{\left|\xi\left(t_k^{(n)}\right)-\xi\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Из условия (10.1) вытекает, что для всякого $\delta>0$ и k можно выбрать такое n_k, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n_k}P\left\{\left|\xi\left(t_i^{(n_k)}\right)-\xi\left(t_{i-1}^{(n_k)}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant\frac{\delta}{2^k}.$$

Тогда $M\nu_\varepsilon^{(n_k)}\leqslant\frac{\delta}{2^k}$. Поэтому, переходя в неравенстве (10.4) к математическим ожиданиям, получим: $M\nu_\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}=\delta$. Так как $\delta>0$ произвольно, то $M\nu_\varepsilon=0$, значит, $P\{\nu_\varepsilon=0\}=1$. Теорема доказана.

Полученные в теореме 1 условия непрерывности процессов с независимыми приращениями позволяют установить существование всех моментов у непрерывного процесса с независимыми приращениями.

Теорема 2. *Если $\xi(t)$ — непрерывный с вероятностью* 1 *на $[a, b]$ процесс с независимыми приращениями, то для каждого $m>0$ $M|\xi(t)-\xi(a)|^m$ равномерно ограничено по t.*

Доказательство. Пусть $a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=b$ и $\max_i\left(t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\right)=\lambda_n\to 0$. Обозначим через ξ_{ni} случайные величины, определенные соотношениями

$$\xi_{ni}=\begin{cases}\xi\left(t_i^{(n)}\right)-\xi\left(t_{i-1}^{(n)}\right), & \text{если } \left|\xi\left(t_i^{(n)}\right)-\xi\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right|\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } \left|\xi\left(t_i^{(n)}\right)-\xi\left(t_{i-1}^{(n)}\right)\right|>1.\end{cases}\tag{10.5}$$

Пусть

$$\xi_n(t)=\sum_{t_i^{(n)}<t}\xi_{ni}.\tag{10.6}$$

Оценим вероятность $P\{|\xi_n(t)-\xi(t)+\xi(a)|>\varepsilon\}$. Легко видеть, что если для всех k $\xi(t_k^{(n)})-\xi(t_{k-1}^{(n)})=\xi_{nk}$, то $\xi_n(t)=$ $=\xi(t_j^{(n)})-\xi(a)$, где $t_j^{(n)}<t\leqslant t_{j+1}^{(n)}$. Поэтому

$$P\{|\xi_n(t)-\xi(t)+\xi(a)|>\varepsilon\}\leqslant \sup_{|t'-t''|\leqslant\lambda_n} P\{|\xi(t')-\xi(t'')|>$$

$$>\varepsilon\}+P\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi(t_k^{(n)})-\xi(t_{k-1}^{(n)})|>1\}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t'-t''|\leqslant\lambda_n} P\{|\xi(t')-\xi(t'')|>\varepsilon\}+\sum_{k=1}^{n} P\{|\xi(t_k^{(n)})-$$

$$-\xi(t_{k-1}^{(n)})|>1\}. \qquad (10.7)$$

Так как $\xi(t)$ стохастически непрерывен и для него выполняется (10.1), то $P\{|\xi_n(t)-\xi(t)+\xi(a)|>\varepsilon\}$ может быть сделана сколь угодно малой для всех $t\in[a, b]$ и для всех достаточно больших n. Используя неравенство

$$P\{|\xi_n(t)|>x\}\leqslant P\{|\xi(t)-\xi(a)|>x-\varepsilon\}+$$

$$+P\{|\xi_n(t)-\xi(t)+\xi(a)|>\varepsilon\},$$

а также то обстоятельство, что $\xi(t)$ ограничен по вероятности, убеждаемся, что $P\{|\xi_n(t)|>x\}$ можно сделать сколь угодно малым для всех t и достаточно больших n. Так как $\xi_n(t)$ представляет собой сумму ограниченных независимых слагаемых, то на основании теоремы 4 § 3 можем заключить, что существуют такие C_m, что $M|\xi_n(t)|^m\leqslant C_m$. Доказательство теоремы вытекает из того, что $\xi_n(t)\xrightarrow{P}\xi(t)-\xi(a)$ на основании (10.7).

ГЛАВА 3

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

§ 11. Меры, построенные по скачкам процесса

Пусть $\xi(t)$ — определенный на $[a, b]$ стохастически непрерывный сепарабельный процесс с независимыми приращениями. Как вытекает из замечания 4 § 9, переходя к стохастически эквивалентному процессу, можно достичь того, чтобы такой процесс был с вероятностью 1 непрерывен справа. Всюду на протяжении этой главы будут рассматриваться лишь непрерывные справа с вероятностью 1 стохастически непрерывные процессы с независимыми приращениями. Скачком такого процесса в точке t будет называться величина $\xi(t) - \xi(t-0)$. Число скачков $\xi(t)$, превосходящих по абсолютной величине ε, конечно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Это вытекает из отсутствия разрывов второго рода у $\xi(t)$. Пусть A — некоторое борелевское множество в пространстве $R^{(m)}$ значений $\xi(t)$ (мы в этой главе будем в основном рассматривать векторные процессы, так как почти все рассуждения не будут зависеть от размерности пространства). Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ A не содержит точек $\boldsymbol{x}$, для которых $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$. Тогда будет лишь конечное число таких точек $t \in [a, b]$, для которых $\xi(t) - \xi(t-0) \in A$. Обозначим через $\nu(t, A)$ число точек s, для которых $\xi(s) - \xi(s-0) \in A$ и $s \leqslant t$. При фиксированном A $\nu(t, A)$ будет случайным процессом, неубывающим и принимающим лишь целые неотрицательные значения. Пусть U_ε — множество тех $\boldsymbol{x}$, для которых $|\boldsymbol{x}| \geqslant \varepsilon$. Обозначим через $\mathfrak{B}_\varepsilon$ совокупность всех борелевских множеств, целиком лежащих в U_ε.

Теорема 1. *Величина* $\nu(t, A)$ *при фиксированном* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ *является стохастически непрерывным процессом*

с независимыми приращениями, а при фиксированном $t \in [a, b]$ $\nu(t, A)$ *является мерой по* A *на* σ*-алгебре* *) $\mathfrak{B}_s$ (*значения этой меры случайны*).

Доказательство. Второе утверждение теоремы очевидно. Будем доказывать первое. Обозначим через $\mathfrak{M}_{[s,\ t]}$ совокупность случайных величин, которые можно представить как предел сходящейся по вероятности последовательности величин $g_n(\xi(t_1^{(n)}) - \xi(s), \ \ldots\ , \xi(t_n^{(n)}) - \xi(s))$, где $g_n(x_1, \ \ldots\ , x_n)$ — борелевская функция n аргументов (векторных), а $t_1^{(n)}, \ \ldots\ , t_n^{(n)}$ — произвольные точки из $[s, t]$.

Если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, то совокупности величин $\mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$ независимы. Это вытекает из того, что величины $\xi_i \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$ являются пределами функций от приращений $\xi(s)$ на $[t_{i-1}, t_i]$, из независимости приращений $\xi(s)$ на непересекающихся промежутках, а также из теорем 1 § 2 и 3 § 1. Установим теперь, что $\nu(A, t_i) - \nu(A, t_{i-1}) \in \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$. Для этого отметим следующие свойства $\mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$:

1) Если $\xi_1, \xi_2, \ \ldots\ , \xi_k \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$, то для любой борелевской функции $g(x_1, \ \ldots\ , x_k)$ имеем $g(\xi_1, \ \ldots\ , \xi_k) \in \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$.

2) Если $\xi_n \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то и $\xi \in \mathfrak{M}_{[t_{i-1},\ t_i]}$.

Свойство 2) очевидно. Для доказательства свойства 1) заметим, что оно справедливо для непрерывных функций g, так как если $\eta_j^{(n)} \xrightarrow{P} \xi_j$ и $\eta_j^{(n)}$ — борелевские функции приращений $\xi(s)$ на $[t_{i-1}, t_i]$, то

$$g(\eta_1^{(n)}, \ \ldots\ , \eta_k^{(n)}) \xrightarrow{P} g(\xi_1, \ \ldots\ , \xi_k) \text{ и } g(\eta_1^{(n)}, \ \ldots\ , \eta_k^{(n)})$$

будет также борелевской функцией приращений $\xi(s)$ на $[t_{i-1}, t_i]$. Из свойства 2) вытекает, что свойство 1) будет иметь место и для функций $g(x_1, \ \ldots\ , x_k)$, являющихся пределами в каждой точке для последовательностей функций g_n, для которых свойство 1) справедливо. Таким образом, класс функций, обладающих свойством 1), содержит все

---

*) Совокупность множеств $\mathfrak{S}$ называется σ-алгеброй, если: 1) все эти множества являются подмножествами некоторого множества $U \in \mathfrak{S}$; 2) из $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{S}$ вытекает, что $A - B$, $A \cap B$, $A \cup B$ принадлежат $\mathfrak{S}$; 3) если $A_n \in \mathfrak{S}$, $n = 1, 2, \ \ldots$, то $\bigcap\limits_n A_n$ и $\bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{S}$.

непрерывные функции и замкнут относительно сходимости функций в каждой точке. Поэтому он содержит все борелевские функции.

