Задачи по курсу “Колмогоровская сложность и ее приложения” Часть 1.

Колмогоровская сложность.

1. Доказать, что универсальная функция $U(x, y)$ не является всюду определенной.

2. Объясните, почему функция сложности $\mathrm{K}(x)$ определена для любого x, а также, почему она неограничена.

3. Доказать что

(a) $\mathrm{K}(0^n|n) = 0(1)$, $\mathrm{K}(0^n) \leq \log n + 0(1)$, $\mathrm{K}(0^n) = \mathrm{K}(n) + + 0(1)$, где 0^n – слово, состоящее из n нулей; $\mathrm{K}(2^n) \leq \log n + 0(1)$ и $\mathrm{K}(2^{2^n}) \leq \log n + 0(1)$, где 2^n – натуральное число – степень двойки, понимаемое в обычном смысле.

(b) Существует константа $c \geq 0$ такая, что $\mathrm{K}(0^n) \geq \log n - c$ для бесконечно многих n.

(c) $\mathrm{K}(x|l(x)) \leq \mathrm{K}(x) + 0(1) \leq \mathrm{K}(x|l(x)) + \log l(x) + \log\log l(x) + + 2\log\log\log l(x) + 0(1)$.

(d) $\mathrm{K}(x, x) = \mathrm{K}(x) + 0(1)$; $\mathrm{K}(x, \mathrm{K}(x)) = \mathrm{K}(x) + 0(1)$.

(e) $\mathrm{K}(x0) = \mathrm{K}(x1) + 0(1) = \mathrm{K}(0x) + 0(1) = \mathrm{K}(1x) + 0(1) = = \mathrm{K}(x) + 0(1)$.

(f) $\mathrm{K}(x|y0) = \mathrm{K}(x|y1) + 0(1) = \mathrm{K}(x|0y) + 0(1) = \mathrm{K}(x|1y) + + 0(1) = \mathrm{K}(x|y) + 0(1)$.

4. Доказать, что оптимальный способ описания $A(p)$ не является всюду определенной функцией и для него не существует соответствующего алгоритма кодирования, который по произвольной конечной последовательности x выдавал бы какой-нибудь самый короткий код p, для которого $A(p) = x$.

5. Доказать, что функция сложности $\mathrm{K}(x)$ не является перечислимой снизу, но является перечислимой сверху.

6. Доказать, что существует константа c такая, что для любого N найдется пара последовательностей (x, y), для которой выполнено $l(x)+l(y) = N$ и $\mathrm{K}(x, y) \geq N + \log N - c$.

7. Доказать, что для любого n существует последовательность x длины n такая, что замена некоторого бита в ней на противоположный приводит к последовательности x', где

$$\mathrm{K}(x') \geq \mathrm{K}(x) + \log n - O(1).$$

При любой такой замене

$$\mathrm{K}(x') \leq \mathrm{K}(x) + \log n + O(\log\log n).$$

8. Пусть $K(x) \geq n - c$, $c > 0$, и $x = yz$, где $l(y) = l(z) = n/2$. Тогда $\mathrm{K}(y) \geq n/2 - O(\log n)$ и $\mathrm{K}(z) \geq n/2 - O(\log n)$.

9. Провести доказательство неравенства (**??**).

10. Доказать, что неравенства $\mathrm{K}(x, y) \leq \mathrm{K}(x)+\mathrm{K}(y|x)+O(1)$ и $\mathrm{K}(x, y) \leq \mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y|x) + O(\log\log \mathrm{K}(x, y))$, а также неравенство $\mathrm{K}(x, y) \leq \mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y|x) + \log \mathrm{K}(x, y) + O(1)$ в общем случае неверны.

Привести нетривиальные примеры последовательностей, для которых первое из неравенств выполнено.

11. Пусть A – перечислимое множество и $\omega = \omega_1\omega_2\dots$ – его характеристическая последовательность, где

$$\omega_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in A, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Доказать, что $\mathrm{K}(\omega^n|n) \leq \log n + O(1)$, где $\omega^n = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$.

Оценить сверху $\mathrm{K}(\omega^n)$. Как изменятся эти оценки, если множество A разрешимо?

12. Даны два слова x и y – два слова одной длины n. Оценить $\mathrm{I}(x : y)$ сверху и по возможности привести оценки снизу в наихудшем случае:

(a) $x = 0101\dots01$ и $y = 1010\dots10$ длины $2n$;

(b) $x = 0^n$ и $y = 1^{n/2}0^{n/2}$;

(c) $x = 0^{n/2}1^{n/2}$ и $y = 1^{n/2}0^{n/2}$;

(d) $x = x_1\dots x_n$ и $x' = x_1x_1\dots x_nx_n$;

(e) $x = uvw$ и $y = usw$, слова u, v, w, s – длины n;

(f) $x = uvw$ и $y = svt$, слова u, v, w, s, t – длины n;

13. Доказать неравенства:

(a) $\mathrm{K}(x) \leq \mathrm{K}(xy) + 2\log \mathrm{K}(x) + O(1)$;

(b) $\mathrm{K}(x) \leq \mathrm{K}(xy) + 2\log \mathrm{K}(y) + O(1)$;

(c) привести примеры конечных последовательностей x и y, для которых неравенство $\mathrm{K}(x) \leq \mathrm{K}(xy) + O(1)$ неверно. Привести примеры последовательностей x длины n, у которых существуют подпоследовательности на порядок более сложные, чем вся последовательность.

