М Г У П С - М И И Т
Институт Экономики и Финансов
Кафедра математики ИЭФ

Дифференциальные уравнения в частных производных

Дистанционный интерактивный обучающий комплекс для студентов ИЭФ

проф. В. Г. Кановей

2019-03-22

Целью настоящего обучающего комплекса является выработка у студентов ИЭФ МИИТ умения решать уравнения в частных производных при помощи основных методов в этом разделе математики, а также решать связанные с этим более сложные числовые и графические задачи. Обучающий комплекс состоит из двух частей.

1. Обучающая часть, содержащая таблицы производных, дифференциалов, неопределенных интегралов, и некоторые другие таблицы, а также несколько решенных примеров на использование этих формул с пошаговым объяснением решения.
2. 32 варианта индивидуальных заданий для студентов, из которых
   - вариант 0 с ответами дается как образец оформления работы;
   - варианты 1 – 31 предназначены для самостоятельной работы студентов. Каждый вариант содержит несколько отдельных (и не повторяющихся между вариантами) задач, для которых просчитаны ответы, а также просчитаны наиболее существенные промежуточные результаты вычислений;
   - дополнительно для преподавателя дается сводка всех ответов по каждому варианту.

Эти части сведены в три файла формата pdf, а именно:

1) файл для преподавателя **uqp-full.pdf**, содержащий части 1 и 2 с ответами по всем вариантам;
2) файл для студентов **uqp-stud.pdf**, содержащий часть 1 и часть 2 со всеми вариантами, но без ответов (кроме варианта 0, который приведен с ответами);
3) краткий файл для преподавателя **uqp-svodka.pdf**, содержащий часть 2 с ответами ко всем вариантам – его при необходимости можно распечатать для использования при проверке решенных заданий в аудитории традиционного типа вне доступа к компьютеру.

Особенностями настоящего обучающего комплекса является применение ориентированных на пользователя (студента) современных компьютерных технологий, таких, как:

- технологии **power point** / **beamer** в части 1 комплекса, обеспечивающие современный стиль презентации как в варианте самостоятельной работы студента на компьютере, так и в варианте аудиторного занятия с проектором;
- технологии **hyperref** для облегчения просмотра пособия;
- интерактивные технологии заполняемых форм **JavaScript** для самостоятельной проверки студентами на компьютере результатов своих вычислений;
- технологии **forms data format** для отправки окончательных или промежуточных результатов выполнения задания на проверку, на адрес email по указанию преподавателя.

Дополнительным эффектом обучающего комплекса является отработка навыков работы с заполняемыми формами для проверки результатов, в частности, практика приведения математических данных (формулы, числа) к форме, принятой в языках программирования.

Самостоятельная работа с пособием и выполнение варианта предполагают доступ студента к современному компьютеру, содержащему стандартный инженерный калькулятор (или иную вычислительную программу) и программу Adobe Reader для чтения файлов формата pdf и заполнения форм для проверки результатов (имеется в бесплатном доступе для загрузки и установки).

Оглавление возврат огл I

1. Таблицы

таблица 1: производные

таблица 2: дифференциалы

таблица 3: интегралы

таблица 4: более сложные интегралы

таблица 5: значения тригонометрических функций

таблица 6: тригонометрические формулы

таблица 7: разложение в тригонометрический ряд

2. Разложение в тригонометрический ряд

пример 1

3. Простейшие уравнения в частных производных

пример 2

пример 3

4. Уравнения колебаний струны

незакрепленная струна: пример 4 **анимация**

закрепленная струна: пример 5 **анимация**

вынужденные колебания: пример 6 **анимация ч. 2** **анимация ч. 3**

колебания с сопротивлением: пример 7 **анимация**

5. Уравнение теплопроводности

уравнение теплопроводности: пример 8

6. Анимация некоторых примеров

7. **Указания для студентов**

8. Вариант 0

9. Вариант 1

10. Вариант 2

11. Вариант 3

12 Вариант 4
13 Вариант 5
14 Вариант 6
15 Вариант 7
16 Вариант 8
17 Вариант 9
18 Вариант 10
19 Вариант 11
20 Вариант 12
21 Вариант 13
22 Вариант 14
23 Вариант 15
24 Вариант 16
25 Вариант 17
26 Вариант 18
27 Вариант 19
28 Вариант 20
29 Вариант 21
30 Вариант 22
31 Вариант 23
32 Вариант 24
33 Вариант 25
34 Вариант 26
35 Вариант 27
36 Вариант 28
37 Вариант 29
38 Вариант 30
39 Вариант 31

возврат огл

§ 1. Таблицы

возврат огл

Таблица 1

№	Простая функция		Сложная функция	
	функция	производная	функция	производная
1	$y = C$	$y' = 0$		
2	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3	$y = x$	$y' = 1$		
4	$y = x^2$	$y' = 2\,x$	$y = u^2$	$y' = 2 \cdot u \cdot u'$
5	$y = x^3$	$y' = 3\,x^2$	$y = u^3$	$y' = 3 \cdot u^2 \cdot u'$
6	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
7	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{u}$	$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
9	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
13	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
14	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
15	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
18			$y = u + v$	$y' = u' + v'$
19			$y = u - v$	$y' = u' - v'$
20			$y = uv$	$y' = u'\,v + v'\,u$
21	$y = Cx$	$y' = C$	$y = Cu$	$y' = Cu'$
22			$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$
23			$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

Таблица 2

№	Простая функция		Сложная функция	
	функция	дифференциал	функция	дифференциал
1	$y = C$	$dy = 0$		
2	$y = x^n$	$dy = n\,x^{n-1}\,dx$	$y = u^n$	$dy = n\,u^{n-1}\,du$
3	$y = x$	$dy = dx$		
4	$y = x^2$	$dy = 2\,x\,dx$	$y = u^2$	$dy = 2\,u\,du$
5	$y = x^3$	$dy = 3\,x^2\,dx$	$y = u^3$	$dy = 3\,u^2\,du$
6	$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$dy = -\frac{du}{u^2}$
7	$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sqrt[3]{x}$	$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{u}$	$dy = \frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}}$
9	$y = \sin x$	$dy = \cos x\,dx$	$y = \sin u$	$dy = \cos u \cdot du$
10	$y = \cos x$	$dy = -\sin x\,dx$	$y = \cos u$	$dy = -\sin u \cdot du$
11	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$dy = \frac{du}{\cos^2 u}$
12	$y = e^x$	$dy = e^x\,dx$	$y = e^u$	$dy = e^u \cdot du$
13	$y = a^x$	$dy = a^x \ln a\,dx$	$y = a^u$	$dy = a^u \ln a \cdot du$
14	$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$	$y = \ln u$	$dy = \frac{du}{u}$
15	$y = \arcsin x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
16	$y = \arccos x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$dy = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
17	$y = \operatorname{arctg} x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$dy = \frac{du}{1+u^2}$
18			$y = u + v$	$dy = du + dv$
19			$y = u - v$	$dy = du - dv$
20			$y = uv$	$dy = v\,du + u\,dv$
21	$y = Cx$	$dy = C\,dx$	$y = Cu$	$dy = C\,du$
22			$y = \frac{u}{v}$	$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
23			$y = u^v$	$dy = v\,u^{v-1}\,du + u^v \ln u\,dv$

Таблица 3

В следующей таблице u может обозначать как независимую переменную x так и функцию от x. Если $u = u(x)$ — функция от x, то $\boxed{du = u' \cdot dx}$.

1.	$\int u^n\,du$	$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	(при $n \neq -1$)
1а.	$\int du$	$= u + C$	(случай $n = 0$)
1б.	$\int u\,du$	$= \frac{u^2}{2} + C$	(случай $n = 1$)
1в.	$\int u^2\,du$	$= \frac{u^3}{3} + C$	(случай $n = 2$)
1г.	$\int \sqrt{u}\,du$	$= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$	($n = \frac{1}{2}$, $u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$)
1д.	$\int \sqrt[3]{u}\,du$	$= \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{u^{4/3}}{4/3} + C$	($n = \frac{1}{3}$, $u^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{u}$)
1е.	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$	$= \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{u} + C$	($n = -\frac{1}{2}$, $u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}}$)
2.	$\int \frac{1}{u+a}\,du$	$= \ln\lvert u+a\rvert + C$	($a -$ любая постоянная)
3.	$\int e^u\,du$	$= e^u + C$	
4.	$\int \sin u\,du$	$= -\cos u + C$	
5.	$\int \cos u\,du$	$= \sin u + C$	
6а.	$\int \frac{1}{u^2+1}\,du$	$= \operatorname{arctg} u + C$	
6б.	$\int \frac{1}{u^2+a^2}\,du$	$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$	
7а.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$	$= \arcsin u + C$	
7б.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du$	$= \arcsin\frac{u}{a} + C$	
8.	$\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du$	$= \operatorname{tg} u + C$	
9.	$\int \frac{1}{\sin^2 u}\,du$	$= -\operatorname{ctg} u + C$	

Таблица 4

1. $$\int \sin px\,dx = -\frac{1}{p}\cos px + C$$
2. $$\int \cos px\,dx = \frac{1}{p}\sin px + C$$
3. $$\int x\sin px\,dx = -\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px + C$$
4. $$\int x\cos px\,dx = \frac{x}{p}\sin px + \frac{1}{p^2}\cos px + C$$
5. $$\int x^2\sin px\,dx = -\frac{x^2}{p}\cos px + \frac{2x}{p^2}\sin px + \frac{2}{p^3}\cos px + C$$
6. $$\int x^2\cos px\,dx = \frac{x^2}{p}\sin px + \frac{2x}{p^2}\cos px - \frac{2}{p^3}\sin px + C$$

Таблица 5

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0	1	0
$\pi/6 = 30^\circ$	0.5	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4 = 45^\circ$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3 = 60^\circ$	$\sqrt{3}/2$	0.5	$\sqrt{3}$
$\pi/2 = 90^\circ$	1	0	∞
$2\pi/3 = 120^\circ$	$\sqrt{3}/2$	-0.5	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4 = 145^\circ$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6 = 150^\circ$	0.5	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
$\pi = 180^\circ$	0	-1	0
$k\pi$	0	$(-1)^k$	0

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное} \\ (-1)^n, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$\cos\frac{k\pi}{2} = 0$$

Таблица 6

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$

§ 1. Таблица 7: разложение в тригонометрический ряд возврат огл

Таблица 7

1 Разложение функции $y = f(x)$ на промежутке $(-\ell, \ell)$ происходит по формуле

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

2 Если функция $y = f(x)$ четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то применяются упрощенные формулы

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell}$$

где

$$A_0 = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

3 Если функция $y = f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то применяются другие упрощенные формулы

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

где

$$B_k = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

возврат огл

§ 2. Разложение в тригонометрический ряд

возврат огл

Пример П1

Разложить функцию $y = ax + b$ *в тригонометрический ряд на промежутке* $(-\ell, \ell)$. *Табулировать и построить график* $y = ax + b$ *и графики частичных сумм* $y = S_3(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Используем формулы Таблицы 7.1 при $f(x) = ax + b$.

$$ax + b = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} (ax + b)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} (ax + b) \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} (ax + b) \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{\ell}$.

$$A_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} (ax + b)\, dx = \frac{1}{\ell} \left(a \cdot \frac{x^2}{2} + b \cdot x \right) \Big|_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= \frac{1}{\ell} \cdot \left[\left(a \cdot \frac{\ell^2}{2} + b \cdot \ell \right) - \left(\frac{a \cdot (-\ell)^2}{2} + b \cdot (-\ell) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\ell} \cdot [2b \cdot \ell] = 2b.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{\ell}$.

$$A_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}(ax+b)\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{a}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}x\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx + \frac{b}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{a}{\ell}\left(\frac{\ell x}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{\ell^2}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{-\ell}^{\ell} + \frac{b}{\ell}\left(\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= a\left(\frac{x}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{-\ell}^{\ell} + b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= \left[a\left(\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi\ell}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi\ell}{\ell}\right) + b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi\ell}{\ell}\right)\right] -$$

$$-\left[a\left(\frac{(-\ell)}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi(-\ell)}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi(-\ell)}{\ell}\right) + b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi(-\ell)}{\ell}\right)\right] =$$

$$= \left[a\left(\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin(k\pi) + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\cos(k\pi)\right) + b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[a\left(-\frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin(-k\pi) + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\cos(-k\pi)\right) + b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \frac{a\ell}{k^2\pi^2}\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \frac{a\ell}{k^2\pi^2}\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \frac{a\ell}{k^2\pi^2}\cdot\left[(-1)^k - (-1)^k\right] = 0.$$

Итак, $A_k = 0$ при $k \geq 1$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{\ell}$.

$$B_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}(ax+b)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{a}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx + \frac{b}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{a}{\ell}\left(-\frac{\ell x}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{\ell^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} - \frac{b}{\ell}\left(\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= a\left(-\frac{x}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} - b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= \left[a\left(-\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi\ell}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi\ell}{\ell}\right) - b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi 3}{\ell}\right)\right] -$$

$$-\left[a\left(-\frac{(-\ell)}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi(-\ell)}{\ell} + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi(-\ell)}{\ell}\right) - b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi(-\ell)}{\ell}\right)\right] =$$

$$= \left[a\left(-\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos(k\pi) + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin(k\pi)\right) - b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[a\left(\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi) + \frac{\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin(-k\pi)\right) - b\left(\frac{1}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[-\frac{a\ell}{k\pi}\cdot\cos(k\pi) - \frac{b}{k\pi}\cdot\cos(k\pi)\right] - \left[\frac{a\ell}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi) - \frac{b}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi)\right] =$$

$$= -\frac{2a\ell}{k\pi}\cdot\cos(k\pi) = -\frac{2a\ell}{k\pi}\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\frac{2a\ell}{k\pi}\cdot(-1)^k$.

Шаг 4. Результат

$$ax + b = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{3} \right), \text{ где } A_0 = 2b, \quad B_k = -\frac{2a\ell}{k\pi} \cdot (-1)^k.$$

В частности,

$$B_1 = \frac{2a\ell}{\pi}, \qquad B_2 = -\frac{2a\ell}{2\pi}, \qquad B_1 = \frac{2a\ell}{3\pi},$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{3} \\
S_2(x) &= \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{3} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3} \\
S_3(x) &= \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{3} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3} + B_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{3}
\end{aligned}$$

Шаг 5. Для табулировки и построения графиков возьмем

$$\ell = 3\,, \quad a = 1\,, \quad b = 1\,, \quad \text{так что } \; y = x + 1$$

В формулах Шага 4 получаем $A_0 = 2$,

$$B_1 = \frac{2a\ell}{\pi} = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{\pi} = 1.910$$

$$B_2 = \frac{2a\ell}{2\pi} = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{2\pi} = -0.955$$

$$B_3 = \frac{2a\ell}{3\pi} = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{3\pi} = 0.637$$

Отсюда по формулам Шага 4 получаем

$$S_1(x) = 1 + 1.910\cdot\sin\frac{1\pi x}{3}$$

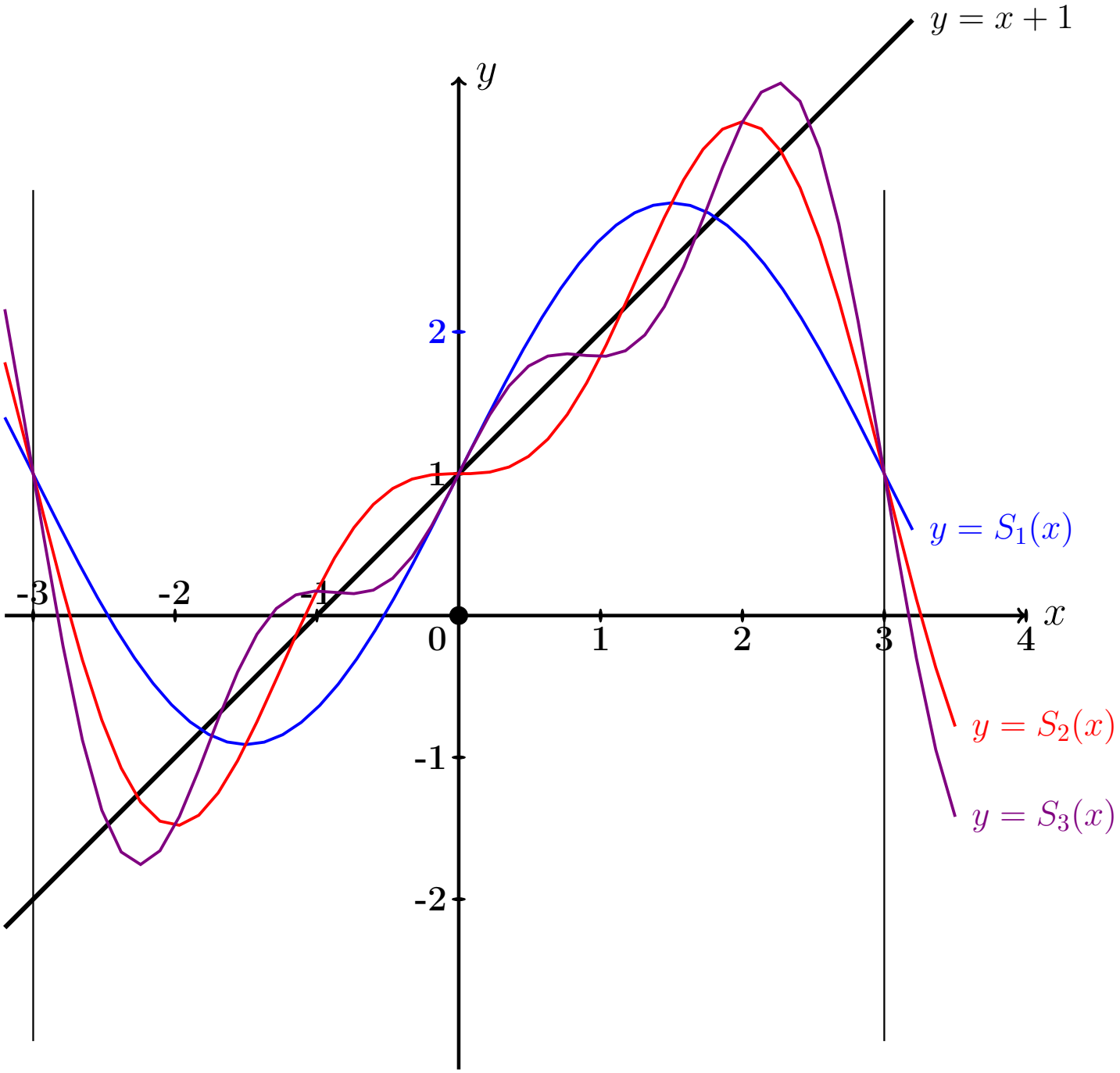
$$S_2(x) = 1 + 1.910\cdot\sin\frac{1\pi x}{3} + (-0.955)\cdot\sin\frac{2\pi x}{3}$$

$$S_3(x) = 1 + 1.910\cdot\sin\frac{1\pi x}{3} + (-0.955)\cdot\sin\frac{2\pi x}{3} + 0.637\cdot\sin\frac{3\pi x}{3}$$

Таблица 8 (Табулировка $y = x + 1$ и $y = S_2(x)$)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y = x + 1$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$y = S_1(x)$	1	$0{,}05$	$-0{,}65$	$-0{,}91$	$-0{,}65$	$0{,}05$	1	$1{,}95$	$2{,}65$	$2{,}91$	$2{,}65$	$1{,}95$	1
$y = S_2(x)$	1	$-0{,}78$	$-1{,}48$	$-0{,}91$	$0{,}17$	$0{,}87$	1	$1{,}13$	$1{,}83$	$2{,}91$	$3{,}48$	$2{,}78$	1
$y = S_3(x)$	1	$-1{,}42$	$-1{,}48$	$-0{,}27$	$0{,}17$	$0{,}24$	1	$1{,}76$	$1{,}83$	$2{,}27$	$3{,}48$	$3{,}42$	1

Шаг 6. График



возврат огл

§ 3. Простейшие уравнения в частных производных

возврат огл

Пример П2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x + y$. *Найти общее решение, а также частное решение при условии* $u\big|_{x=1} = 3\sin y$.

Решение. Общее решение.

$$u = \int (2x+y)dx = \int 2x\,dx + \int y\,dx = x^2 + yx + C(y)\,,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$1^2 + y\cdot 1 + C(y) = 3\sin y\,,$$

откуда $C(y) = 3\sin y - 1^2 - y = 3\sin y - y - 1$. Окончательно

$$u_{\text{част}} = x^2 + yx + C(y) = x^2 + yx + 3\sin y - y - 1\,.$$

Пример П3

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = x^2 - t$. *Найти общее решение, а также частное решение при начальных условиях* $u\Big|_{t=1} = 3\sin x$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=1} = 2x$$

Решение. Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = x^2 - t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (x^2 - t)dt = x^2 t - \frac{t^2}{2} + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \left(x^2 t - \frac{t^2}{2} + C(x)\right)dt = \frac{x^2 t^2}{2} - \frac{t^3}{2\cdot 3} + C(x)t + C_1(x) ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2\cdot 1}{2} - \dfrac{1^3}{2\cdot 3} + C(x)\cdot 1 + C_1(x) &= 3\sin x \\ x^2\cdot 1 - \dfrac{1^2}{2} + C(x) &= 2x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = 2x - x^2 + \dfrac{1}{2}$. Из первого уравнения,

$$C_1(x) = 3\sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} - C(x) = 3\sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} - 2x + x^2 - \frac{1}{2} =$$
$$= 3\sin x + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{3} .$$

Окончательно $u_{\text{част}} = \dfrac{x^2 t^2}{2} - \dfrac{t^3}{2\cdot 3} + C(x)t + C_1(x) =$

$$= \frac{x^2 t^2}{2} - \frac{t^3}{2\cdot 3} + \left(2x - x^2 + \frac{1}{2}\right)t + 3\sin x + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{3} .$$

возврат огл

§ 4. Уравнения колебаний струны

возврат огл

Пример П4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *при* $a = 1.5$ *и при начальных условиях*

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{\sin 2x}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{x}{2}}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ *и* $-3 \le x \le 3$ *с шагом* $\Delta x = 0.5$ *и построить эти три графика.*

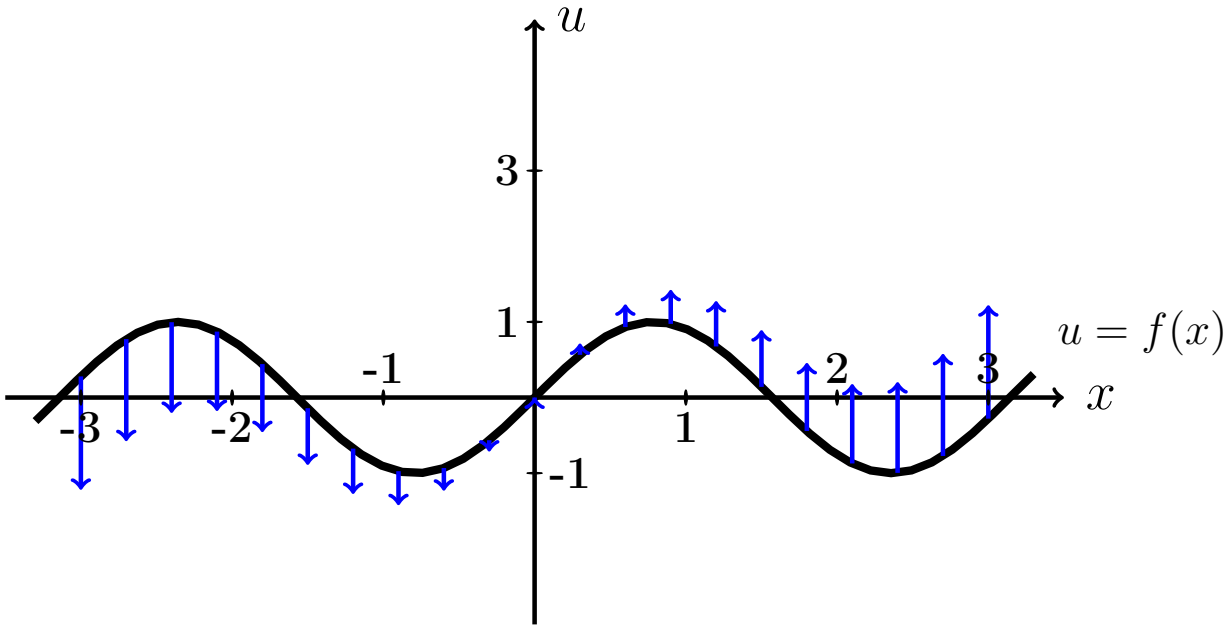


Рис.: Функция $u = f(x)$ определяет начальную форму струны, а функция $u = F(x)$ определяет начальный импульс (толчок), в момент $t = 0$. Направление и величина импульса показаны голубыми стрелками.

Решение. Решение получается по формуле

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \frac{\sin 2(x-1.5t)+\sin 2(x+1.5t)}{2} + \frac{1}{2\cdot 1.5}\int_{x-1.5t}^{x+1.5t}\frac{z}{2}\,dz =$$

$$= \frac{\sin(2x-3t)+\sin(2x+3t)}{2} + \frac{1}{3}\int_{x-1.5t}^{x+1.5t}\frac{z}{2}\,dz =$$

↓по формуле таблицы 6↓

$$= \frac{\sin 2x\cos 3t+\cos 2x\sin 3t+\sin 2x\cos 3t-\cos 2x\sin 3t}{2} + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 2}z^2\Big|_{z=x-1.5t}^{z=x+1.5t} =$$

$$= \frac{2\sin 2x\cos 3t}{2} + \frac{1}{12}\Big((x+1.5t)^2-(x-1.5t)^2\Big) =$$

$$= \sin 2x\cos 3t + \frac{1}{12}\Big(x^2+2.25t^2+2\cdot x\cdot 1.5t - x^2 - 2.25t^2 + 2\cdot x\cdot 1.5t\Big) =$$

$$= \sin 2x\cos 3t + \frac{1}{12}\cdot 6xt = \sin 2x\cos 3t + \frac{xt}{2}.$$

Табулируем $u = u(x,t) = \sin 2x\cos 3t + \frac{xt}{2}$ и строим графики.

Таблица 9 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$u(x,0)$	0,3	1	0,8	−0,1	−0,9	−0,8	0	0,8	0,9	0,1	−0,8	−1	−0,3
$u(x,1)$	−1,8	−2,2	−1,7	−0,6	0,4	0,6	0	−0,6	−0,4	0,6	1,7	2,2	1,8
$u(x,2)$	−2,7	−1,6	−1,3	−1,6	−1,9	−1,3	0	1,3	1,9	1,6	1,3	1,6	2,7

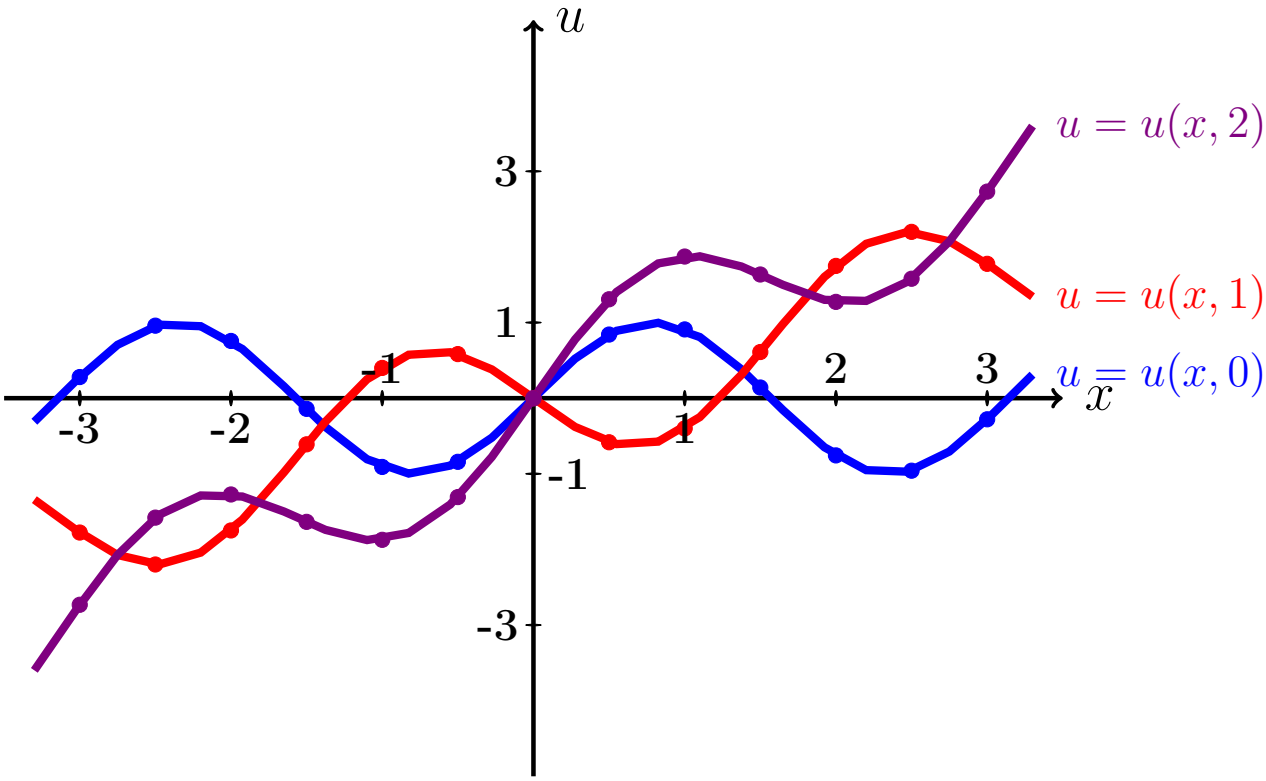


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$.

анимация

Пример П5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *на отрезке* $[0, \ell]$ *при* $\ell = 3$, $a = 0.5$, *при начальных условиях*

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 1.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2\sin\frac{2\pi}{3}x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ *и* $0 \le x \le 4$ *с шагом* $\Delta x = 0.5$, *по гармоникам для* $k = 1, 2, 3$, *и построить эти три графика.*

φ и ψ – буквы греческого алфавита, называются «фи» и «psi».

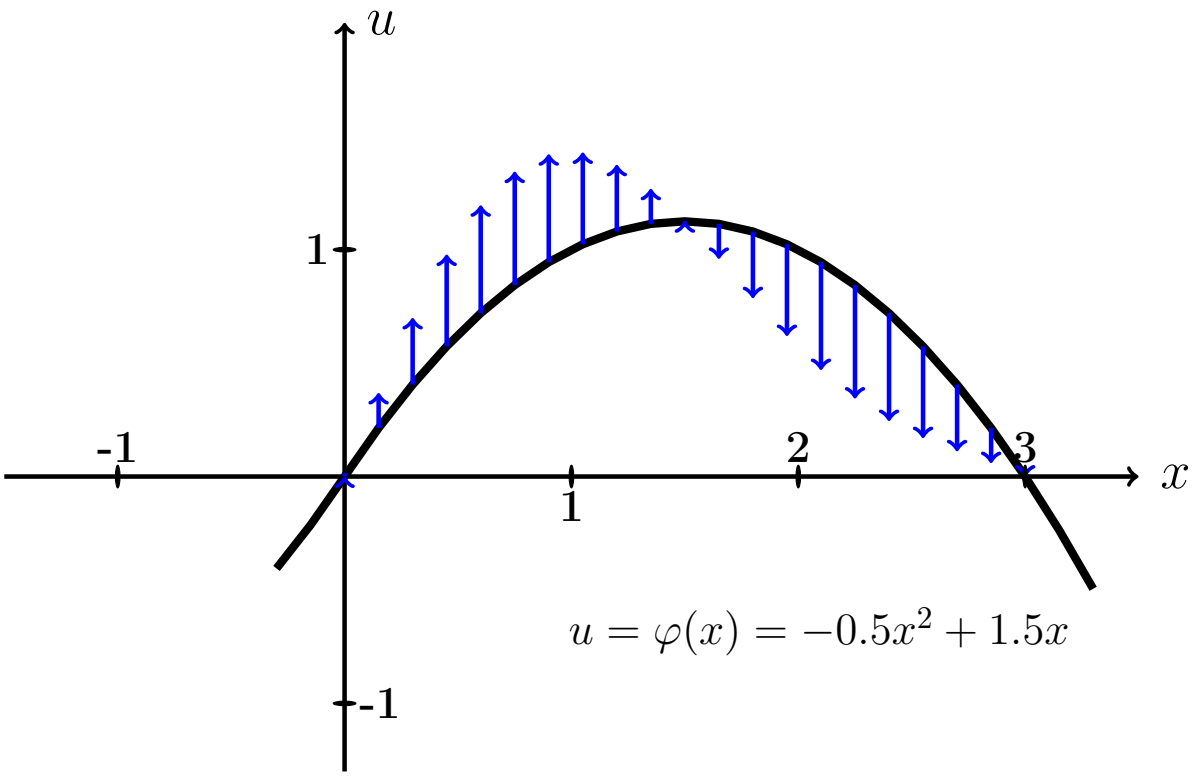


Рис.: Функция $u = \varphi(x)$ определяет начальную форму струны, а функция $u = \psi(x)$ определяет начальный импульс (толчок), в момент $t = 0$. Направление и величина импульса показаны голубыми стрелками.

Решение. Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^3(-0.5\,x^2+1.5x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= -\frac{1.0}{3}\int_0^3 x^2\sin\frac{k\pi x}{3}dx + \frac{3.0}{3}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}dx$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= -\frac{1.0}{3}\Big(-\frac{x^2}{p}\cos px + \frac{2x}{p^2}\sin px + \frac{2}{p^3}\cos px\Big)\Big|_0^3 + \frac{3.0}{3}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^3$$

$$= -\frac{1.0}{3}\Big(-\frac{3x^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3} + \frac{2x\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3} + \frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3 +$$

$$+\frac{3.0}{3}\Big(-\frac{3x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3} + \frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{1.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}\cos k\pi + \frac{2\cdot 3\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi + \frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos k\pi\Big) +$$

$$+\frac{3.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}\cos k\pi + \frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi\Big) +$$

$$+\frac{1.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0^2}{k\pi}\cos 0 + \frac{2\cdot 0\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin 0 + \frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos 0\Big) -$$

$$-\frac{3.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0}{k\pi}\cos 0 + \frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin 0\Big)$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= -\frac{1.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}(-1)^k + 0 + \frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k - \frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big) + \frac{3.0}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}(-1)^k + 0 + 0 - 0\Big)$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

$$= -\frac{1.0}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k\Big) + \frac{1.0}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big) = \frac{1.0}{3}\cdot\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \frac{18.00}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big)$$

Окончательно $A_k = \frac{18.00}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{36.00}{k^3\pi^3}, & \text{если } k \text{ нечетное} \end{cases}$.

Таблица 10 (Табулировка A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	1,161	0	0,043	0	0,009	0	0,003

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \frac{4.0}{k\pi\cdot 0.5}\int_0^3 \sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

$$\sin\frac{2\pi x}{3}\cdot\sin\frac{k\pi x}{3} = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{(k-2)\pi x}{3} - \cos\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big).$$

Поэтому

$$B_k = \frac{4.0}{k\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\Big(\cos\frac{(k-2)\pi x}{3} - \cos\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big)dx =$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\int_0^3\cos\frac{(k-2)\pi x}{3}dx - \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\int_0^3\cos\frac{(k+2)\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\sin\frac{(k-2)\pi x}{3}\Big|_0^3 - \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{(k+2)\pi}\sin\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\big(\sin(k-2)\pi - \sin 0)\big) - \frac{2.00}{k\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\big(\sin(k+2)\pi - \sin 0)\big).$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\int_0^3\cos\frac{(2-2)\pi x}{3}dx - \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\int_0^3\cos\frac{(2+2)\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\int_0^3 1dx - \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\int_0^3\cos\frac{4\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\cdot x\Big|_0^3 - \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\cdot(3-0) - \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\cdot\frac{3}{4\pi}\big(\sin 4\pi - \sin 0\big).$$

Окончательно $B_2 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 0.5}\cdot 3 = 1.91$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty\Big(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\Big)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty A_k\cos\frac{k\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{k\pi x}{3} + B_2\sin\frac{2\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 1.91$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 10) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{1\pi x}{3} + A_3\cos\frac{3\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} + \\ + A_5\cos\frac{5\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{5\pi x}{3} + B_2\sin\frac{2\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

где $A_1 = 1.161$, $A_3 = 0.043$, $A_5 = 0.009$ по таблице 10, а $B_2 = 1.91$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = 1.161\cos\frac{1\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{1\pi x}{3} + 0.043\cos\frac{3\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} + \\ + 0.009\cos\frac{5\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{5\pi x}{3} + 1.91\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 0.5t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

Шаг 6.

Таблица 11 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$\varphi(x)$	0	0,34	0,63	0,84	1	1,09	1,13	1,09	1	0,84	0,63	0,34	0
$u(x,0)$	0	0,34	0,63	0,84	1	1,09	1,13	1,09	1	0,84	0,63	0,34	0
$u(x,1)$	0	1,08	1,93	2,37	2,31	1,8	1	0,14	−0,55	−0,94	−0,93	−0,57	−0
$u(x,2)$	0	0,95	1,68	2,03	1,93	1,42	0,63	−0,23	−0,93	−1,28	−1,18	−0,7	−0

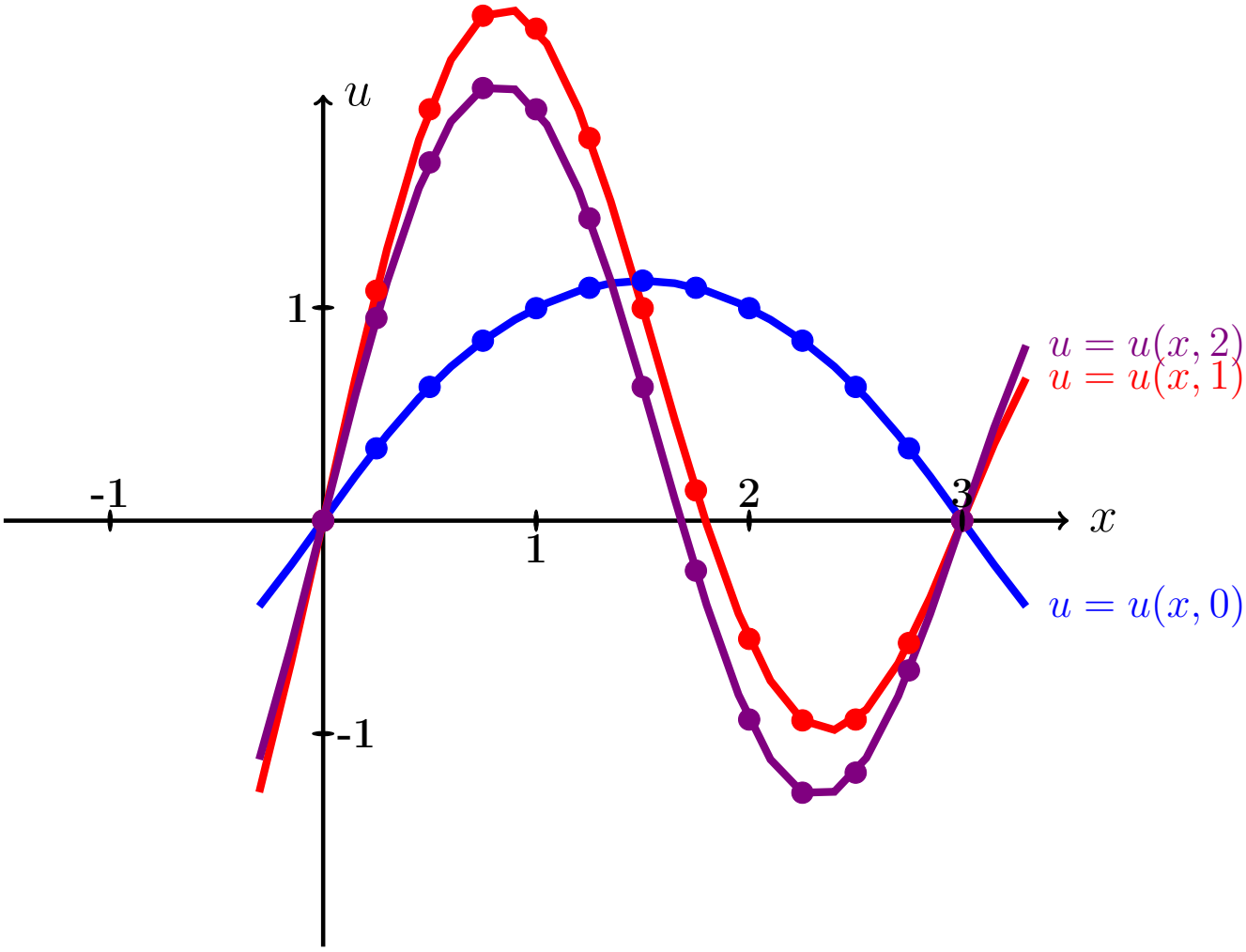


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$.