Определим случайные величины ω_k, $k=1, 2, \ldots$, следующим образом: если на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ случайный процесс не имеет скачков, превосходящих по абсолютной величине ε, то все $\omega_k=0$; если же в точках $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_r\in[t_{i-1}, t_i]$ и только в этих точках отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ процесс $\xi(t)$ имеет скачки, превосходящие по абсолютной величине ε, то $\omega_i=\xi(\tau_i)-\xi(\tau_i-0)$ при $i=1, 2, \ldots, r$, $\omega_i=0$ при $i>r$. Величины ω_i принадлежат $\mathfrak{M}_{[t_{i-1}, t_i]}$. Действительно, пусть $\psi_\varepsilon(x)=1$ при $|x|>\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(x)=0$ при $|x|\leqslant\varepsilon$, $\varphi_k(k)=1$, $\varphi_k(x)=0$ при $x\neq k$,

$$t_{i-1}=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=t_i, \qquad \lim_{n\to\infty}\max_k(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)})=0;$$

положим

$$\bar\omega_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\varphi_k\Big(\sum_{j=1}^{l}\psi_\varepsilon(\xi(t_j^{(n)})-\xi(t_{j-1}^{(n)}))\Big)[\xi(t_l^{(n)})-\xi(t_{l-1}^{(n)})]\times$$
$$\times\psi_\varepsilon(\xi(t_l^{(n)})-\xi(t_{l-1}^{(n)})).$$

Тогда

$$\omega_k=\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_k\Big(\sum_{j=1}^{l}\psi_\varepsilon(\bar\omega_j)\Big)\bar\omega_l\,\psi_\varepsilon(\bar\omega_l).$$

Если $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A, то $\chi_A(\omega_l)\in\mathfrak{M}_{[t_{i-1}, t_i]}$, а значит, и

$$\sum_{l=1}^{\infty}\chi_A(\omega_l)\in\mathfrak{M}_{[t_{i-1}, t_i]}.$$

Легко видеть, что $\nu(t_i, A)-\nu(t_{i-1}, A)=\sum_{l=1}^{\infty}\chi_A(\omega_l)$. Таким образом, $\nu(t_i, A)-\nu(t_{i-1}, A)$ при различных i независимы. Значит, $\nu(t, A)$ является процессом с независимыми приращениями. То, что $\nu(t, A)$ стохастически непрерывен, вытекает из того, что по определению $\nu(t, A)$ он непрерывен справа, а событие $\{\nu(t-0, A)\neq\nu(t, A)\}$ влечет событие $\{\xi(t-0)\neq\neq\xi(t)\}$, которое имеет вероятность нуль. Таким образом, $\nu(t, A)$ с вероятностью 1 непрерывен при каждом фиксированном t, а значит, и стохастически непрерывен (сходимость

с вероятностью 1 влечет сходимость по вероятности). Теорема доказана.

Замечание. Введем для $\xi(t)$ процессы $\xi_A(t)$:

$$\xi_A(t) = \sum_{\substack{s \leqslant t \\ \xi(s) - \xi(s-0) \in A}} (\xi(s) - \xi(s-0))$$

(т. е. процесс $\xi_A(t)$ представляет собой сумму скачков $\xi(s)$, происходящих до момента t и попадающих в множество A). Тогда процесс $\xi_A(t)$ будет стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями. Доказательство этого факта следует из соотношения

$$\xi_A(t_i) - \xi_A(t_{i-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(\omega_k)\,\omega_k,$$

где ω_k — величины, введенные при доказательстве теоремы.

Теорема 2. *Для всякого* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ *существует* $M\nu(t, A) = \Pi(t, A)$ *и* $\Pi(t, A)$ *является конечной числовой мерой на* $\mathfrak{B}_\varepsilon$.

Доказательство. Существование $M\nu(t, A)$ будет вытекать из существования $M\nu(t, U_\varepsilon)$, так как при $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ $0 \leqslant \nu(t, A) \leqslant \nu(t, U_\varepsilon)$. Пусть $\psi_\rho(x) = 0$ при $|x| \leqslant \rho$, $\psi_\rho(x) = 1$ при $|x| > \rho$. Рассмотрим такую последовательность разбиений отрезка $[a, t]$: $a = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) = 0$. Положим

$$\nu_n(t, \rho) = \sum_{i=1}^{n} \psi_\rho(\xi(t_i^{(n)}) - \xi(t_{i-1}^{(n)})).$$

Легко видеть, что $\nu_n(t, \rho)$ убывает с ρ и при $\rho < \varepsilon$:

$$\varliminf_{n\to\infty} \nu_n(t, \rho) \geqslant \nu(t, U_\varepsilon), \tag{11.1}$$

а при $\rho < \varepsilon$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \nu_n(t, \rho) \leqslant \nu(t, U_\varepsilon)$. Так как величина $\nu(t, U_\varepsilon)$ с вероятностью 1 конечна для всякого $\varepsilon > 0$, то $\nu_n(t, \rho)$ ограничены по вероятности равномерно относительно n. Кроме того, $\nu_n(t, \rho)$ представляет собой сумму независимых случайных величин, не превосходящих 1. Используя теорему 4 § 3, можем утверждать, что для каждого m существует $L_m(\rho)$,

для которого $M[\nu_n(t, \rho)]^m \leqslant L_m(\rho)$. Поэтому и $M[\overline{\lim_{n\to\infty}} \nu_n(t, \rho)]^m \leqslant$ $\leqslant L_m(\rho)$. Отсюда вытекает, в силу (11.1), что при $\varepsilon > \rho$ $M[\nu(t, U_\varepsilon)]^m \leqslant L_m(\rho)$, т. е. величина $\nu(t, A)$ имеет моменты всех порядков при $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$. Пусть $\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$. Если последовательности множеств $A_k \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ и A_k не пересекаются, то

$$\nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(t, A_k).$$

Следовательно,

$$\Pi\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = M\nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = M \sum_{k=1}^{\infty} \nu(t, A_k) =$$

$$= M \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(t, A_k) = \lim_{n\to\infty} M \sum_{k=1}^{n} \nu(t, A_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Pi(t, A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi(t, A_k).$$

Переходить к пределу под знаком математического ожидания можно, ввиду теоремы Лебега из § 1, так как

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(t, A_k) \leqslant \nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \text{ и } M\nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty.$$

Теорема доказана.

§ 12. Независимость значений меры $\nu(t, A)$ на непересекающихся множествах

В этом параграфе мы покажем, что мера $\nu(t, A)$ обладает следующим свойством: для любого набора множеств A_1, A_2, ..., A_k из $\mathfrak{B}_\varepsilon$, не имеющих попарно общих точек, случайные процессы $\nu(t, A_1)$, ..., $\nu(t, A_k)$ будут независимы, т. е. k совокупностей случайных величин $\{\nu(t, A_1)\}$, ..., $\{\nu(t, A_k)\}$ будут независимы. Для доказательства этого факта установим некоторые свойства процесса $\xi_A(t)$, определенного в замечании § 11.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$. *Тогда процессы* $\xi_A(t)$ *и* $\xi(t) - \xi_A(t)$ *независимы.*

Доказательство. Предположим сначала, что множество A таково, что $\Pi(b, \bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}) = 0$; здесь b — правый конец отрезка изменения t, $\bar{A}$ — замыкание множества A, так что $\bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}$ — граница множества A; $\Pi(t, A)$ — мера, определенная в теореме 2 § 11. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого набора векторов $z_1, z_2, \ldots, z_r$ и $u_1, u_2, \ldots, u_r$ из $R^{(m)}$ и произвольных $t_1, t_2, \ldots, t_r$ из $[a, b]$

$$\mathrm{M} \exp\left\{ i \sum_1^r (\xi_A(t_j), z_j) + i \sum_1^r (\xi(t_j) - \xi_A(t_j), u_j)\right\} =$$

$$= \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_1^r (\xi_A(t_j), z_j)\right\} \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_1^r (\xi(t_j) - \xi_A(t_j), u_j)\right\} \quad (12.1)$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$). Пусть $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = b$, $\lambda_n = \max\limits_k (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Введем величины $\xi_k^{(n)} = \chi_A(\xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)}))[\xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)})]$, $\eta_k^{(n)} = \xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)}) - \xi_k^{(n)}$, где $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A. Положим

$$\xi_n(t) = \sum_{t_k^{(n)} < t} \xi_k^{(n)}, \quad \eta_n(t) = \sum_{t_k^{(n)} < t} \eta_k^{(n)}.$$

Из условия $\Pi(b, \bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}) = 0$ вытекает, что с вероятностью 1 скачки $\xi(t)$ не попадают на границу множества A. Поэтому $\xi_n(t) \to \xi_A(t)$ по вероятности, а значит, и $\eta_n(t) \to \xi(t) - \xi_A(t)$ по вероятности, так что для доказательства (12.1) достаточно доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \left[\mathrm{M} \exp\left\{i \sum_1^r [(\xi_n(t_j), z_j) + (\eta_n(t_j), u_j)]\right\} - \right.$$

$$\left. - \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_1^r (\xi_n(t_j), z_j)\right\} \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_1^r (\eta_n(t_j), u_j)\right\}\right] = 0.$$

Последнее соотношение будет установлено, если мы покажем, что для всякого $C>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{|u_k^{(n)}|\leqslant C\\ |z_k^{(n)}|\leqslant C}}\left[\mathrm{M}\exp\left\{i\sum_1^n[(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})+(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})]\right\}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{M}\exp\left\{i\sum_1^n(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})\right\}\mathrm{M}\exp\left\{i\sum_1^n(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\right\}\right]=0. \qquad (12.2)$$

Оценим разность

$$\mathrm{M}\exp\left\{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})+i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\right\}-$$

$$-\mathrm{M}\exp\left\{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})\right\}\mathrm{M}\exp\left\{i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\right\}.$$

Из величин $\xi_k^{(n)}$ и $\eta_k^{(n)}$ хотя бы одна равна нулю, значит, $(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})=0$. Поэтому

$$\exp\left\{i(\xi_k^{(n)},z_k^{(n)})+i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}[i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})+$$

$$+i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})]^r=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}([i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})]^r+[i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})]^r)=$$

$$=e^{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})}+e^{i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})}-1$$

и

$$|\mathrm{M}\exp\{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})+i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\}-\mathrm{M}\exp\{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})\}\times$$

$$\times\mathrm{M}\exp\{i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})\}|=|\mathrm{M}e^{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})}-1||\mathrm{M}e^{i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})}-1|. \qquad (12.3)$$

Учитывая, что пары $\xi_k^{(n)}$, $\eta_k^{(n)}$ независимы при разных k, и используя неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^n a_k-\prod_{k=1}^n b_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_k-b_k|,$$

если $|a_k|\leqslant 1$, $|b_k|\leqslant 1$, получим из (12.3), что для доказательства (12.2) достаточно показать справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{|u_k^{(n)}|\leqslant C\\ |z_k^{(n)}|\leqslant C}}\sum_{k=1}^n|\mathrm{M}e^{i(\xi_k^{(n)},\ z_k^{(n)})}-1||\mathrm{M}e^{i(\eta_k^{(n)},\ u_k^{(n)})}-1|=0. \qquad (12.4)$$