14. Доказать, что для почти любой бесконечной последовательности ω существует такое число m, что $\mathrm{K}(\omega^n) \geq n - m$ для бесконечно многих n.

15. Доказать, что среди натуральных чисел от 1 до n найдется число сложности $\geq \log n - 1$. Оценить долю чисел от 1 до n сложность которых $\geq \log n - c$, где $c \geq 1$.

16. Доказать, что для любого y число всех x длины n таких, что $\mathrm{K}(x|y) \leq \mathrm{K}(x) - m$ не превосходит 2^{n-m+c}, где константа c не зависит от m и y.

17. Доказать, что для дюбых строк y, z, u длины n найдется строка x длины n такая, что $\mathrm{K}(x|y) \leq n - 2$, $\mathrm{K}(x|z) \leq n - 2$ и $\mathrm{K}(x|u) \leq n - 2$.

18. Доказать, что для любой бесконечной последовательности ω будет $\sup_n \mathrm{K}(\omega^n|n) < \infty$ тогда и только тогда, когда ω является вычислимой.

19. Существует такая константа c, что для любой бесконечной последовательности ω выполнено $\mathrm{K}(\omega^n) \le n - \log n + c$ для бесконечно многих n.

20. Существуют бесконечная ω и константа c такие, что

$$\mathrm{K}(\omega^n) \ge n - 2\log n - c$$

для всех n.

21. Доказать, что существует такая константа c, что для любых x, n и k, если имеется $\ge 2^k$ таких p, что $A(p) = x$ и $l(p) \le n$, то $\mathrm{K}(x|k) \le n - k + c$ (здесь $A(p)$ – оптимальный способ описания).

22. Доказать, что для любого безусловного способа описания $A(p)$ существует такая константа c, что для любого x число его кратчайших описаний не превосходит c. Указание: использовать предыдущую задачу.

Случайность по Мартин-Лефу

1. Доказать, что следующие множества бесконечных последовательностей являются эффективно нулевыми:

(a) $\{0\omega_2 0\omega_3 0 \dots : \omega_i \in \{0,1\}\}$;

(b) $\{0^\infty, 1^\infty\}$;

(c) множество, состоящее из одной вычислимой последовательности;

(d) множество всех вычислимых последовательностей;

(e) множество, состоящее из всех бесконечных последовательностей ω таких, что $K(\omega^n) \le \log n + O(1)$ для всех n;

(f) множество, состоящее из всех бесконечных последовательностей ω таких, что $K(\omega^n) \le f(n)$ для всех n. Для каких функций f это верно?

2. Докажите, что объединение и пересечение конечного числа эффективно нулевых множеств также является эффективно нулевым множеством.

3. Докажите, что если некоторая бесконечная последовательность $\omega = \omega_1\omega_2\dots$ является случайной, то

(a) 0ω, 1ω, $x\omega$ – также случайные последовательности, где $x = x_1 \dots x_k$ – конечная последовательность;

(b) $\omega' = \omega_1 \dots \omega_{n-1} x_1 \dots x_k \omega_n \dots$ – также случайная последовательность;

(c) также является случайной последовательностью ω', у которой каждый бит противоположен соответствующему биту последовательности ω;

(d) последовательность $\omega_n\omega_{n+1}\dots$ является случайной для любого n; верно и обратное: для любого n, если последовательность $\omega_n\omega_{n+1}\dots$ случайная, то $\omega_1\omega_2\dots$ – также случайная последовательность.

(e) является ли случайной последовательность вида $\omega_1\omega_1\omega_2\omega_2\dots$?

4. Пусть A – разрешимое множество и $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots$ – его характеристическая последовательность. Доказать, что α не является случайной последовательностью.

5. Пусть последовательность $\omega = \omega_1\omega_2\ldots$ является случайной и $n_1 < n_2 < \ldots$ – вычислимая последовательность номеров. Тогда последовательность $\omega_{n_1}\omega_{n_2}\ldots$ случайная.

6. Пусть $\omega = \omega_1\omega_2\ldots$ случайная последовательность, а последовательность $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots$ вычислимая. Тогда последовательность $\omega \oplus \alpha$ случайная. Здесь $\omega \oplus \alpha = \omega_1 \oplus \alpha_1 \omega_2 \oplus \alpha_2 \ldots$ и $\oplus$ – сложение по модулю 2 ($0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$).

7. Пусть A – перечислимое множество и $\omega = \omega_1\omega_2\ldots$ – его характеристическая последовательность, где

$$\omega_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in A, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Доказать, что последовательность ω не является случайной. Построить тест Мартин-Лефа, который отвергает такие последовательности.