анимация

Пример П6

Часть 1. Решить уравнение свободных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3$, $E = 10$, $\Omega = 4$, с теми же начальными и граничными условиями (2), (3). Затабулировать решение уравнения (4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3$, $E = 10$, и при резонансном значении $\Omega = 0.6\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (2), (3). Затабулировать решение уравнения (4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

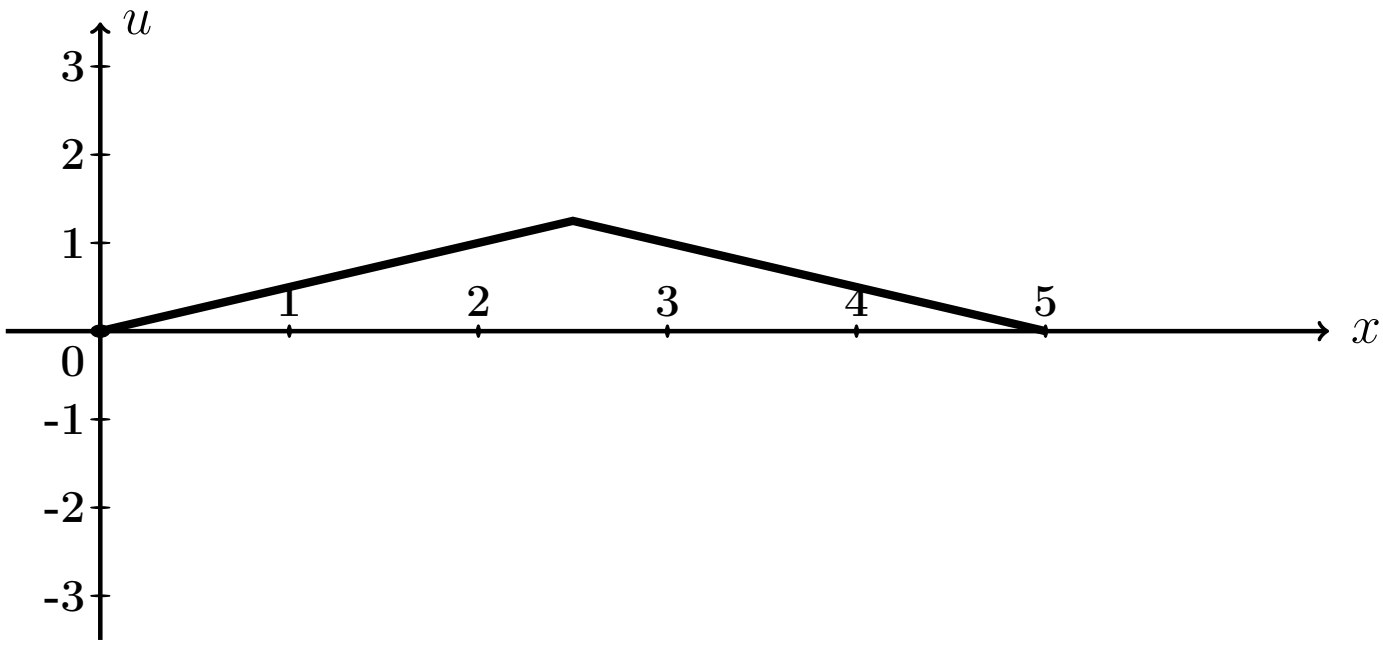


Рис.: Функция $u = \varphi(x)$ определяет начальную форму струны.

Решение

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^5 \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{5/2} 0.50\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2}{5}\int_{5/2}^5 0.50\cdot(5-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_0^{5/2} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2\cdot 0.50\cdot 5}{5}\int_{5/2}^5 \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx - \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_{5/2}^5 x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{5/2} + \frac{1.00\cdot 5}{5}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{5/2}^5 -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{5/2}^5 =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_0^{5/2} + 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^5 -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^5 =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) - \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot \mathbf{0}}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot \mathbf{0}}{5}\Big) +$$

$$+ 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) - 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) + \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{1.00\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{10.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \dfrac{10.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетн.} \end{cases}$$

Таблица 12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	1,013	0	−0,113	0	0,041	0	−0,021

Шаг 4. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}dx = 0$

Шаг 5. По формулам шага 1 получаем

$$\begin{aligned} u_{\text{одн}}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{k\pi\cdot 3t}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}, \end{aligned}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 3, а $B_k = 0$ (шаг 4).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \frac{k\cdot\pi\cdot 3}{5} = 0.6\pi\cdot k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Часть 2

Шаг 6. Решение уравнения (4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (1) (шаг 5), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (4) при граничных условиях (3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\ \frac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{array} \right. \tag{9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = 0.6\pi \cdot k$ (формула (5)), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (9). Следовательно, по формуле (8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin 4t - \frac{4}{0.6\pi\cdot k}\sin(0.6\pi\cdot kt)\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$C_k = \frac{2\cdot E\cdot(1-(-1)^k)}{k\pi((0.6\pi\cdot k)^2-4^2)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\cdot(10)\cdot 2}{k\pi((0.6\pi\cdot k)^2-4^2)}\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{array} \right. \tag{11}$$

Таблица 13 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k	−1,023	0	0,266	0	0,035	0	0,012

Шаг 7. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 5 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 6) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3} \sin \omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 = 1.013$, $A_3 = -0.113$ по таблице 12,

$$\ell = 5\,, \quad a = 3\,, \quad \Omega = 4\,,$$

$\omega_1 = 0.6\pi \cdot 1 = 0.6\pi$ и $\omega_3 = 0.6\pi \cdot 3 = 1.80\pi$ по формуле (5), и $C_1 = -1.023$, $C_3 = 0.266$ по таблице 13. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) \;=\; & (1.013) \cos\frac{1\pi\cdot 3t}{5} \sin\frac{1\pi x}{5} & + \\ + \; & (-0.113) \cos\frac{3\pi\cdot 3t}{5} \sin\frac{3\pi x}{5} & + \\ + \; & (-1.023) \cdot \left(\sin 4t - \frac{4}{0.6\pi} \sin 0.6\pi t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{5} & + \\ + \; & (0.266) \cdot \left(\sin 4t - \frac{4}{1.80\pi} \sin 1.80\pi t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{5} & . \end{aligned}$$

Шаг 8.

Таблица 14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	0,63	1,31	1,99	2,51	2,71	2,51	1,99	1,31	0,63	0
$u(x,2)$	0	−0,63	−1,44	−2,39	−3,19	−3,51	−3,19	−2,39	−1,44	−0,63	0

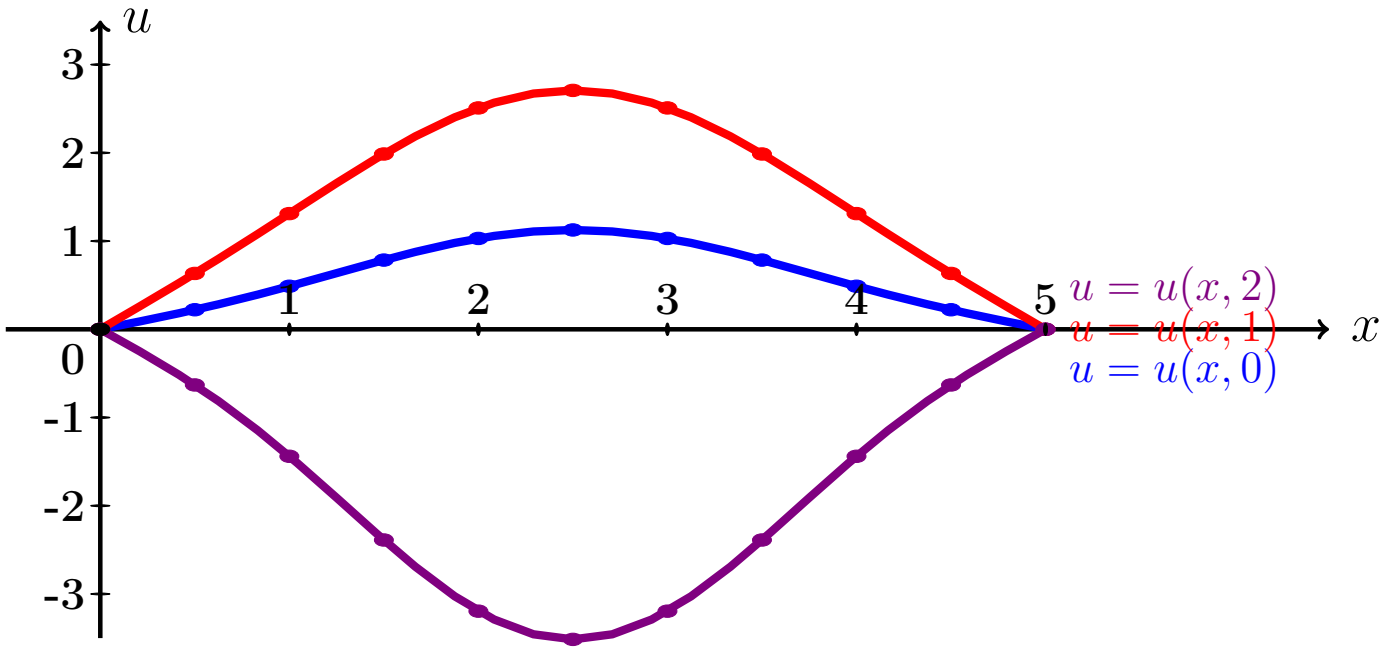


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$.

анимация ч. 2

Часть 3

Шаг 9. Решение основано на формулах (6) и (8). Однако данное значение $\Omega = 0.6\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{k\pi a}{\ell} = 0.6\pi \cdot 1$ (см. Шаг 5), поэтому первый коэффициент $c_1(t)$ вычисляется по **второй** формуле (9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \cos(0.6\pi t)\,, \text{ где} \\ C_1' &= \frac{-E(1-(-1)^1)}{1\pi\omega_1} = \frac{-2\cdot 10}{\pi\cdot 0.6\pi} = -3.377 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

а все остальные коэффициенты $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (9). Следовательно, по формуле (8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \frac{-20}{0.6\pi^2}\,t\,\cos(0.6\pi t)\,\sin\frac{\pi x}{5} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k\left(\sin 4t - \frac{4}{0.6\pi\cdot k}\sin(0.6\pi k t)\right)\,\sin\frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где C_k вычисляется по формулам (11).

Шаг 10. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 5 и $k = 1, 3$ по формуле (13)) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) \;=\; & A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell}\sin\frac{1\pi x}{\ell} \;+\; A_3\cos\frac{3\pi a t}{\ell}\sin\frac{3\pi x}{\ell} \;+ \\ & +\; C_1' t\,\cos\omega_1 t\cdot\sin\frac{1\pi x}{\ell} \;+\; C_3\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\Big)\cdot\sin\frac{3\pi x}{\ell}\;. \end{aligned}$$

Здесь следует взять $A_1 = 1.013$, $A_3 = -0.113$ по таблице 12, $\ell = 5$, $a = 3$, $\Omega = 0.6\pi$, $\omega_1 = 0.6\pi\cdot 1 = 0.6\pi$ и $\omega_3 = 0.6\pi\cdot 3 = 1.80\pi$ по формуле (5), $C_1' = -3.377$ по формуле (12) и $C_3 = 0.266$ по таблице 13 . Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) = (1.013)\cdot\cos\frac{1\pi\cdot 3t}{5}\cdot\sin\frac{1\pi x}{5} \;+\; (-0.113)\cdot\cos\frac{3\pi\cdot 3t}{5}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5} \;+ \\ +\; (-3.377)\cdot t\cdot\cos(0.6\pi t)\cdot\sin\frac{1\pi x}{5} \;+ \\ +\; (0.266)\cdot\Big(\sin 4t - \frac{4}{1.80\pi}\sin 1.80\pi t\Big)\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}\;. \end{aligned}$$

Шаг 11.

Таблица 15 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	0,08	0,26	0,53	0,8	0,91	0,8	0,53	0,26	0,08	0
$u(x,2)$	0	1,76	3,12	3,88	4,18	4,24	4,18	3,88	3,12	1,76	0

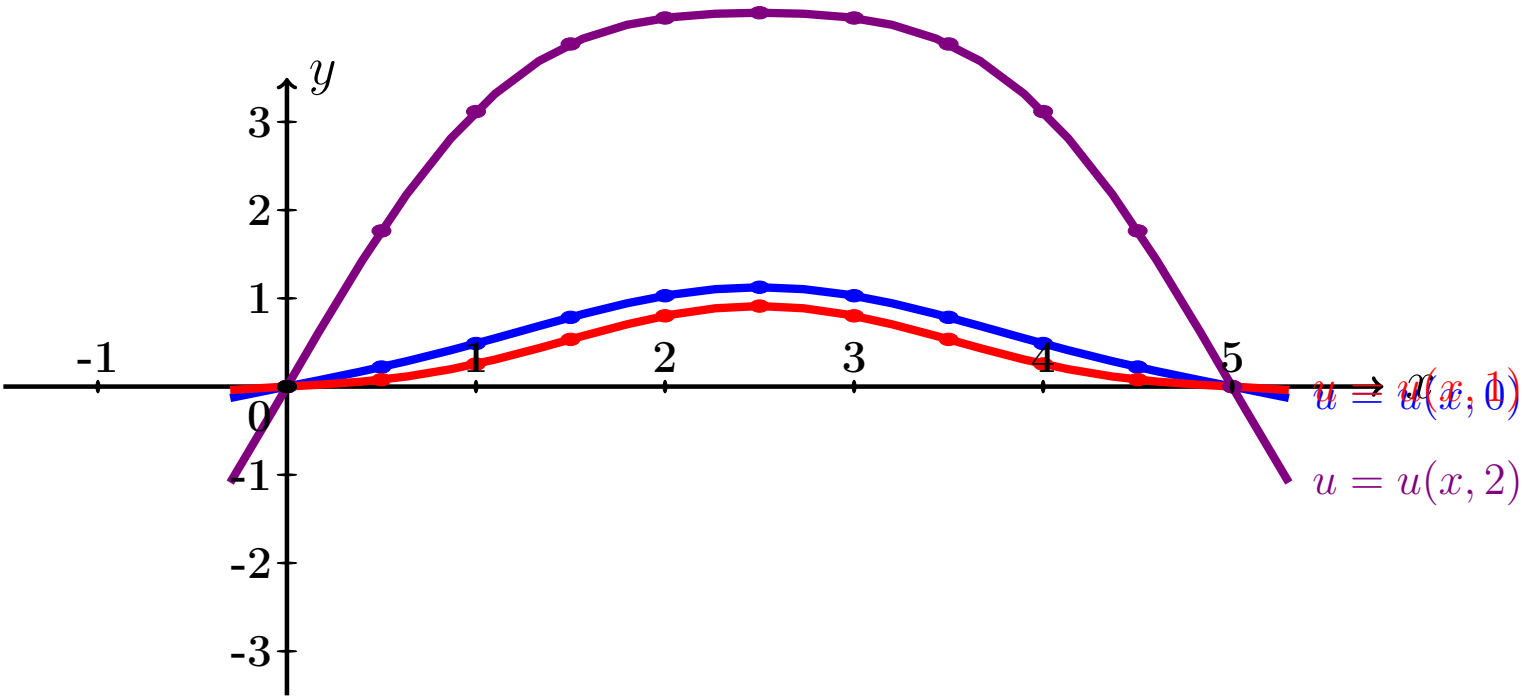


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$.

анимация ч. 3

Пример П7

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{15}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (14). Затабулировать решение уравнения (14) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

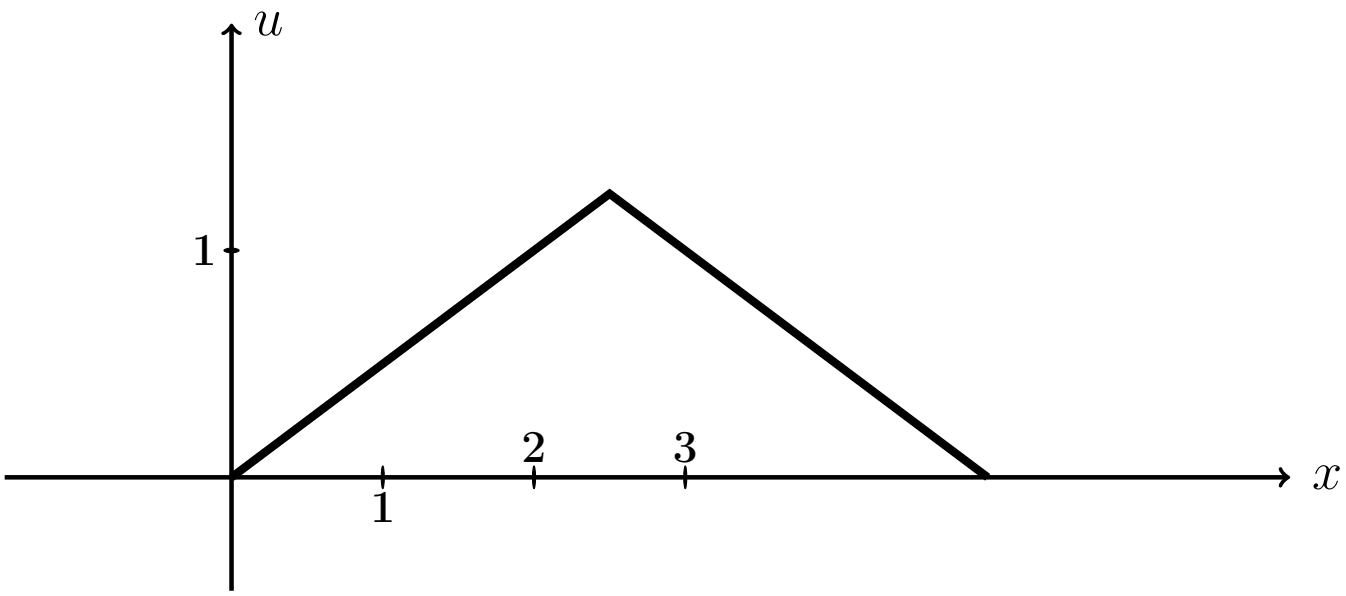


Рис.: Функция $u = \varphi(x)$ определяет начальную форму струны.

Решение. Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5} , \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot 3}{5}\right)^2 - 0.3^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 16 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k	1,861	3,758	5,647	7,534	9,42	11,306	13,191

III

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{5/2} 0.50\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2}{5}\int_{5/2}^{5} 0.50\cdot(5-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_0^{5/2} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2\cdot 0.50\cdot 5}{5}\int_{5/2}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx - \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_{5/2}^{5} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{5/2} + \frac{1.00\cdot 5}{5}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_0^{5/2} + 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) - \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot \mathbf{0}}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot \mathbf{0}}{5}\Big) +$$

$$+ 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) - 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) + \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{1.00\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{10.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{10.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{cases}$$

Таблица 17 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	1,013	0	−0,113	0	0,041	0	−0,021

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$$= \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{0.3 \cdot 10.00 \cdot (-1)^n}{k^2 \pi^2 \cdot q_k}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{cases}$$

Таблица 18 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k	0,163	0	−0,006	0	0,001	0	−0

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 17, 18) формулы (16) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big(\big(A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t\big) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + \\ + \big(A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t\big) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 5$, $q_1 = 1.861$ и $q_3 = 5.647$ по таблице 16, $A_1 = 1.013$ и $A_3 = -0.113$ по таблице 17, $B_1 = 0.163$ и $B_3 = -0.006$ по таблице 18. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-0.3 \cdot t} \cdot \Big(\big((1.013)\cos(1.861t) + (0.163)\sin(1.861t)\big) \sin \frac{1\pi x}{5} + \\ + \big((-0.113)\cos(5.647t) + (-0.006)\sin(5.647t)\big) \sin \frac{3\pi x}{5} \Big).$$

Шаг 6.

Таблица 19 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	−0,08	−0,12	−0,1	−0,06	−0,03	−0,06	−0,1	−0,12	−0,08	0
$u(x,2)$	0	−0,17	−0,32	−0,42	−0,48	−0,5	−0,48	−0,42	−0,32	−0,17	0

Шаг 7. Построение графиков.

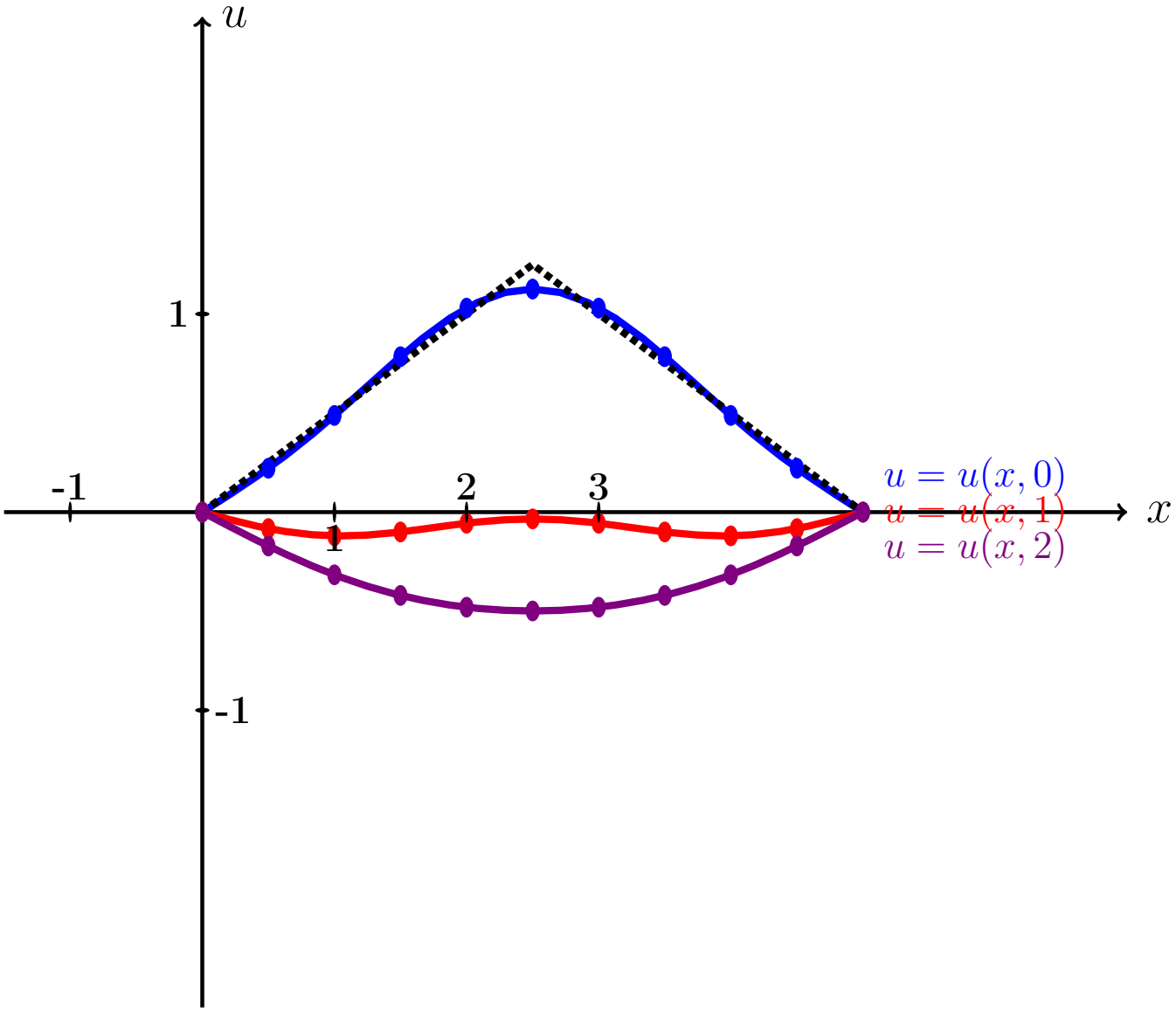


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (15).

анимация

возврат огл

§ 5. Уравнение теплопроводности

возврат огл

Пример П8

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} (3.30)\cdot x + (-2.00), & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ (0.30)\cdot x + (5.50), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7}_{T_5}. \tag{3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

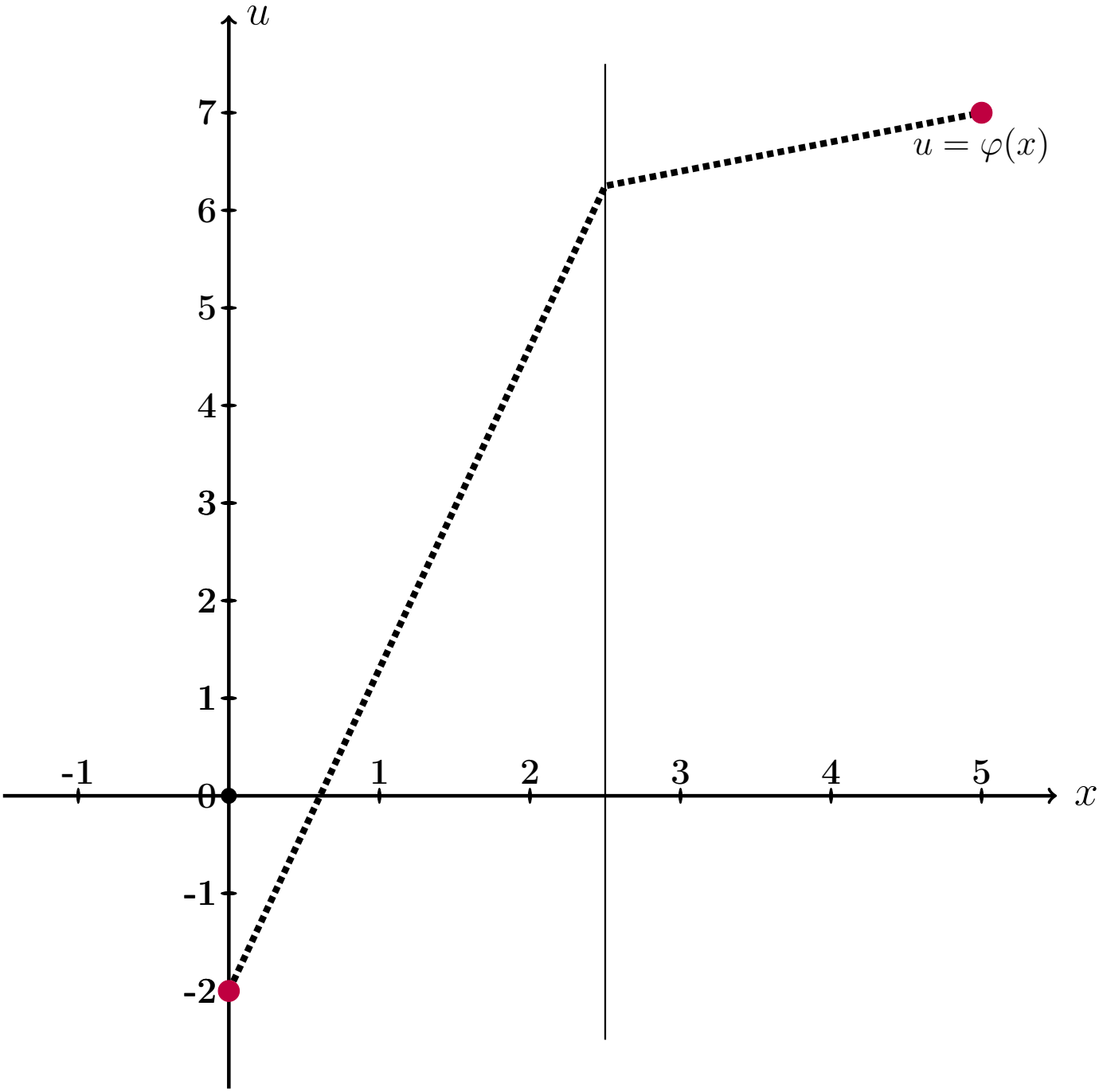


Рис.: Функция $u = \varphi(x)$ задает начальное распределение температуры согласно начальным условиям (2).

Решение. Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} (1.50)\cdot x, & \text{при } \ 0 \le x \le 5/2 \\ (-1.50)\cdot x + (7.50), & \text{при } \ 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \tfrac{T_5 - T_0}{5}\cdot x = \varphi(x) - (-2) - \tfrac{(7)-(-2)}{5}\cdot x = \varphi(x) - (-2) - 1.80\cdot x.$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}\,t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k \;=\; \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^5 \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{5/2} 1.50\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2}{5}\int_{5/2}^5 1.50\cdot(5-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 1.50}{5}\int_0^{5/2} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2\cdot 1.50\cdot 5}{5}\int_{5/2}^5 \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx - \frac{2\cdot 1.50}{5}\int_{5/2}^5 x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \frac{3.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{5/2} + \frac{3.00\cdot 5}{5}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{5/2}^5 -$$

$$-\frac{3.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{5/2}^5 =$$

$$= \frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_0^{5/2} + 3.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^5 -$$

$$-\frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^5 =$$

$$= \frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) - \frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot \mathbf{0}}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot \mathbf{0}}{5}\Big) +$$

$$+ 3.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) - 3.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) -$$

$$-\frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) + \frac{3.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{3.00\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{3.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{3.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{3.00\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{3.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{3.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{3.00\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{3.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 3.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{30.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \left\{\begin{array}{ll} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{30.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{array}\right| \qquad (6)$$

Таблица 20 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	3,04	0	−0,338	0	0,122	0	−0,062

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}$$

где A_k вычисляется по формуле (6).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (4)) при помощи формулы

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5}\cdot x = \\ &= -2 + \frac{(7)-(-2)}{5}\cdot x + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}$$

где $T_0 = -2$ и $T_5 = 7$ — значения граничных условий (3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) = (-2) + \frac{(7)-(-2)}{5}\cdot x + A_1 \cdot e^{-\frac{1^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t} \cdot \sin\frac{1\pi x}{5} + \\ + A_3 \cdot e^{-\frac{3^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t} \cdot \sin\frac{3\pi x}{5} + A_5 \cdot e^{-\frac{5^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t} \cdot \sin\frac{5\pi x}{5}\,. \end{aligned}$$

Здесь следует взять $A_1 = 3.040$, $A_3 = -0.338$, $A_5 = 0.122$ по таблице 20.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = (-2) + (1.80)\cdot x + (3.040)\cdot e^{-\frac{1^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t}\cdot \sin\frac{1\pi x}{5} +$$

$$+ (-0.338)\cdot e^{-\frac{3^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t}\cdot \sin\frac{3\pi x}{5} + (0.122)\cdot e^{-\frac{5^2\pi^2 1.0^2}{5^2}t}\cdot \sin\frac{5\pi x}{5}\ .$$

Таблица 21 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	−2	−0,35	1,3	2,95	4,6	6,25	6,4	6,55	6,7	6,85	7
$u(x,0)$	−2	−0,31	1,27	2,93	4,69	6	6,49	6,53	6,67	6,89	7
$u(x,1)$	−2	−0,47	0,99	2,35	3,55	4,56	5,35	5,95	6,39	6,73	7
$u(x,2)$	−2	−0,67	0,61	1,82	2,91	3,88	4,71	5,42	6,01	6,53	7

Шаг 7. Построение графиков.

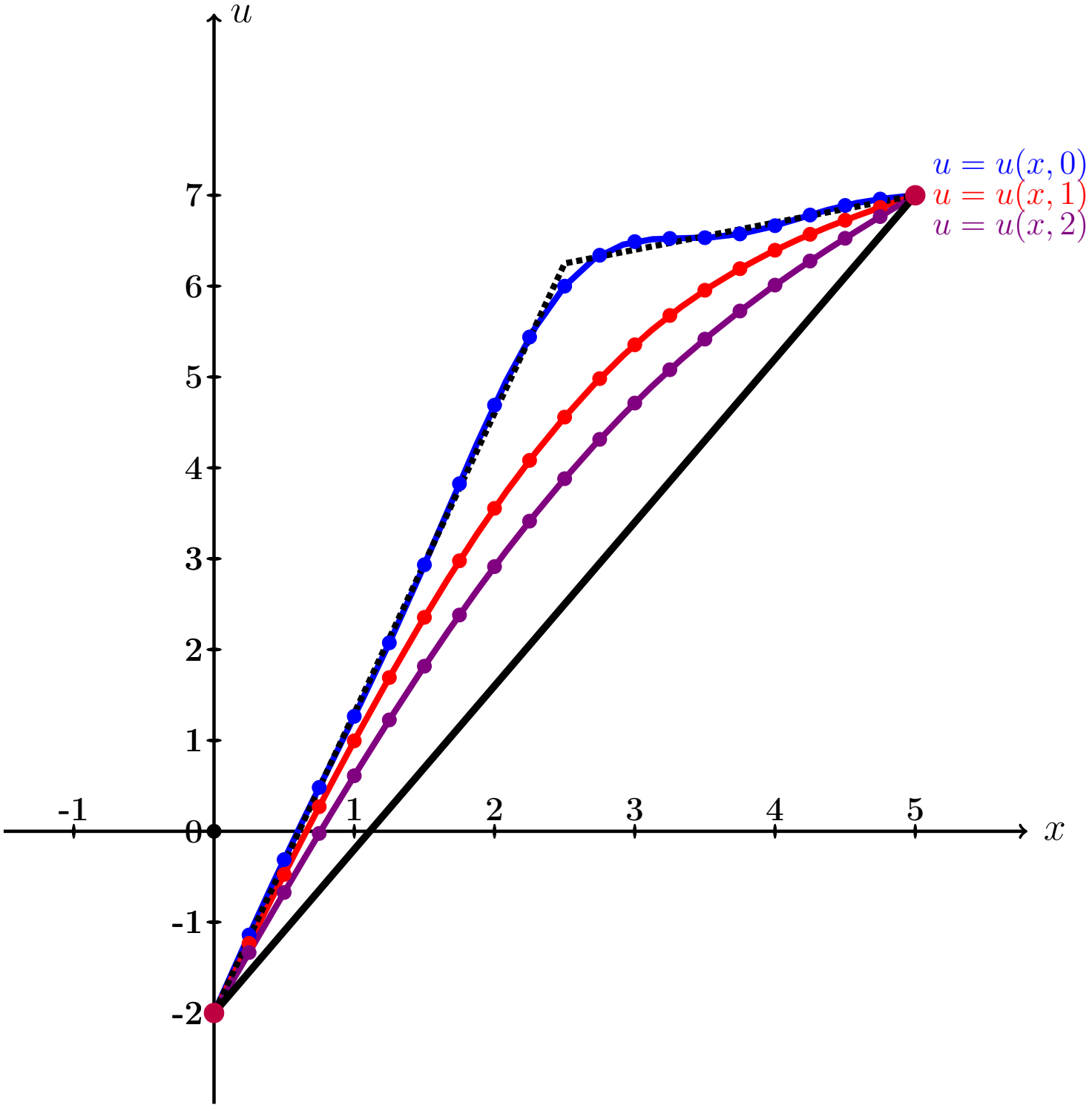


Рис.: Графики функций $u = u(x, t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно начальным условиям (2), а черной сплошной линией — график равномерного распределения температуры, согласованный с граничными условиями (3).