Последнее равенство будет вытекать из соотношений

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ |u|\leqslant C}} |\mathrm{M}e^{i(\eta_k^{(n)}, u)} - 1| = 0, \tag{12.5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|z_k^{(n)}|\leqslant C} \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{M}e^{i(\xi_k^{(n)}, z_k^{(n)})} - 1| < \infty, \tag{12.6}$$

которые сейчас будут доказаны. Заметим, что для всякого $\delta > 0$

$$|\mathrm{M}\, e^{i(\eta_k^{(n)}, u_k^{(n)})} - 1| \leqslant 2\mathrm{P}\{|\eta_k^{(n)}| > \delta\} + \delta C \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathrm{P}\{|\xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)})| > \delta\} + \delta C,$$

так как $|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$, поэтому (12.5) вытекает из произвольности $\delta > 0$ и равномерной стохастической непрерывности $\xi(t)$. Далее, так как

$$|e^{i(\xi_k^{(n)}, z_k^{(n)})} - 1| \leqslant 2\chi_A(\xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)})),$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{M}e^{i(\xi_k^{(n)}, z_k^{(n)})} - 1| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}|e^{i(\xi_k^{(n)}, z_k^{(n)})} - 1| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\,\chi_A(\xi(t_k^{(n)}) - \xi(t_{k-1}^{(n)})).$$

Равномерная ограниченность правой части этого неравенства установлена при доказательстве теоремы 2 § 11. Неравенство (12.6) доказано, а значит, доказана теорема для множеств A, для которых $\Pi(b, \bar{A}\cap\overline{R^{(m)} - A}) = 0$.

Для доказательства теоремы в общем случае отметим следующие свойства совокупности $\mathfrak{F}$ множеств A, для которых справедливо утверждение теоремы: 1) если $A_n \in \mathfrak{F}$ и $A_n \subset A_{n+1}$ или $A_n \supset A_{n+1}$ для всех n, то $\bigcup A_n \in \mathfrak{F}$ и $\bigcap A_n \in \mathfrak{F}$; 2) все открытые множества из $R^{(m)}$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Доказательство свойства 1) вытекает из того, что процессы $\bar{\xi}(t)$ и $\bar{\eta}(t)$, являющиеся пределами в смысле сходимости по вероятности процессов $\bar{\xi}_n(t)$ и $\bar{\eta}_n(t)$, независимых при каждом n,

будут также независимы (если $A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup_n A_n$, то $\xi_{A_n}(t) \xrightarrow{P} \xi_A(t)$). Свойство 2) справедливо, так как всякое открытое множество можно представить в виде суммы счетного числа открытых сфер S, для которых $\Pi(b, \overline{S \cap R^{(m)} - S}) = 0$. Так как совокупность множеств, обладающая свойствами 1) и 2), будет содержать все борелевские множества из $R^{(m)}$, то этим и завершается доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t) - \xi_{U_\varepsilon}(t)$, *а* $A_1, \ldots, A_k$ — *множества из* $\mathfrak{B}_\varepsilon$, *попарно не имеющие общих точек. Тогда процессы* $\nu(t, A_1), \ldots, \nu(t, A_k)$, $\xi_\varepsilon(t)$ *независимы.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что 1) процесс $\xi_\varepsilon(t)$ не зависит от совокупности процессов $\nu(t, A_1), \ldots, \nu(t, A_k)$ и что 2) процесс $\nu(t, A_i)$ не зависит от совокупности процессов $\nu(t, A_1), \ldots, \nu(t, A_{i-1}), \nu(t, A_{i+1}), \ldots, \nu(t, A_k)$. Процессы $\xi_\varepsilon(t)$ и $\xi_{U_\varepsilon}(t)$ независимы по теореме 1. Легко видеть, что мера $\tilde{\nu}(t, A)$, построенная по процессу $\xi_{U_\varepsilon}(t)$, так же как $\nu(t, A)$ построена по процессу $\xi(t)$, будет совпадать с мерой $\nu(t, A)$ при $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$. Значит, $\nu(t, A)$ при $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ будет пределом борелевских функций от значений процесса $\xi_{U_\varepsilon}(t)$, не зависящего от процесса $\xi_\varepsilon(t)$. Поэтому совокупность случайных величин $\nu(t, A_1), \ldots, \nu(t, A_k)$ не зависит от $\xi_\varepsilon(t)$. Для доказательства утверждения 2) рассуждаем аналогичным образом. Процессы $\xi_{A_i}(t)$ и $\xi(t) - \xi_{A_i}(t)$ независимы. При $j \neq i$ мера $\tilde{\nu}_i(t, A_j)$, построенная по процессу $\xi(t) - \xi_{A_i}(t)$, будет совпадать с $\nu(t, A_j)$, а $\nu(t, A_i)$ представляет собой число скачков процесса $\xi_{A_i}(t)$. Совокупности величин $\{\nu(t, A_j), j \neq i\}$ и $\{\nu(t, A_i)\}$ построены из значений независимых процессов $\xi(t) - \xi_{A_i}(t)$ и $\xi_{A_i}(t)$, поэтому эти совокупности будут независимы. Теорема доказана.

Следствие. *Мера* $\nu(t, A)$ *при каждом* t *имеет независимые значения на непересекающихся множествах.*

Такие меры мы будем называть *мерами с независимыми значениями.*

Мера $\nu(t, A)$ определена на σ-алгебре $\mathfrak{B}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ кольцо множеств *), содержащее

*) Совокупность множеств $\mathfrak{B}$ называется кольцом, если из $A \in \mathfrak{B}$, $B \in \mathfrak{B}$ вытекает $A - B \in \mathfrak{B}$, $A \cap B \in \mathfrak{B}$, $A \cup B \in \mathfrak{B}$.

множества из $\mathfrak{B}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ и множества вида $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_k}$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Pi\left(b, \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) < \infty.$$

Определим для таких множеств $\nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(t, \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$. Так продолженная на кольцо $\mathfrak{B}_0$ мера $\nu(t, A)$ будет по-прежнему иметь независимые значения.

§ 13. Стохастический интеграл по случайной мере

Для представления случайного процесса $\xi(t)$, а также некоторых величин, связанных с процессом $\xi(t)$ (например, процесса $\xi_A(t)$), нам понадобится интеграл

$$\int_A \varphi(x)\, \nu(t, dx). \tag{13.1}$$

Ниже дается определение этого интеграла.

Пусть $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ и функция $\varphi(x)$ измерима по Борелю и конечна. Возьмем произвольную последовательность $c_k^{(h)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, для которой $\lim_{k\to-\infty} c_k^{(h)} = -\infty$, $\lim_{k\to+\infty} c_k^{(h)} = +\infty$, $0 \leqslant c_{k+1}^{(h)} - c_k^{(h)} \leqslant h$. Обозначим через $A_k^{(h)}$ подмножество множества A, для которого $c_k^{(h)} \leqslant \varphi(x) < c_{k+1}^{(h)}$. Положим

$$I_h(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(h)}\, \nu\left(t, A_k^{(h)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}^{(h)}\, \nu\left(t, A_{-k-1}^{(h)}\right). \tag{13.2}$$

Если существует предел $I_h(A)$ в смысле сходимости по вероятности, то этот предел обозначается $\int_A \varphi(x)\, \nu(t, dx)$. Заметим, что сходимость рядов (13.2) вытекает из того обстоятельства, что среди величин $\nu\left(t, A_k^{(h)}\right)$ будет только конечное число отличных от нуля. Если имеется другая последовательность $d_k^{(h)}$, получающаяся из последовательности $c_k^{(h)}$ добавлением некоторых членов, и $I'_h(A)$ — величина (13.2), построенная по последовательности $d_k^{(h)}$, то легко убедиться, что

$$|I'_h(A) - I_h(A)| \leqslant h\nu(t, A).$$

Следовательно, для любых h_1 и h_2

$$|I_{h_1}(A) - I_{h_2}(A)| \leqslant (h_1 + h_2)\nu(t, A),$$

каковы бы ни были последовательности $c_k^{(h_1)}$ и $c_k^{(h_2)}$. Значит,

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} |I_{h_1}(A) - I_{h_2}(A)| = 0$$

и предел $\lim\limits_{h_n \to 0} I_{h_n}(A)$ существует всегда с вероятностью 1.

Отметим основные свойства интеграла (13.1).

1) *Если множества* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *не пересекаются и при некотором* $\varepsilon > 0$ *все принадлежат* $\mathfrak{B}_\varepsilon$, *то*

$$\int\limits_{\bigcup_i A_i} \varphi(x)\nu(t, dx) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{A_i} \varphi(x)\nu(t, dx),$$

причем слагаемые в правой части независимы.

Это свойство является непосредственным следствием определения интеграла.

2) *Если функции* $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ *измеримы и конечны,* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, *то*

$$\int\limits_A [\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)]\nu(t, dx) =$$

$$= \alpha \int\limits_A \varphi_1(x)\nu(t, dx) + \beta \int\limits_A \varphi_2(x)\nu(t, dx).$$

Доказательство этого свойства легко получить, используя следующие свойства 3) и 4).

3) *Пусть функция* $\varphi(x)$ *принимает лишь конечное число значений* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. *Если* A_i — *подмножество множества* A, *для которого* $\varphi(x) = \varphi_i$, $x \in A_i$, *то*

$$\int\limits_A \varphi(x)\nu(t, dx) = \sum_1^k \varphi_i \nu(t, A_i).$$

4) *Если* $|\varphi(x)| \leqslant C$, *то*

$$\left|\int\limits_A \varphi(x)\nu(t, dx)\right| \leqslant C\nu(t, A),$$

а при $\varphi_1 < \varphi_2$

$$\int\limits_A \varphi_1(x)\nu(t, dx) \leqslant \int\limits_A \varphi_2(x)\nu(t, dx).$$

Оба этих свойства являются очевидными следствиями определения интеграла.

В том случае, когда функция $\varphi(x)$ непрерывна, а множество A ограничено, удобнее определять интеграл следующим образом. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, где A_k попарно не имеют общих точек. Обозначим через λ максимальный из диаметров множеств A_k. Выберем в каждом из множеств A_k по точке x_k. Тогда

$$\int_A \varphi(x)\, \nu(t,\ dx) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\, \nu(t,\ A_k). \qquad (13.3)$$

Эта формула вытекает из 4) и 3).

Отметим еще условие, при котором можно переходить к пределу под знаком стохастического интеграла.

5) *Пусть $\varphi_n(x)$ — измеримые по Борелю конечные функции, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ для всех x. Тогда*

$$\int_A \varphi_n(x)\, \nu(t,\ dx) \xrightarrow{P} \int_A \varphi(x)\, \nu(t,\ dx) \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Возьмем разбиение $\{c_k^{(h)}\}$ интервала $(-\infty,\ \infty)$ и построим величину $I_h(A)$ для функции $\psi(x) = \sup_n |\varphi_n(x)|$. Из построения и свойства 4) вытекает, что

$$\left| I_h(A) - \int_A \psi(x)\, \nu(t,\ dx) \right| \leqslant h\nu(t,\ A).$$

Обозначим через m максимальную из величин $c_k^{(h)}$ таких, что $\nu(t,\ B_k^{(h)}) > 0$, где $B_k^{(h)}$ — множество тех x, для которых $c_k^{(h)} \leqslant \psi(x) < c_{k+1}^{(h)}$. Тогда, если $B \subset A$, то

$$\int_B \psi(x)\, \nu(t,\ dx) \leqslant m\nu(t,\ B) + h\nu(t,\ A).$$

Пусть теперь B_n обозначает множество, для которого $\sup_{k \geqslant n} |\varphi_k - \varphi| > \delta$. Тогда $B_n \supset B_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ пусто. Поэтому $\nu(t,\ B_n) \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\left| \int_A [\varphi(x) - \varphi_n(x)]\, \nu(t,\ dx) \right| \leqslant \delta\nu(t,\ A) +$$

$$+ \left| \int_{B_n} [\varphi(x) - \varphi_n(x)]\, \nu(t,\ dx) \right| \leqslant \delta\nu(t,\ A) +$$

$$+ 2 \int_{B_n} \psi(x)\, \nu(t,\ dx) \leqslant (\delta + 2h)\, \nu(t,\ A) + 2m\nu(t,\ B_n).$$

Доказательство утверждения 5) вытекает из произвольности $\delta > 0$ и $h > 0$ и того, что $\nu(t, B_n) \xrightarrow{P} 0$.

Наконец, последнее свойство:

6) *Если* $\int_A |\varphi(x)|\,\Pi(t, dx) < \infty$, *то*

$$M\int_A \varphi(x)\,\nu(t, dx) = \int_A \varphi(x)\,\Pi(t, dx).$$

Доказательство получается из определения, если учесть, что $\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$.

Покажем, что процесс $\xi_A(t)$ можно записать в виде стохастического интеграла по мере $\nu(t, A)$.

Теорема. *Если* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, *то*

$$\xi_A(t) = \int_A x\nu(t, dx). \tag{13.4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что (13.4) имеет место для того случая, когда множество A ограничено. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, множества A_k не имеют общих точек и $A_k \in \mathfrak{B}_\varepsilon$. Тогда

$$\int_A x\nu(t, dx) = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} x\nu(t, dx).$$

Выберем в каждом из множеств A_k по точке x_k. Обозначим через λ максимальный из диаметров множеств A_k. Легко видеть, что $|\xi_{A_k}(t) - x_k\nu(t, A_k)| \leqslant \lambda\nu(t, A_k)$. Поэтому

$$\left|\int_A x\nu(t, dx) - \xi_A(t)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{A_k} x\nu(t, dx) - \xi_{A_k}(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\left|\int_{A_k} x\nu(t, dx) - x_k\nu(t, A_k)\right| + |\xi_{A_k}(t) - x_k\nu(t, A_k)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda \sum_{k=1}^{n} \nu(t, A_k) = 2\lambda\nu(t, A).$$

Так как λ можно выбрать сколь угодно малым, то из последнего неравенства вытекает (13.4) для ограниченных A. В общем случае выберем последовательность ограниченных

борелевских множеств A_n, для которых $A_n \subset A_{n+1}$ и $\bigcup_n A_n = A$. Тогда

$$\xi_{A_n}(t) = \int_{A_n} x\nu(t, dx).$$

Переходя в этом равенстве к пределу и используя то обстоятельство, что $\xi_A(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_{A_n}(t)$ с вероятностью 1, а также свойство 5) стохастических интегралов, получим доказательство теоремы.

§ 14. Распределения величин $\nu(t, A)$ и $\xi_A(t)$

Так как процесс $\nu(t, A)$ является процессом с независимыми приращениями, то для определения конечномерных распределений $\nu(t, A)$ достаточно знать распределения величин $\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)$ при $t_1 < t_2$, так как $\nu(a, A) = 0$.

Теорема 1. *Если* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, $t_1 < t_2$, *то для всех неотрицательных целых* k

$$\mathrm{P}\{\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A) = k\} = \frac{[\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)]^k}{k!} e^{-[\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)]}, \quad (14.1)$$

т. е. $\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)$ *имеет распределение Пуассона с параметром* $\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)$.

Доказательство. Предположим сначала, что для множества A выполняется условие $\Pi(b, \bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}) = 0$ (аналогичное тому, которое накладывалось на A при доказательстве теоремы 1 § 12). Пусть $t_1 = t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t_2$, $\lambda_n = \max_j |t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}|$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A, $\xi_i^{(n)} = \chi_A(\xi(t_i^{(n)}) - \xi(t_{i-1}^{(n)}))$. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1 § 12, $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)}$ будет сходиться по вероятности к $\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)$. Поэтому

$$\mathrm{P}\{\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A) = k\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\sum_1^n \xi_i^{(n)} = k\}. \quad (14.2)$$

Так как величины $\xi_i^{(n)}$ независимы и принимают лишь значения 0 и 1, то

$$\mathrm{P}\left\{\sum_1^n \xi_i^{(n)} = k\right\} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \mathrm{P}\left\{\xi_{i_1}^{(n)} = 1, \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, \xi_{i_k}^{(n)} = 1;\ \xi_i^{(n)} = 0,\ i \neq i_s,\ s = 1, \ldots, k\right\} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \prod_{s=1}^{k} \frac{\mathrm{P}\left\{\xi_{i_s}^{(n)} = 1\right\}}{\mathrm{P}\left\{\xi_{i_s}^{(n)} = 0\right\}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 0\right\}. \quad (14.3)$$

Учитывая, что $\mathrm{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 0\right\} \to 1$ равномерно по i при $n \to \infty$ ввиду равномерной стохастической непрерывности $\xi(t)$, убеждаемся, что для доказательства формулы (14.1) достаточно установить равенства:

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 0\right\} = \exp\left\{-\Pi(t_2, A) + \Pi(t_1, A)\right\}, \quad (14.4)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \prod_{s=1}^{k} \mathrm{P}\left\{\xi_{i_s}^{(n)} = 1\right\} = \frac{1}{k!}\left[\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)\right]^k. \quad (14.5)$$

Существование пределов в формулах (14.4) и (14.5) вытекает из формулы (14.2). Отметим, что $\lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 0\right\} \neq 0$.

Действительно, так как

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \prod_{s=1}^{k} \mathrm{P}\left\{\xi_{i_s}^{(n)} = 1\right\} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 1\right\}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!}\left(\mathrm{M}\sum_1^n \xi_i^{(n)}\right)^k$$

и правая часть последнего неравенства ограничена равномерно по n (это установлено при доказательстве теоремы 2 § 11),

то в случае $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=0\}=0$ из (14.3) вытекало бы, что для всех k

$$\mathrm{P}\{\nu(t_2, A)-\nu(t_1, A)=k\}=0,$$

это же невозможно. Обозначим

$$\Lambda=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=0\}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}+\ln \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=0\})=$$

$$=O\left(\frac{\sup\limits_i \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}}{1-\sup\limits_i \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}\right)\to 0,$$

так как $\sup\limits_i \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}\to 0$, а сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}$ ограничена, как уже отмечалось выше. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}=-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=0\}=-\ln\Lambda.$$

Рассмотрим разность

$$\Delta_n=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}\prod_{s=1}^{k}\mathrm{P}\{\xi_{i_s}^{(n)}=1\}-\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{\xi_i^{(n)}=1\}\right)^k. \tag{14.6}$$

В этой разности останутся лишь члены вида

$$-\frac{1}{\alpha_{i_1}!\,\alpha_{i_2}!\ldots\alpha_{i_{k-1}}!}\mathrm{P}\{\xi_{i_1}^{(n)}=1\}^{\alpha_{i_1}}\ldots\mathrm{P}\{\xi_{i_{k-1}}^{(n)}=1\}^{\alpha_{i_{k-1}}},$$

где $\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_{k-1}}=k$. Таким образом, среди чисел α_{i_j} будет хотя бы одно, превосходящее 1. Вынося из каждого члена сомножитель $\mathrm{P}\{\xi_{i_s}^{(n)}=1\}$, если он первый входит в степени,

превосходящей 1, получим такую оценку для разности (14.6):

$$|\Delta_n| \leqslant \frac{1}{(k-2)!} \sup_i \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} \Big)^{k-1}.$$

Поэтому $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \prod_{s=1}^{k} \mathrm{P}\{\xi_{i_s}^{(n)} = 1\} = \frac{(-\ln \Lambda)^k}{k!}.$$

Таким образом, $\mathrm{P}\{\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A) = k\} = \Lambda \frac{(-\ln \Lambda)^k}{k!}$, т. е. $\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)$ имеет распределение Пуассона с параметром $-\ln \Lambda$, так что

$$-\ln \Lambda = \mathrm{M}[\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)],$$

с другой стороны, $\mathrm{M}[\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)] = \Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)$. Отсюда и вытекают формулы (14.4) и (14.5), а значит, и доказательство теоремы для того случая, когда $\Pi(b, \bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}) = 0$. При доказательстве теоремы 1 § 12 уже было показано, что класс множеств, содержащий множества $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, для которых $\Pi(b, \bar{A} \cap \overline{R^{(m)} - A}) = 0$, и замкнутый относительно операций счетного сложения и счетного пересечения множеств, содержит все множества из $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Поэтому, чтобы убедиться в справедливости теоремы в общем случае, достаточно заметить, что предел в смысле сходимости по вероятности случайных величин, имеющих распределения Пуассона, тоже будет иметь распределение Пуассона.

Используем теперь теорему 1 и представление (13.4) для нахождения характеристической функции величины $\xi_A(t)$.

Теорема 2. *Для всякого* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ *и* $z \in R^{(m)}$

$$\mathrm{M} \exp\{i(z, \xi_A(t))\} = \exp\Big\{\int_A (e^{i(z, x)} - 1)\, \Pi(t, dx)\Big\}. \quad (14.7)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ограниченного множества A. Пусть $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, где A_j — борелевские множества без общих точек, λ — максимальный из диа-

метров множеств A_j. Если $x_j \in A_j$, то поскольку функция x непрерывна, используя (13.3), получим

$$\xi_A(t) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} x_j \nu(t, A_j).$$

Поэтому

$$e^{i(z, \xi_A(t))} = \lim_{\lambda \to 0} \exp\{i \sum_{j=1}^{n} (z, x_j) \nu(t, A_j)\},$$

и по теореме Лебега § 1

$$\begin{aligned} M e^{i(z, \xi_A(t))} &= \lim_{\lambda \to 0} M \exp\{i \sum_{j=1}^{n} (z, x_j) \nu(t, A_j)\} = \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \prod_{j=1}^{n} M \exp\{(z, x_j) \nu(t, A_j)\} \end{aligned} \tag{14.8}$$

(так как величины $\nu(t, A_j)$ независимы). Величина $\nu(t, A_j)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Pi(t, A_j)$, значит,

$$M e^{i\mu\nu(t, A_j)} = \exp\{(e^{i\mu} - 1)\Pi(t, A_j)\}.$$

Итак, из (14.8) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} M e^{i(z, \xi_A(t))} &= \lim_{\lambda \to 0} \exp\{\sum_{j=1}^{n} (e^{i(z, x_j)} - 1)\Pi(t, A_j)\} = \\ &= \exp\{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} (e^{i(z, x_j)} - 1)\Pi(t, A_j)\}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=1}^{n} \Big[\int_{A_j} (e^{i(z, x)} - 1)\Pi(t, dx) - (e^{i(z, x_j)} - 1)\Pi(t, A_j)\Big]\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big|\int_{A_j} [e^{i(z, x)} - e^{i(z, x_j)}]\Pi(t, dx)\Big| \leqslant |z| \lambda \Pi(t, A). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} (e^{i(z, x_j)} - 1)\Pi(t, A_j) = \int_A (e^{i(z, x)} - 1)\Pi(t, dx).$$

Теорема доказана для ограниченного A. В общем случае можно указать последовательность ограниченных множеств A_n, для которых $A_n \subset A_{n+1}$ и $\bigcup A_n = A$. Тогда $\xi_A(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_{A_n}(t)$ с вероятностью 1, следовательно,

$$\mathrm{M}\, e^{i(\xi_A(t),\, z)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\, e^{i(\xi_{A_n}(t),\, z)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\int_{A_n} (e^{i(z,\, x)} - 1)\,\Pi(t,\, dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{A} (e^{i(z,\, x)} - 1)\,\Pi(t,\, dx)\right\}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Применяя теорему 2 к процессу $\xi(t) - \xi(t_1)$, рассматриваемому на $[t_1, b]$, получаем

$$\mathrm{M}\exp\{i(\xi_A(t) - \xi_A(t_1),\, z)\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{A} (e^{i(z,\, x)} - 1)\,(\Pi(t,\, dx) - \Pi(t_1,\, dx))\right\}. \qquad (14.9)$$

§ 15. Непрерывный процесс с независимыми приращениями

В этом параграфе будет установлено, что класс непрерывных с вероятностью 1 процессов совпадает с классом процессов с независимыми приращениями, стохастически непрерывных и обладающих нормально распределенными приращениями.

Теорема 1. *Если $\xi(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 процесс с независимыми приращениями, то для всех t_1 и $t_2 \in [a, b]$ величина $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ имеет нормальное распределение.*

Доказательство. Из теоремы 2 § 10 вытекает, что $\mathrm{M}\,|\xi(t) - \xi(a)|^k$ для каждого $k > 0$ ограничено равномерно по t. Пусть $\xi_1(t) = \xi(t) - \xi(a) - \mathrm{M}\,[\xi(t) - \xi(a)]$, $\xi_1(t)$ будет с вероятностью 1 непрерывным процессом (непрерывность $\mathrm{M}\,[\xi(t) - \xi(a)]$ вытекает из непрерывности $\xi(t)$ с вероятностью 1, равномерной ограниченности $\mathrm{M}\,|\xi(t) - \xi(a)|^2$ и теоремы 2 § 7). Все абсолютные моменты процесса $\xi_1(t)$

будут равномерно ограничены по t. Покажем, что $\xi_1(t)$ имеет нормально распределенные приращения. Предположим сначала, что $\xi_1(t)$ — числовой процесс. Прежде всего установим некоторые вспомогательные предложения. Пусть

$$t_1 = t_0' < t_1' < \ldots < t_n' = t_2; \quad \lambda = \max_j (t_{j+1}' - t_j');$$

$$\Delta\xi_j = \xi_1(t_{j+1}') - \xi_1(t_j').$$

1) $\mathrm{M}\left(\sum_1^n (\Delta\xi_i)^2\right)^2 \leqslant \mathrm{M}\,[\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)]^4$. Действительно, учитывая, что $\mathrm{M}\,\Delta\xi_i = 0$, и независимость $\Delta\xi_i$, получаем

$$\mathrm{M}\,[\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)]^4 = \mathrm{M}\left(\sum_1^n \Delta\xi_i\right)^4 = \mathrm{M}\left\{\sum_1^n (\Delta\xi_i)^4 + \right.$$

$$+ 4 \sum_{i \neq j} (\Delta\xi_i)^3 \Delta\xi_j + 3 \sum_{i \neq j} (\Delta\xi_i)^2 (\Delta\xi_j)^2 +$$

$$\left. + 6 \sum_{i \neq j \neq k} (\Delta\xi_i)^2 \Delta\xi_j \Delta\xi_k \right\} = \mathrm{M}\left\{\sum_1^n (\Delta\xi_i)^4 + \right.$$

$$\left. + 3 \sum_{i \neq j} (\Delta\xi_i)^2 (\Delta\xi_j)^2 \right\} \geqslant \mathrm{M}\left(\sum_1^n (\Delta\xi_i)^2\right)^2.$$

2)
$$\lim_{\lambda \to 0} \mathrm{M} \sup_k (\Delta\xi_k)^2 = 0. \tag{15.1}$$

Для доказательства (15.1) выберем функцию $\varepsilon(\lambda)$ так, чтобы $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{j=1}^n \mathrm{P}\{|\Delta\xi_j| > \varepsilon(\lambda)\} = 0$ и $\varepsilon(\lambda) \to 0$. Возможность такого выбора обеспечивает теорема 1 § 10. Пусть $\psi_C(h) = 1$ при $h < C$, $\psi_C(h) = 0$ при $h \geqslant C$. Тогда

$$\sup_k (\Delta\xi_k)^2 \leqslant \varepsilon^2(\lambda)\, \psi_{\varepsilon(\lambda)}\left(\sup_k |\Delta\xi_k|\right) +$$

$$+ \sum_1^n (\Delta\xi_k)^2 \left[1 - \psi_{\varepsilon(\lambda)}\left(\sup_k |\Delta\xi_k|\right)\right]. \tag{15.2}$$

Поэтому, учитывая, что $|\psi_{\varepsilon(\lambda)}| \leqslant 1$, и применяя неравенство

Коши — Буняковского, получим

$$\mathrm{M}\sup_k(\Delta\xi_k)^2 \leqslant (\varepsilon(\lambda))^2 + \mathrm{M}\sum_1^n(\Delta\xi_k)^2\left[1-\psi_{\varepsilon(\lambda)}\left(\sup_k|\Delta\xi_k|\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\lambda)^2 + \sqrt{\mathrm{M}\left(\sum_1^n(\Delta\xi_k)^2\right)^2}\sqrt{\mathrm{M}\left|1-\psi_{\varepsilon(\lambda)}\left(\sup_k|\Delta\xi_k|\right)\right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\lambda)^2 + \sqrt{\mathrm{M}(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1))^4\,\mathrm{P}\left\{\sup_k|\Delta\xi_k|>\varepsilon(\lambda)\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\lambda)^2 + \sqrt{\mathrm{M}(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1))^4\sum_{k=1}^n \mathrm{P}\left\{|\Delta\xi_k|>\varepsilon(\lambda)\right\}}\,.$$

Из последующего неравенства ввиду свойств $\varepsilon(\lambda)$ и получаем (15.1).

3) $$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \mathrm{M}|\Delta\xi_k|^3 = 0. \tag{15.3}$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{M}|\Delta\xi_k|^3 = \mathrm{M}\sum_{k=1}^n|\Delta\xi_k|^3 \leqslant \mathrm{M}\sup_k|\Delta\xi_k|\sum_1^n(\Delta\xi_k)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\mathrm{M}\sup_k|\Delta\xi_k|^2}\sqrt{\mathrm{M}\left(\sum_1^n(\Delta\xi_k)^2\right)^2}\,.$$

Для доказательства (15.3) остается применить результаты пунктов 1) и 2).

Рассмотрим характеристическую функцию величины $\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)$. Имеем

$$\mathrm{M}\exp\{is[\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1)]\} = \mathrm{M}\exp\left\{is\sum_1^n\Delta\xi_k\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \mathrm{M}\exp\{is\,\Delta\xi_k\} = \lim_{\lambda\to 0}\prod_{k=1}^n \mathrm{M}\exp\{is\,\Delta\xi_k\}.$$

Так как для всех вещественных α $\left|e^{i\alpha}-1-i\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right| \leqslant \frac{|\alpha|^3}{6}$, то

$$\left|\mathrm{M}\exp\{is\,\Delta\xi_k\}-1+\frac{s^2}{2}\mathrm{M}(\Delta\xi_k)^2\right| \leqslant \frac{|s^3|}{6}\mathrm{M}|\Delta\xi_k|^3.$$

Поэтому

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}\exp\{is\,\Delta\xi_k\} - \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|s|^3}{6}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\,|\Delta\xi_k|^3$$

(мы опять использовали неравенство $\left|\prod a_k - \prod b_k\right| \leqslant \sum |a_k - b_k|$ при $|a_k| \leqslant 1$, $|b_k| \leqslant 1$, которое применялось при доказательстве теоремы 1 § 12). Учитывая (15.3), получим

$$\mathrm{M}\exp\{is\,[\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1)]\} = \lim_{\lambda\to 0}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right). \qquad (15.4)$$

Из (15.1) вытекает, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sup\limits_{k}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2 = 0$. Так как

$$\left|e^{-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2} - \left(1-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right)\right| = O\left((\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2)^2\right),$$

то

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right) - \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right\}\right| =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2)^2\right) = O\left(\sup_k \mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right).$$

Следовательно, для всех s

$$\mathrm{M}\exp\{is\,[\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1)]\} = \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\,(\Delta\xi_k)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\mathrm{M}\,[\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1)]^2\right\}.$$

Последнее соотношение доказывает теорему для одномерных процессов.

Для доказательства теоремы в общем случае заметим, что процесс $(\xi_1(t), z)$ будет с вероятностью 1 непрерывным процессом с независимыми приращениями, принимающим числовые значения. Поэтому

$$\mathrm{M}\exp\{i\,(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1),\ z)\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{M}\,(\xi_1(t_2)-\xi_1(t_1),\ z)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(A_{t_1,\,t_2}\,z,\,z)\right\},$$

где A_{t_1, t_2} — дисперсионный оператор случайного вектора $\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1)$ (см. § 5). Это доказывает теорему в общем случае.

Замечание 1. Пусть $\xi(a) = \mathbf{0}$. Введем функции $\boldsymbol{a}(t)$ с векторными значениями: $\boldsymbol{a}(t) = \mathrm{M}\,\xi(t)$, и $A(t)$, значениями которой является дисперсионный оператор $\xi(t)$. Эти две функции в нашем случае полностью определяют распределения $\xi(t)$ и приращений процесса $\xi(t)$:

$$\mathrm{M}\exp\{i(\xi(t_2) - \xi(t_1), z)\} =$$

$$= \exp\left\{i(\boldsymbol{a}(t_2) - \boldsymbol{a}(t_1), z) - \frac{1}{2}(A(t_2)z - A(t_1)z, z)\right\}. \quad (15.5)$$

Функции $\boldsymbol{a}(t)$ и $A(t)$ являются непрерывными. Для того чтобы установить это, достаточно показать, что $(\boldsymbol{a}(t), z)$ и $(A(t)z, z)$ являются непрерывными, т. е. задача сводится к доказательству того, что для числового процесса, непрерывного с вероятностью 1, будут непрерывны $\mathrm{M}\,\xi(t)$ и $\mathrm{D}\,\xi(t)$. Непрерывность $\mathrm{M}\,\xi(t)$ установлена при доказательстве теоремы, а непрерывность $\mathrm{D}\,\xi(t)$ вытекает из (15.1).

Теорема 2. *Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный процесс с независимыми приращениями, распределения приращений которого определяются формулой* (15.5). *Для того чтобы процесс $\xi(t)$ был с вероятностью* 1 *непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы функции $\boldsymbol{a}(t)$ и $A(t)$ были непрерывны.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы вытекает из теоремы 1 и замечания 1. Для доказательства достаточности будет использована теорема 1 § 10. Не ограничивая общности, можно считать, что $\boldsymbol{a}(t) = \mathbf{0}$. Пусть z_1, z_2, ..., z_m — ортонормированный базис в $R^{(m)}$. Тогда

$$|\xi(t_2) - \xi(t_1)|^2 = \sum_1^m (\xi(t_2) - \xi(t_1), z_k)^2.$$

Известно, что для нормально распределенной величины ξ $\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\,\xi)^4 = 3[\mathrm{D}\,\xi]^2$. Поэтому

$$\mathrm{M}(\xi(t_2) - \xi(t_1), z_k)^4 = 3[\mathrm{D}(\xi(t_2) - \xi(t_1), z_k)]^2 =$$

$$= 3(A(t_2)z_k - A(t_1)z_k, z_k)^2.$$

Используя эту оценку, получаем

$$\mathrm{M}\,|\,\zeta(t_2)-\zeta(t_1)\,|^4=\mathrm{M}\Big(\sum_1^m(\xi(t_2)-\xi(t_1),\ z_k)^2\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant m\mathrm{M}\sum_1^m(\xi(t_2)-\xi(t_1),\ z_k)^4=$$

$$=3m\sum_1^m(A(t_2)z_k-A(t_1)z_k,\ z_k)^2. \qquad (15.6)$$

Пусть $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, $\lambda=\max\limits_k(t_{k+1}-t_k)$. Для всякого $\varepsilon>0$

$$\sum_{j=1}^n\mathrm{P}\{|\,\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})\,|>\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^4}\sum_1^n\mathrm{M}\,|\,\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})\,|^4\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3m}{\varepsilon^4}\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n(A(t_j)z_k-A(t_{j-1})z_k,\ z_k)^2. \qquad (15.7)$$

Так как $(A(t_j)z_k-A(t_{j-1})z_k,\ z_k)=\mathrm{M}(\xi(t_j)-\xi(t_{j-1}),\ z_k)^2\geqslant 0$, то из (15.7) получаем

$$\sum_{j=1}^n\mathrm{P}\{|\,\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})\,|>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3m}{\varepsilon^4}\sum_{k=1}^m\sup_j(A(t_j)z_k-A(t_{j-1})z_k,\ z_k)\times$$

$$\times(A(b)z_k-A(a)z_k,\ z_k).$$

Из непрерывности $(A(t)z,\ z)$ вытекает равномерная непрерывность этой функции, значит, для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^n\mathrm{P}\{|\,\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})\,|>\varepsilon\}=0.$$

Применяя теорему 1 § 10, получаем доказательство теоремы.

Замечание 2. Для того чтобы сепарабельный процесс $\xi(t)$ с независимыми нормально распределенными приращениями был с вероятностью 1 непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был стохастически непрерывным. Можно опять предположить, что $\xi(a)=0$, а характеристическая функция $\zeta(t)$ определяется формулой (15.5). Тогда нужно

установить, что стохастическая непрерывность процесса эквивалентна непрерывности $\boldsymbol{a}(t)$ и $A(t)$. Из непрерывности $\boldsymbol{a}(t)$ и $A(t)$ по теореме 2 вытекает непрерывность $\xi(t)$ с вероятностью 1, а значит, и стохастическая непрерывность $\xi(t)$. Для доказательства непрерывности $\boldsymbol{a}(t)$ и $A(t)$ в случае стохастической непрерывности $\xi(t)$ заметим, что при $|z|=1$, $t<s$

$$\mathrm{P}\{(\xi(s)-\xi(t),\ \pm z)>\varepsilon\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\varepsilon-(\boldsymbol{a}(s)-\boldsymbol{a}(t),\ \pm z)}{(A(s)z-A(t)z,\ z)}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Если при некотором z $(A(s)z-A(t)z,\ z)$ не стремится к нулю при $s-t\to 0$, то, выбирая знак z так, чтобы $(\boldsymbol{a}(s)-\boldsymbol{a}(t),\ z)\geqslant 0$, убеждаемся, что $\mathrm{P}\{(\xi(s)-\xi(t),z)>\varepsilon\}\not\to 0$. Аналогично в случае разрыва $\boldsymbol{a}(t)$ можем подобрать такие z, t, s, $\varepsilon>0$, чтобы $\varepsilon-(\boldsymbol{a}(s)-\boldsymbol{a}(t),\ z)<0$, $s-t\to 0$; стохастическая непрерывность $\xi(t)$ опять нарушается. Наше утверждение доказано.

Замечание 3. Если $\xi(a)\neq\mathbf{0}$, то, полагая

$$\boldsymbol{a}(t)=\mathrm{M}(\xi(t)-\xi(a)),\quad (A(t)z,\ z)=\mathrm{M}(\xi(t)-\xi(a),\ z)^2,$$
$$\varphi_a(z)=\mathrm{M}\exp\{i(z,\ \xi(a))\},$$

можем записать характеристическую функцию процесса $\xi(t)$ в виде

$$\varphi_t(z)=\mathrm{M}\exp\{i(z,\ \xi(t))\}=$$
$$=\varphi_a(z)\exp\left\{i(z,\ \boldsymbol{a}(t))-\frac{1}{2}(z,\ A(t)z)\right\}. \qquad (15.8)$$

Эта формула позволяет определить все конечномерные распределения процесса.

§ 16. Строение стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями

Цель этого параграфа — установить, что если у стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ выбросить все скачки, то получится непрерывный с вероятностью 1 и, следовательно, имеющий нормально распределенные приращения процесс. Таким образом, такие процессы $\xi(t)$ будут определяться своей непрерывной компо-

нентой и мерой $\nu(t, A)$, характеризующей скачки процесса $\xi(t)$.

Докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть U_ε — множество тех x, для которых $|x| > \varepsilon$. Положим $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t) - \xi_{U_\varepsilon}(t)$. Тогда при $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ имеет моменты всех порядков.*

Доказательство. Предположим, что для $\varepsilon > 0$

$$\Pi(b, \Gamma_\varepsilon) = 0,$$

где Γ_ε — множество тех x, для которых $|x| = \varepsilon$. Тогда, если $a = t_0 < \ldots < t_n = t$, $\lambda = \max_i (t_{i+1} - t_i)$, то

$$\xi_\varepsilon(t) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})] [1 - \chi_{U_\varepsilon}(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}))]$$

(предел в смысле сходимости по вероятности). Слагаемые

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot [\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})] [1 - \chi_{U_\varepsilon}(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}))]$$

не превосходят по абсолютной величине 1, поэтому на основании теоремы 4 § 3 для всех k

$$\mathrm{M} \left| \sum_{i=1}^{n} [\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})] [1 - \chi_{U_\varepsilon}(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}))] \right|^m$$

равномерно ограничены относительно n. Лемма доказана, если $\Pi(b, \Gamma_\varepsilon) = 0$. В общем случае доказательство леммы вытекает из того, что разность $\xi_{\varepsilon_1}(t) - \xi_{\varepsilon_2}(t)$ имеет все моменты при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, так как

$$|\xi_{\varepsilon_1}(t) - \xi_{\varepsilon_2}(t)| \leqslant \varepsilon_2 \nu(t, U_{\varepsilon_1}).$$

Лемма 2. *Мера $\Pi(b, A)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \leqslant 1} |x|^2 \Pi(b, dx) < \infty.$$

Доказательство. Заметим, что для ограниченного множества A из $\mathfrak{B}_\varepsilon$

$$\mathrm{M} |\xi_A(b)|^2 = \int_A |x|^2 \Pi(b, dx) + \left| \int_A x \Pi(b, dx) \right|^2. \quad (16.1)$$

Действительно, если $A = \bigcup_k A_k$, где A_k не имеет общих

точек, λ — максимальный из диаметров множеств A_k, $x_k \in A_k$, то

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_A(b) - \sum_k \nu(A_k,\ b)\,x_k\,|^2 \leqslant \lambda^2\,\mathrm{M}\,\nu(A,\ b)^2;$$

поэтому

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_A(b)\,|^2 = \lim_{\lambda\to 0} \mathrm{M}\left(\sum_k \nu(A_k,\ b)\,x_k,\ \sum_k \nu(A_k,\ b)\,x_k\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_k |\,x_k\,|^2\,\mathrm{M}\,\nu(b,\ A_k)^2 + \sum_{i\neq j}(x_i,\ x_j)\mathrm{M}\nu(b,\ A_i)\mathrm{M}\nu(b,\ A_j)\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_k |\,x_k\,|^2\,\Pi(b,\ A_k) + \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_k x_k\Pi(b,\ A_k),\ \sum_k x_k\Pi(b,\ A_k)\right).$$

Аналогично устанавливается, что $\mathrm{M}\xi_A(t) = \int\limits_A x\Pi(t,\ dx)$.

Пусть теперь A—множество x, для которых $\varepsilon < |\,x\,| \leqslant 1$. Тогда $\xi_1(t) = \xi_A(t) + \xi_\varepsilon(t)$. Поэтому для всех z

$$\mathrm{D}\,(\xi_A(t),\ z) \leqslant \mathrm{D}\,(\xi_1(t),\ z) \leqslant |\,z\,|^2\,\mathrm{M}\,|\,\xi_1(t)\,|^2.$$

Если $z_1, \ldots, z_m$ — ортонормированный базис в $R^{(m)}$, то

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_A(t) - \mathrm{M}\xi_A(t)\,|^2 \leqslant \sum_1^m \mathrm{M}\,(\xi_A(t) - \mathrm{M}\xi_A(t),\ z_k) =$$

$$= \sum_1^m \mathrm{D}\,(\xi_A(t),\ z_k) \leqslant m\,\mathrm{M}\,|\,\xi_1(t)\,|^2$$

или

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_A(t)\,|^2 - |\,\mathrm{M}\,\xi_A(t)\,|^2 \leqslant m\,\mathrm{M}\,|\,\xi_1(t)\,|^2.$$

Но

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_A(b)\,|^2 - |\,\mathrm{M}\,\xi_A(b)\,|^2 = \int\limits_A |\,x\,|^2\,\Pi(b,\ dx).$$

Значит, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{\varepsilon < |\,x\,| \leqslant 1} |\,x\,|^2\,\Pi(b,\ dx) \leqslant m\,\mathrm{M}\,|\,\xi_1(t)\,|^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon_n \to 0$ *монотонно,* Δ_n *— множество тех* x, *для которых* $\varepsilon_{n+1} < |\,x\,| \leqslant \varepsilon_n$. *Тогда ряд*

$$\sum_n [\xi_{\Delta_n}(t) - \mathrm{M}\,\xi_{\Delta_n}(t)] \qquad (16.2)$$

сходится при каждом t с вероятностью 1. *Если же* ε_n *выбраны так, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|x|\leqslant\varepsilon_n} |x|^2 \Pi(b,\ dx) < \infty, \tag{16.3}$$

то ряд (16.2) *сходится с вероятностью* 1 *равномерно.*

Доказательство. Сходимость ряда (16.2) с вероятностью 1 вытекает из теоремы 1 § 4. Для доказательства равномерной сходимости ряда при условии (16.3) оценим вероятность

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{l\geqslant n}\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{k=n}^{l}[\xi_{\Delta_k}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)]\right|\geqslant C\right\}.$$

Так как процессы $\xi_{\Delta_n}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_n}(t)$ с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода, то с вероятностью 1

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{j=n}^{l}[\xi_{\Delta_j}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_j}(t)]\right| = \lim_{\lambda\to 0}\sup_{1\leqslant k\leqslant r}\left|\sum_{j=n}^{l}[\xi_{\Delta_j}(t_k)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_j}(t_k)]\right|,$$

если $a=t_0<t_1<\ldots<t_r=b$, $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant r}(t_k-t_{k-1})$. Поэтому для всякого ортонормированного базиса $z_1, z_2, \ldots, z_m$ в $R^{(m)}$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{a\leqslant t\leqslant b\\ l\geqslant n}}\left|\sum_{j=n}^{l}[\xi_{\Delta_j}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_j}(t)]\right|\geqslant C\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\,\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant r\\ l\geqslant n}}\left|\sum_{j=n}^{l}[\xi_{\Delta_j}(t_k)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_j}(t_k)]\right|\geqslant\frac{C}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant r\\ l\geqslant n}}\left|\sum_{j=n}^{l}(\xi_{\Delta_j}(t_k)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_j}(t_k),\ z_i)\right|\geqslant\frac{C}{2m}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{m}\frac{4m^2}{C}\,\mathrm{M}\left(\sum_{j=n}^{\infty}[\xi_{\Delta_j}(t_k)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_i}(t_k)],\ z_i\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4m^3}{C^2}\int_{|x|\leqslant\varepsilon_n}|x|^2\,\Pi(b,\ dx).$$

Если $\eta_n = \sup\limits_{l \geqslant n} \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \sum\limits_{k=n} [\xi_{\Delta_k}(t) - M\xi_{\Delta_k}(t)] \right|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_n P\{\eta_n \geqslant \varepsilon\} < \infty$ ввиду (16.3). Поэтому среди событий $\{\eta_n \geqslant \varepsilon\}$ с вероятностью 1 происходит только конечное число, значит, с вероятностью 1 существует такой номер N_ε (случайный), что при $n > N_\varepsilon$ $\eta_n < \varepsilon$, т. е. $P\{\lim \eta_n = 0\} = 1$. Лемма доказана.

Следствие. *Процесс*

$$\zeta(t) = \xi_{\varepsilon_1}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{\Delta_k}(t) - M\xi_{\Delta_k}(t)),$$

если последовательность ε_k *удовлетворяет условию* (16.3), *будет с вероятностью* 1 *непрерывным процессом, не зависящим от* $\xi_A(t)$, *каково бы ни было* $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ *и* $\varepsilon > 0$.

Действительно, процесс $\xi_{\varepsilon_1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_{\Delta_k}(t) - M\xi_{\Delta_k}(t)) = \zeta_n(t)$ не имеет с вероятностью 1 скачков, превосходящих ε, если только $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon$. Поэтому на основании теоремы 2 § 12 $\zeta_n(t)$ не зависит от $\xi_A(t)$. Так как $\zeta(t)$ является с вероятностью 1 равномерным пределом функций, не имеющих разрывов, превосходящих ε, то и $\zeta(t)$ не будет иметь скачков, превосходящих ε, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. А из независимости $\zeta_n(t)$ от $\xi_A(t)$ при всех достаточно больших n будет вытекать независимость $\zeta(t)$ и $\xi_A(t)$.

Для представления процесса $\xi(t)$ введем обозначение:

$$\int\limits_{|x| \leqslant C} \varphi(x) [\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)].$$

Этот интеграл определяется для функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int\limits_{|x| \leqslant C} |\varphi(x)|^2 \Pi(t, dx) < \infty,$$

по формуле

$$\int\limits_{|x| \leqslant C} \varphi(x) [\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{\varepsilon < |x| \leqslant C} \varphi(x) \nu(t, dx) - \int\limits_{\varepsilon < |x| \leqslant C} \varphi(x) \Pi(t, dx) \right],$$

предел понимается в смысле сходимости по вероятности.

Существование этого предела вытекает из того, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\mathrm{M}\Big|\int\limits_{\varepsilon_1<|x|\leqslant C}\varphi(x)\,\nu(t,\,dx)-\int\limits_{\varepsilon_1<|x|\leqslant C}\varphi(x)\,\Pi(t,\,dx)+$$
$$+\int\limits_{\varepsilon_2<|x|\leqslant C}\varphi(x)\,\Pi(t,\,dx)-\int\limits_{\varepsilon_2<|x|\leqslant C}\varphi(x)\,\nu(t,\,dx)\Big|^2=$$
$$=\int\limits_{\varepsilon_1<|x|\leqslant\varepsilon_2}|\varphi(x)|^2\,\Pi(t,\,dx)\leqslant\int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon_2}|\varphi(x)|^2\,\Pi(t,\,dx)\to 0$$

при $\varepsilon_2 \to 0$.

Теорема 1. *Если $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, то существует с вероятностью* 1 *непрерывный процесс $\xi_0(t)$, не зависящий от меры $\nu(t, A)$, такой, что*

$$\xi(t)=\xi_0(t)+\int\limits_{|x|\leqslant 1}x\,[\nu(t,\,dx)-\Pi(t,\,dx)]+\int\limits_{|x|>1}x\nu(t,\,dx). \tag{16.4}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\varepsilon_n \to 0$ монотонна и $\varepsilon_1 = 1$. Тогда

$$\xi(t)=\xi_{U_1}(t)+\sum_1^\infty[\xi_{\Delta_k}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)]+\xi_1(t)-$$
$$-\sum_1^\infty(\xi_{\Delta_k}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)), \tag{16.5}$$

здесь обозначения такие же, как в леммах 1 и 3. Если для множеств Δ_k выполнено условие (16.3), то процесс

$$\xi_0(t)=\xi_1(t)-\sum_1^\infty(\xi_{\Delta_k}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t))$$

будет с вероятностью 1 непрерывным и не будет зависеть от $\nu(t, A)$. Из теоремы § 13 вытекает, что

$$\left.\begin{aligned}&\xi_{U_1}(t)=\int\limits_{|x|>1}x\nu(t,\,dx),\\&\xi_{\Delta_k}(t)-\mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)=\\&\quad=\int\limits_{\varepsilon_{k+1}<|x|\leqslant\varepsilon_k}x\nu(t,\,dx)-\int\limits_{\varepsilon_{k+1}<|x|\leqslant\varepsilon_k}x\Pi(t,\,dx).\end{aligned}\right\} \tag{16.6}$$

Следовательно,

$$\sum_1^\infty [\xi_{\Delta_k}(t) - \mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\xi_{\Delta_k}(t) - \mathrm{M}\xi_{\Delta_k}(t)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int\limits_{\varepsilon_n < |x| \leqslant 1} x\nu(t, dx) - \int\limits_{\varepsilon_n < |x| \leqslant 1} x\Pi(t, dx) \right] =$$

$$= \int\limits_{|x| \leqslant 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)]. \quad (16.7)$$

Подставляя (16.6) и (16.7) в (16.5), получим доказательство теоремы.

Теорема 2. *Для всякого стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ со значениями из $R^{(m)}$ существуют непрерывные по t функции $a(t)$, $A(t)$, $\Pi(t, A)$, удовлетворяющие условиям:*

а) *$a(t)$ принимает значения из $R^{(m)}$;*

б) *значениями $A(t)$ служат неотрицательные симметричные линейные операторы в $R^{(m)}$; $A(t_2) - A(t_1)$ — также неотрицательный оператор, если $t_1 < t_2$;*

в) *$\Pi(t, A)$ при каждом t является мерой на $\mathfrak{B}_0$, для которой $\int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^2 \Pi(t, dx) < \infty$ и $\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A) \geqslant 0$, если $t_1 < t_2$,*

и такие, что для $t_1 < t_2$ характеристическая функция величины $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ имеет вид

$$\mathrm{M}\exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\} =$$

$$= \exp\left\{ i(z, a(t_2) - a(t_1)) - \frac{1}{2}(A(t_2)z - A(t_1)z, z) \right\} +$$

$$+ \int\limits_{|x|>1} (e^{i(z,x)} - 1)[\Pi(t_2, dx) - \Pi(t_1, dx)] +$$

$$+ \int\limits_{|x| \leqslant 1} (e^{i(z,x)} - 1 - i(z, x))[\Pi(t_2, dx) - \Pi(t_1, dx)]. \quad (16.8)$$

Доказательство. Так как стохастическая эквивалентность влечет совпадение распределений, то можно считать, что $\xi(t)$ — сепарабельный процесс. Тогда на основании теоремы 1

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int\limits_{|x| \leqslant 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)] + \int\limits_{|x|>1} x\nu(t, dx),$$

где $\xi_0(t)$ не зависит от $\nu(t, A)$ и является с вероятностью 1 непрерывным процессом. Так как мера $\nu(t, A)$ имеет независимые значения, а $\xi_0(t)$ не зависит от $\nu(t, A)$, то $\xi_0(t)$, $\int\limits_{|x|\leqslant 1} x\,[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)]$ и $\int\limits_{|x|>1} x\nu(t, dx)$ независимы. Поэтому

$$\mathrm{M}\exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\} = \mathrm{M}\exp\{i(z, \xi_0(t_2) - \xi_0(t_1))\} \times$$
$$\times \mathrm{M}\exp\left\{i\left(z, \int\limits_{|x|\leqslant 1} x\,[\nu(t_2, dx) - \nu(t_1, dx) - \Pi(t_2, dx) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Pi(t_1, dx)]\right)\right\} \mathrm{M}\exp\left\{i\left(z, \int\limits_{|x|>1} x[\nu(t_2, dx) - \nu(t_1, dx)]\right)\right\}. \quad (16.9)$$

Пусть $a(t) = \mathrm{M}(\xi_0(t) - \xi_0(a))$, $(z, A(t)z) = \mathrm{M}(\xi_0(t) - \xi_0(a), z)^2$, тогда $\mathrm{M}\exp\{i(z, \xi_0(t_2) - \xi_0(t_1))\}$ запишется по формуле (15.5). Характеристическая функция $\int\limits_{|x|>1} x\nu(t, dx)$ определяется формулой (14.8), где A — множество тех x, для которых $|x| > 1$. Наконец,

$$\mathrm{M}\exp\left\{i\left(z, \int\limits_{|x|\leqslant 1} x\,[\nu(t_2, dx) - \nu(t_1, dx) - \Pi(t_2, dx) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Pi(t_1, dx)]\right)\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\exp\left\{i \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} (z, x)[\nu(t_2, dx) - \nu(t_1, dx)] - \right.$$
$$\left. - i \int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} (z, x)\,[\Pi(t_2, dx) - \Pi(t_1, dx)]\right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left\{\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} [e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x)][\Pi(t_2, dx) - \Pi(t_1, dx)]\right\}$$

(мы воспользовались формулой (14.8)). Так как

$$|e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x)| \leqslant \frac{1}{2}(z, x)^2,$$

то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим выражение

$$\exp\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant 1} [e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x)]\,[\Pi(t_2, dx) - \Pi(t_1, dx)].\right.$$

Подставляя в (16.9) найденные характеристические функции, получим (16.8). Непрерывность $a(t)$ и $A(t)$ вытекает из теоремы 2 § 15. То, что $\Pi(t, A)$ является мерой на $\mathfrak{B}_0$, установлено в § 11, существование $\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \Pi(t, dx)$ вытекает

из леммы 2, неотрицательность $\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A)$ вытекает из формулы $\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A) = M(\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A))$ и монотонности $\nu(t, A)$, а непрерывность $\Pi(t, A)$ по t вытекает из стохастической непрерывности $\nu(t, A)$. Теорема доказана.

Замечание. Неудобство формулы (16.8) заключается в том, что мера Π в окрестности точки 0 может становиться бесконечной. Вместо меры $\Pi(t, A)$ часто удобнее пользоваться мерой

$$G(t, A) = \int_A \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \Pi(t, dx), \tag{16.10}$$

конечность которой является следствием существования $\int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \Pi(t, dx)$. Формула (16.8) может быть переписана следующим образом:

$$M \exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\} =$$
$$= \exp\left\{i(z, \bar{a}(t_2) - \bar{a}(t_1)) - \frac{1}{2}(A(t_2)z - A(t_1)z, z) + \right.$$
$$\left. + \int \left(e^{i(z, x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1+|x|^2}\right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} [G(t_2, dx) - G(t_1, dx)]\right\}, \tag{16.11}$$

где

$$\bar{a}(t) = a(t) + \int_{|x|>1} \frac{x}{1+|x|^2} \Pi(t, dx) - \int_{|x|\leqslant 1} xG(t, dx). \tag{16.12}$$

Следствие. *Пусть $\xi(t)$ — одномерный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Тогда существуют непрерывная функция $\gamma(t)$, непрерывная неубывающая функция $\sigma^2(t)$ и непрерывная по t и монотонная ограниченная функция от x, $G(t, x)$, для которой при $t_1 < t_2$ $G(t_2, x) - G(t_1, x)$ также монотонна, такие, что*

$$M \exp\{i\lambda(\xi(t_2) - \xi(t_1))\} =$$
$$= \exp\left\{i\lambda[\gamma(t_2) - \gamma(t_1)] - \frac{\lambda^2}{2}[\sigma^2(t_2) - \sigma^2(t_1)] + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x} d_x[G(t_2, x) - G(t_1, x)]\right\}. \tag{16.13}$$

Определение. *Процесс $\xi(t)$ называется однородным, если он определен при $t \geqslant 0$ и распределение $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ зависит лишь от $t_2 - t_1$.*

Теорема 2. *Для того чтобы процесс был однородным, необходимо и достаточно, чтобы в представлении его характеристической функции по формуле* (16.8) $\boldsymbol{a}(t) = t\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \in R^{(m)}$, $A(t) = tA$, *где A — симметричный неотрицательный оператор в $R^{(m)}$, $\Pi(t, A) = t\Pi(A)$, $\Pi(A)$ — мера на $\mathfrak{B}_0$, для которой*

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}| \leqslant 1} |\boldsymbol{x}|^2 \Pi(d\boldsymbol{x}) < \infty.$$

Доказательство. Достаточность этих условий очевидна. Для доказательства их необходимости заметим, что для однородного процесса $\xi(t)$ будут однородными процессы $\xi_0(t)$ и $\nu(t, A)$ в представлении (16.4). Значит, при $t_1 < t_2$

$$\mathrm{M}[\nu(t_2, A) - \nu(t_1, A)] = \mathrm{M}\nu(t_2 - t_1, A),$$
$$\Pi(t_2, A) - \Pi(t_1, A) = \Pi(t_2 - t_1, A),$$
$$\mathrm{M}[\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)] = \mathrm{M}[\xi_0(t_2 - t_1) - \xi_0(0)],$$
$$\boldsymbol{a}(t_2) - \boldsymbol{a}(t_1) = \boldsymbol{a}(t_2 - t_1),$$
$$\mathrm{D}(\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1), \boldsymbol{z}) = \mathrm{D}(\xi_0(t_2 - t_1) - \xi_0(0), \boldsymbol{z}),$$
$$A(t_2) - A(t_1) = A(t_2 - t_1).$$

Используя непрерывность $a(t)$, $A(t)$, $\Pi(t, A)$, делаем вывод, что они будут линейными функциями от t, т. е. $\boldsymbol{a}(t) = t\boldsymbol{a}(1)$, $A(t) = tA(1)$, $\Pi(t, A) = t\Pi(1, A)$. Теорема доказана.