возврат огл

§ 1. Анимация некоторых примеров

возврат огл

СМОТРИ СЛЕДУЮЩИЙ СЛАЙД

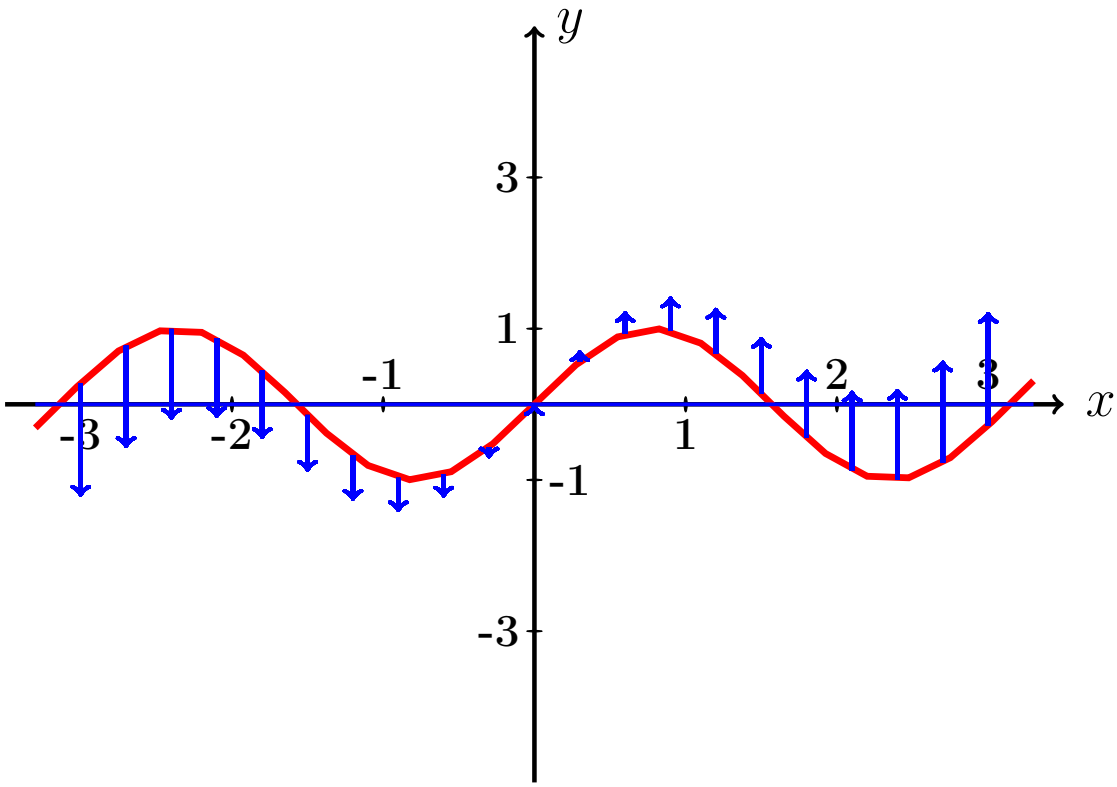


Рис.: Стрелки показывают начальный импульс скоростей согласно начальному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{x}{2}$

Пример П4, анимация возврат огл

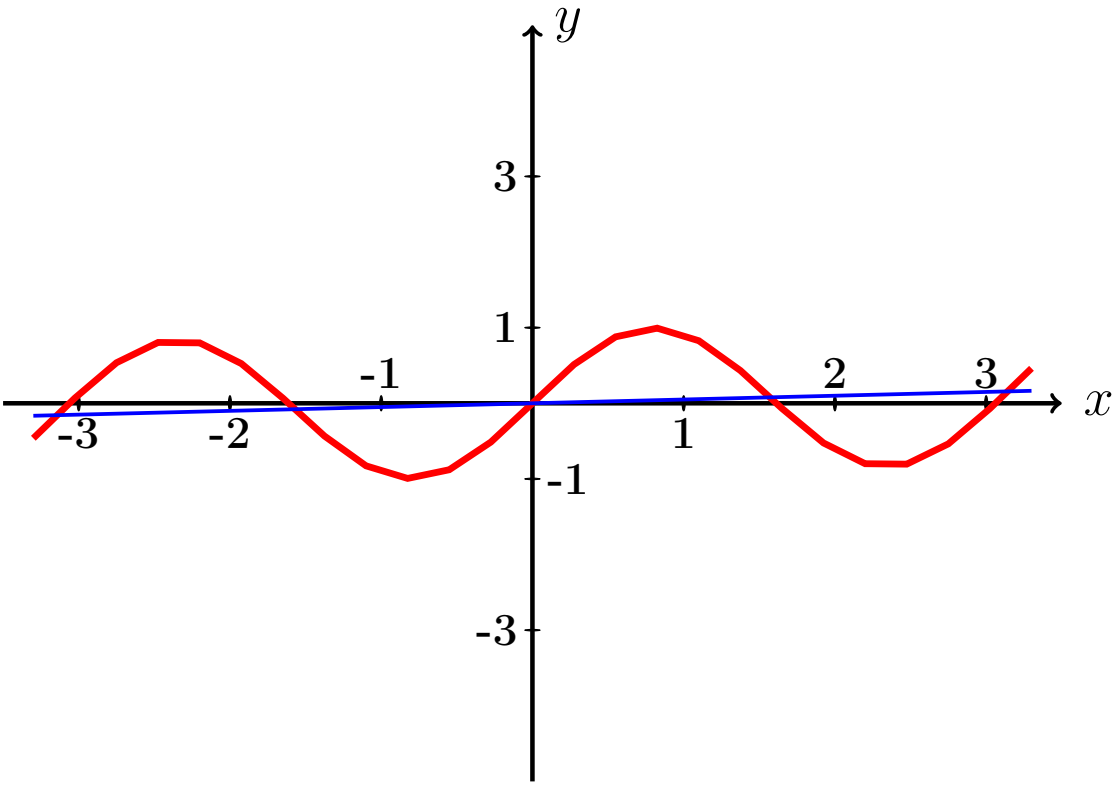


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

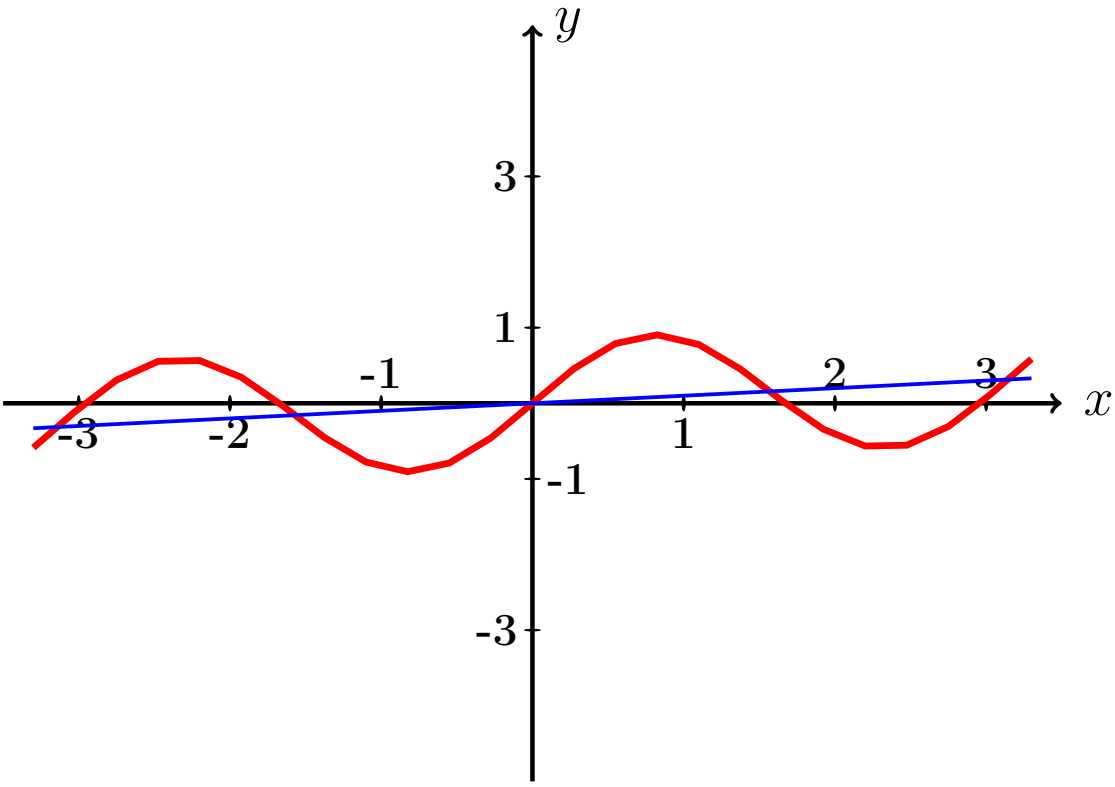


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

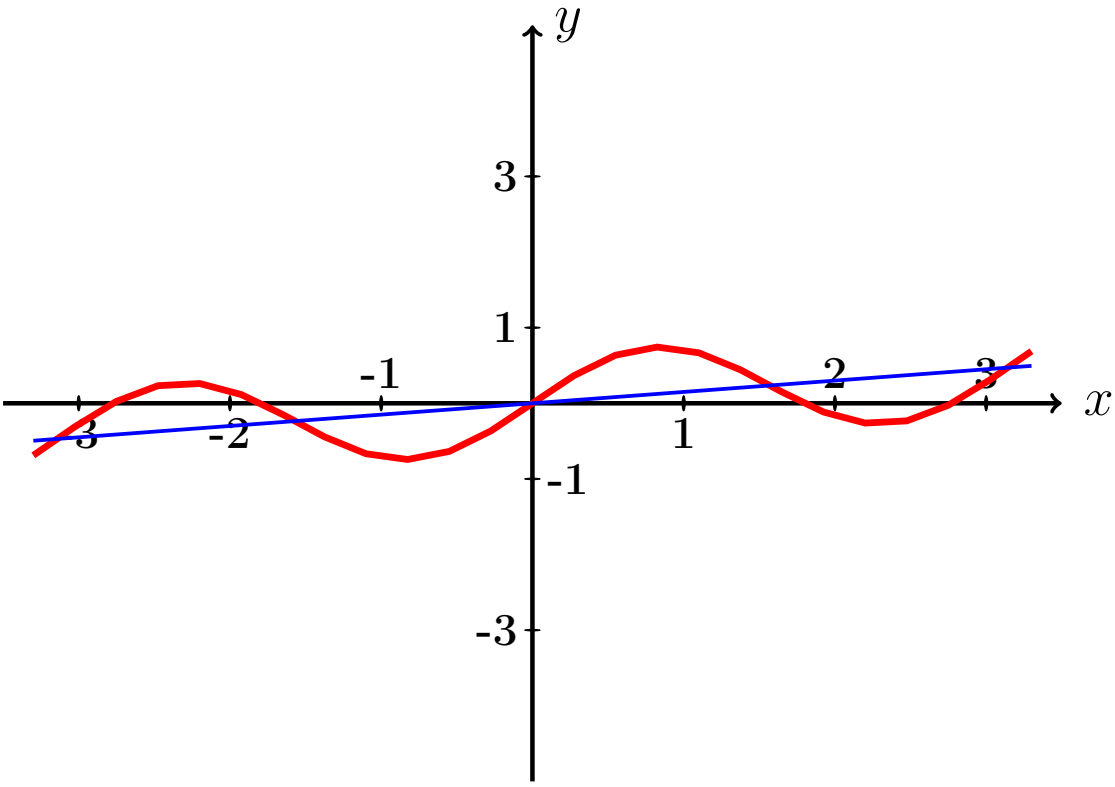


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

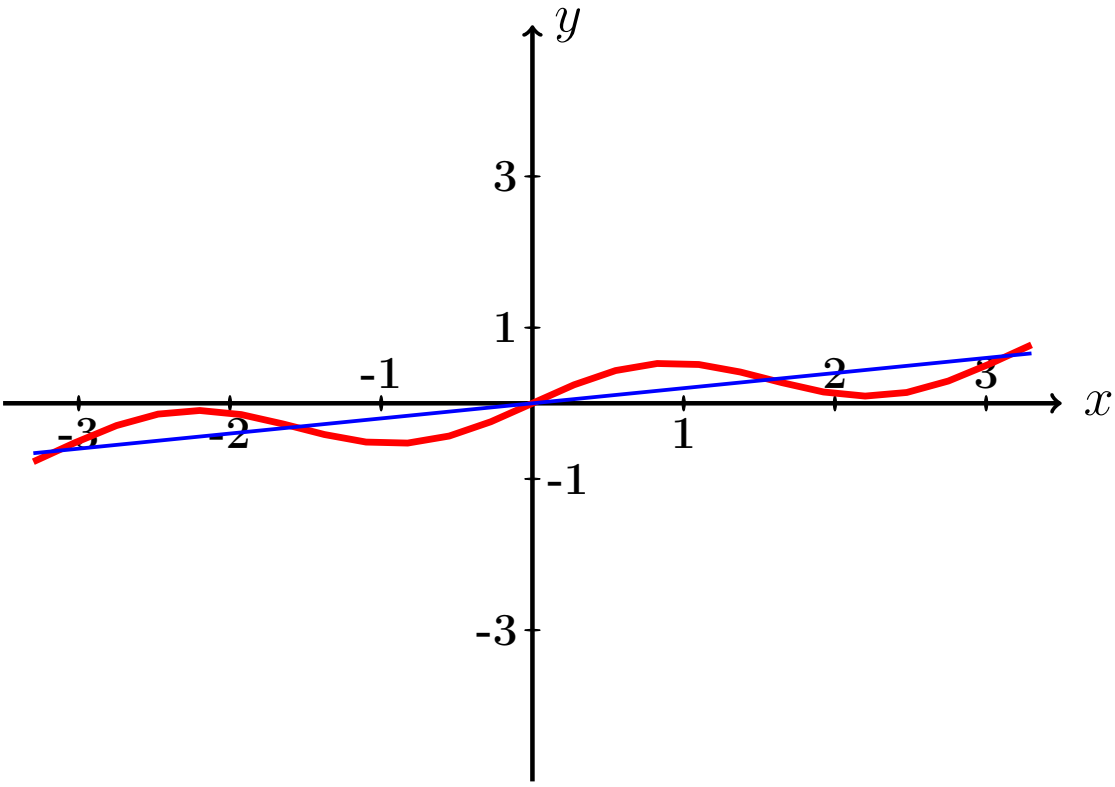


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

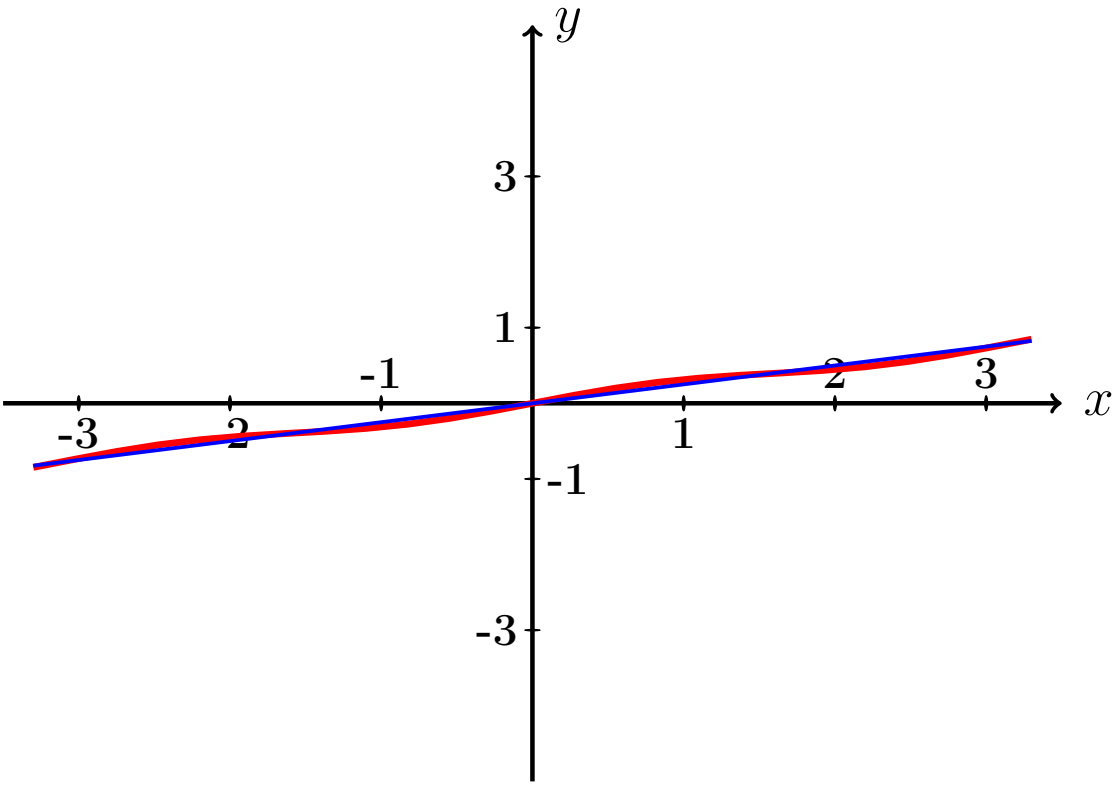


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

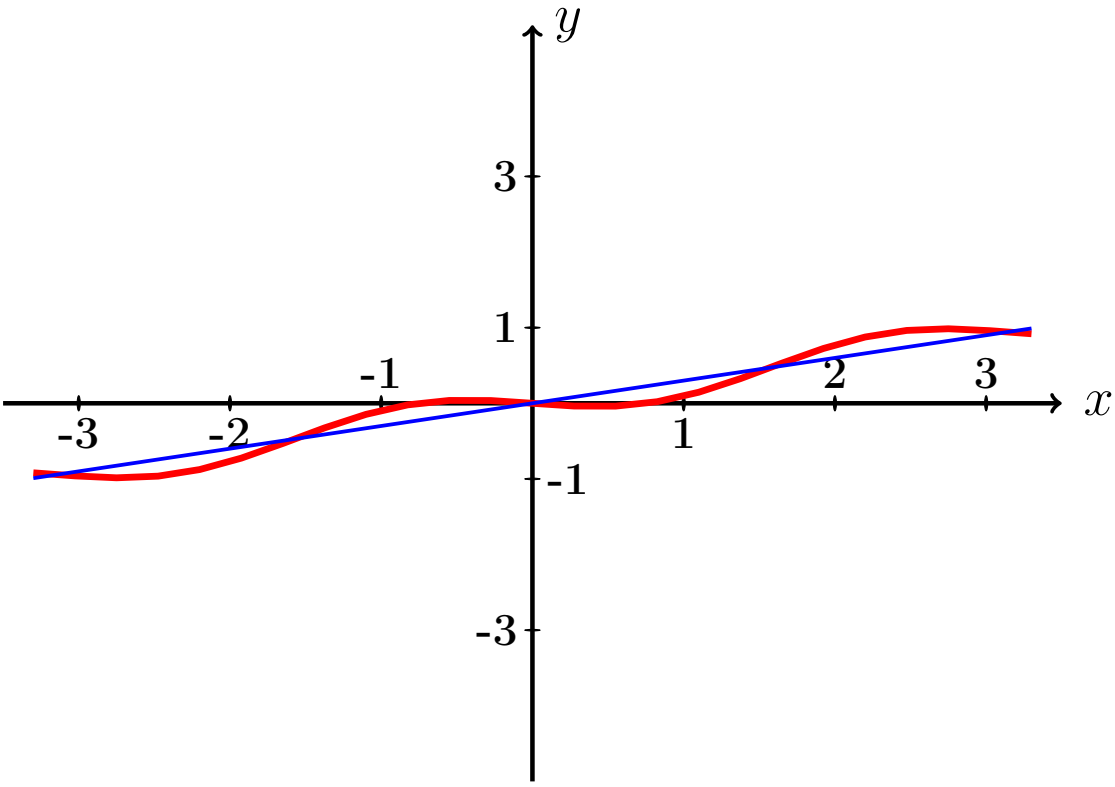


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

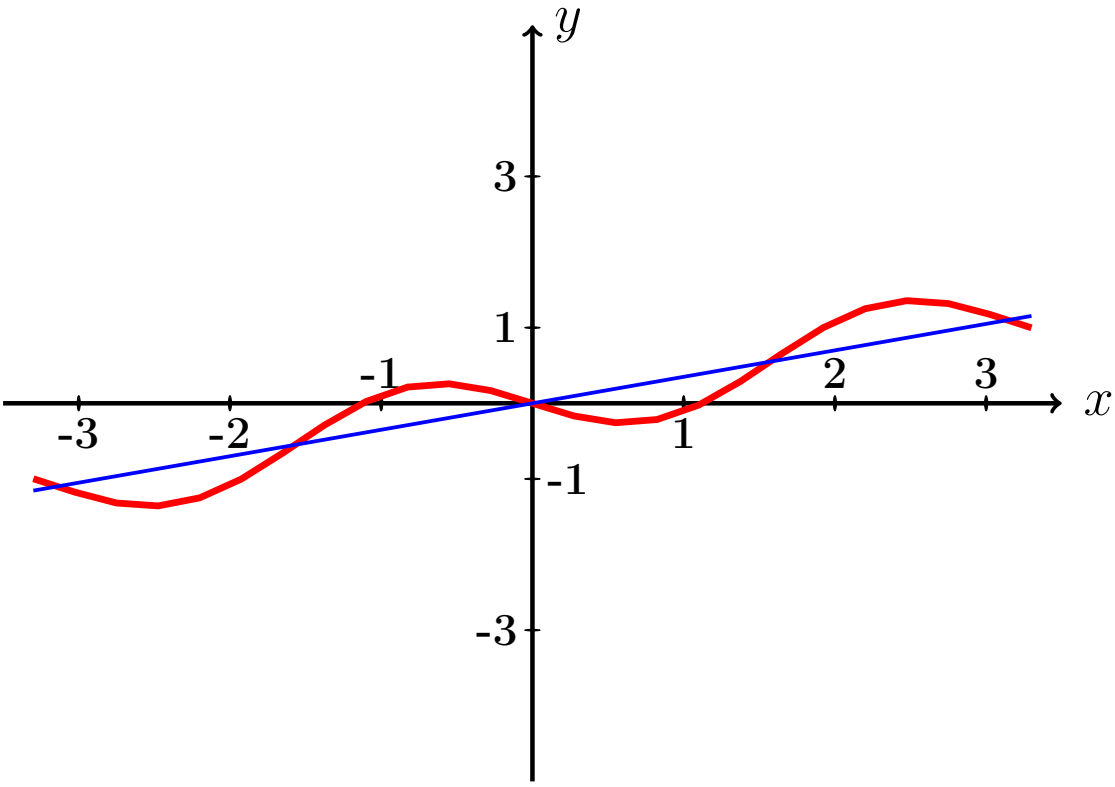


Рис.:

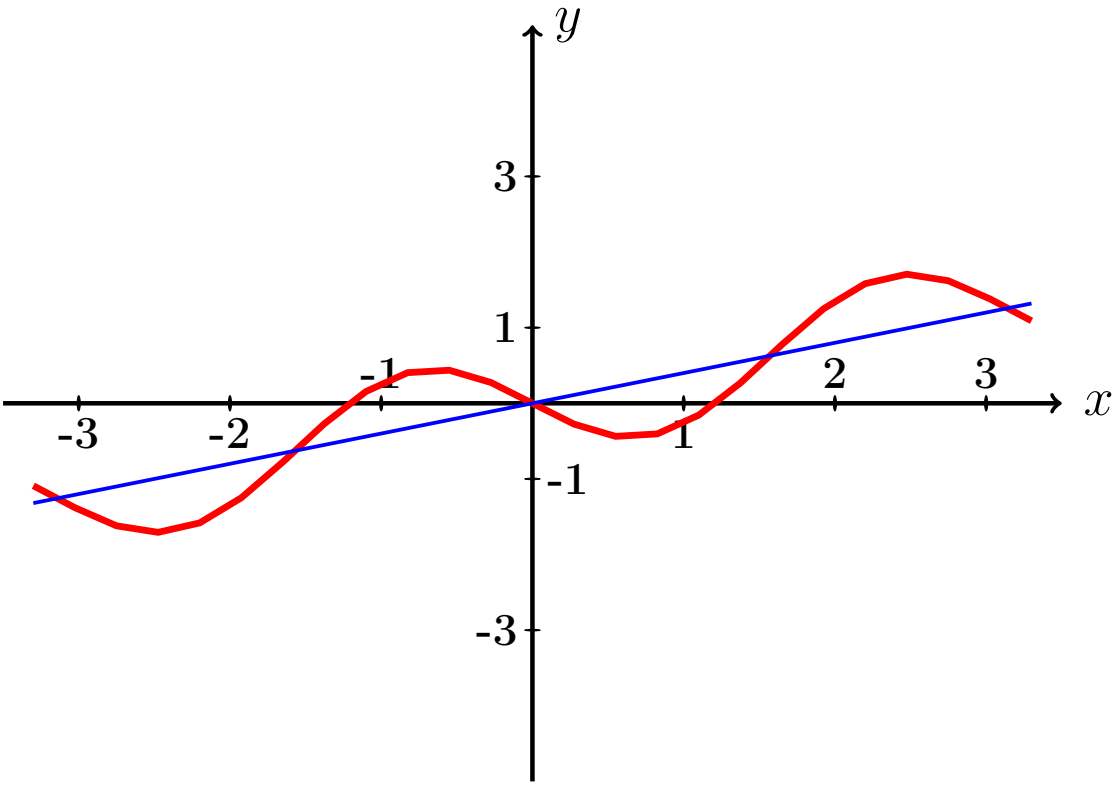


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

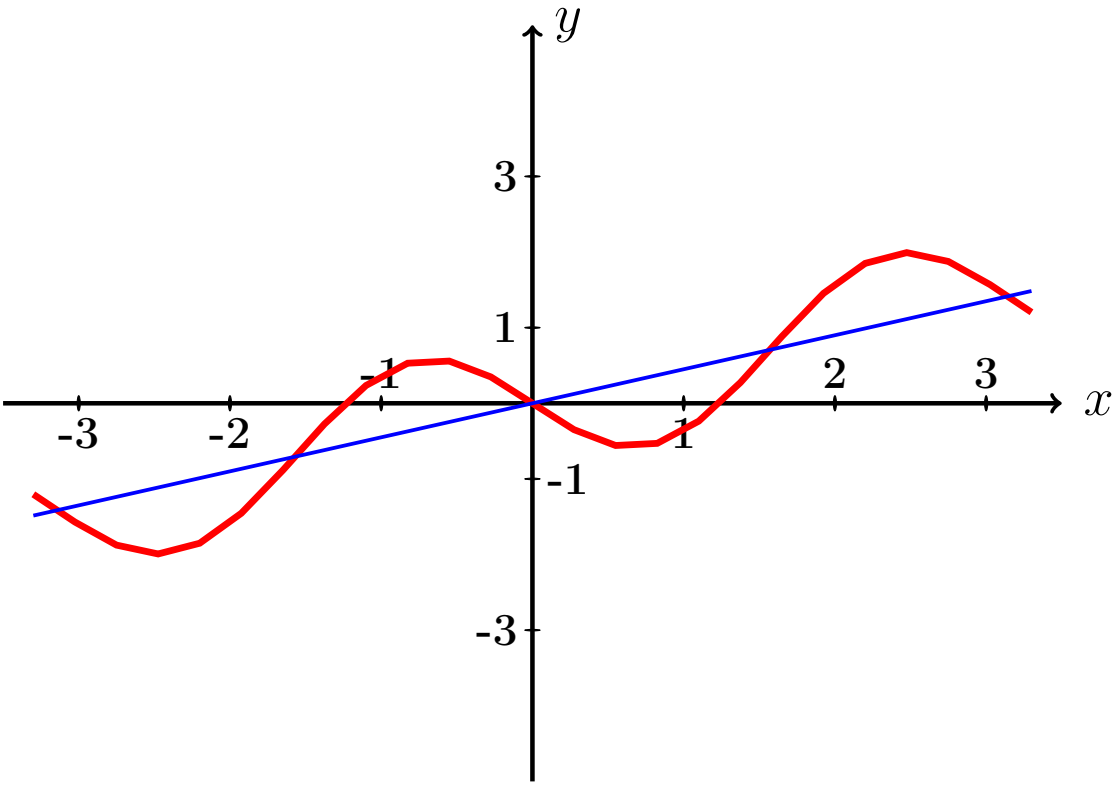


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

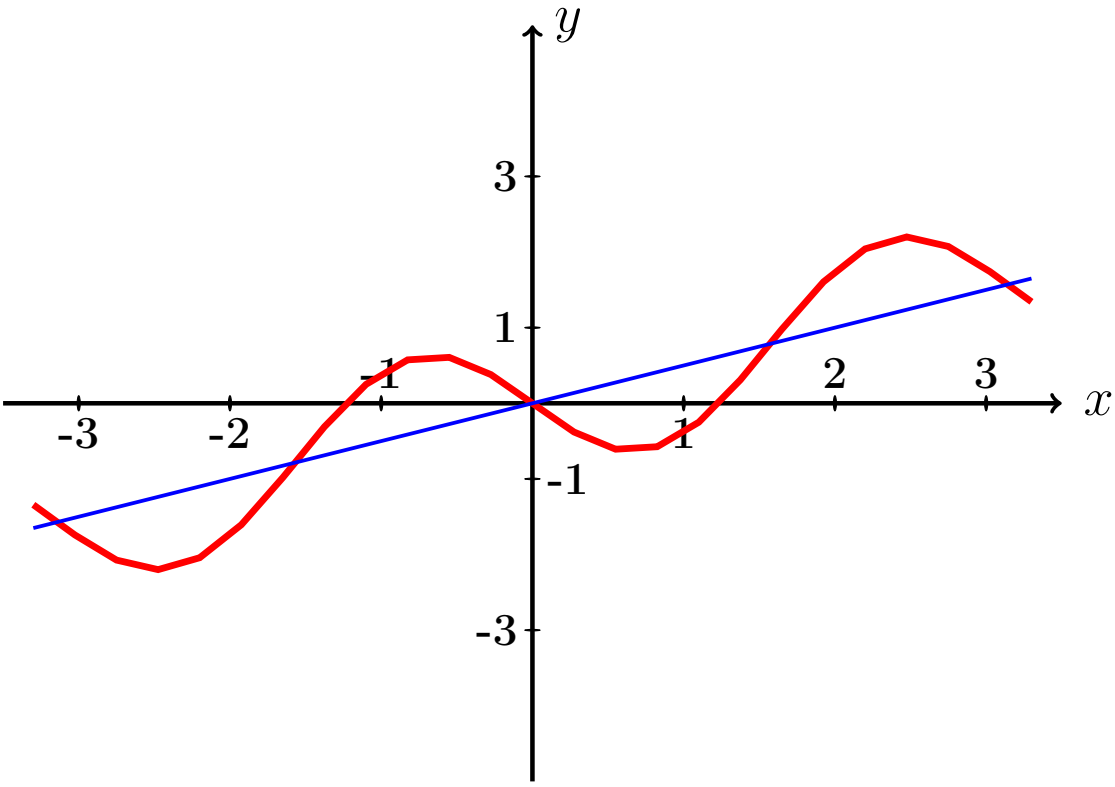


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

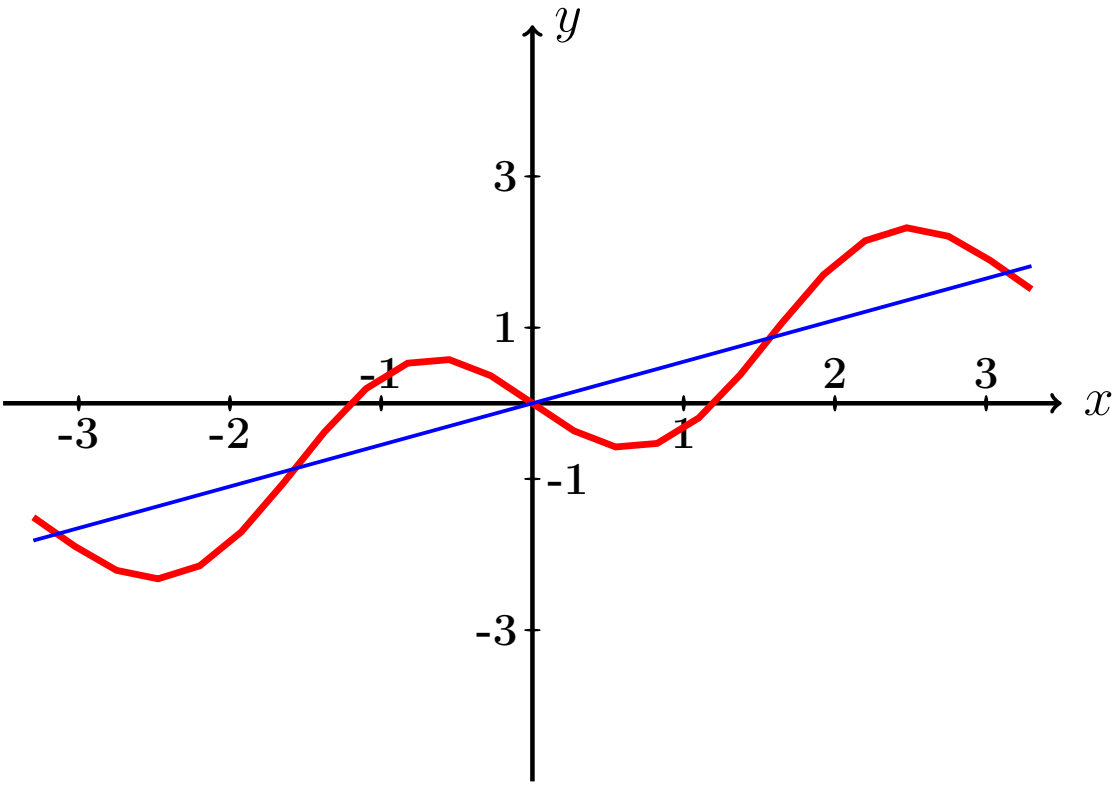


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

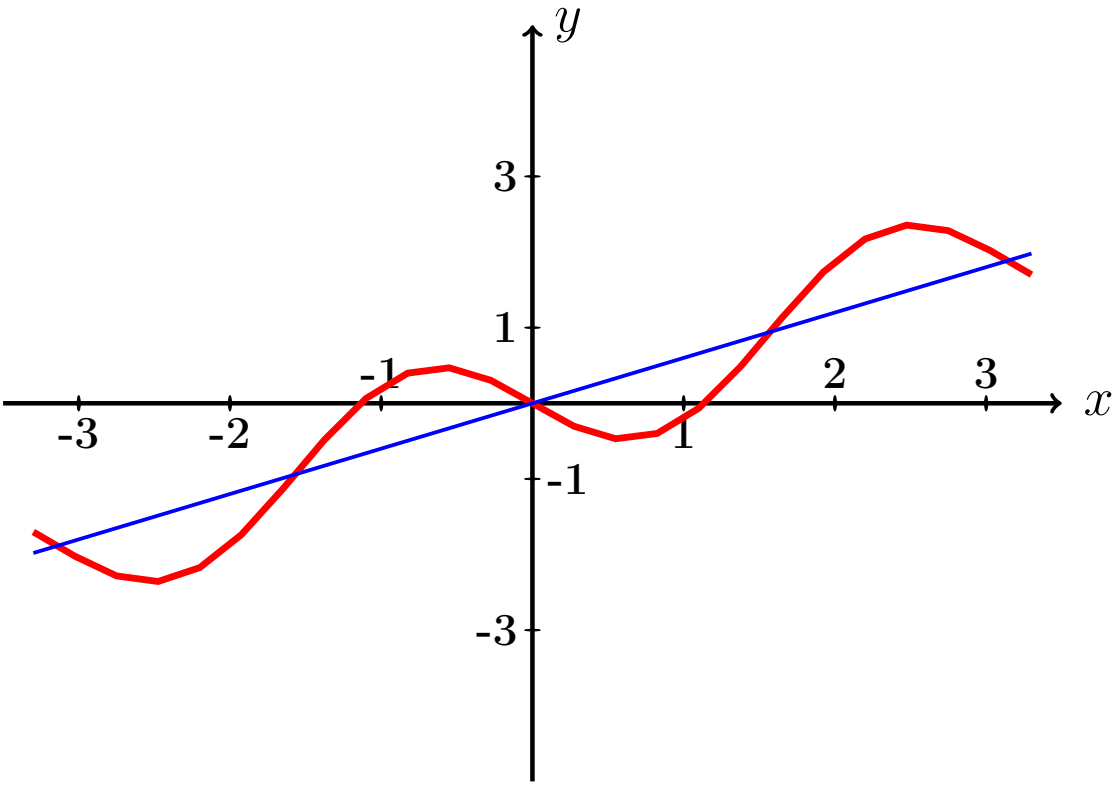


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

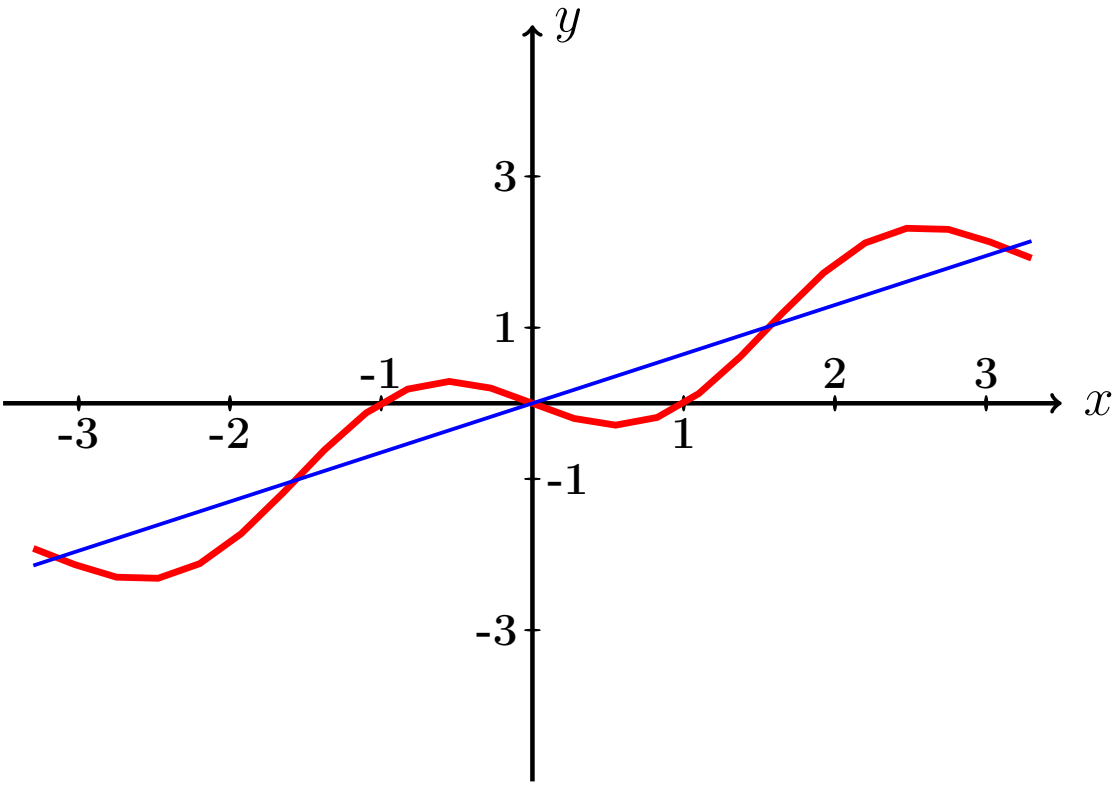


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

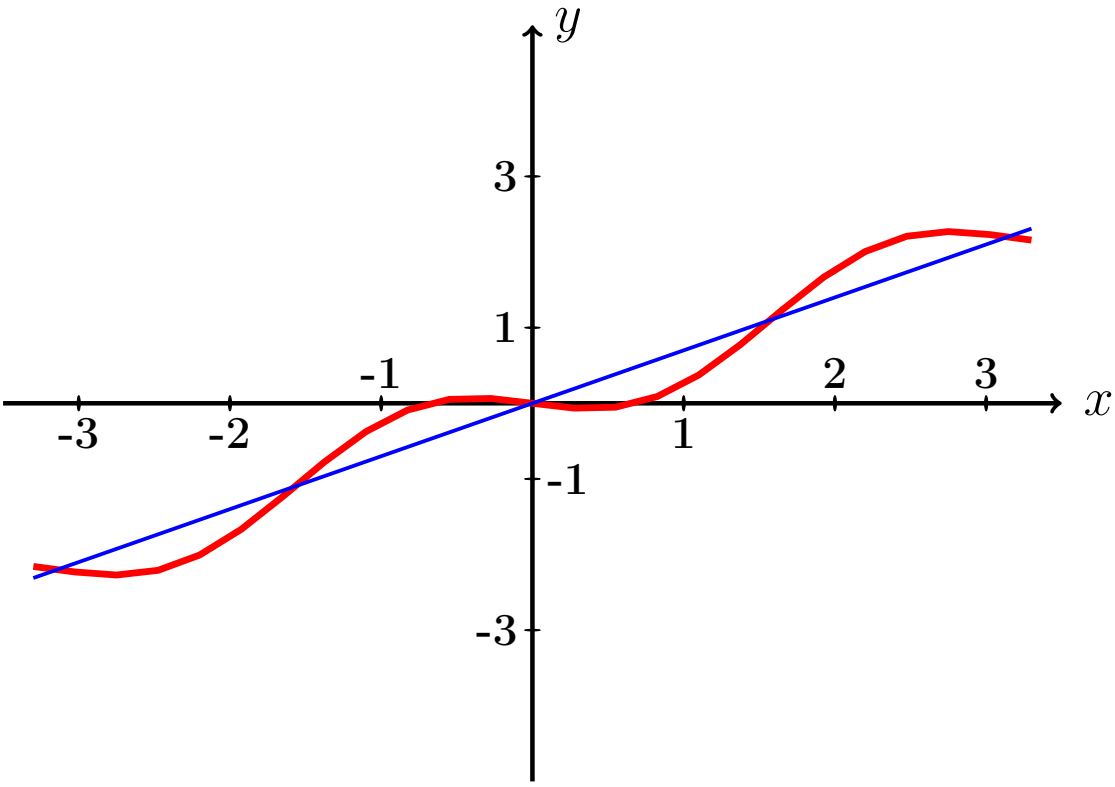


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

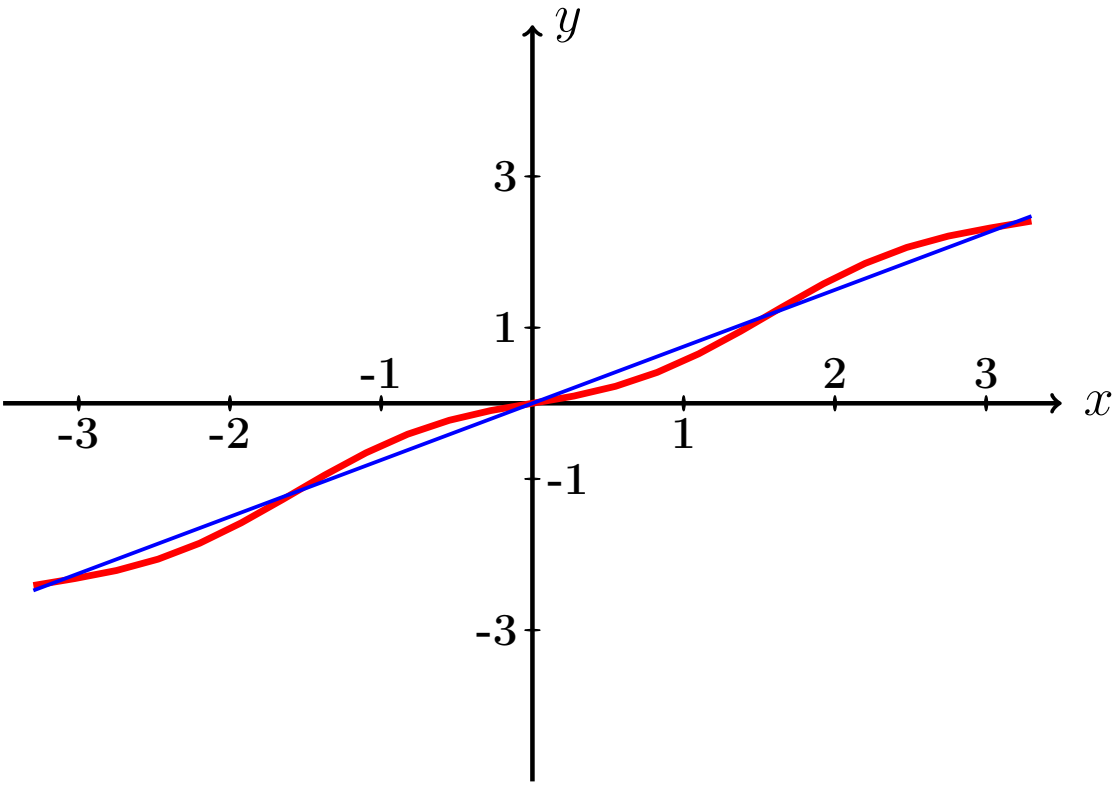


Рис.:

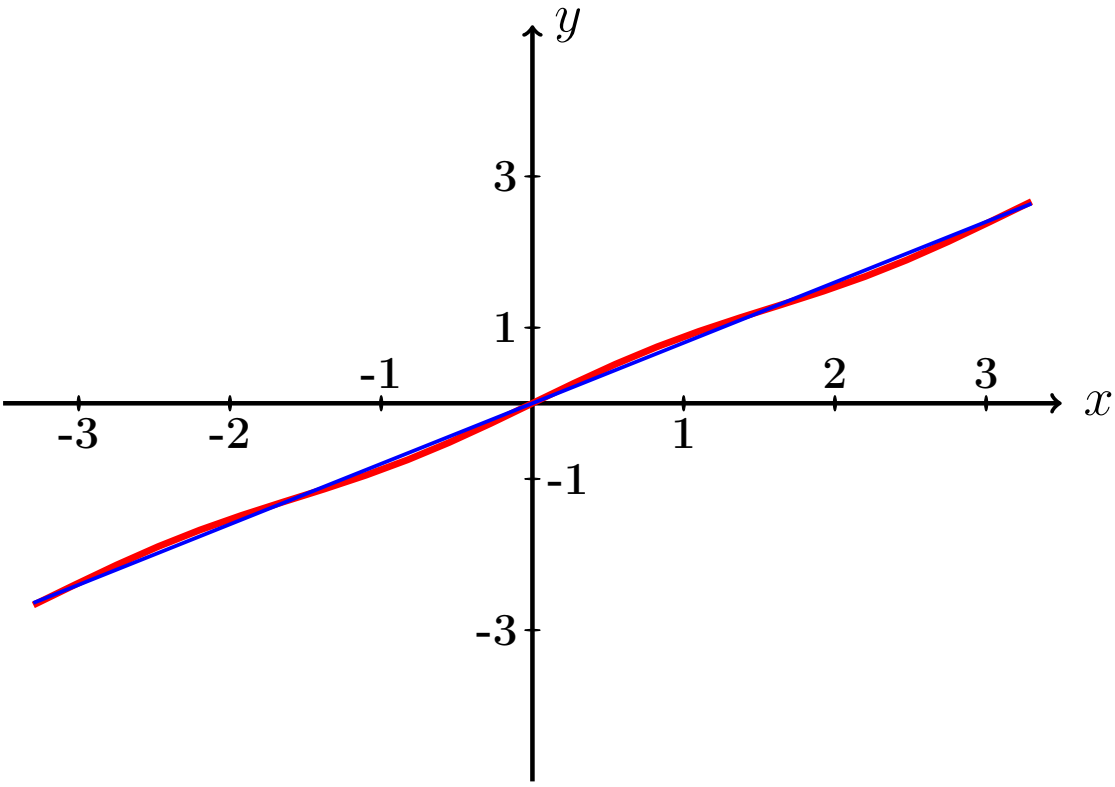


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

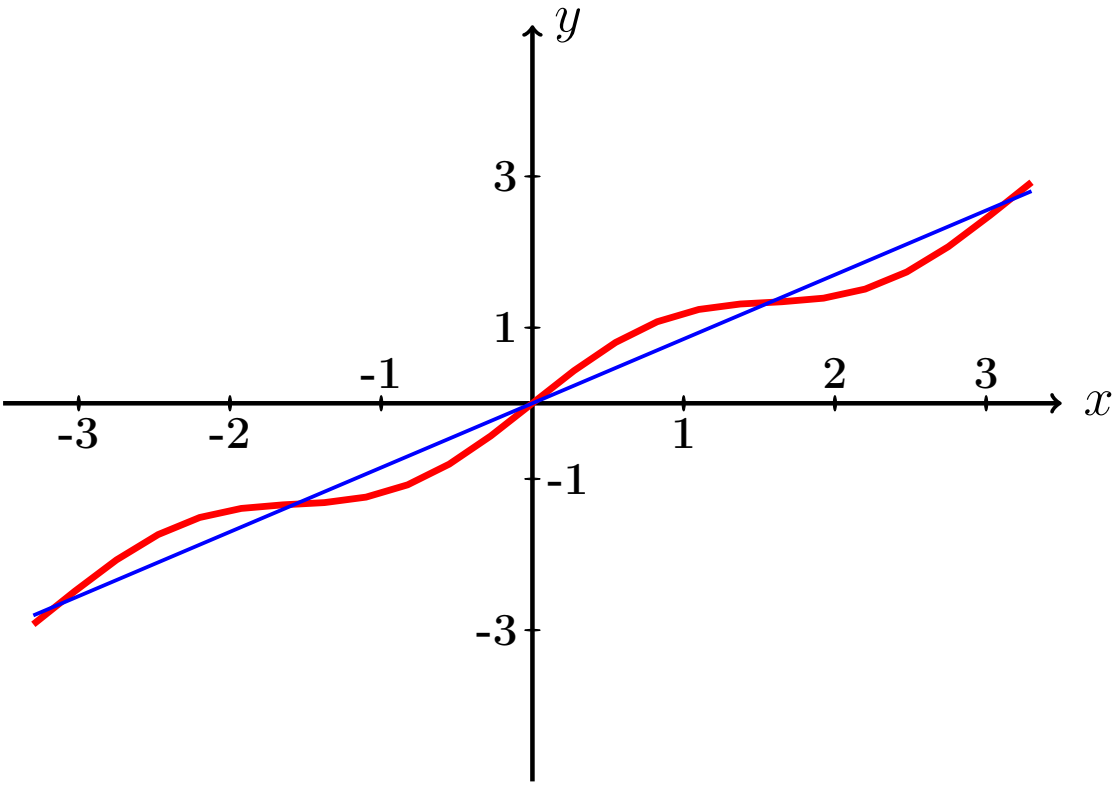


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

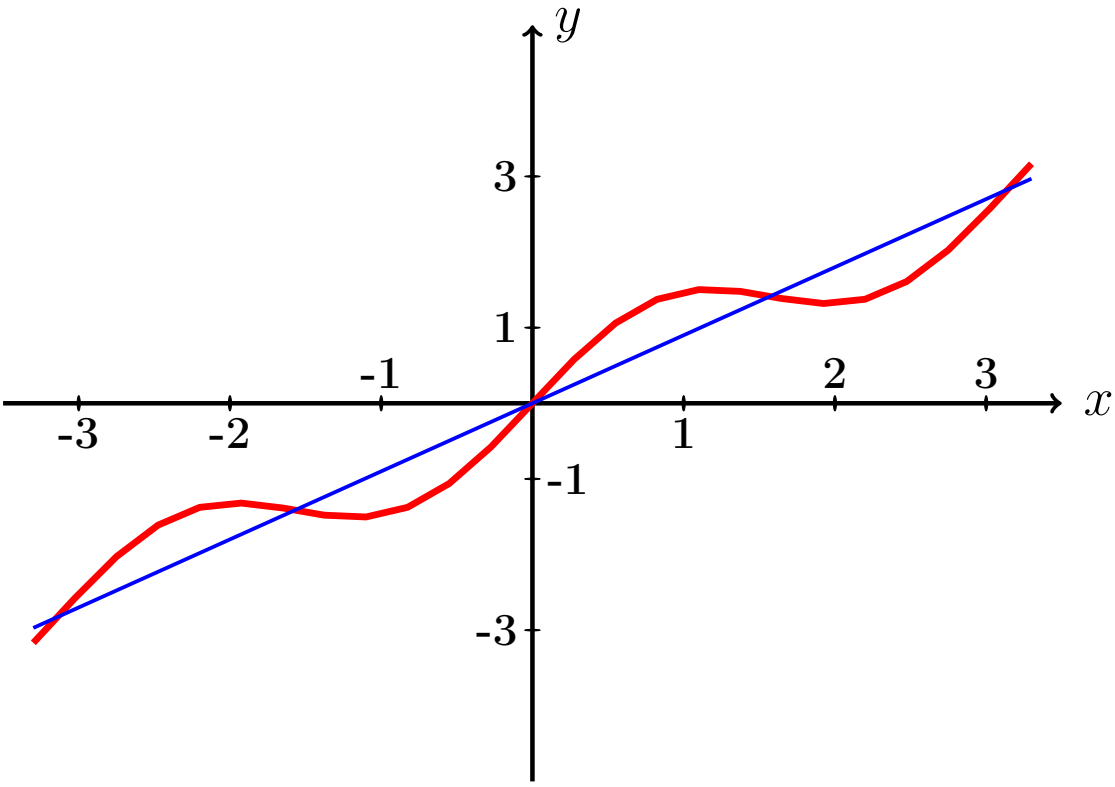


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

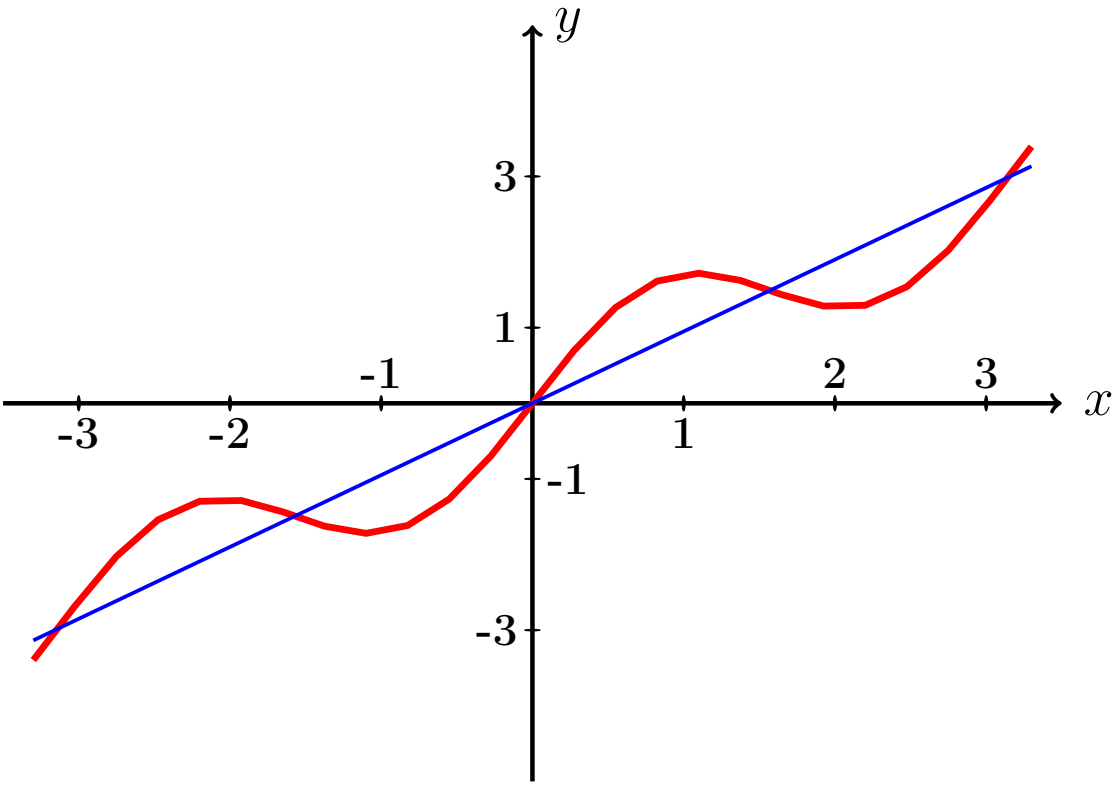


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

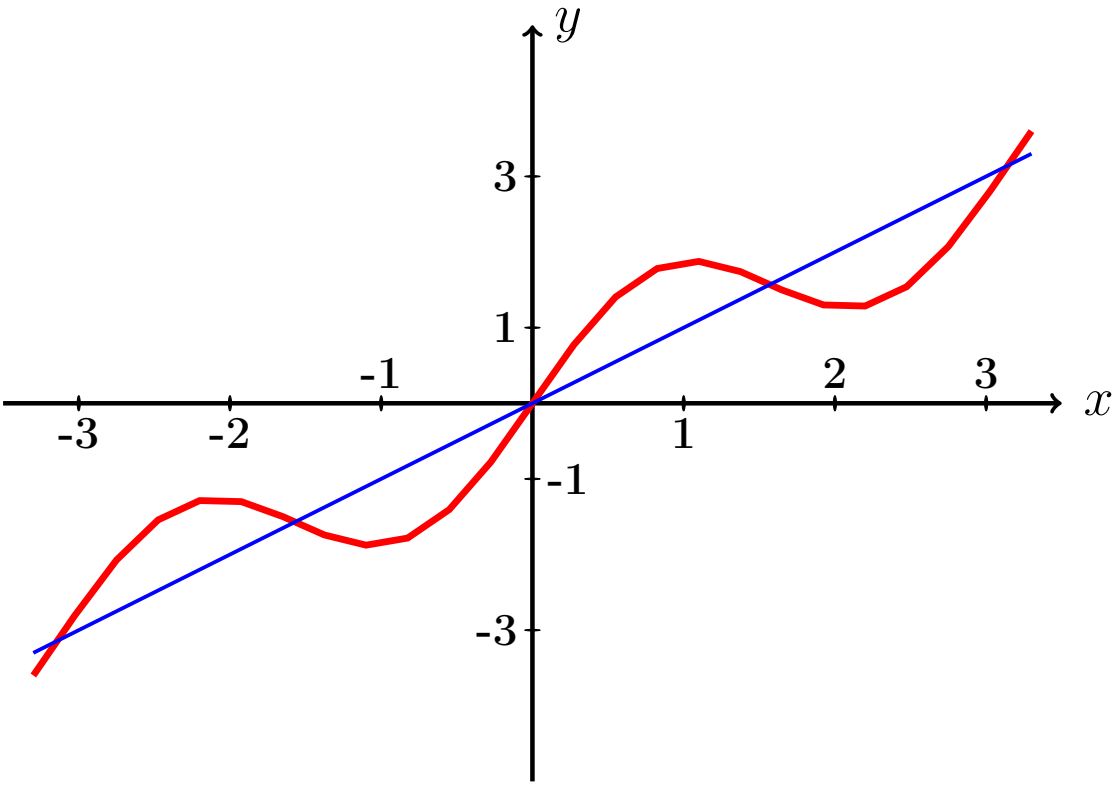


Рис.:

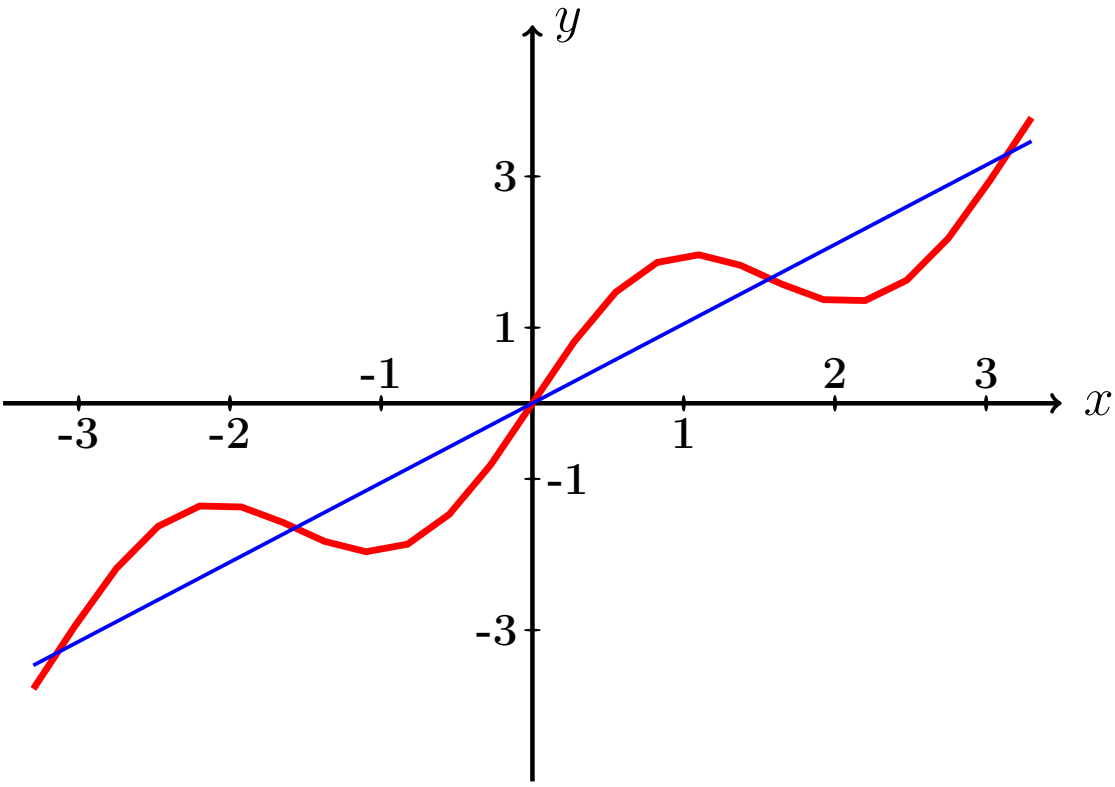


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

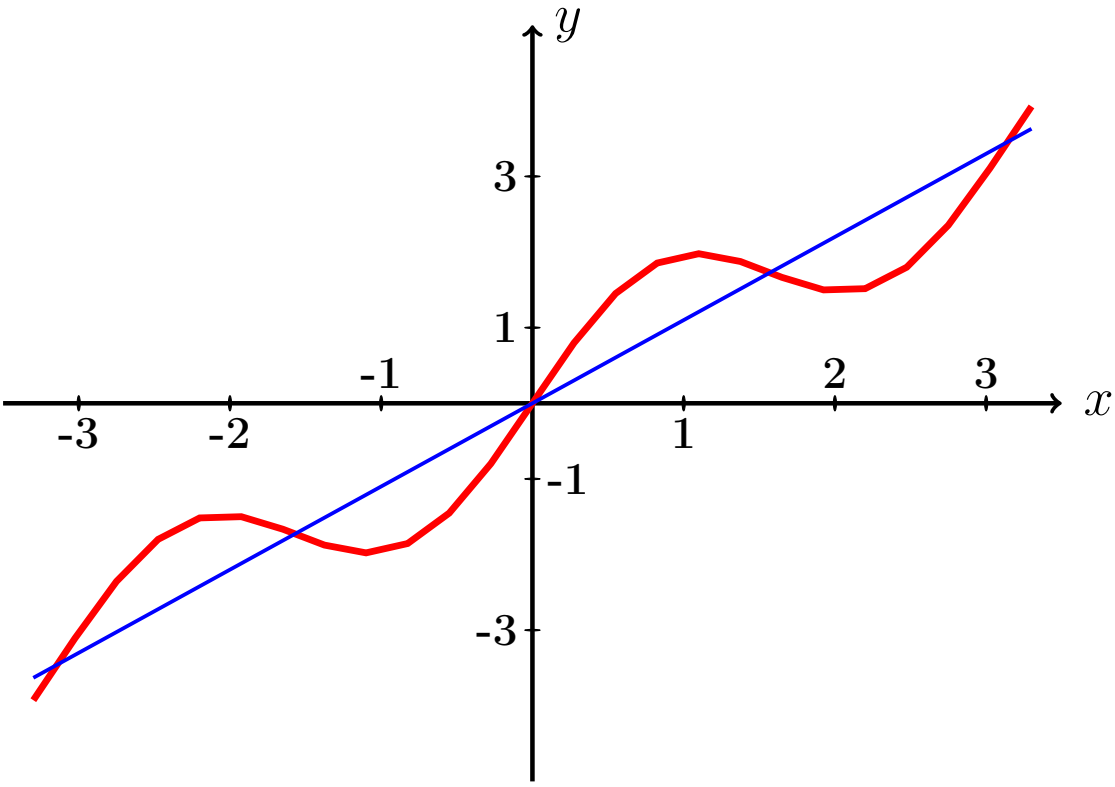


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

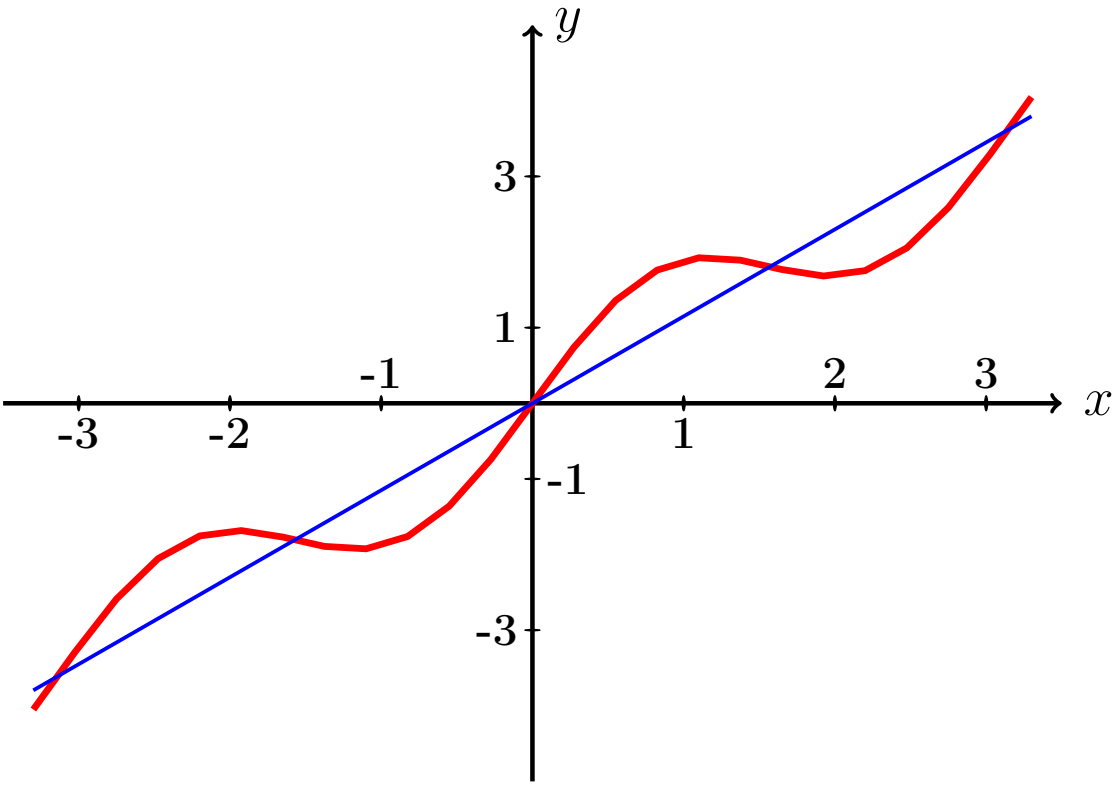


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

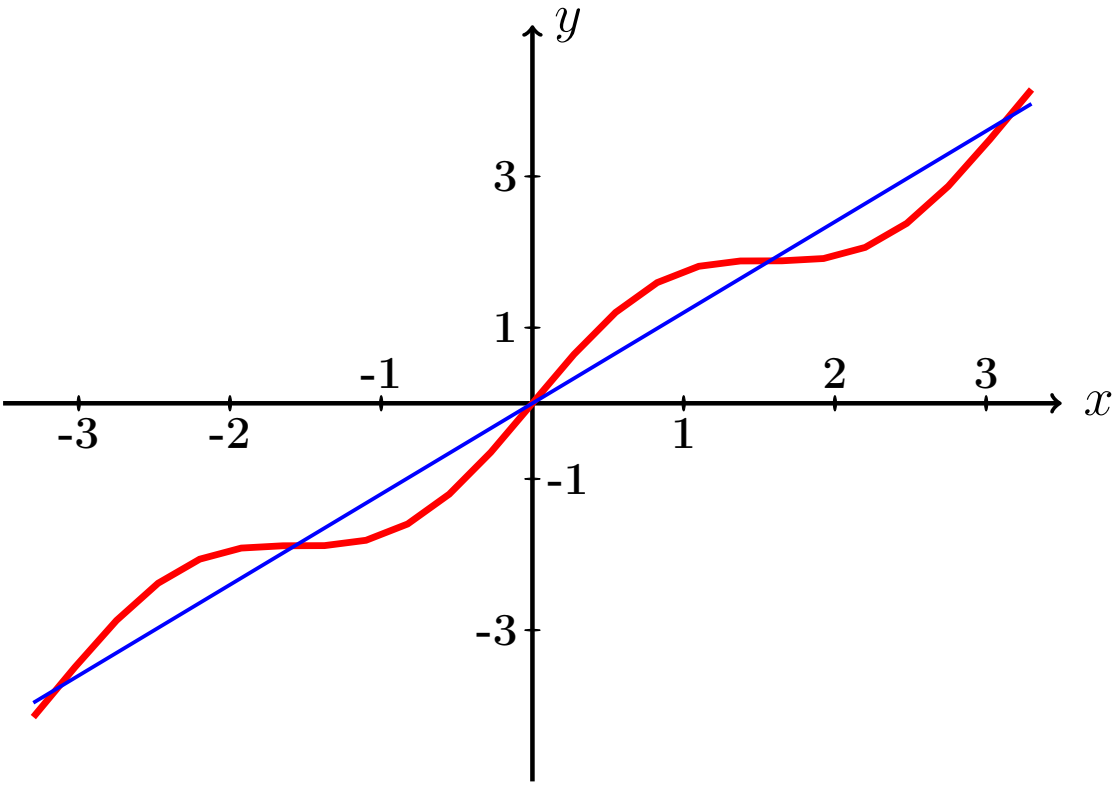


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

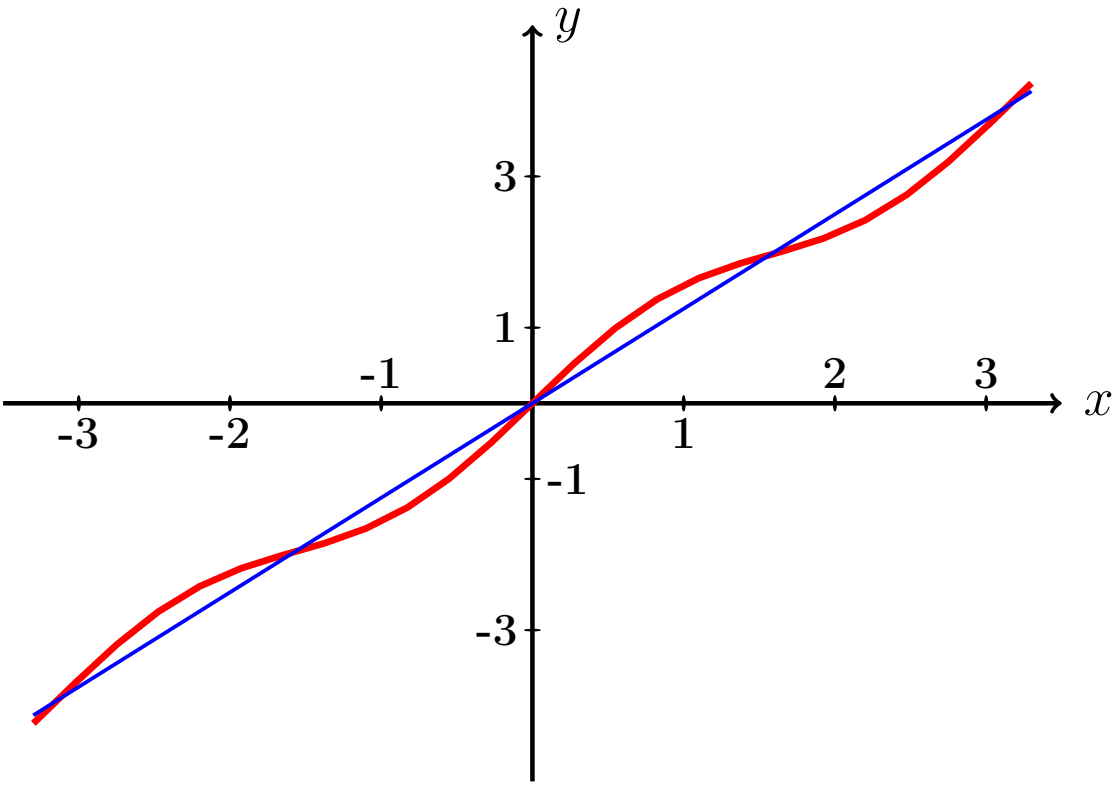


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

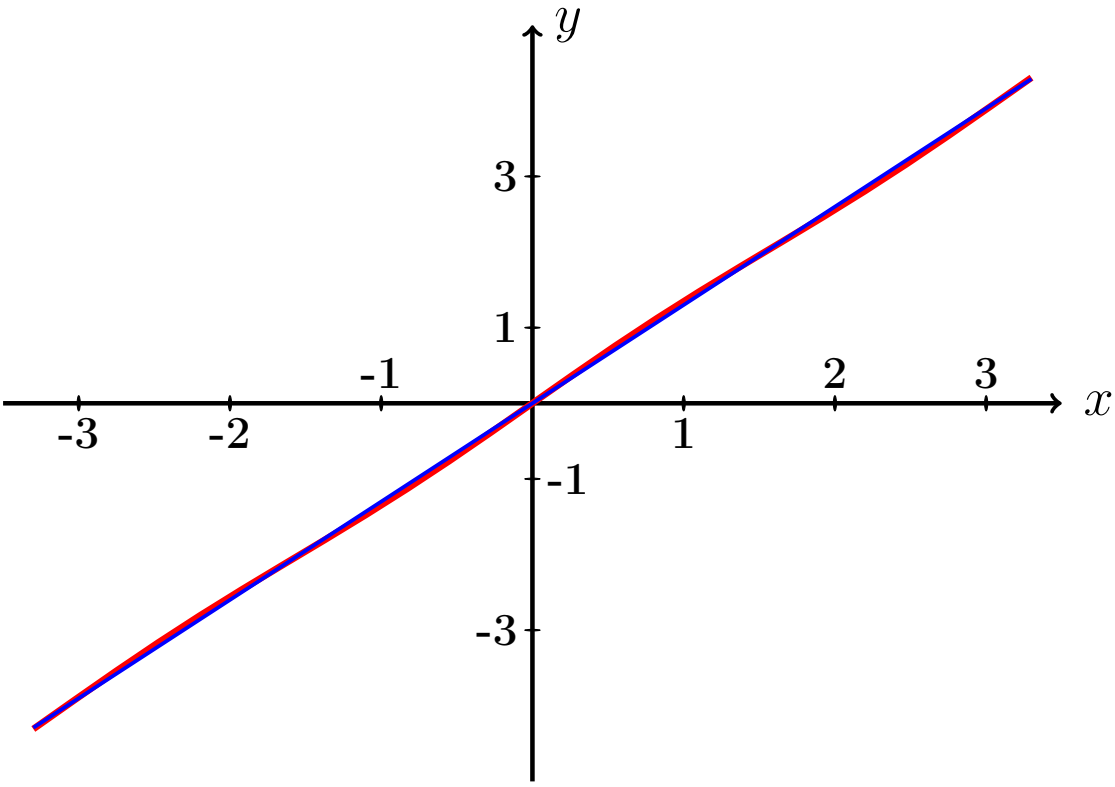


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

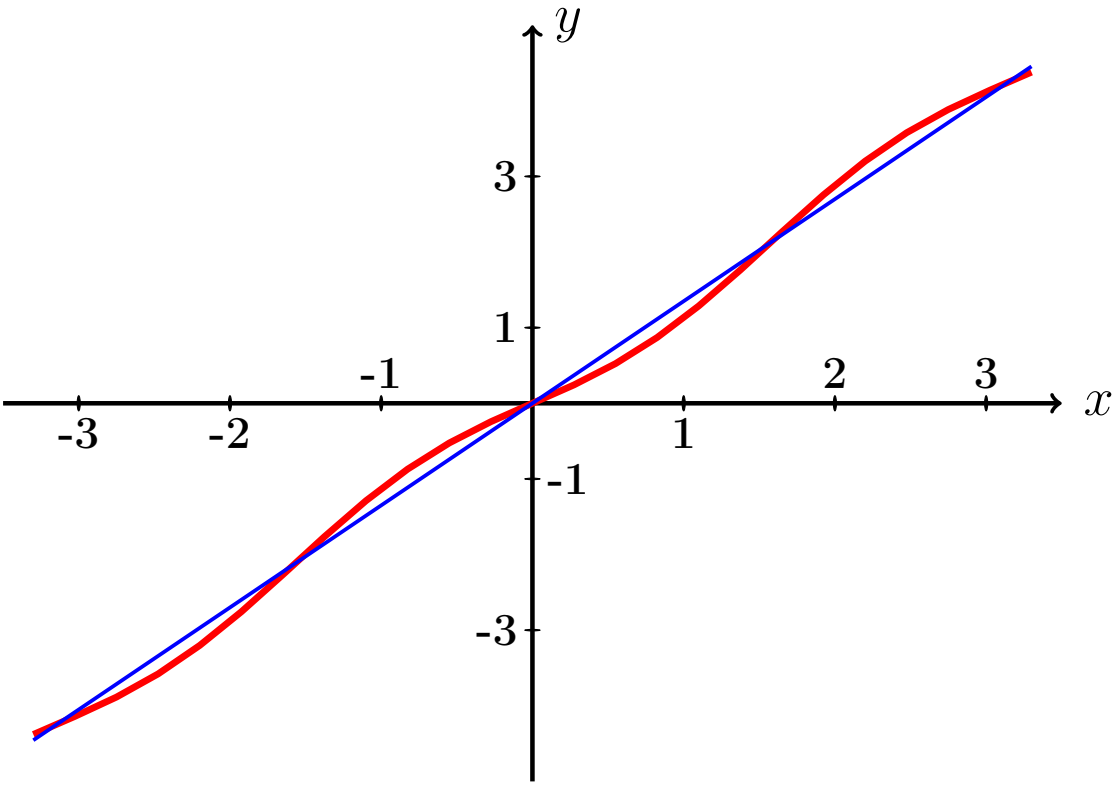


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

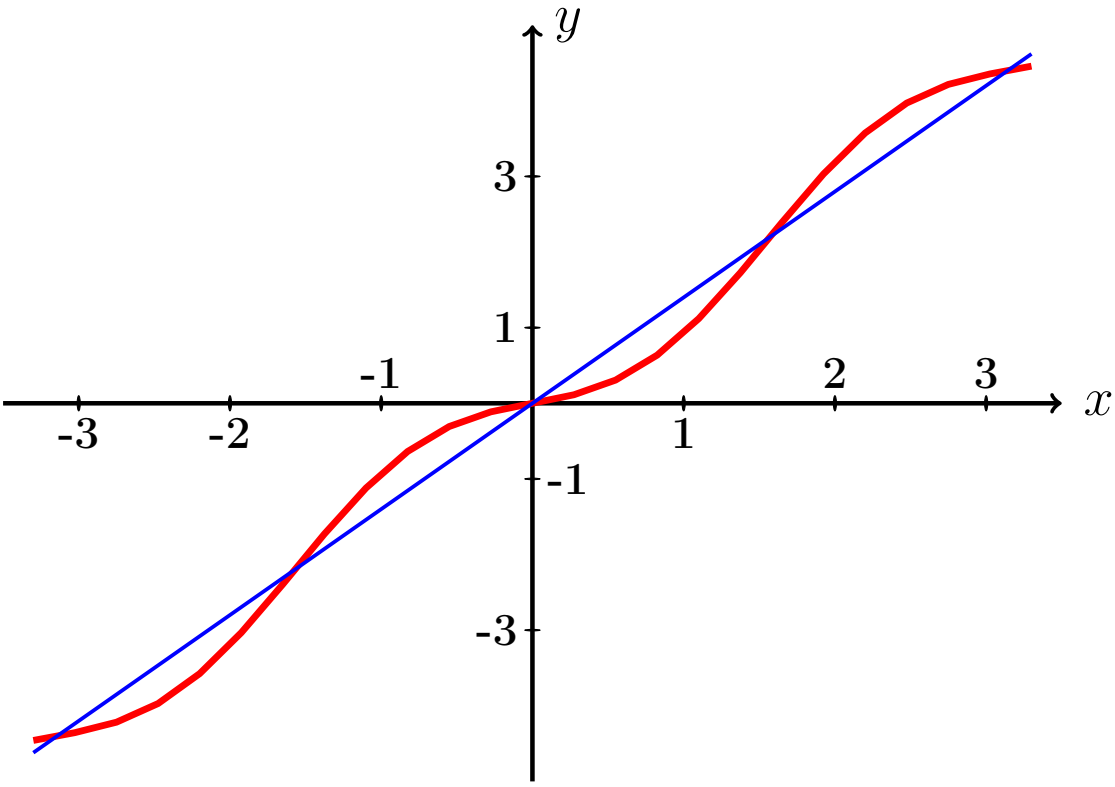


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

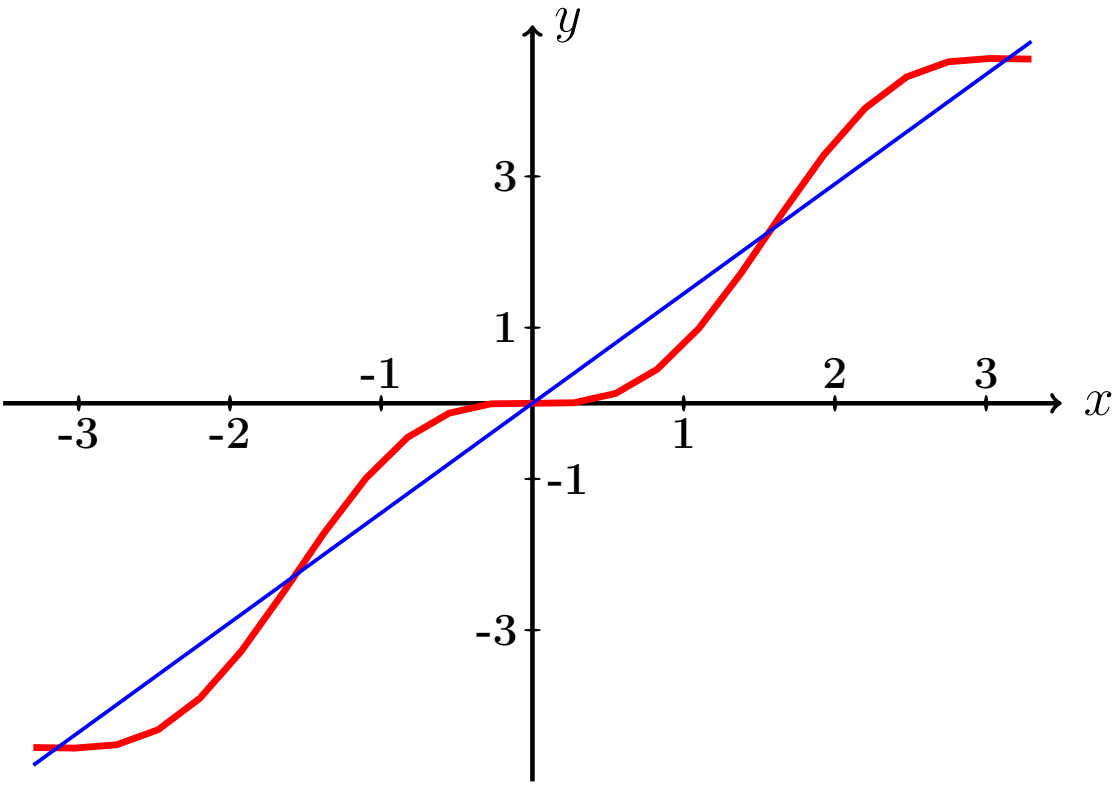


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

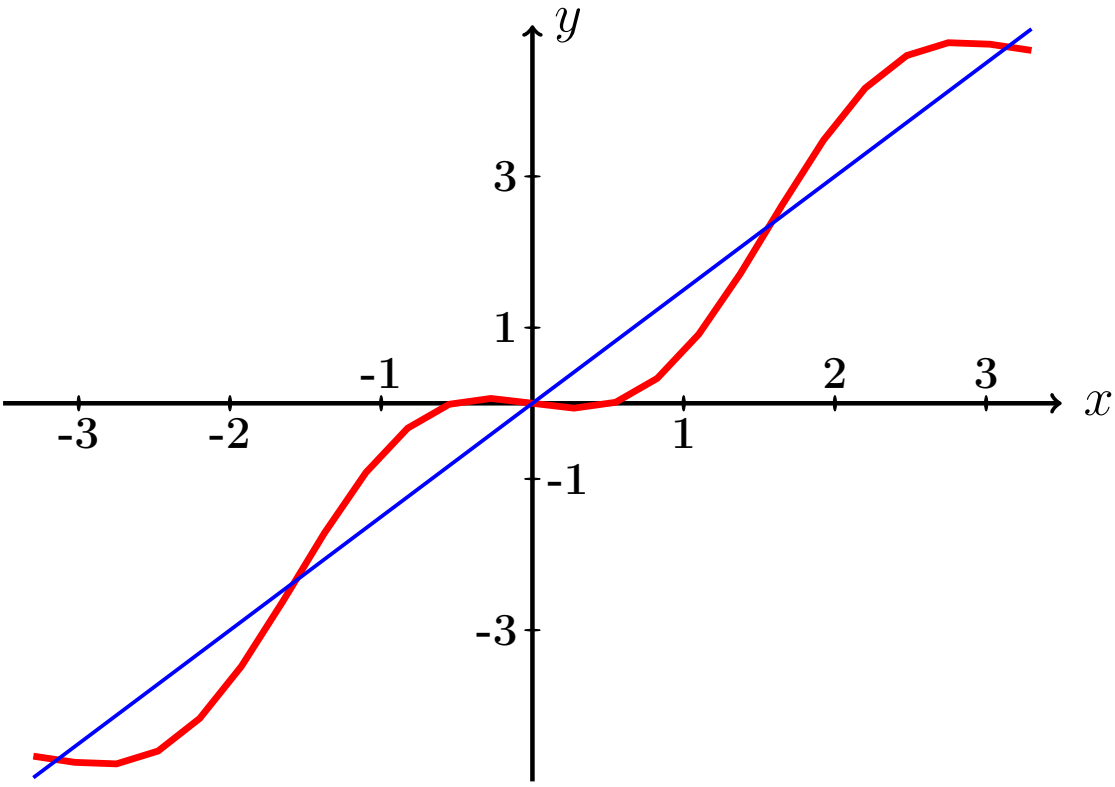


Рис.:

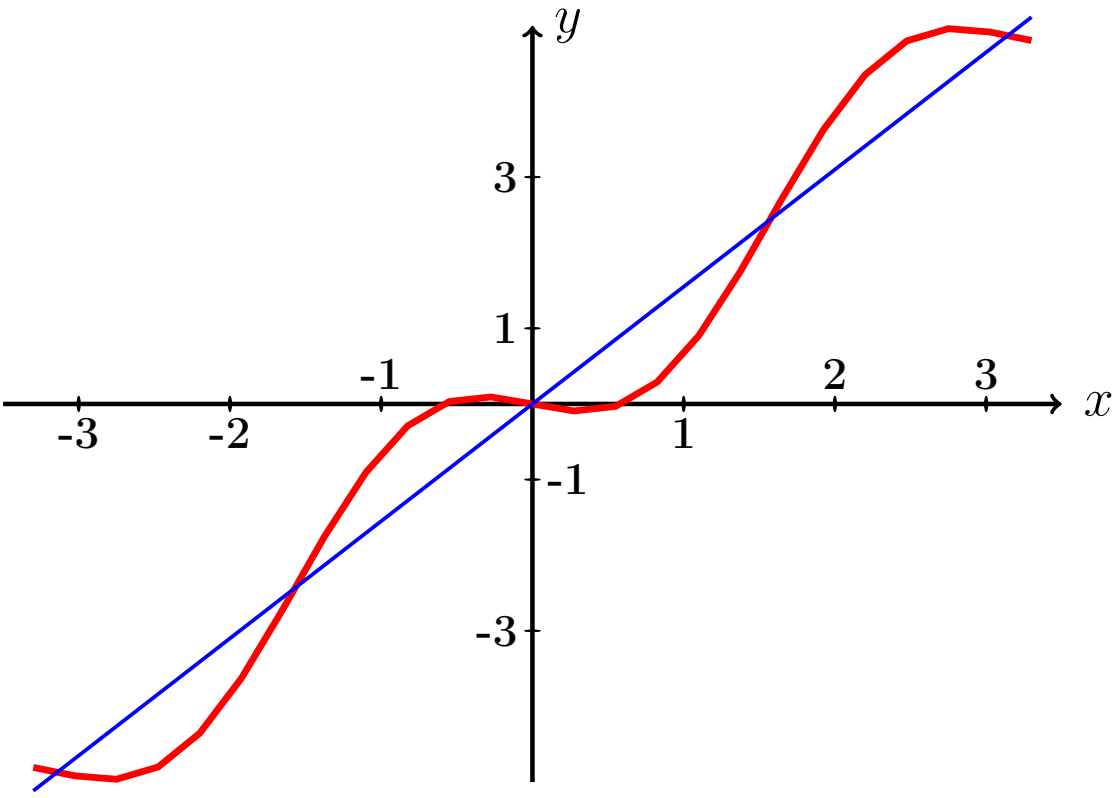


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

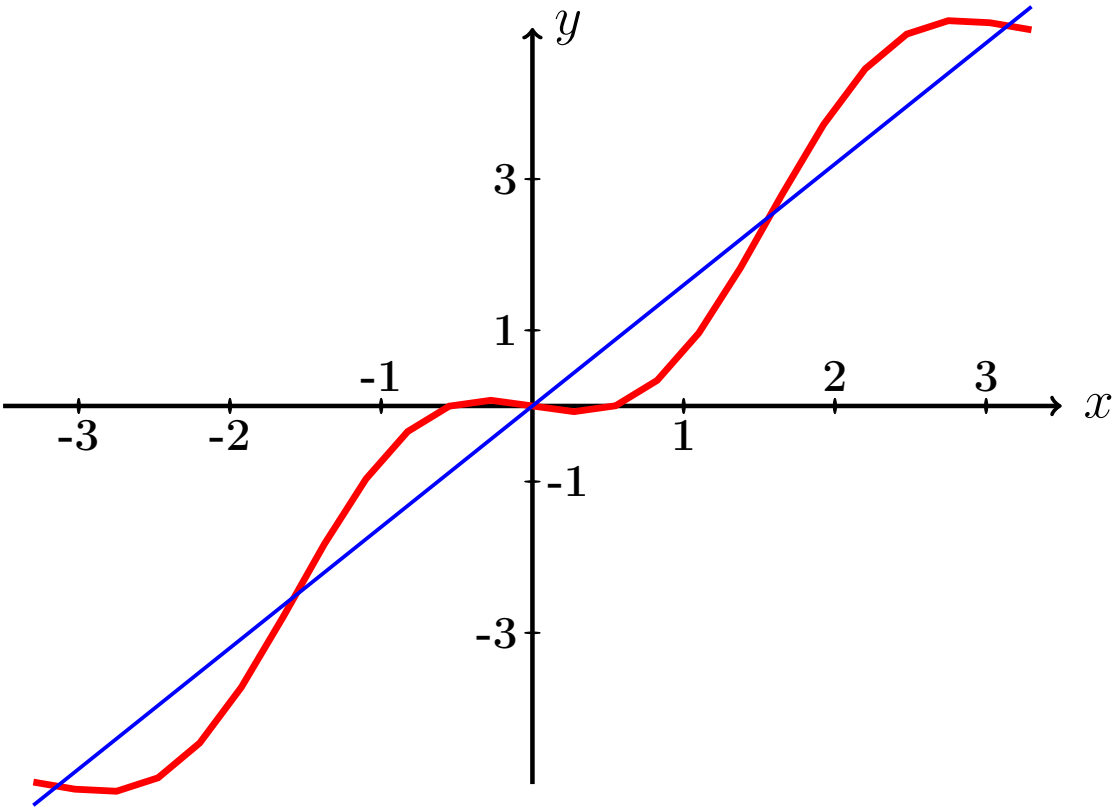


Рис.:

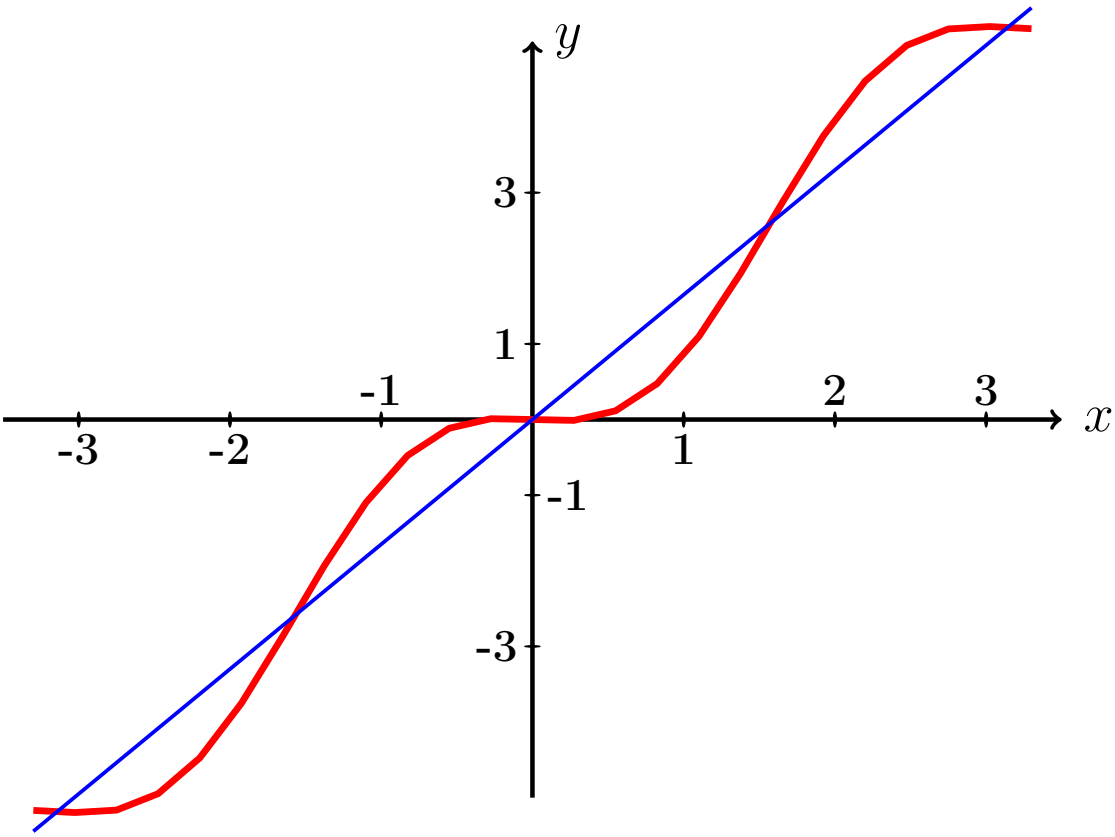


Рис.:

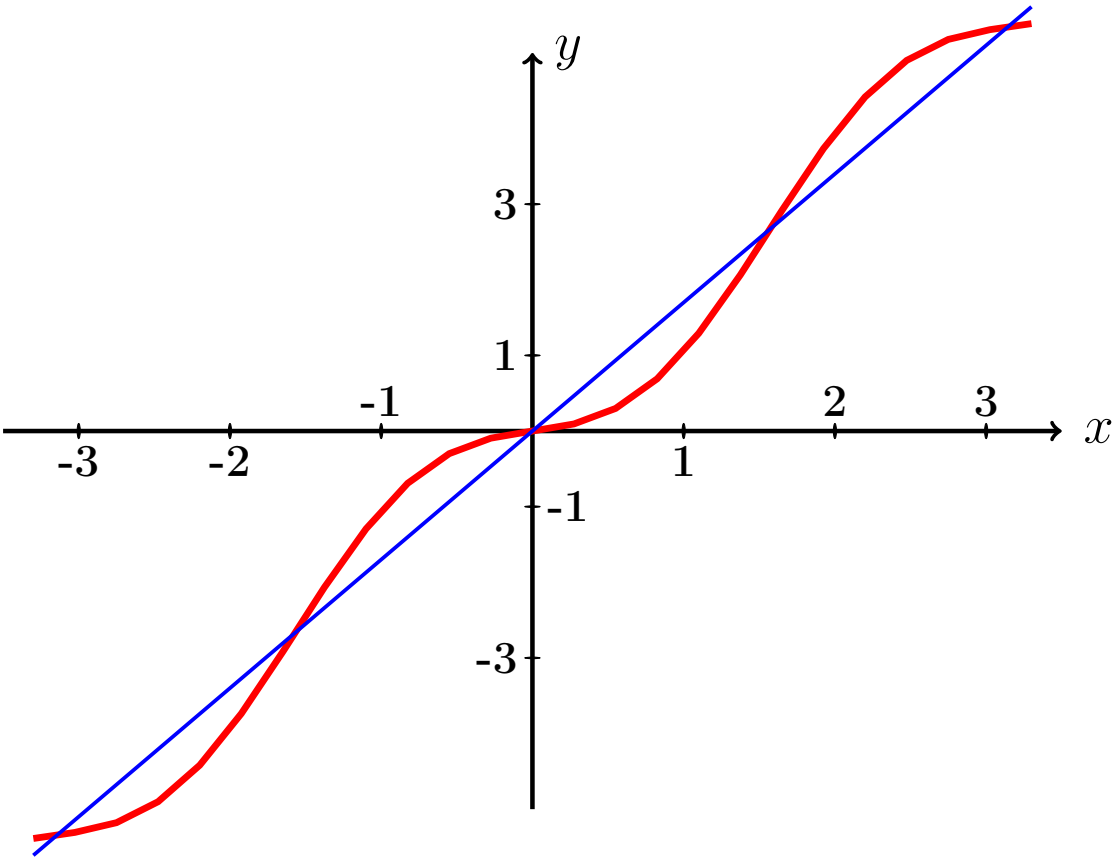


Рис.:

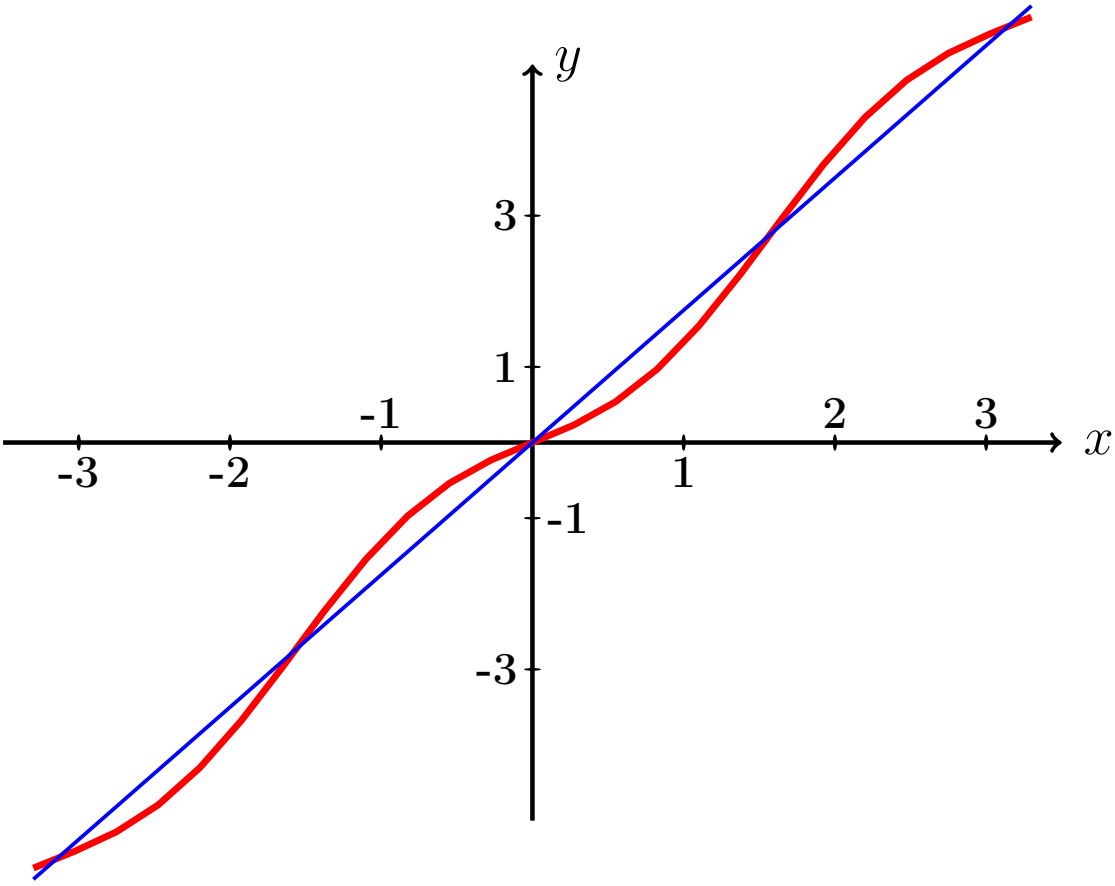


Рис.:

Пример П4, анимация возврат огл

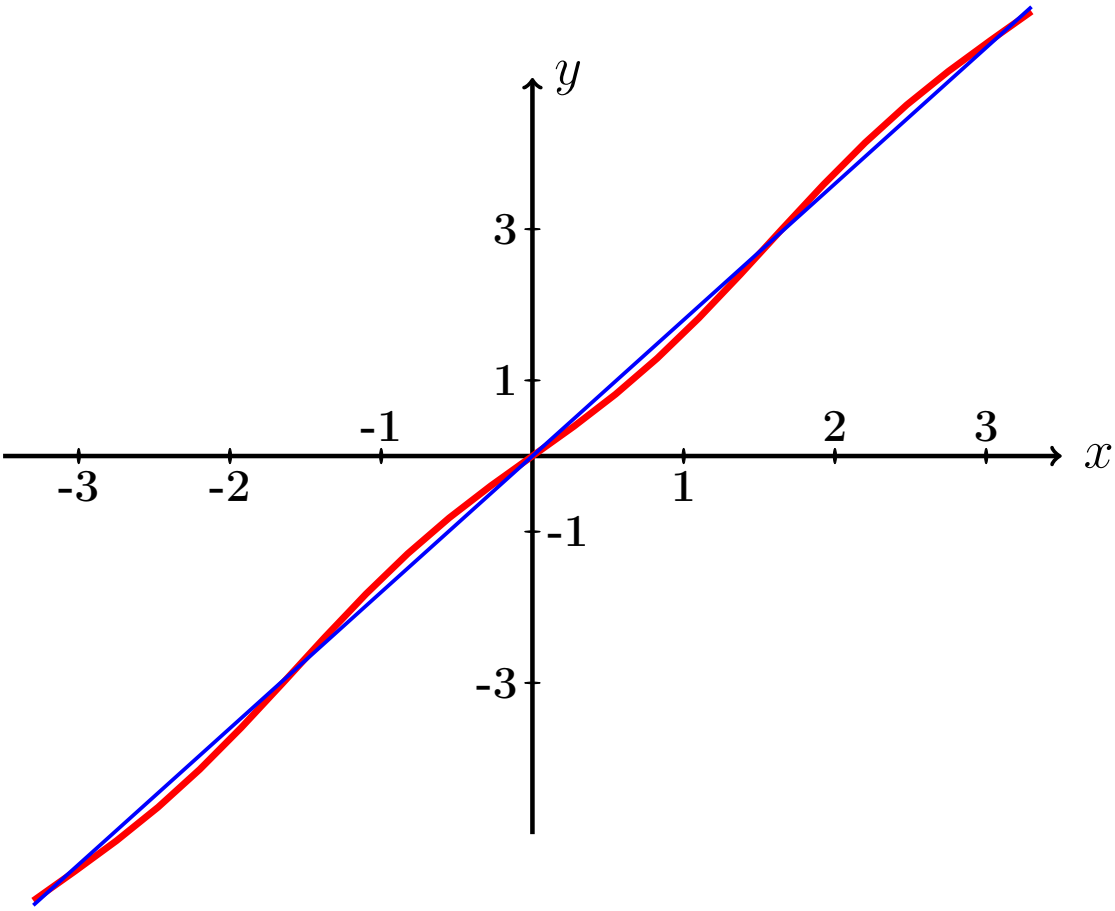


Рис.:

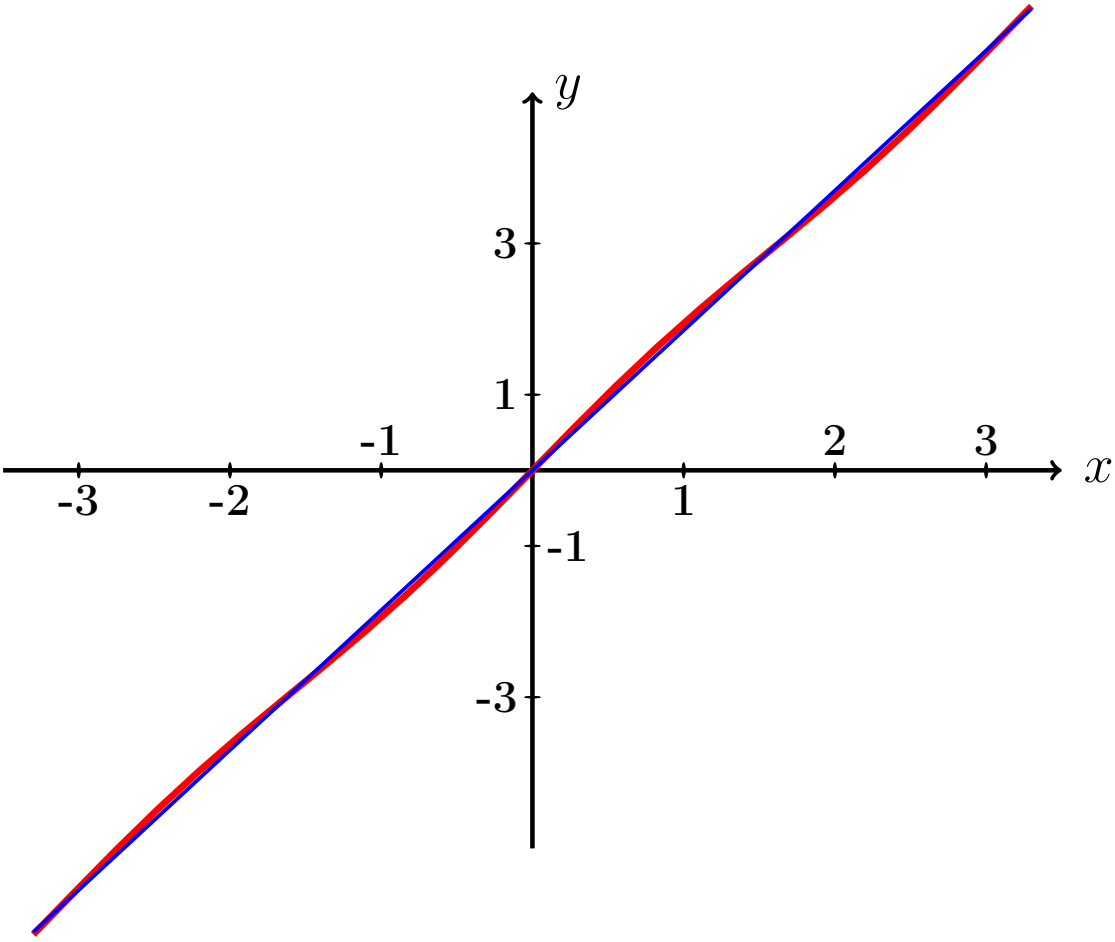


Рис.:

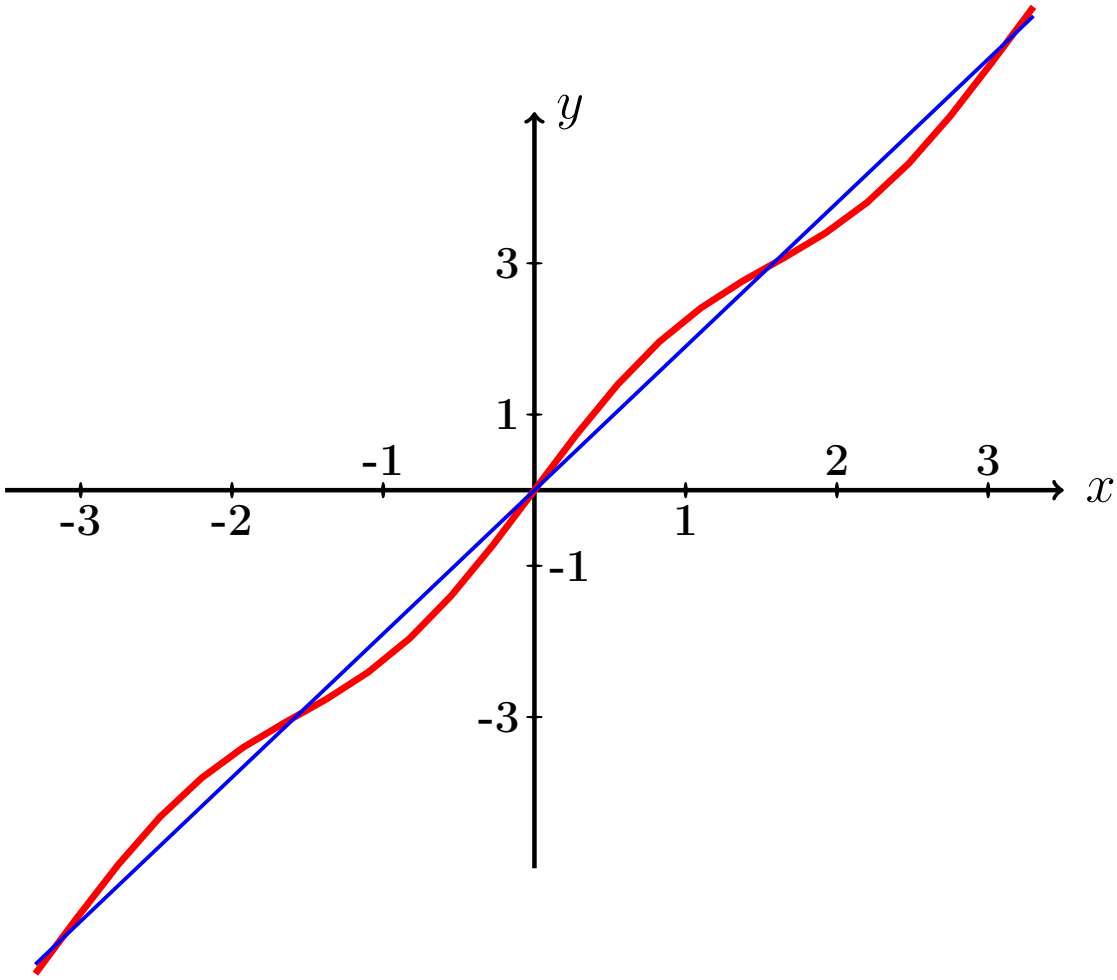


Рис.:

СМОТРИ СЛЕДУЮЩИЙ СЛАЙД

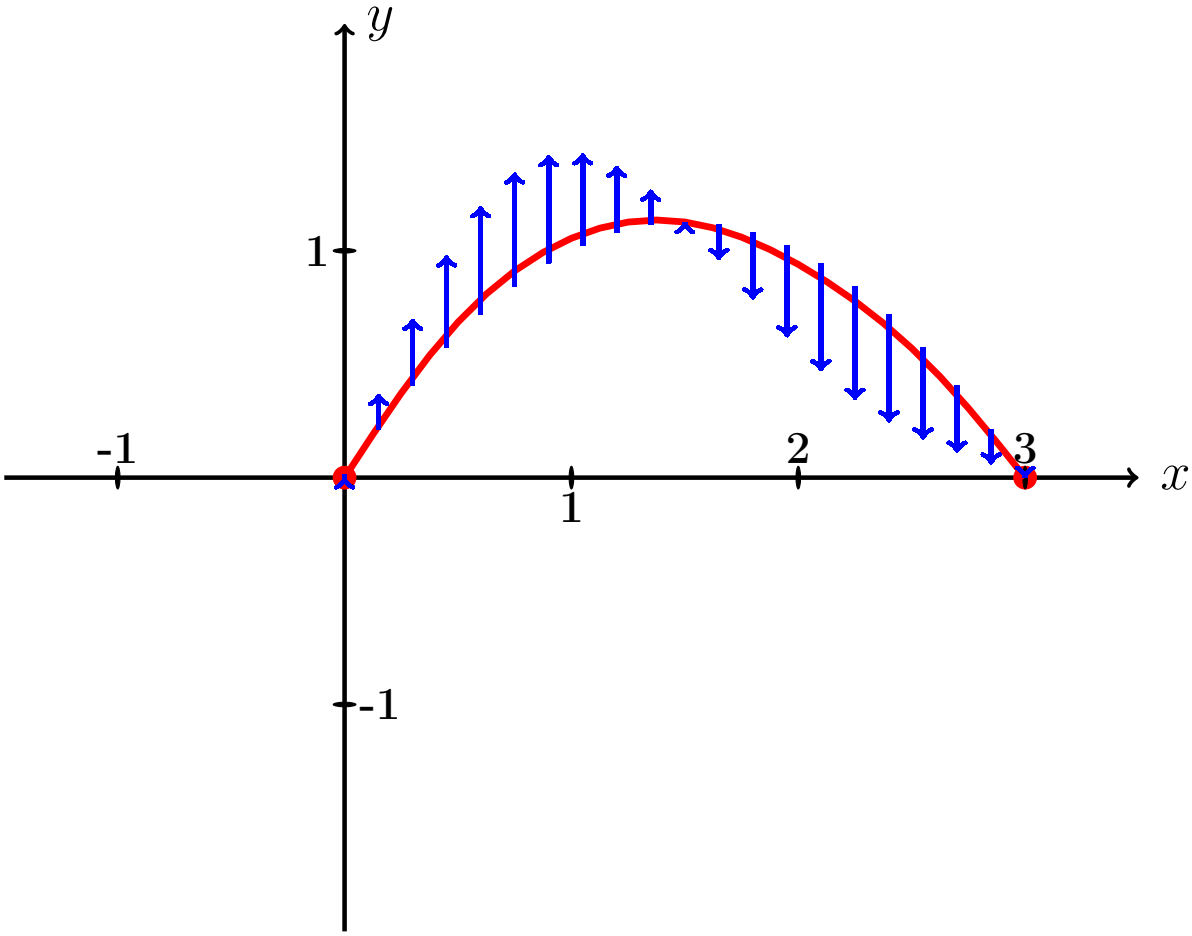


Рис.: Стрелки показывают начальный импульс скоростей согласно начальному условию $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\sin\frac{2\pi}{3}x$

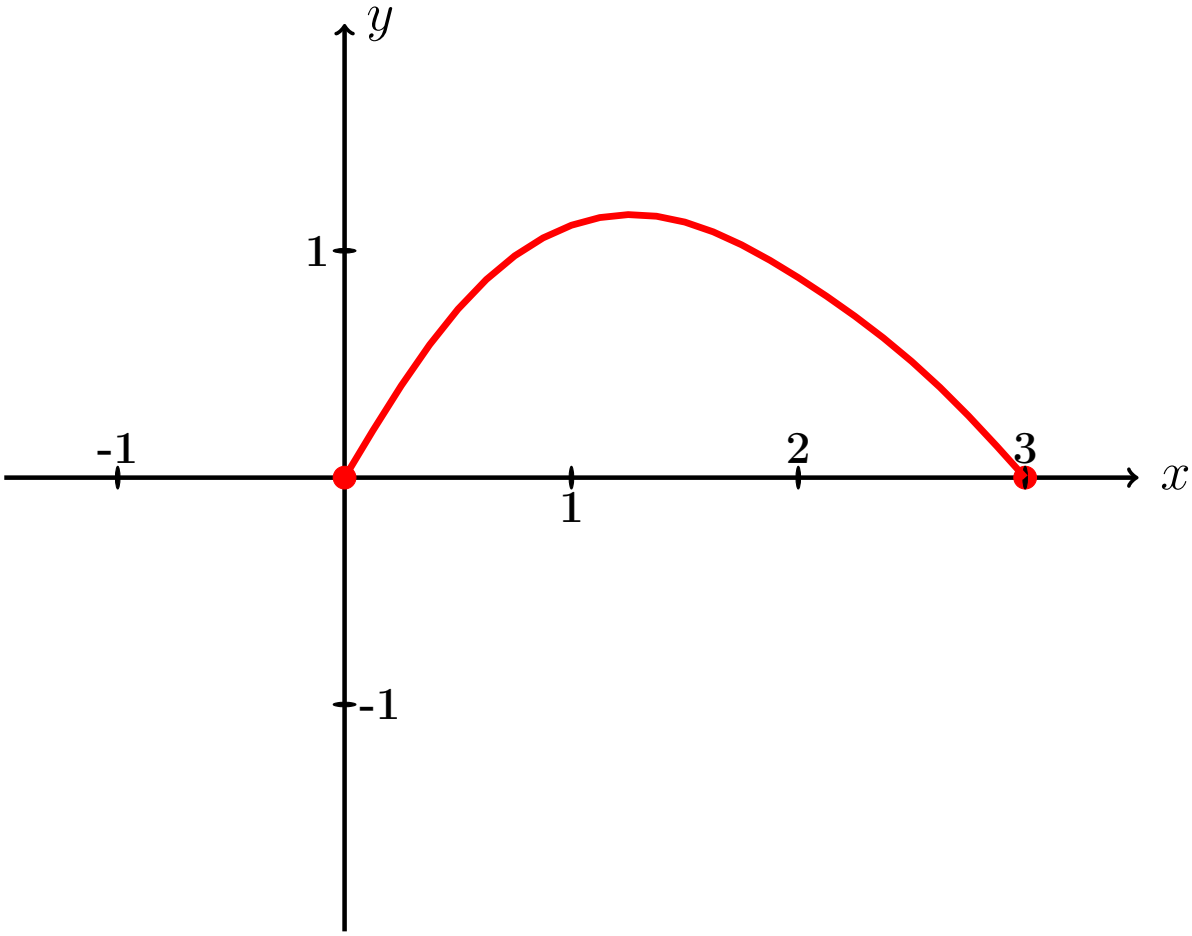


Рис.:

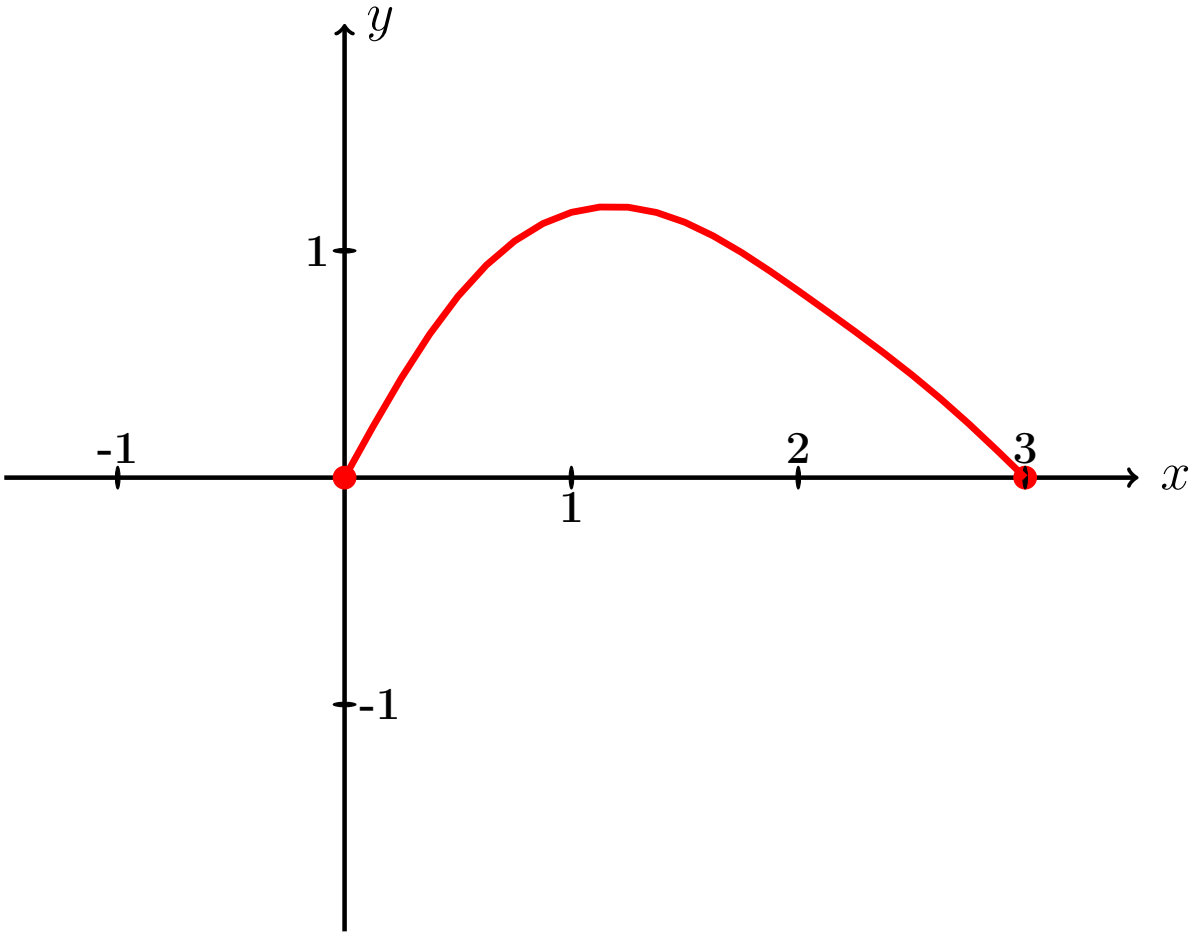


Рис.:

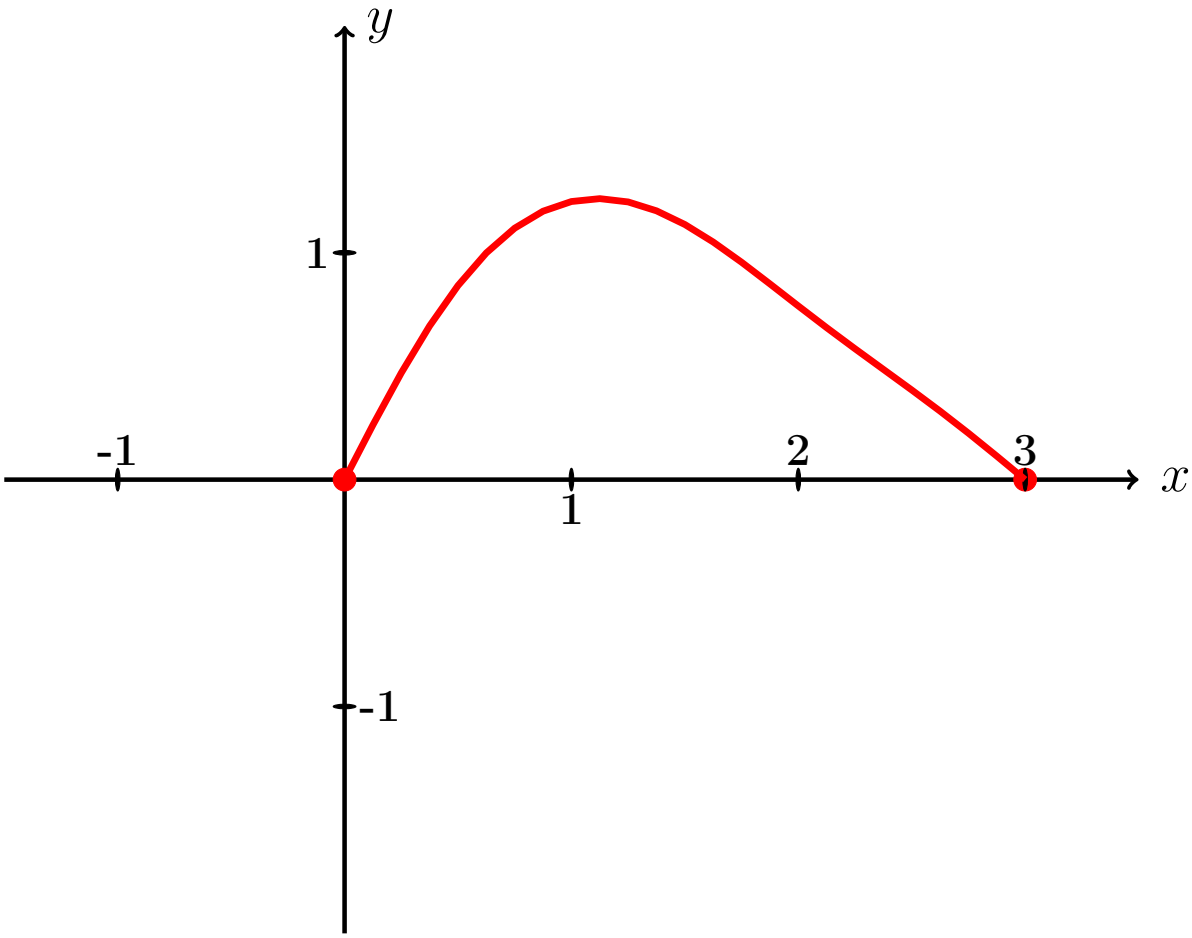


Рис.:

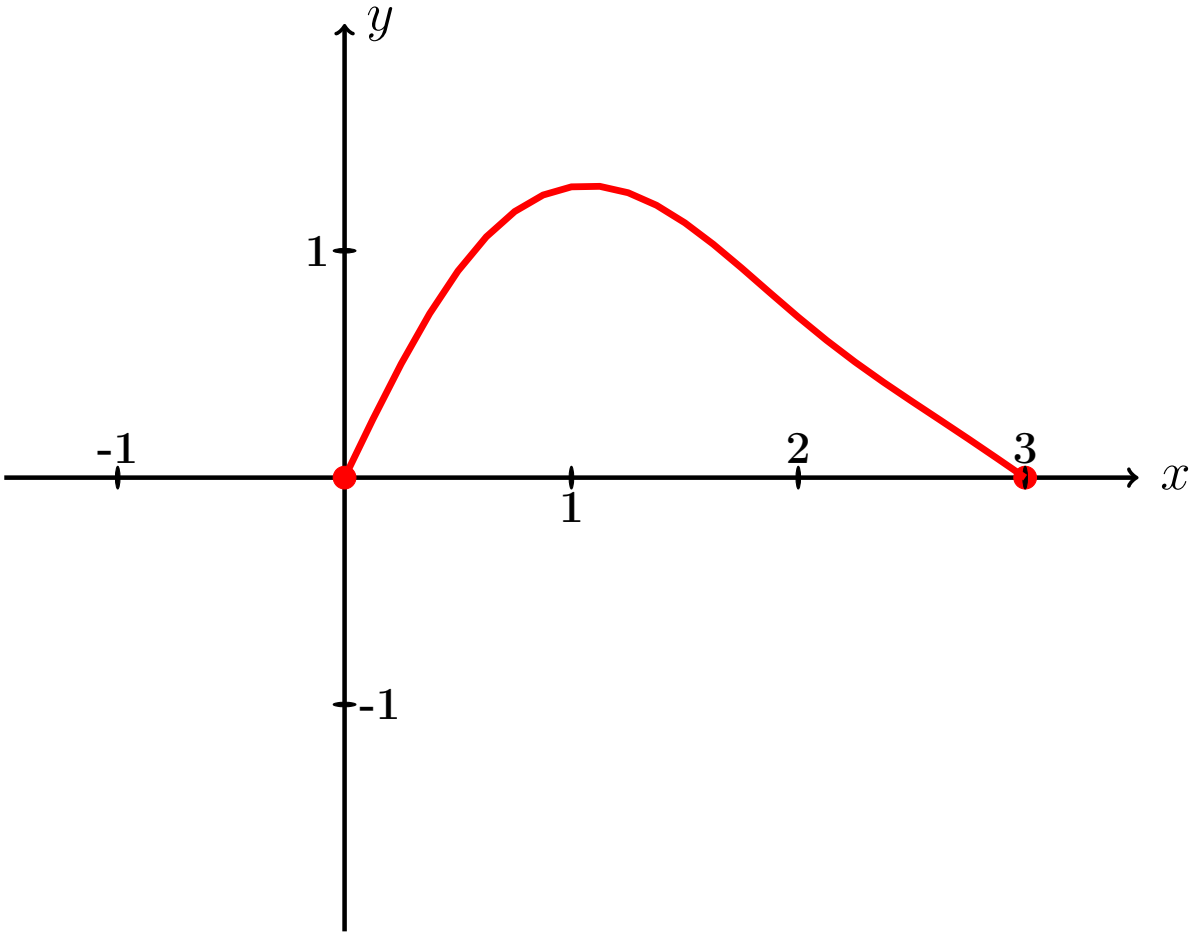


Рис.:

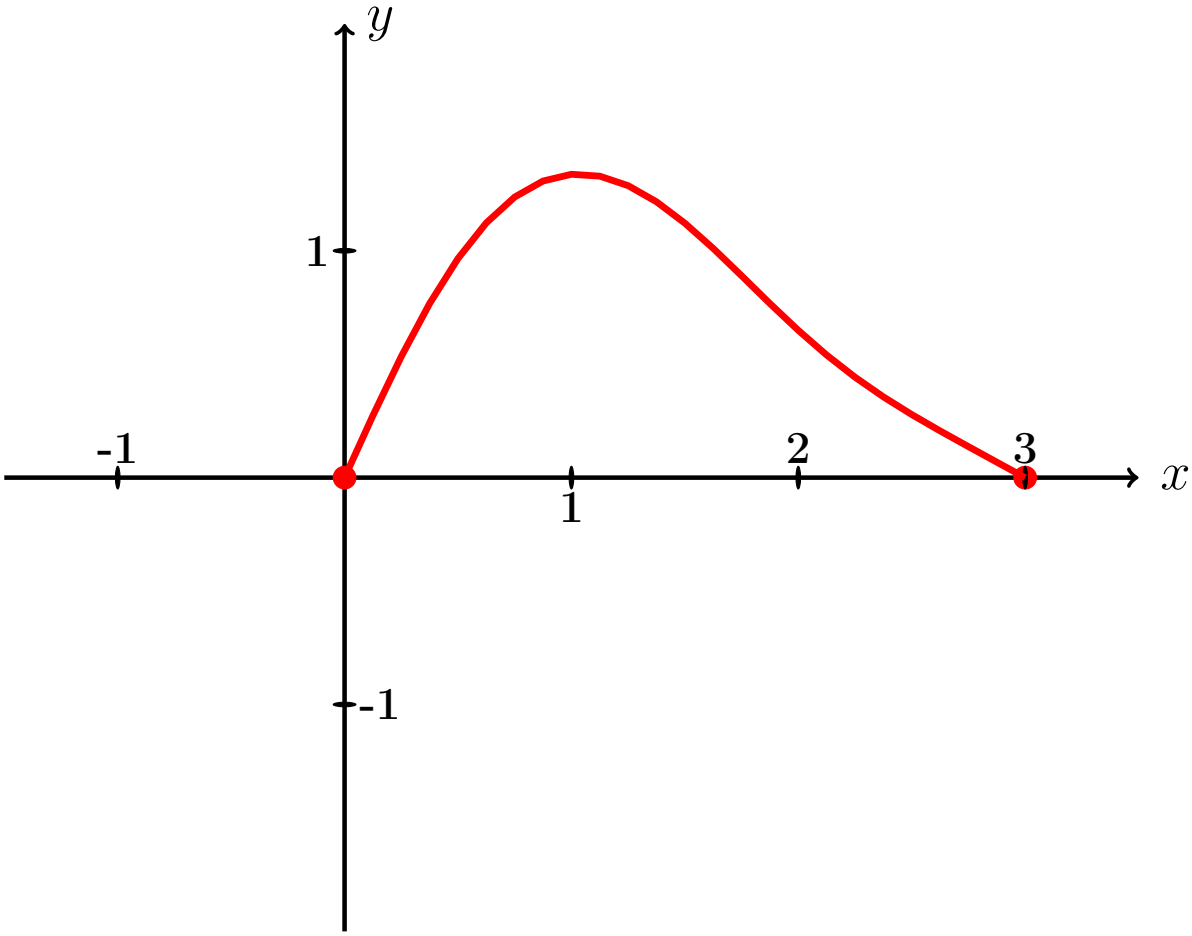


Рис.:

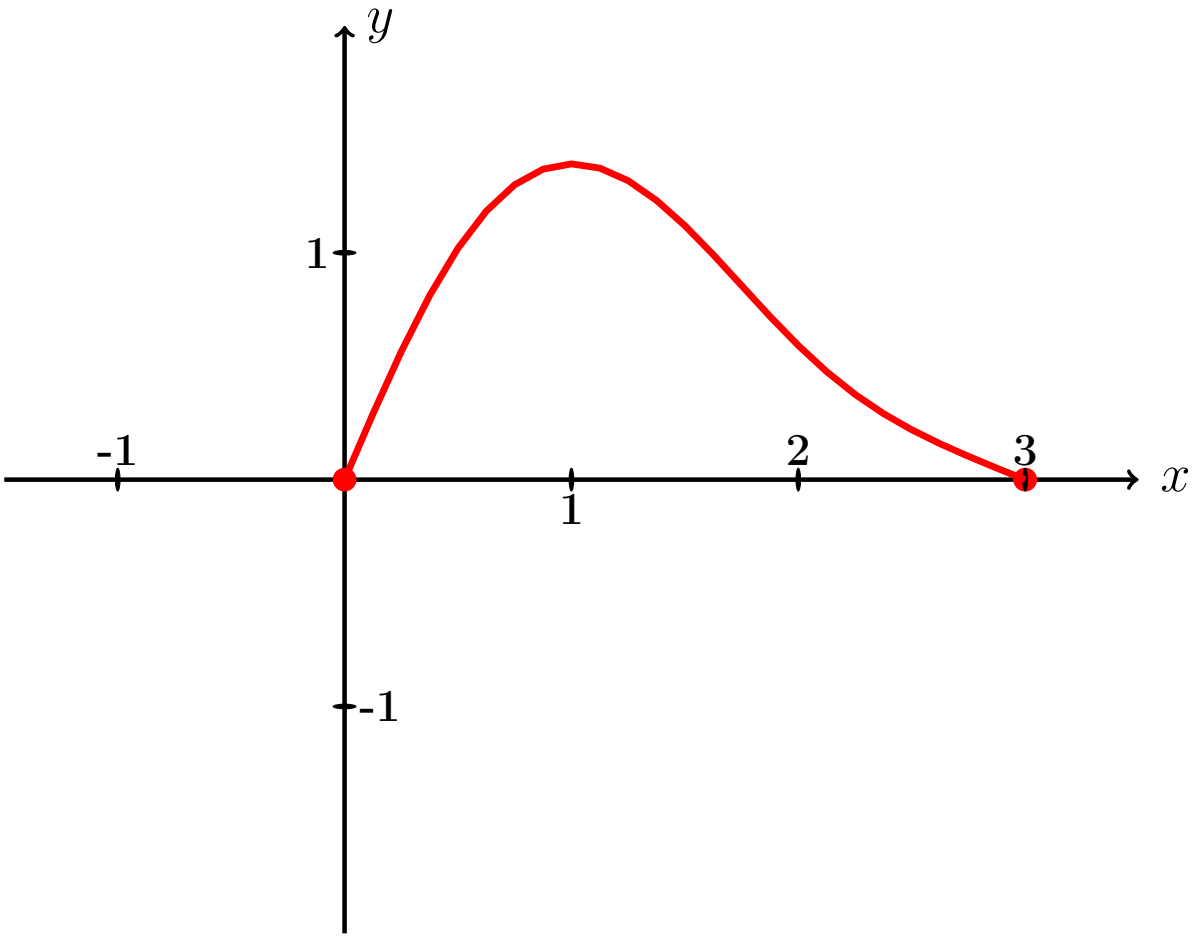


Рис.:

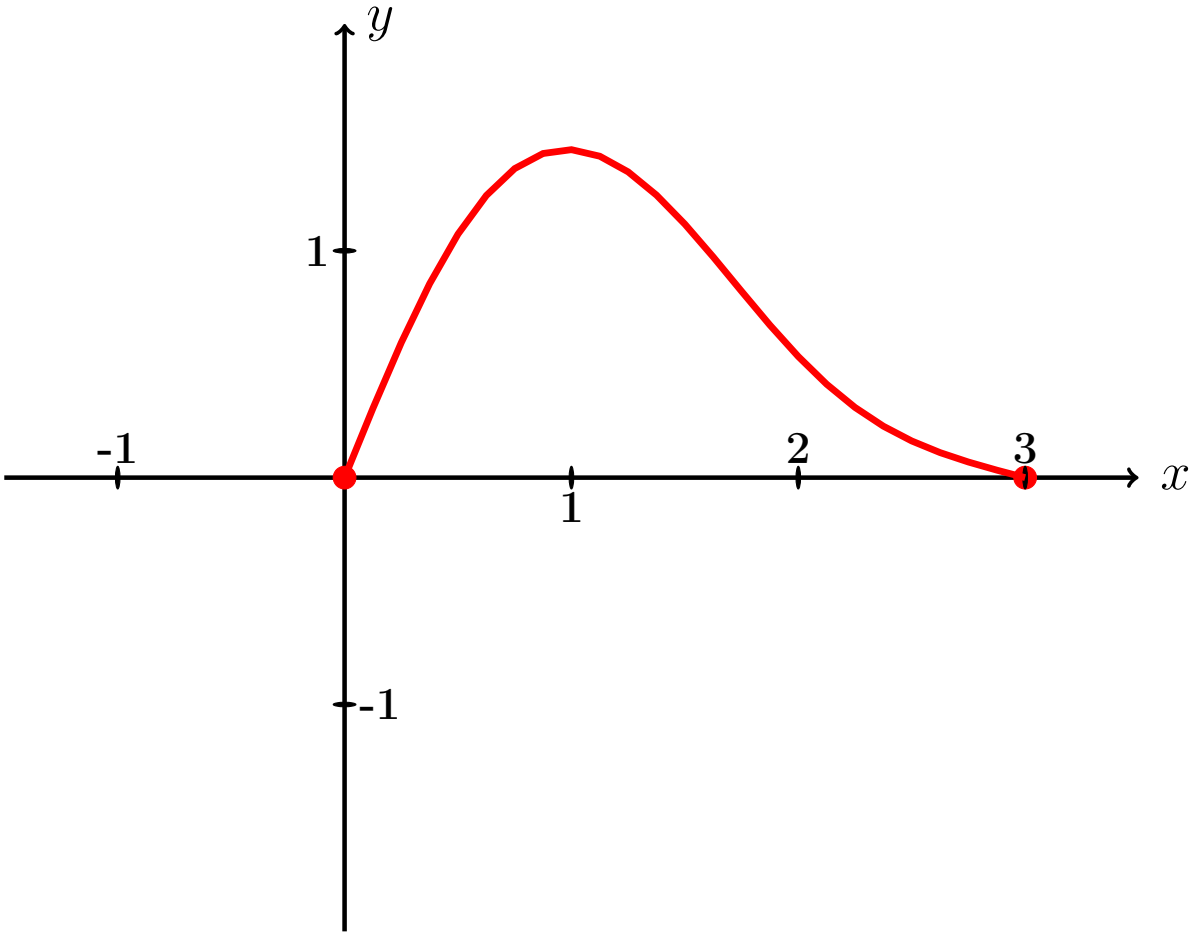


Рис.:

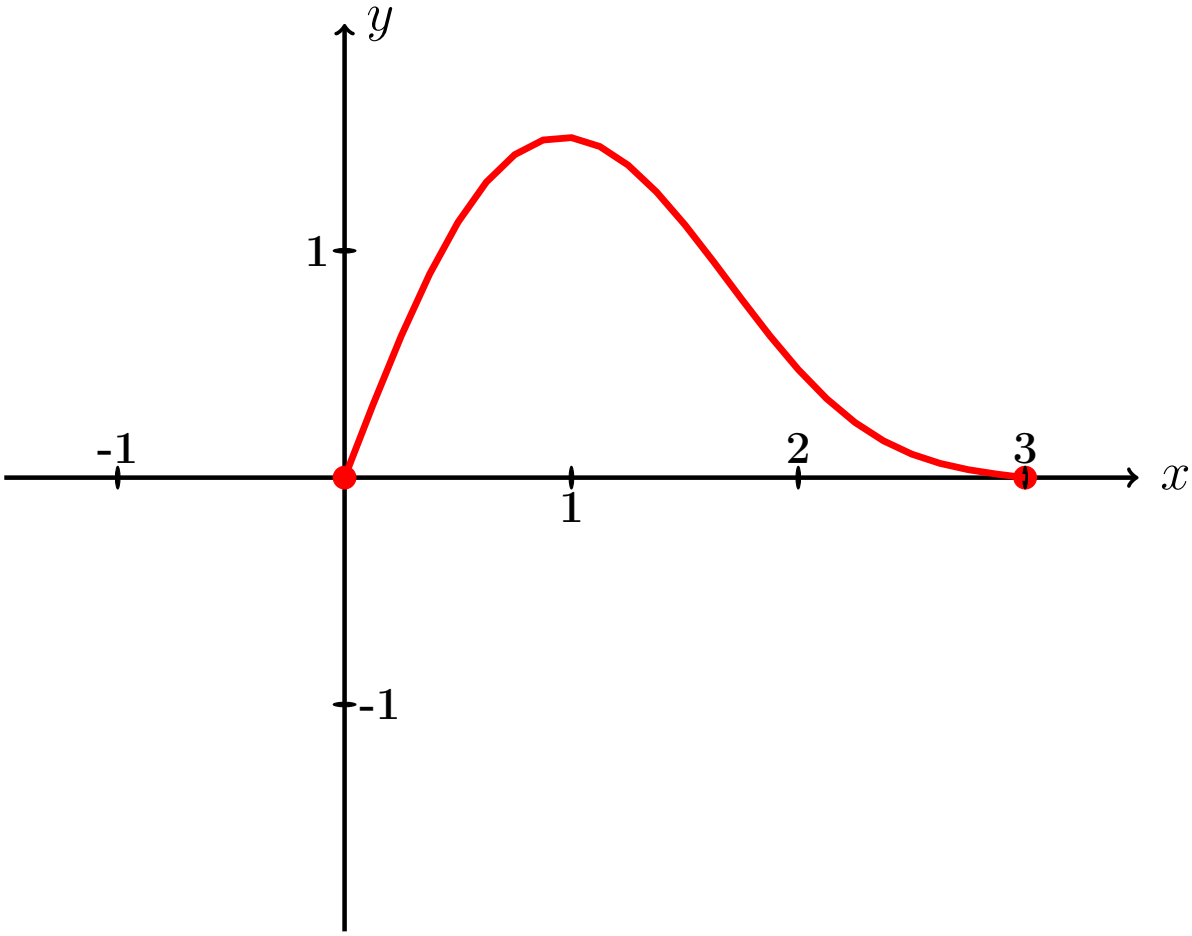


Рис.:

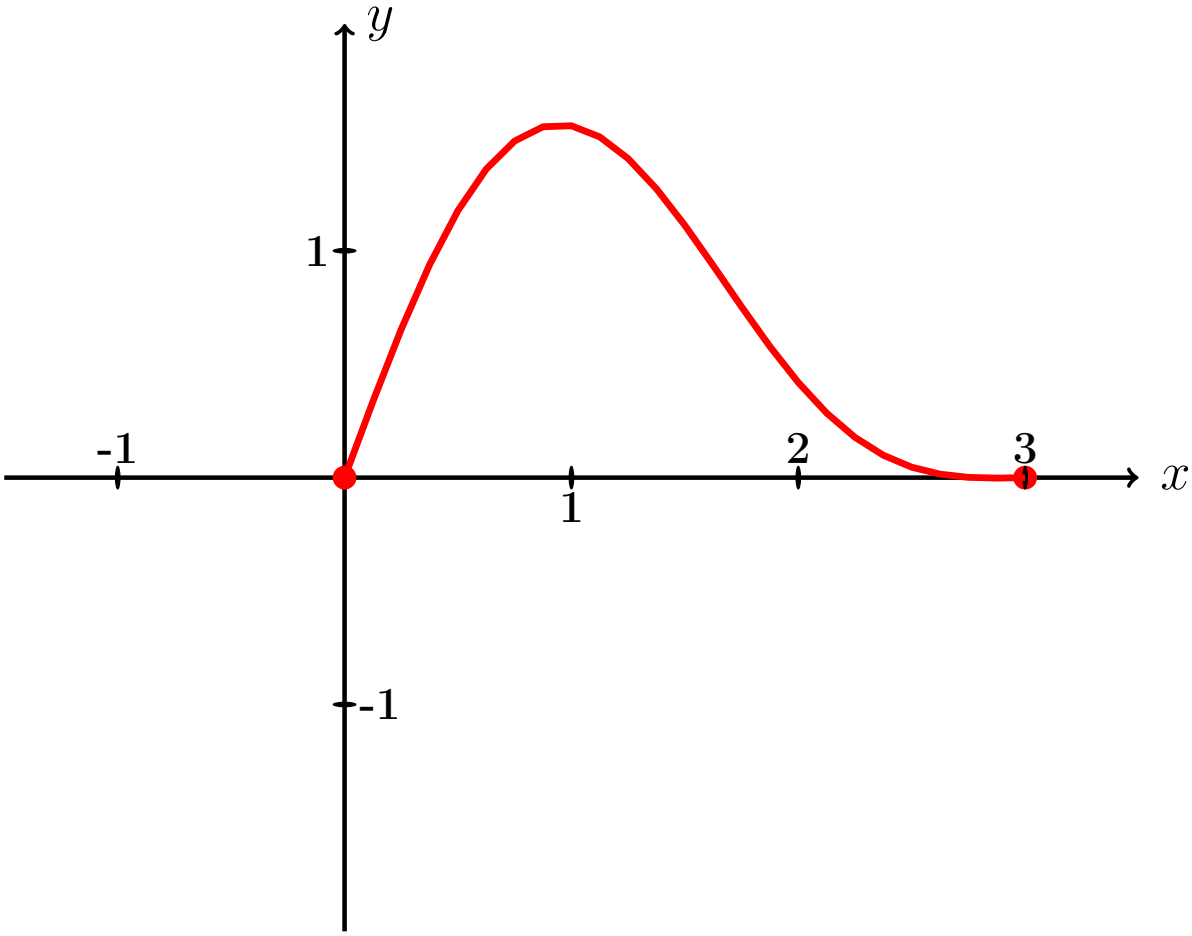


Рис.:

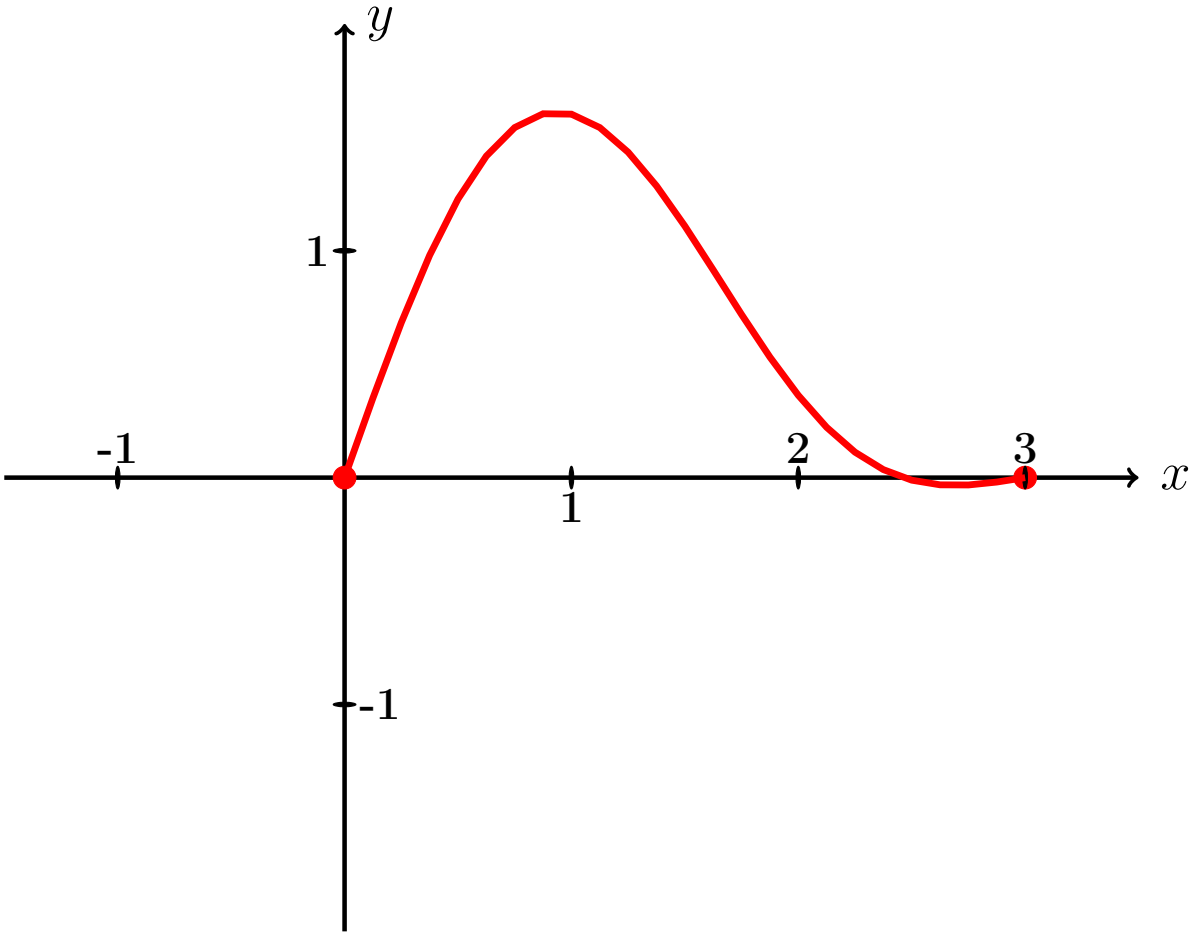


Рис.:

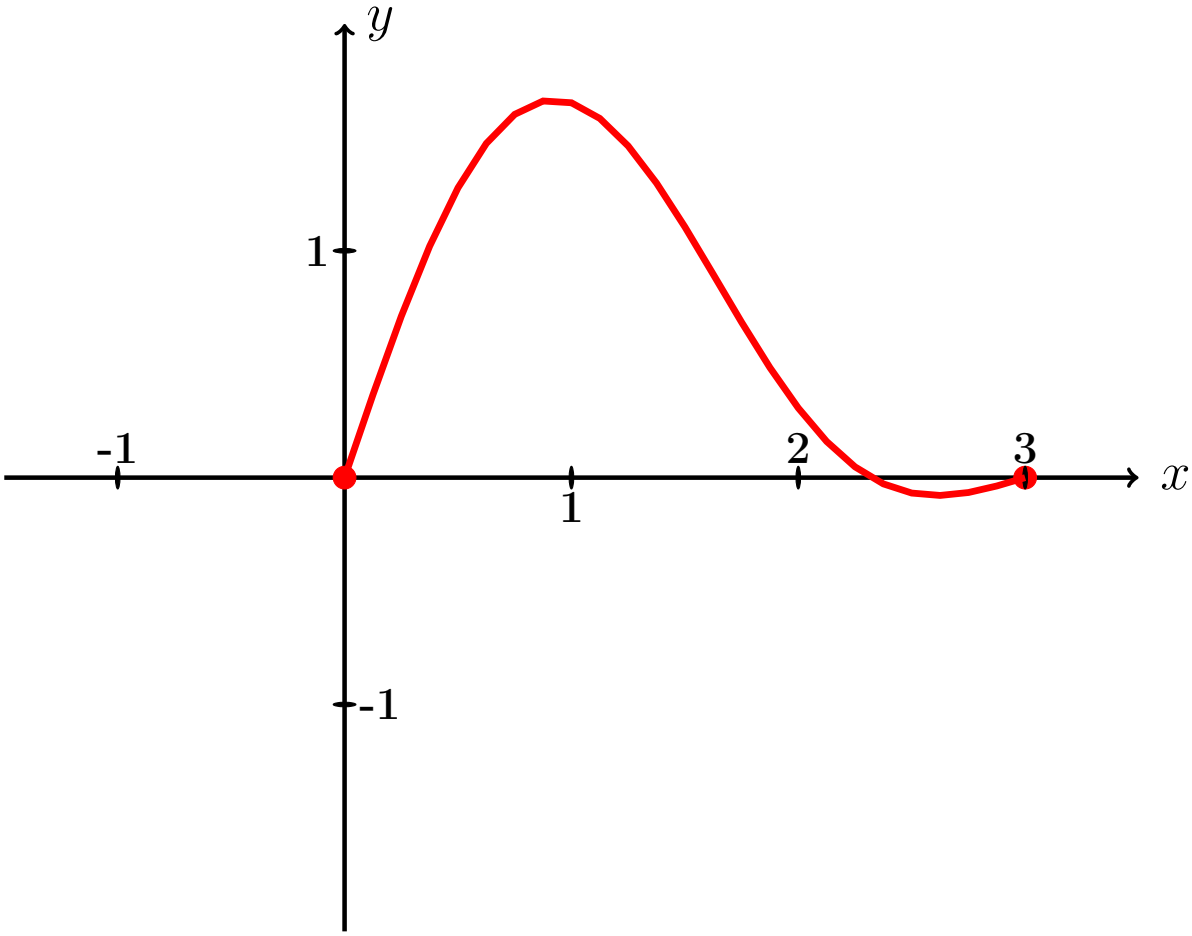


Рис.:

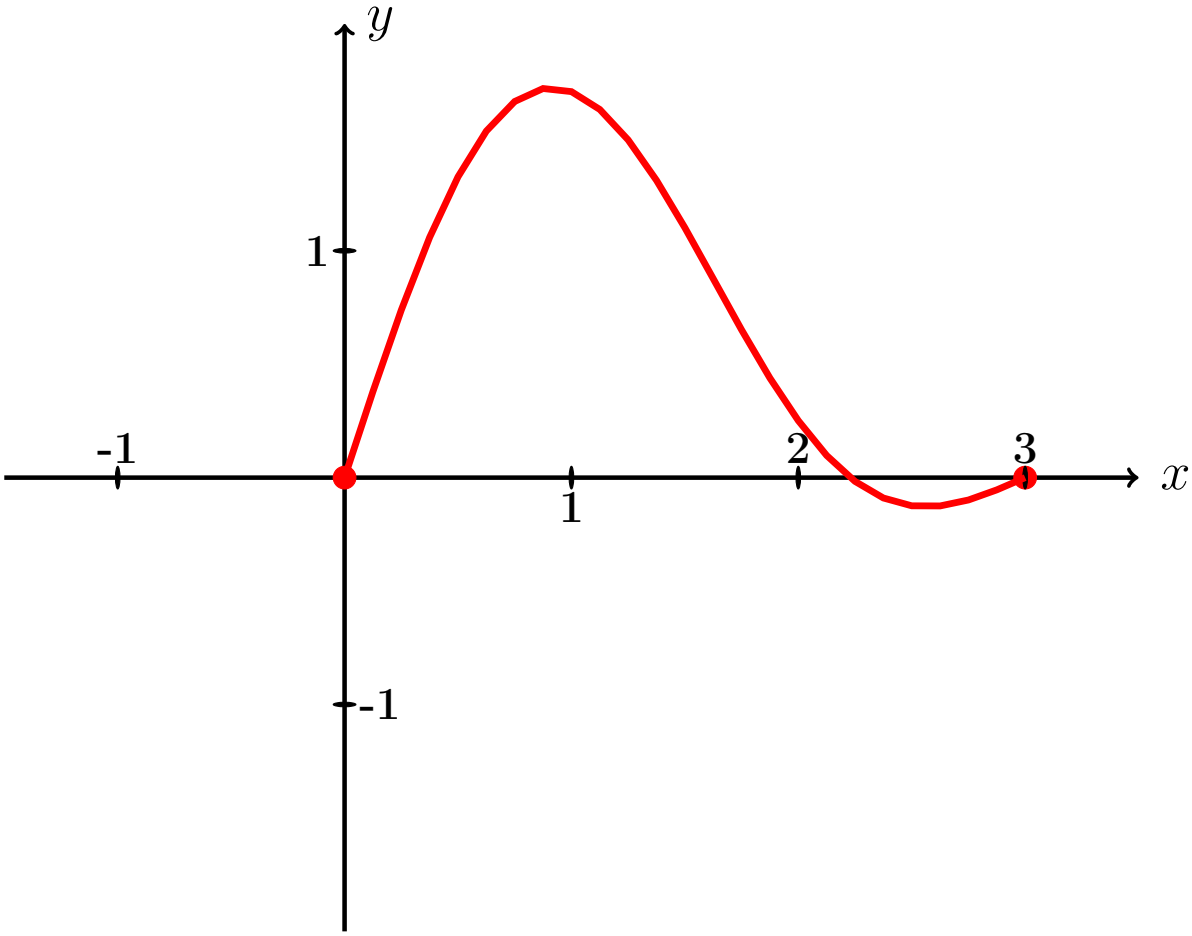


Рис.:

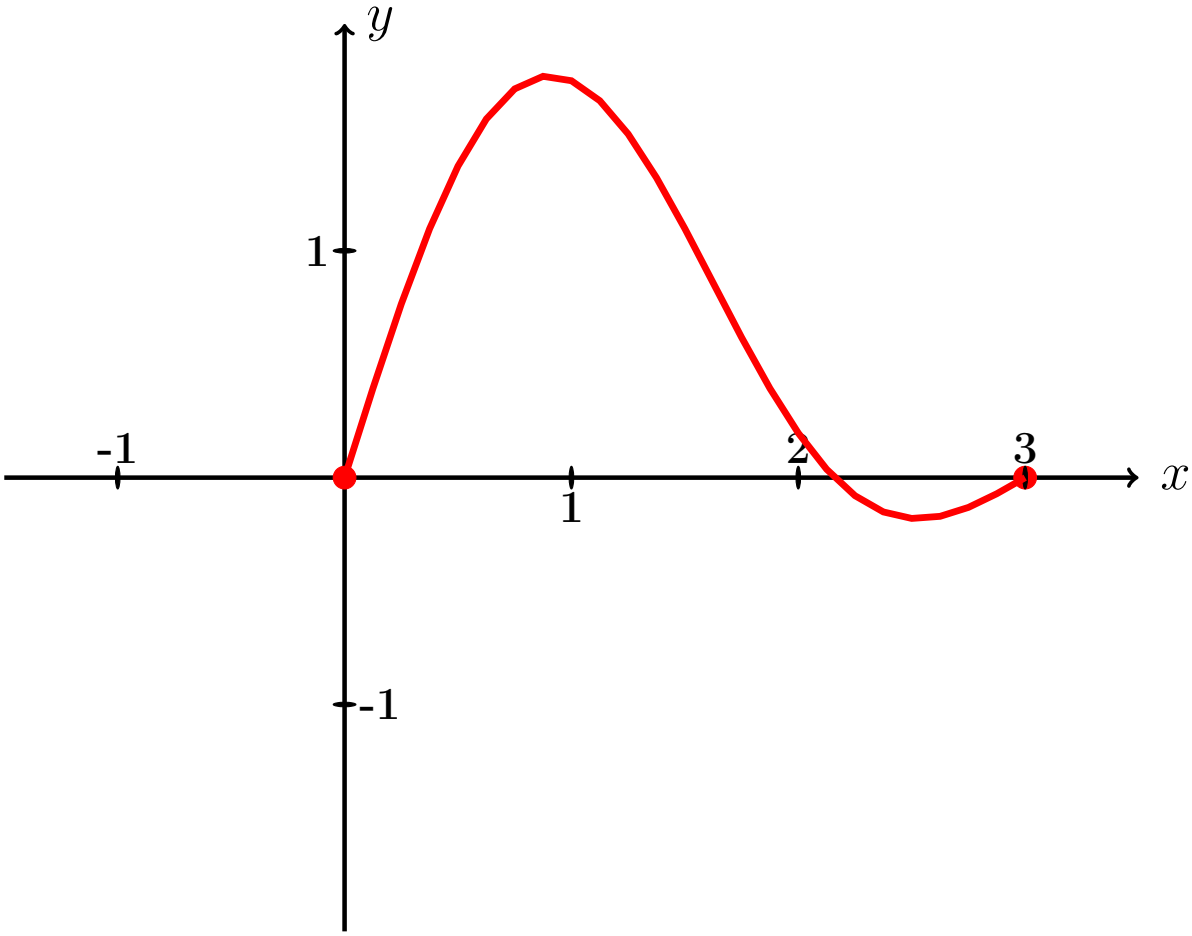


Рис.:

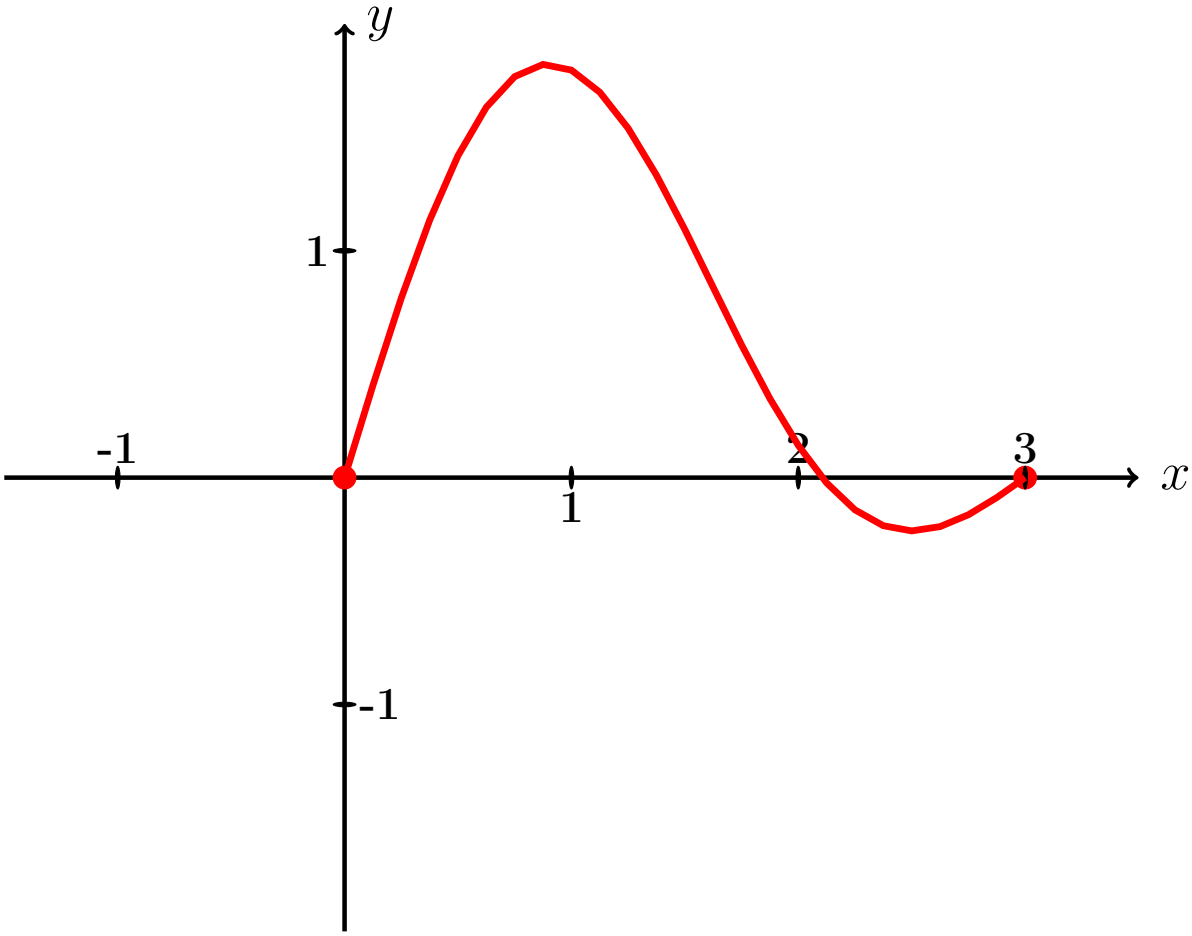


Рис.:

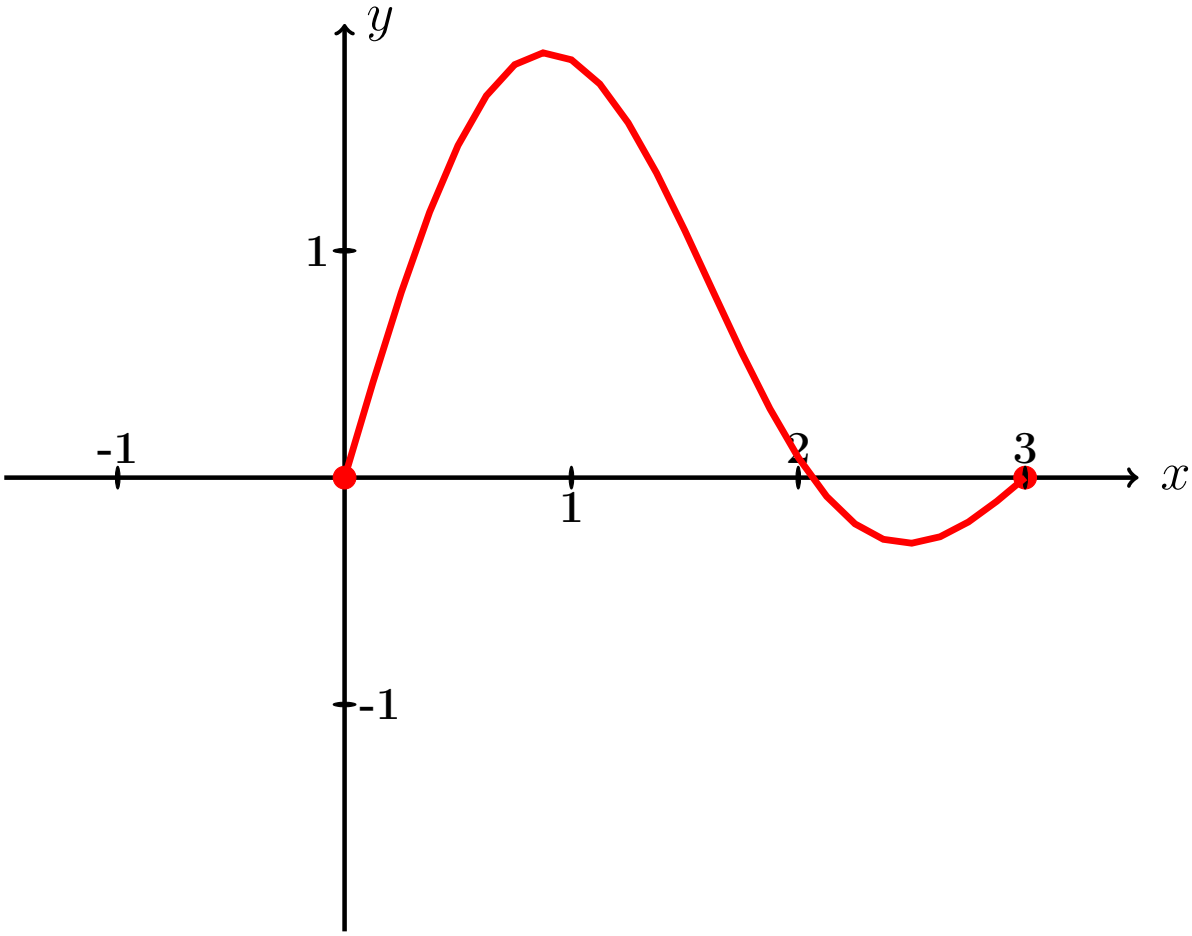


Рис.:

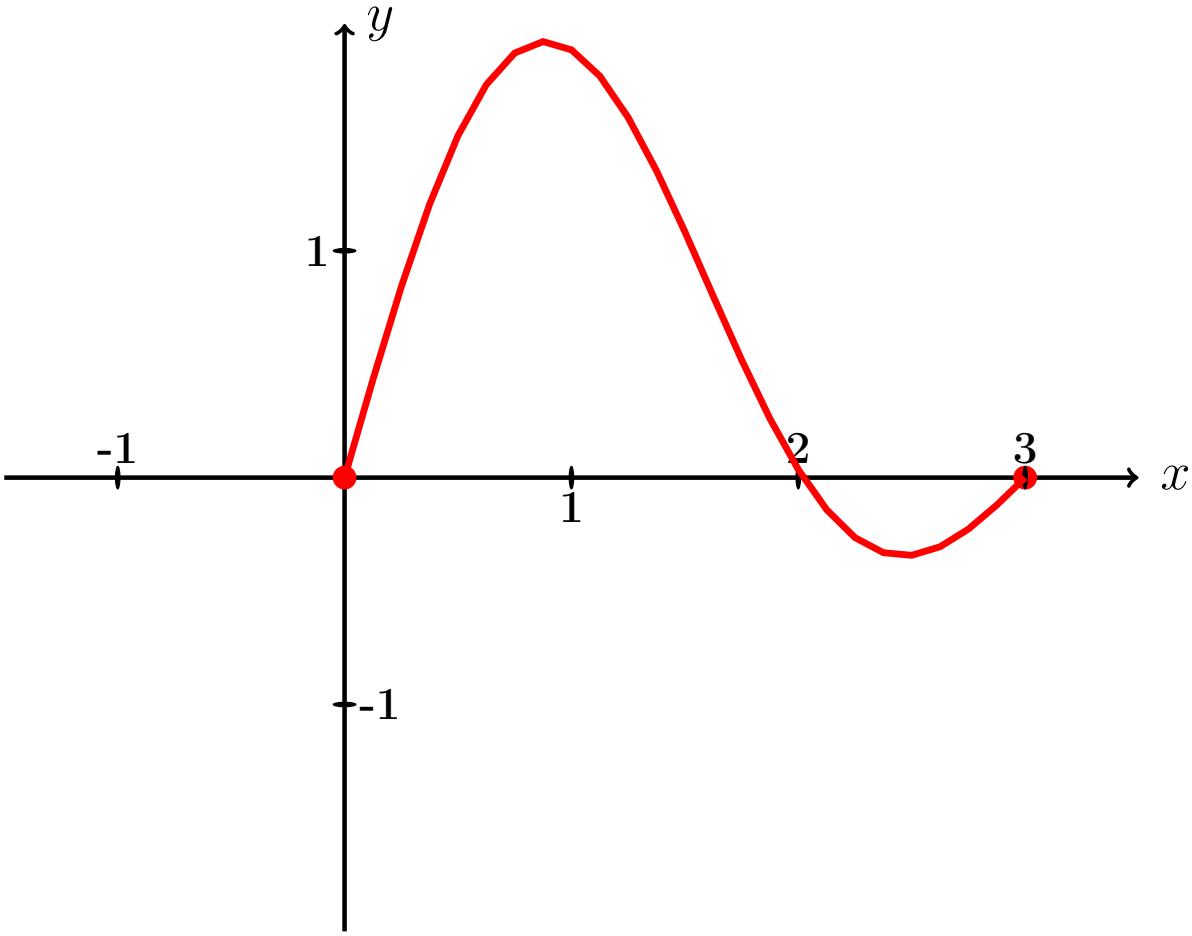


Рис.:

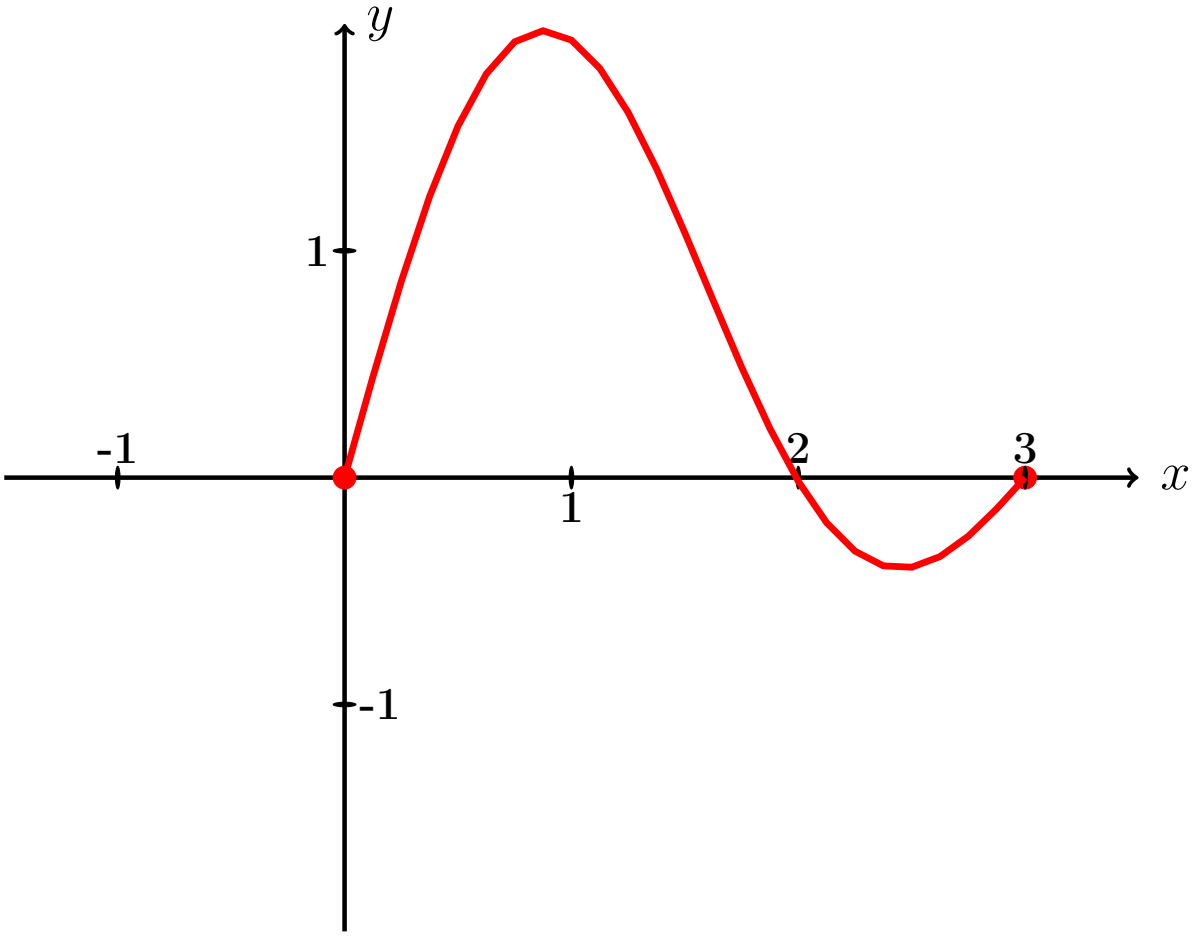


Рис.:

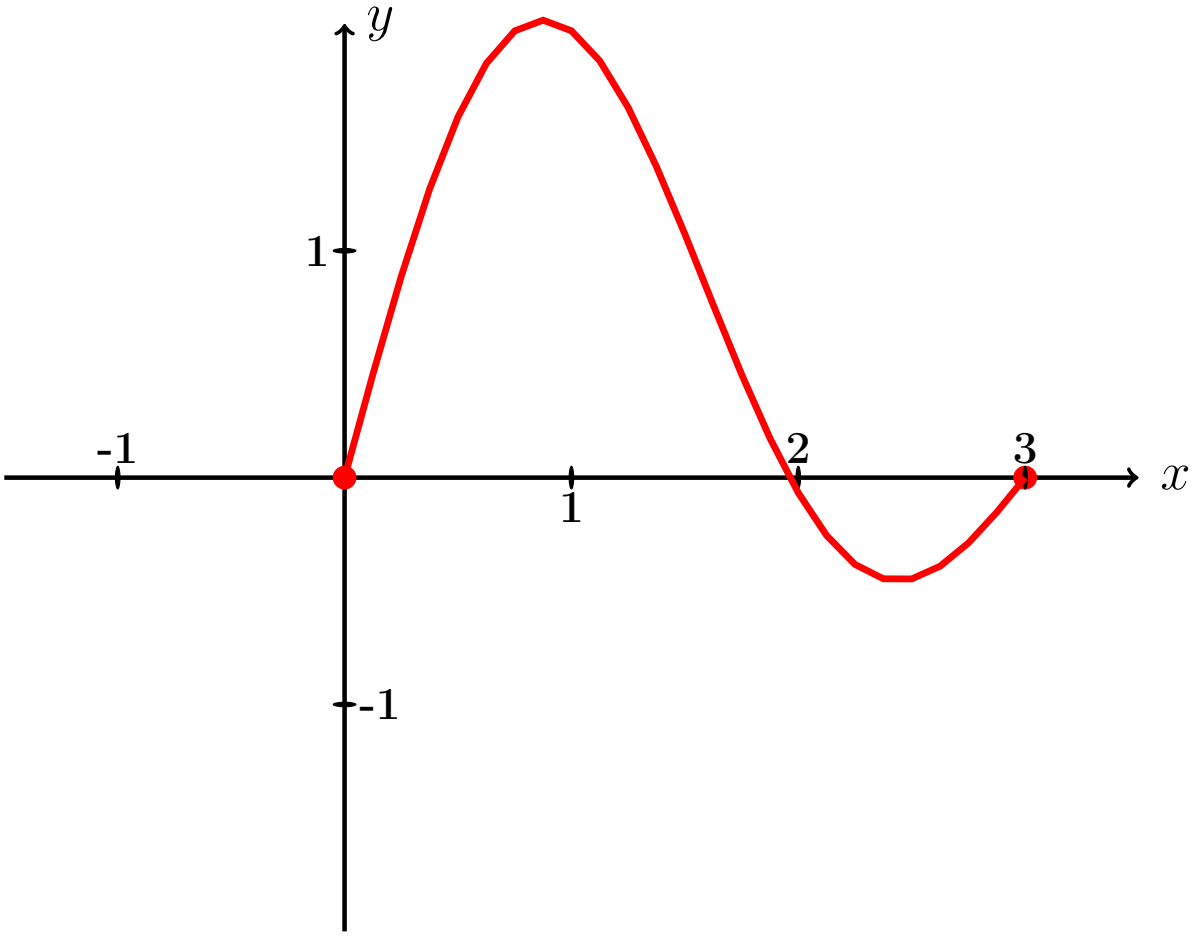


Рис.:

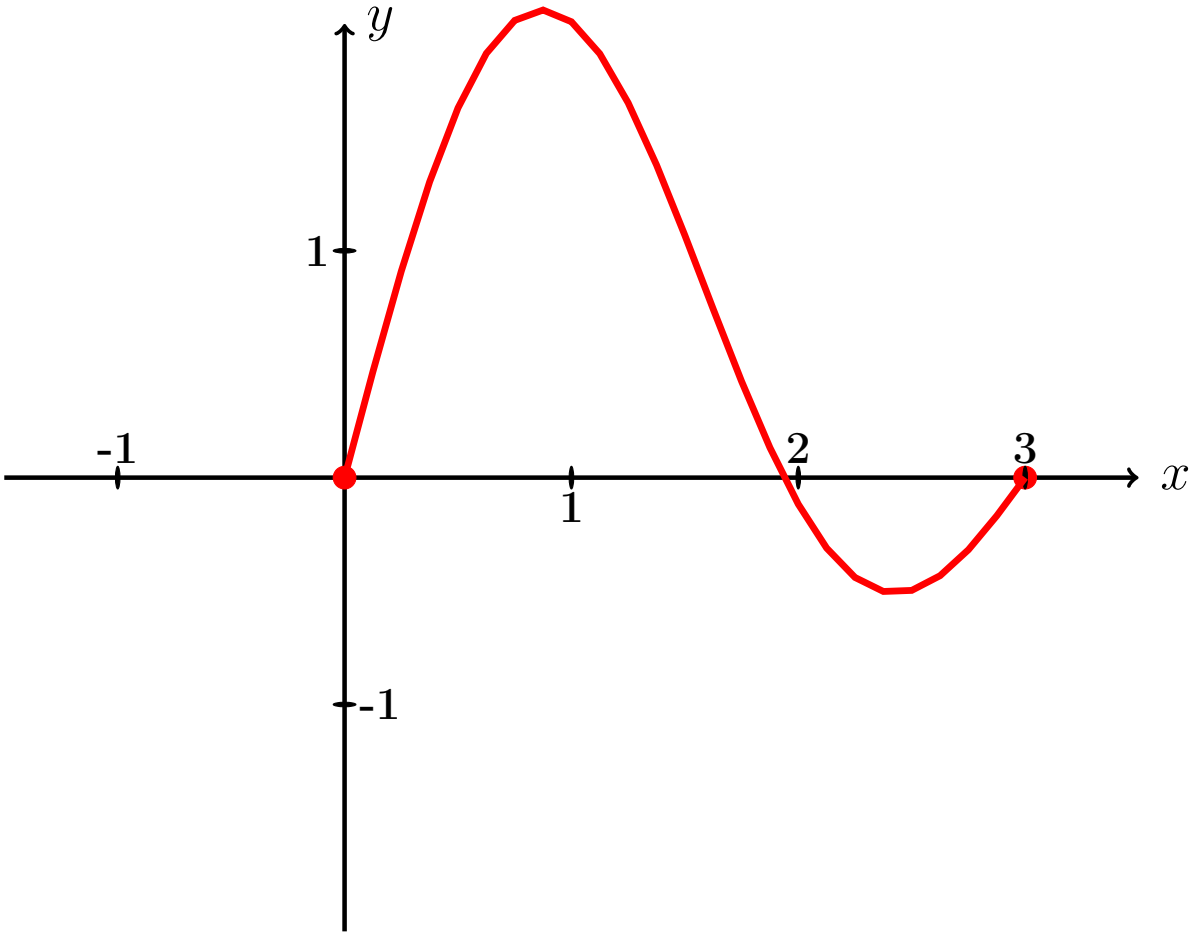


Рис.:

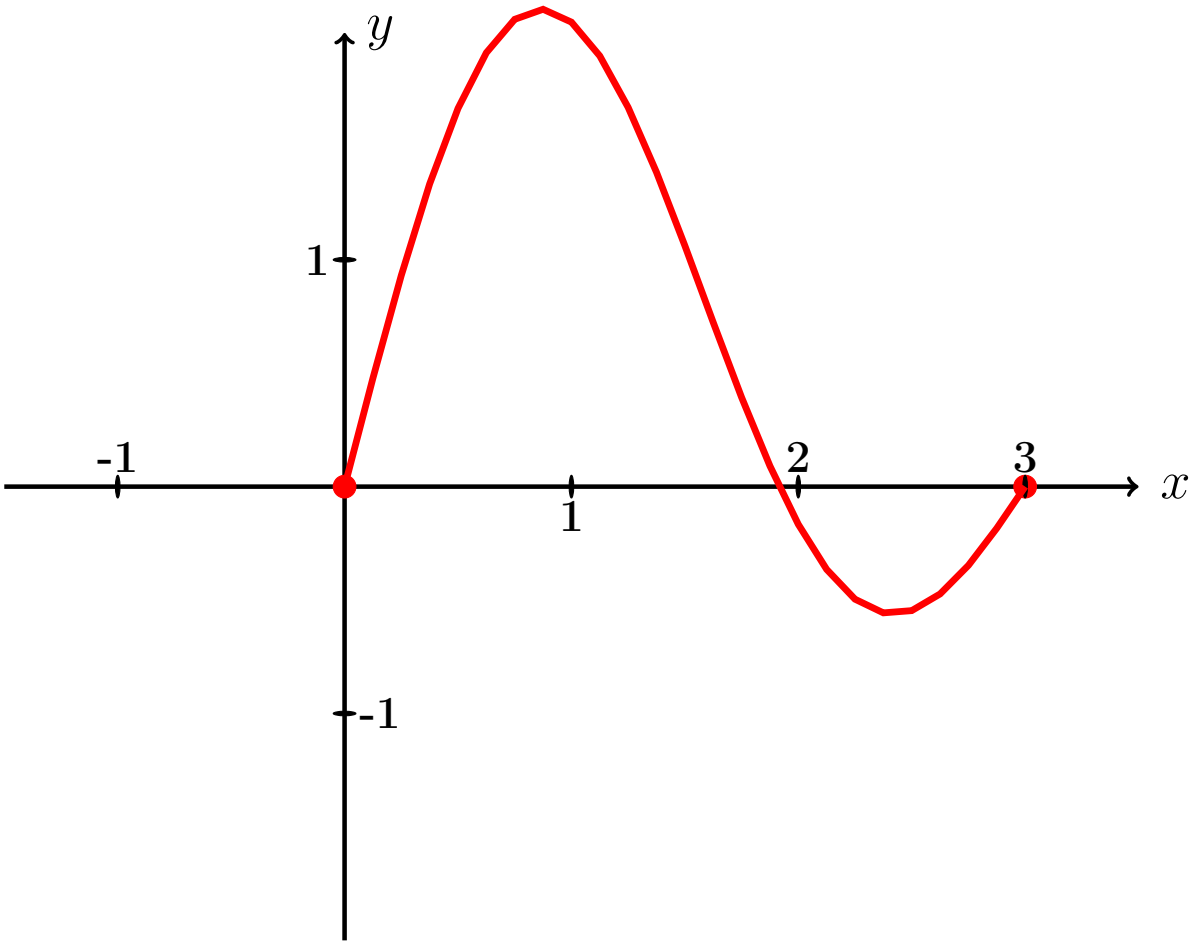


Рис.:

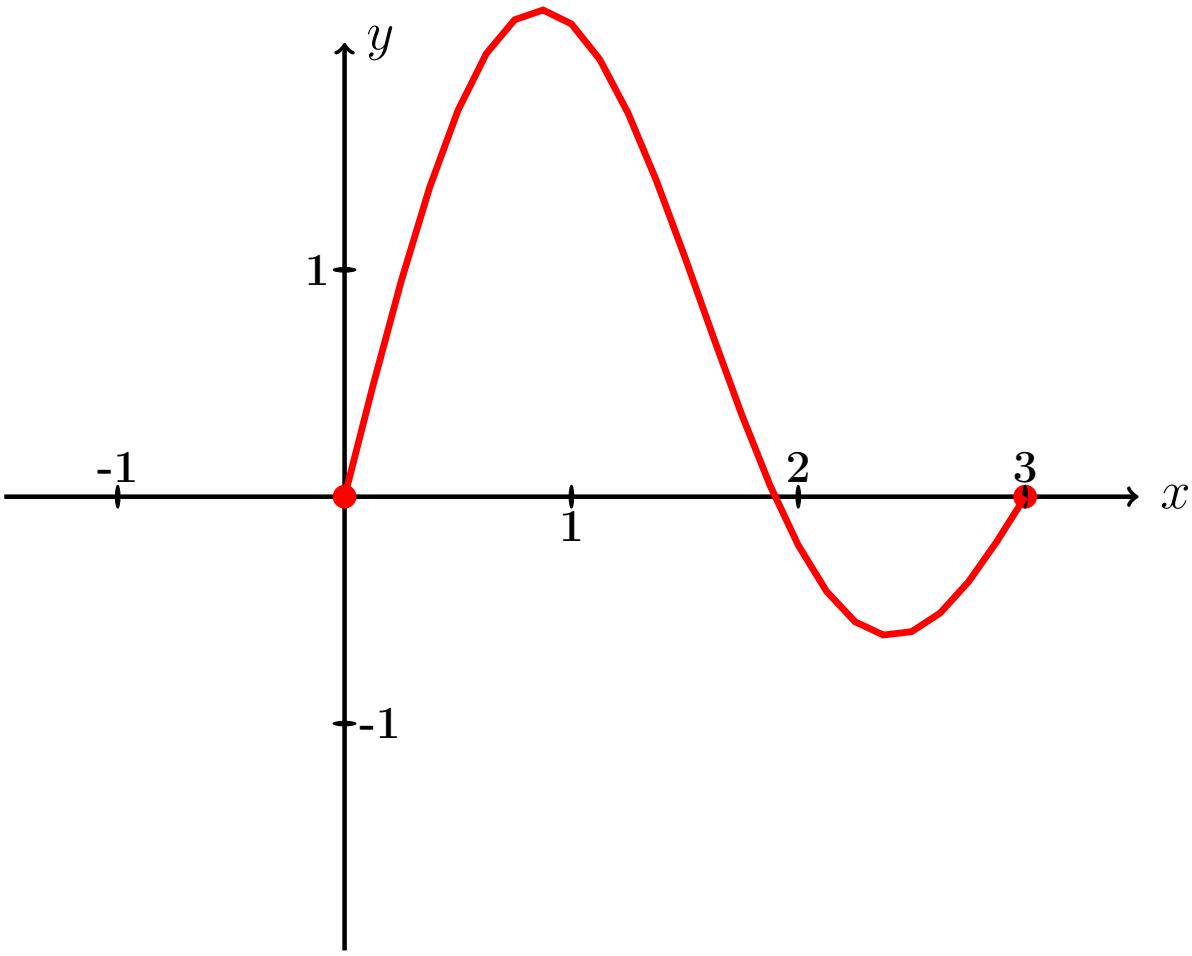


Рис.:

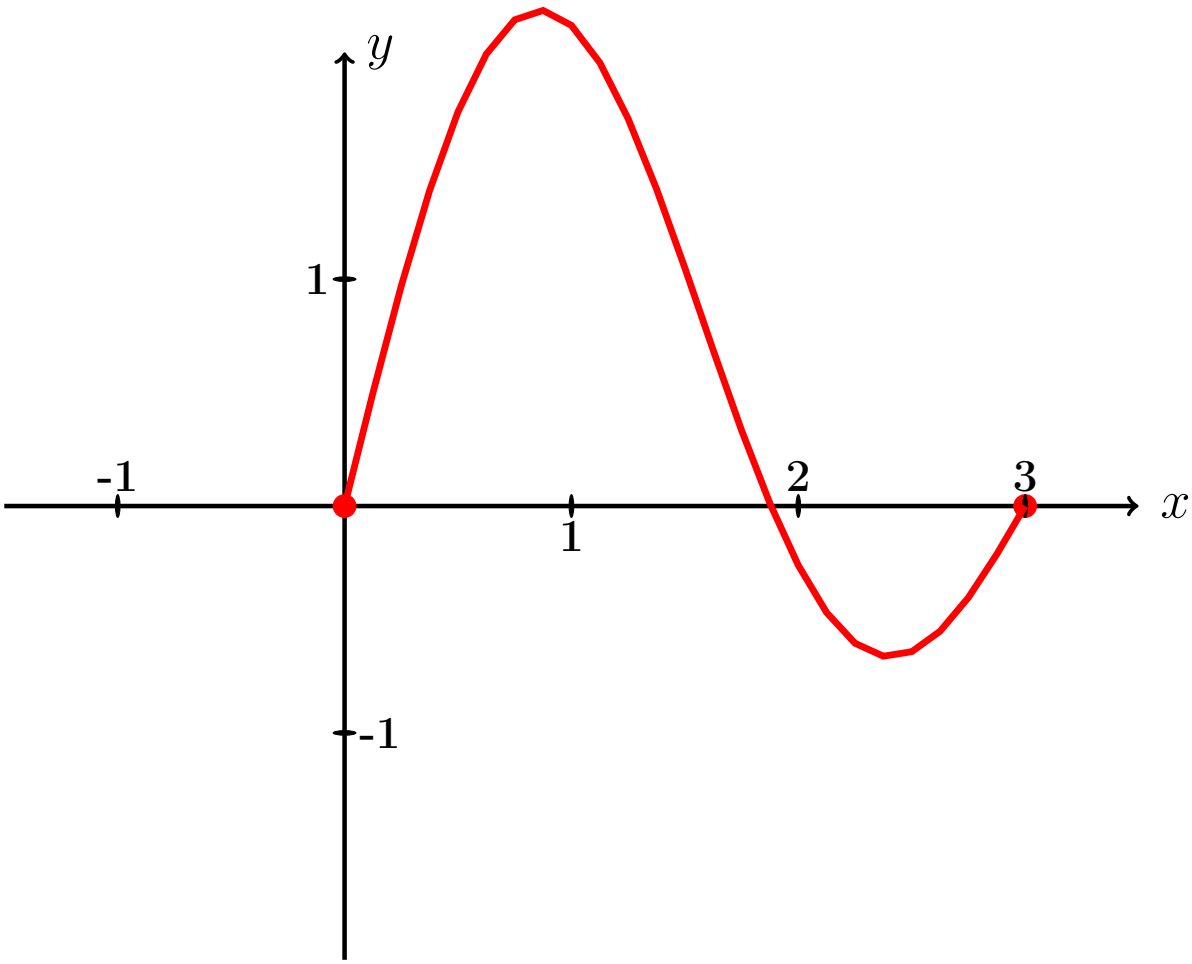


Рис.:

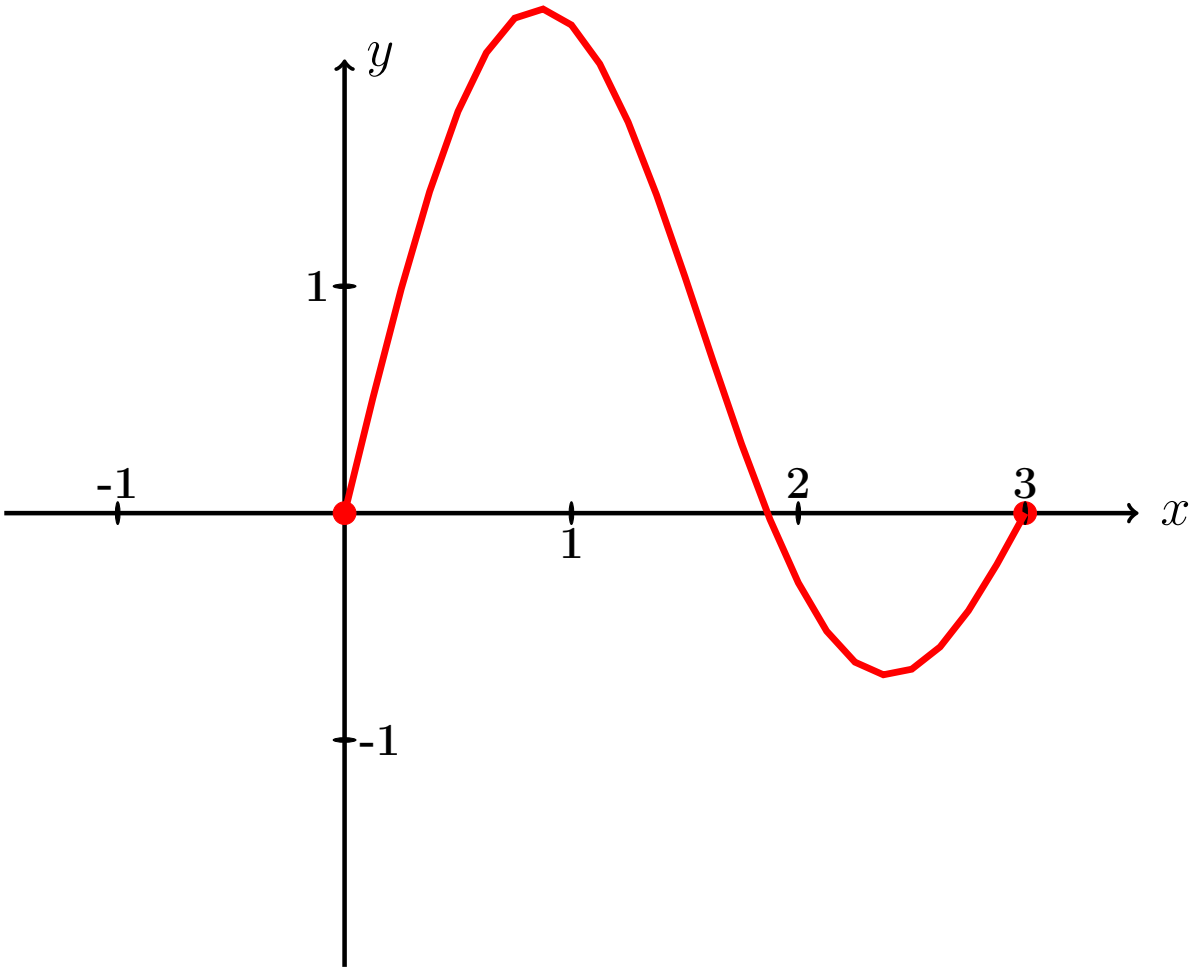


Рис.:

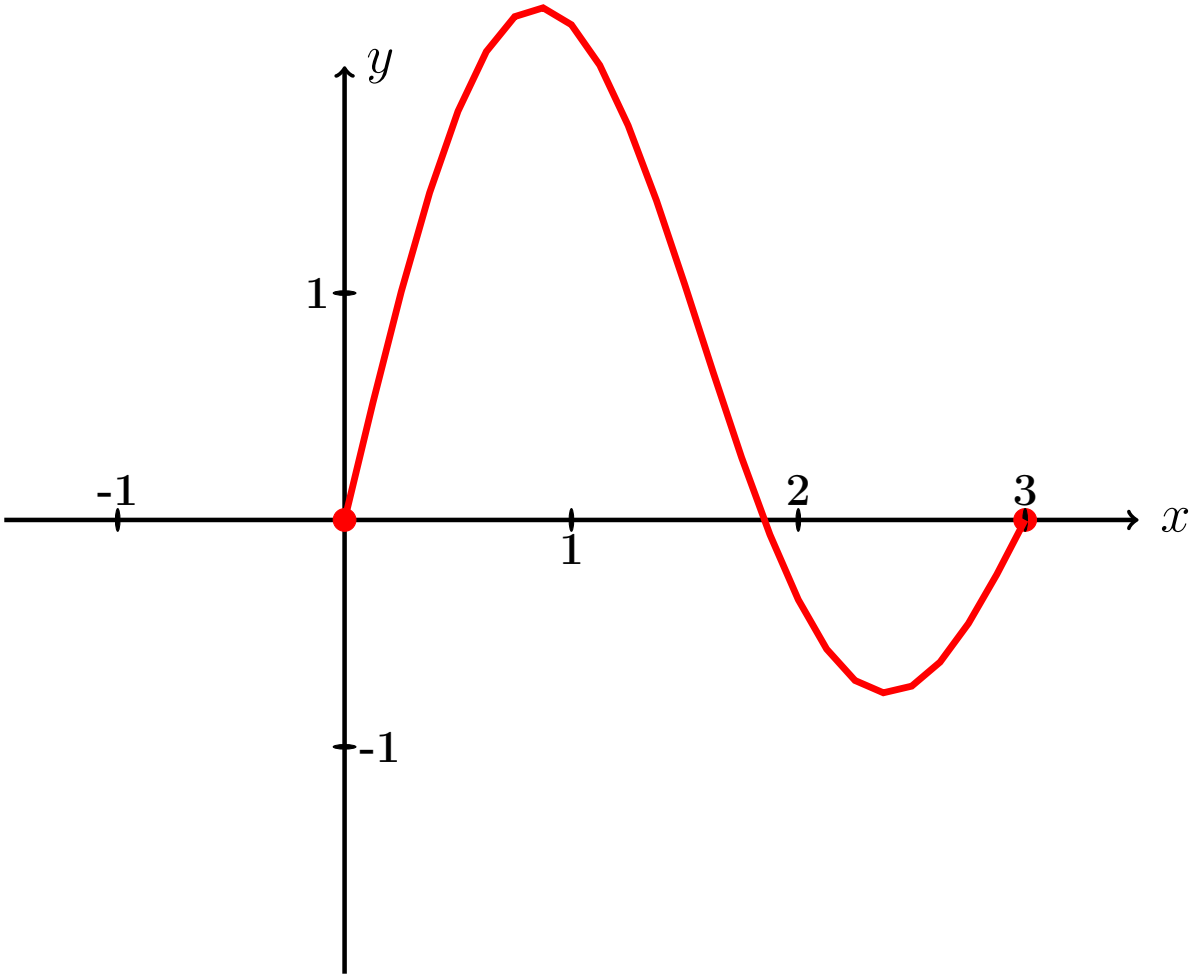


Рис.:

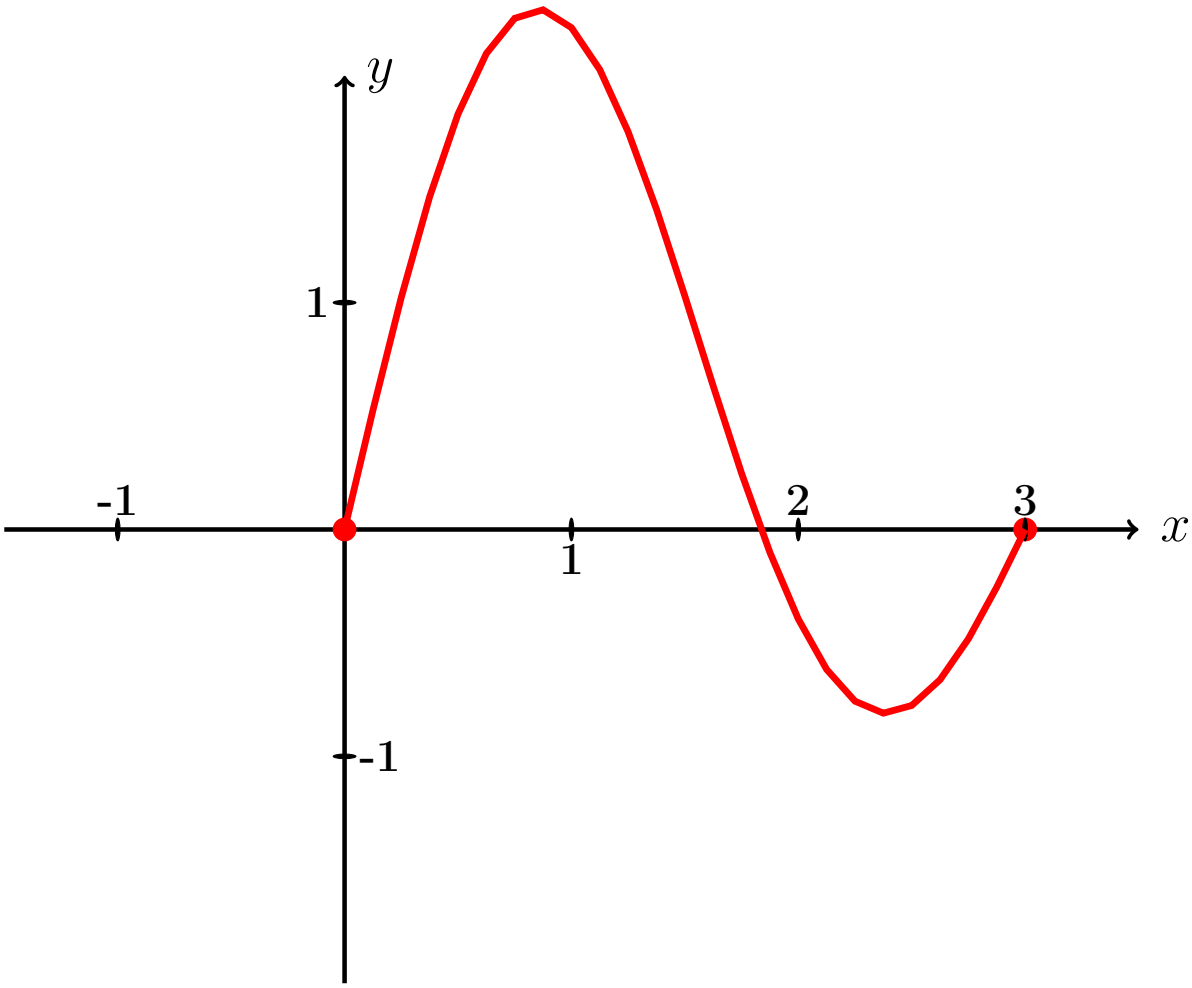


Рис.:

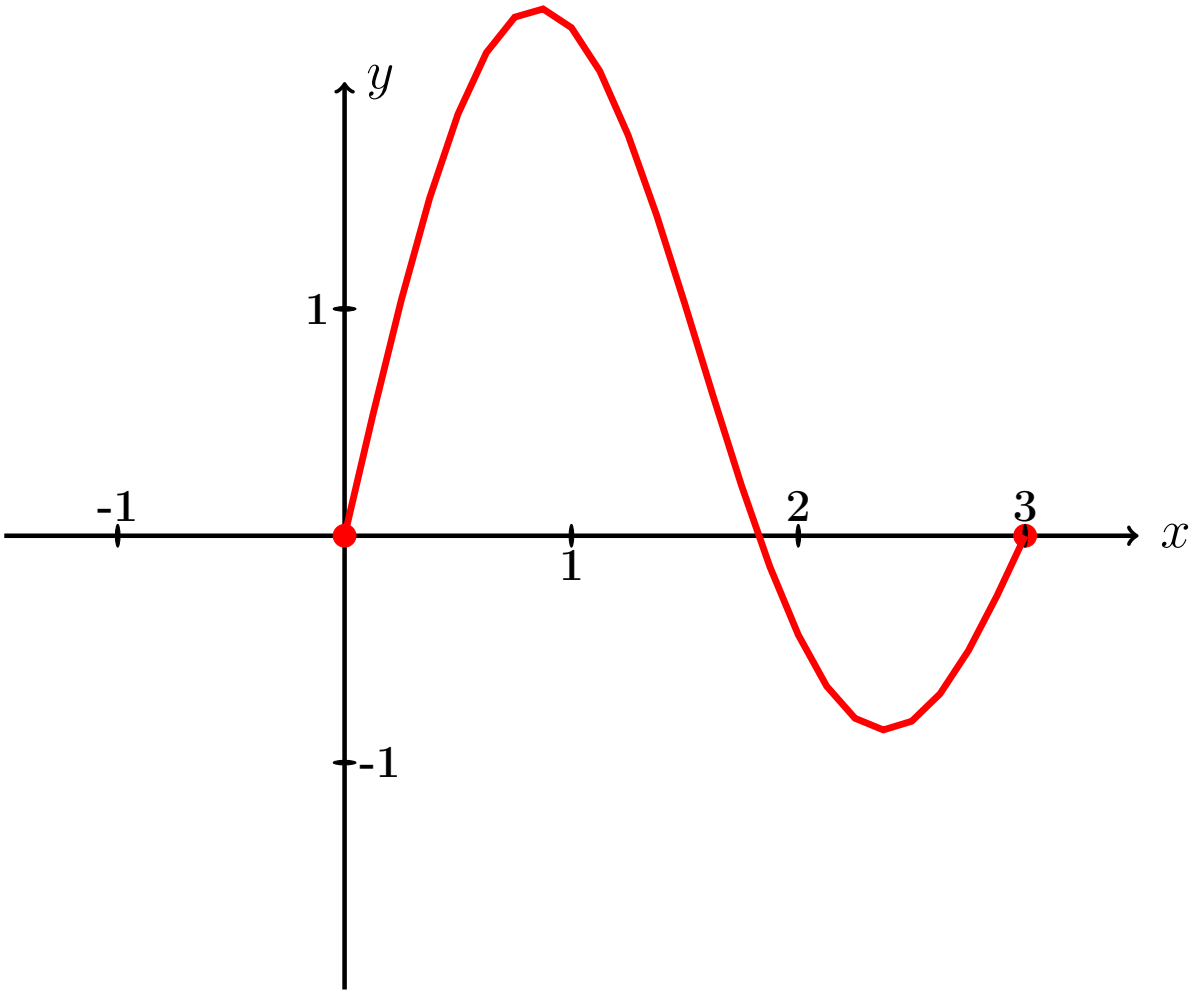


Рис.:

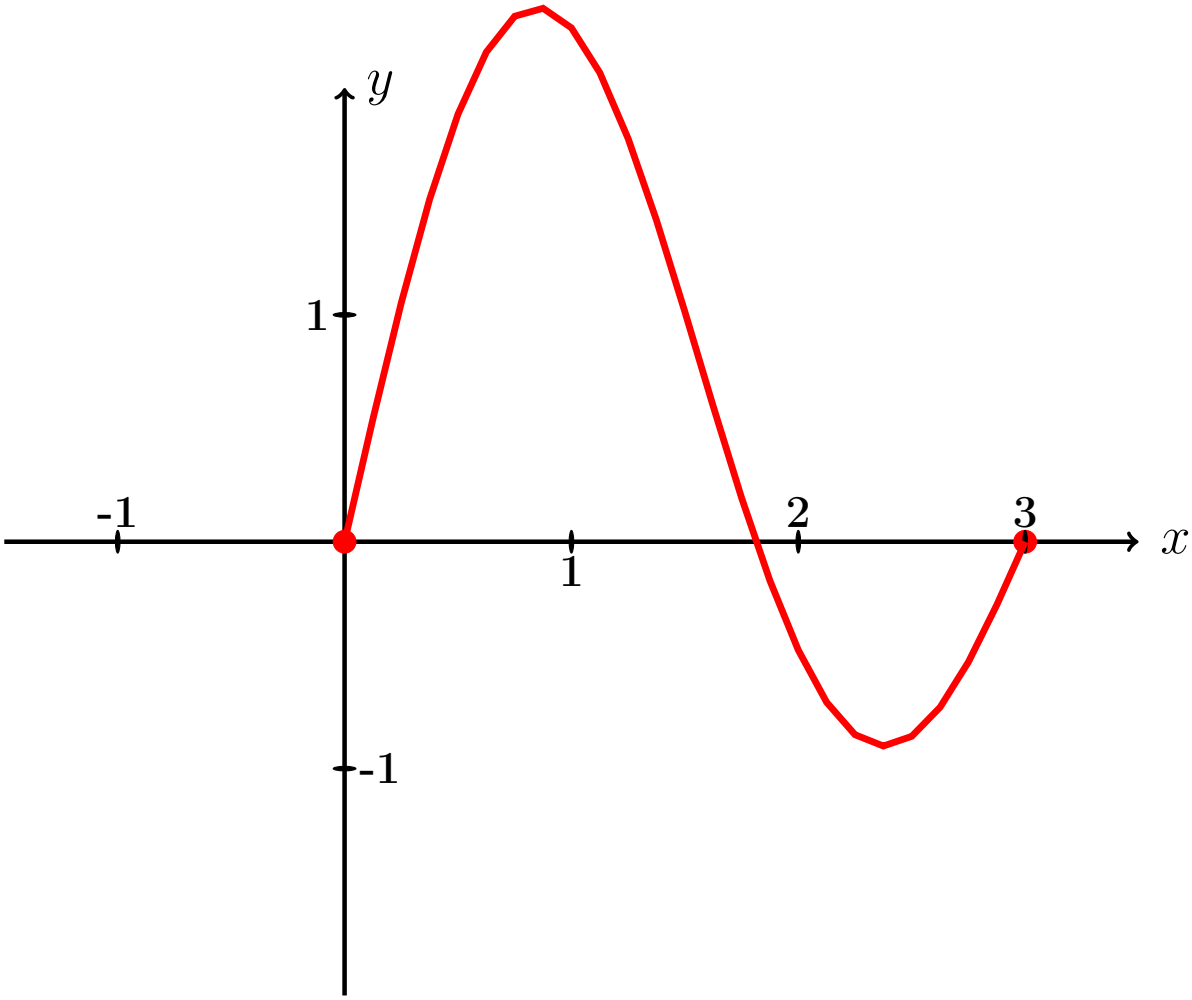


Рис.:

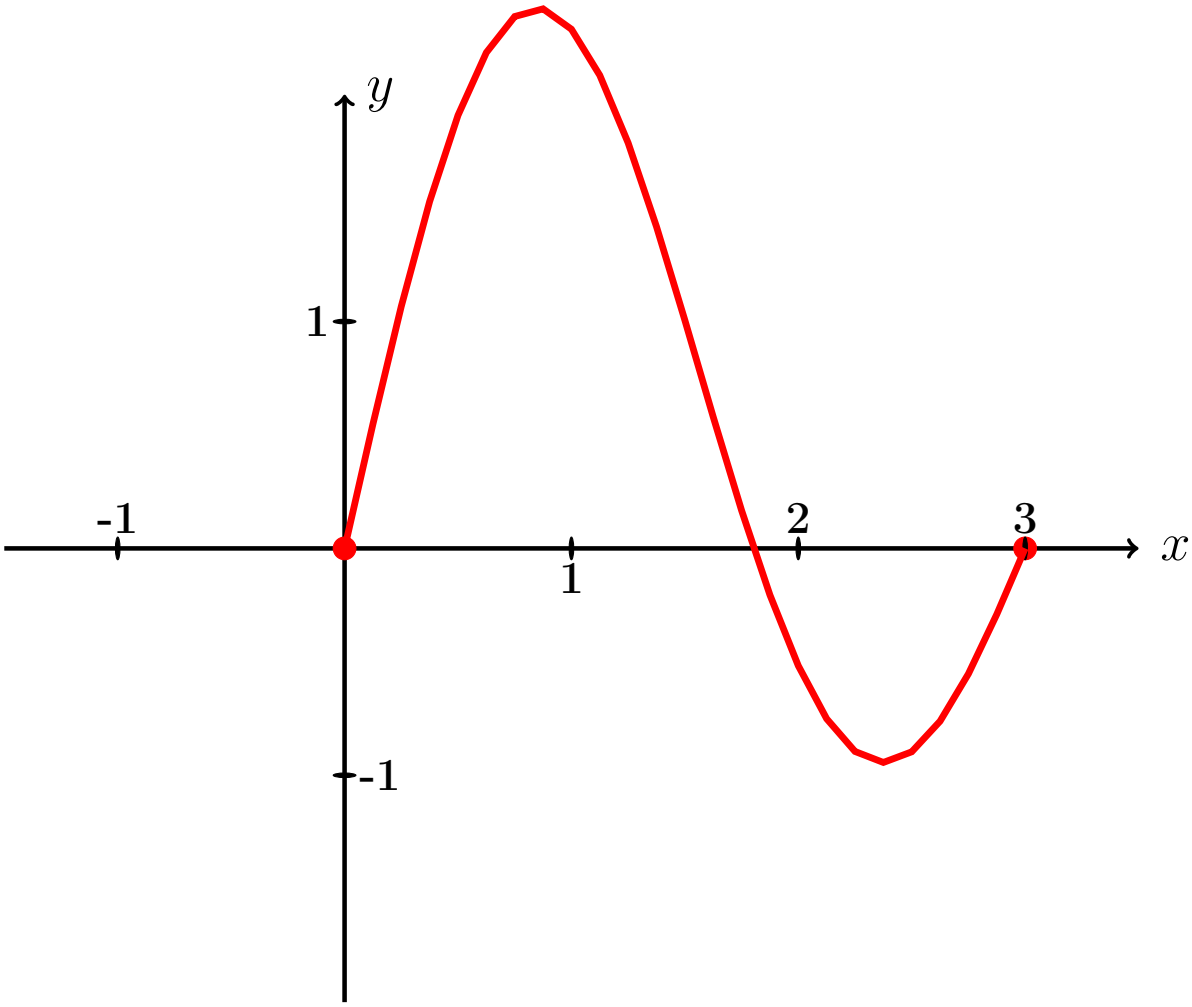


Рис.:

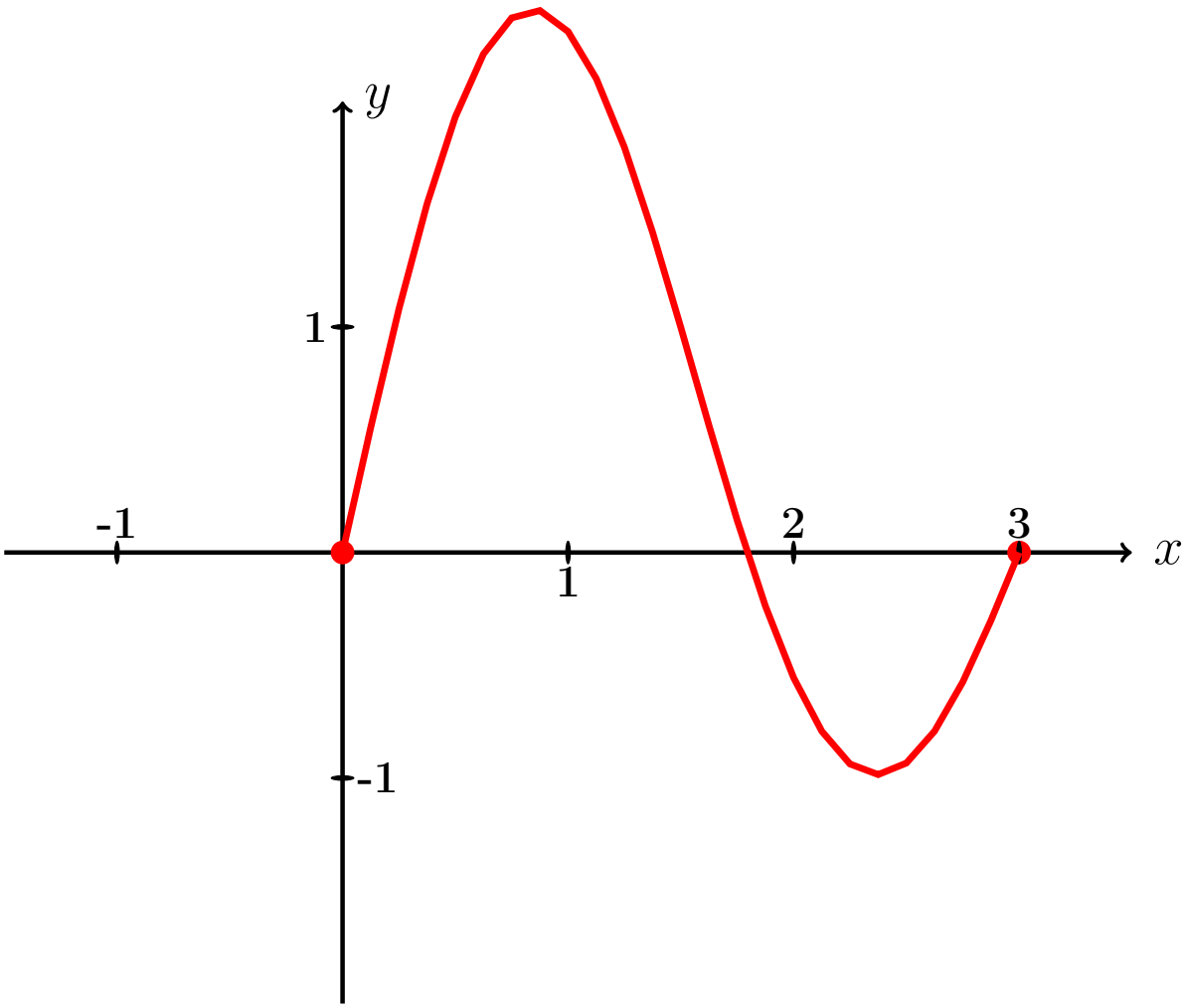


Рис.:

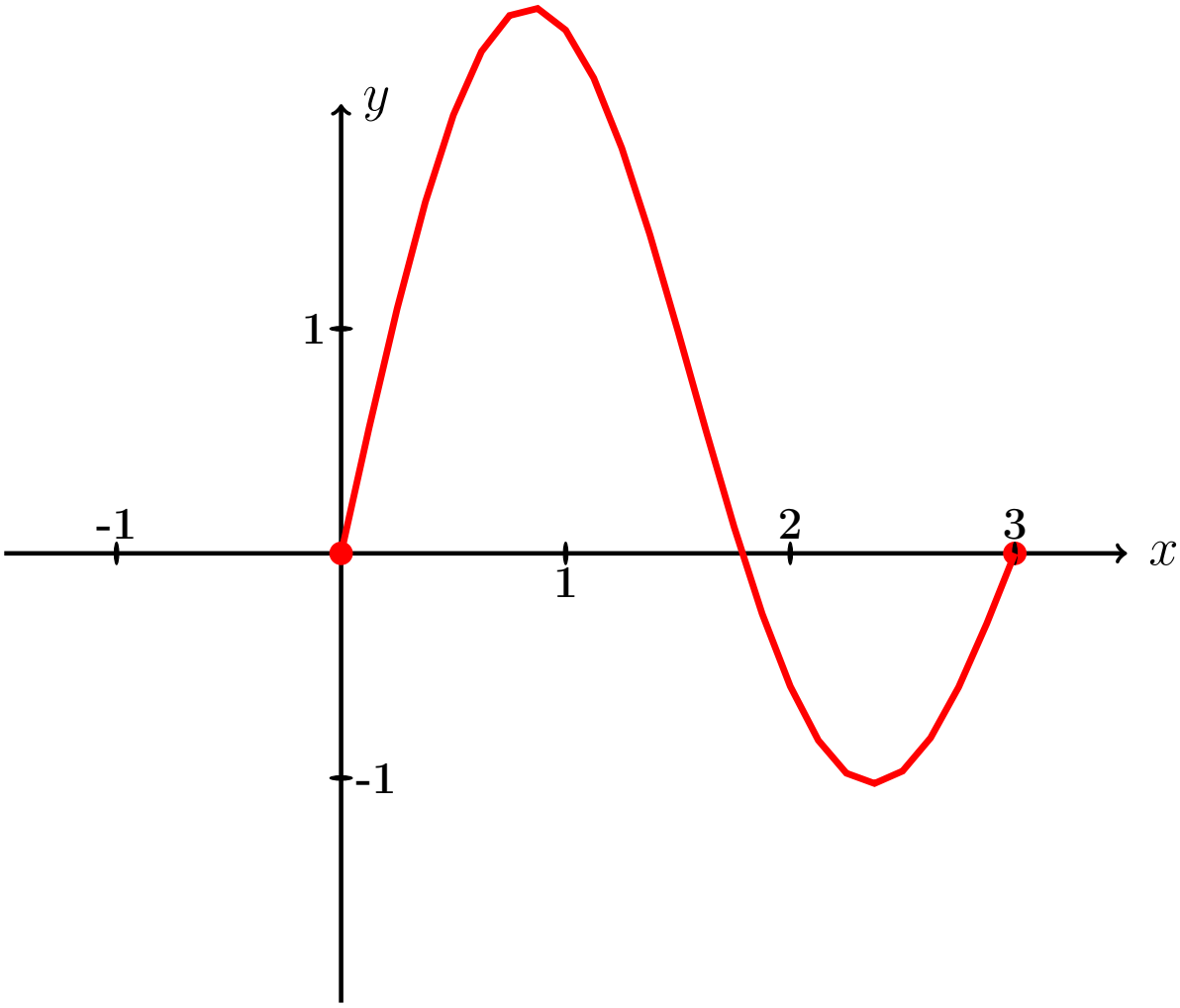


Рис.:

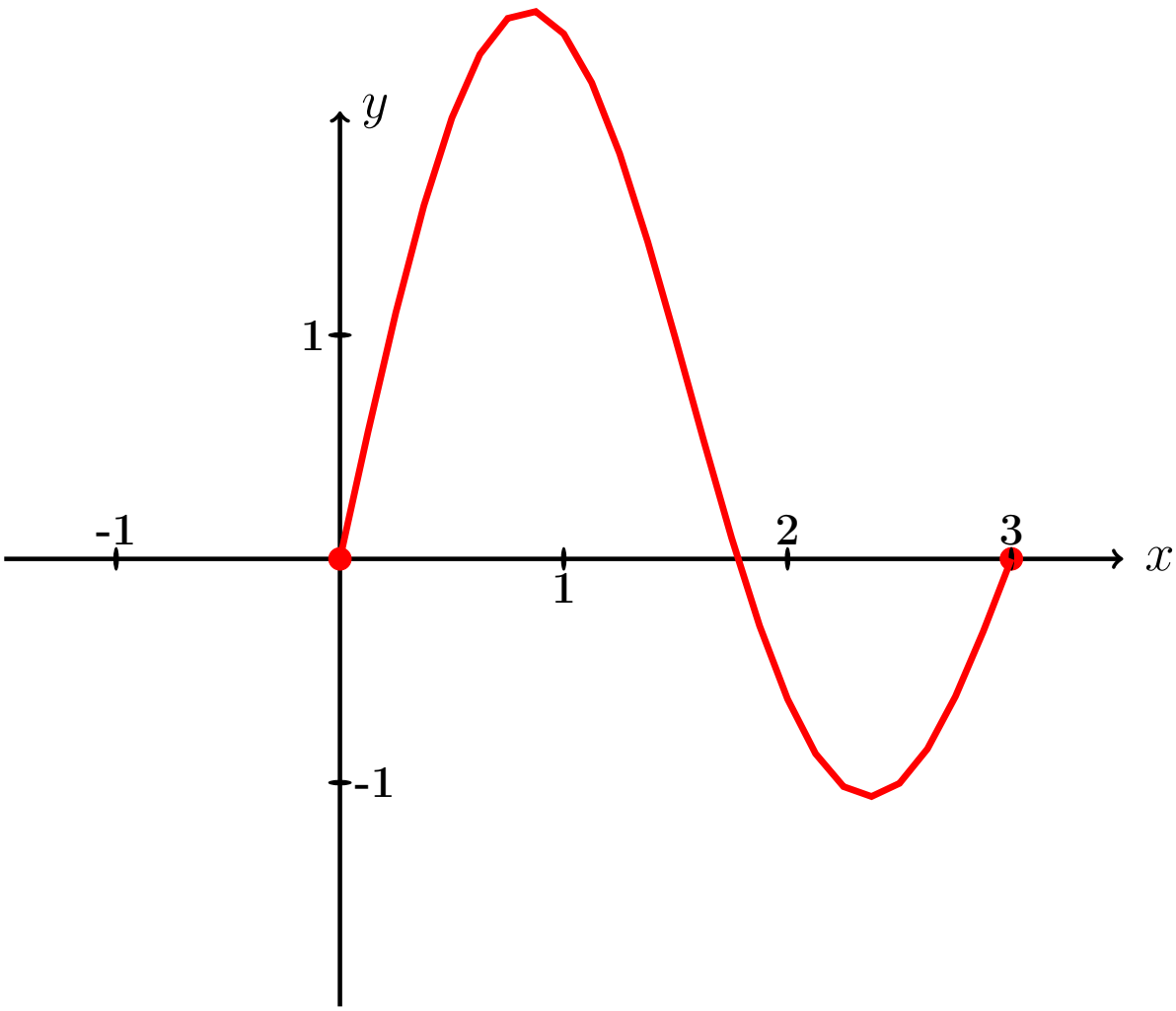


Рис.:

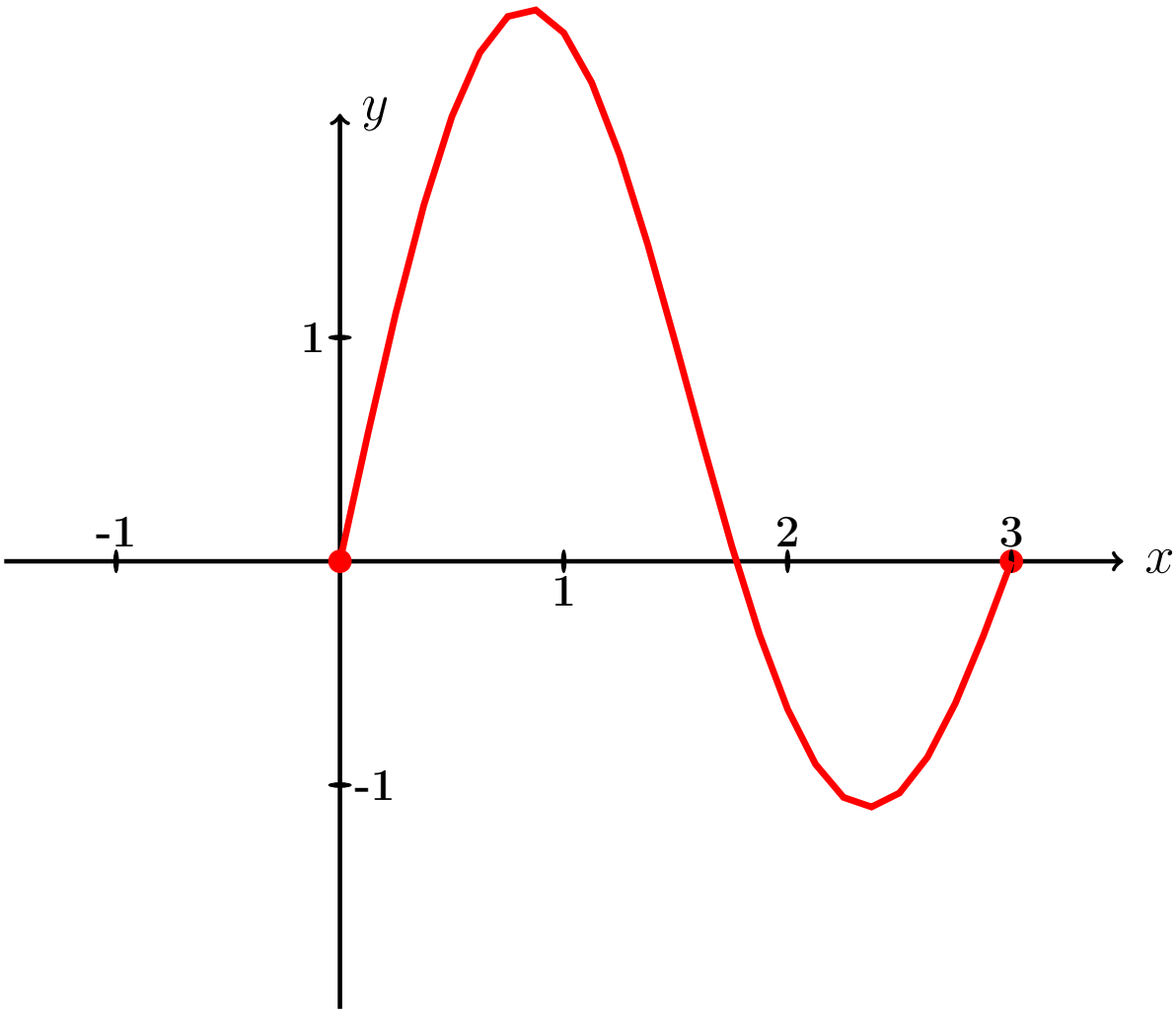


Рис.:

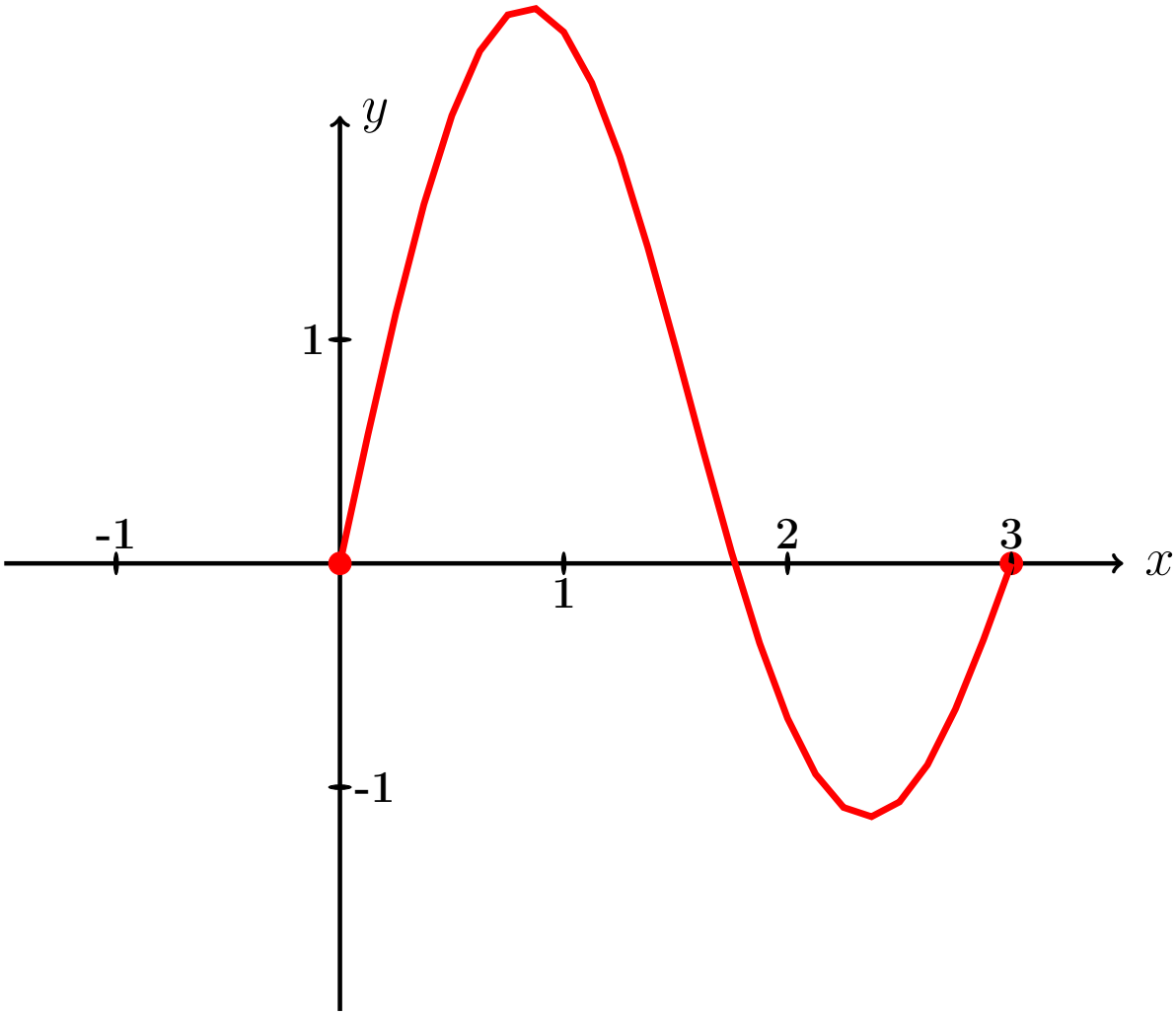


Рис.:

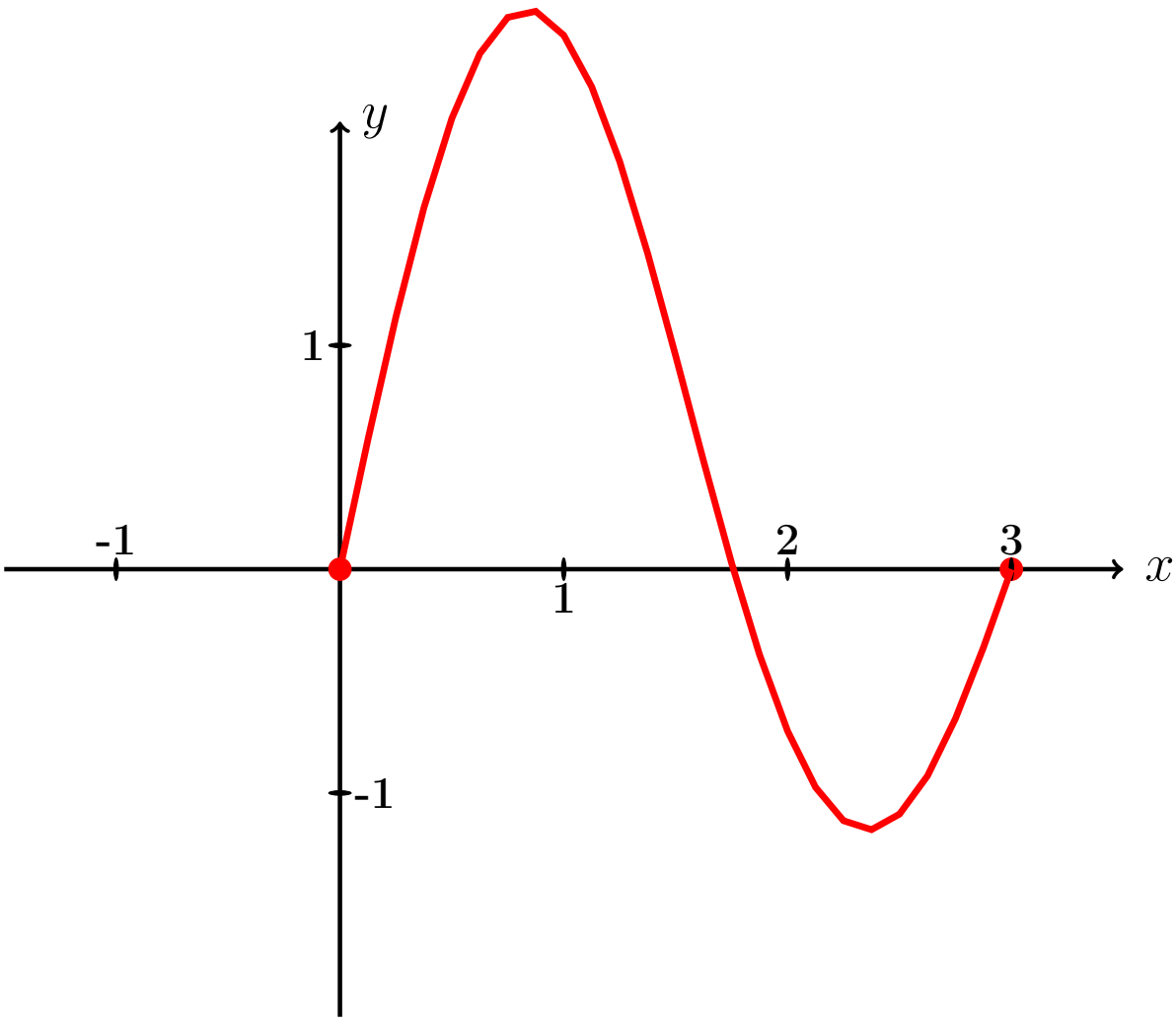


Рис.:

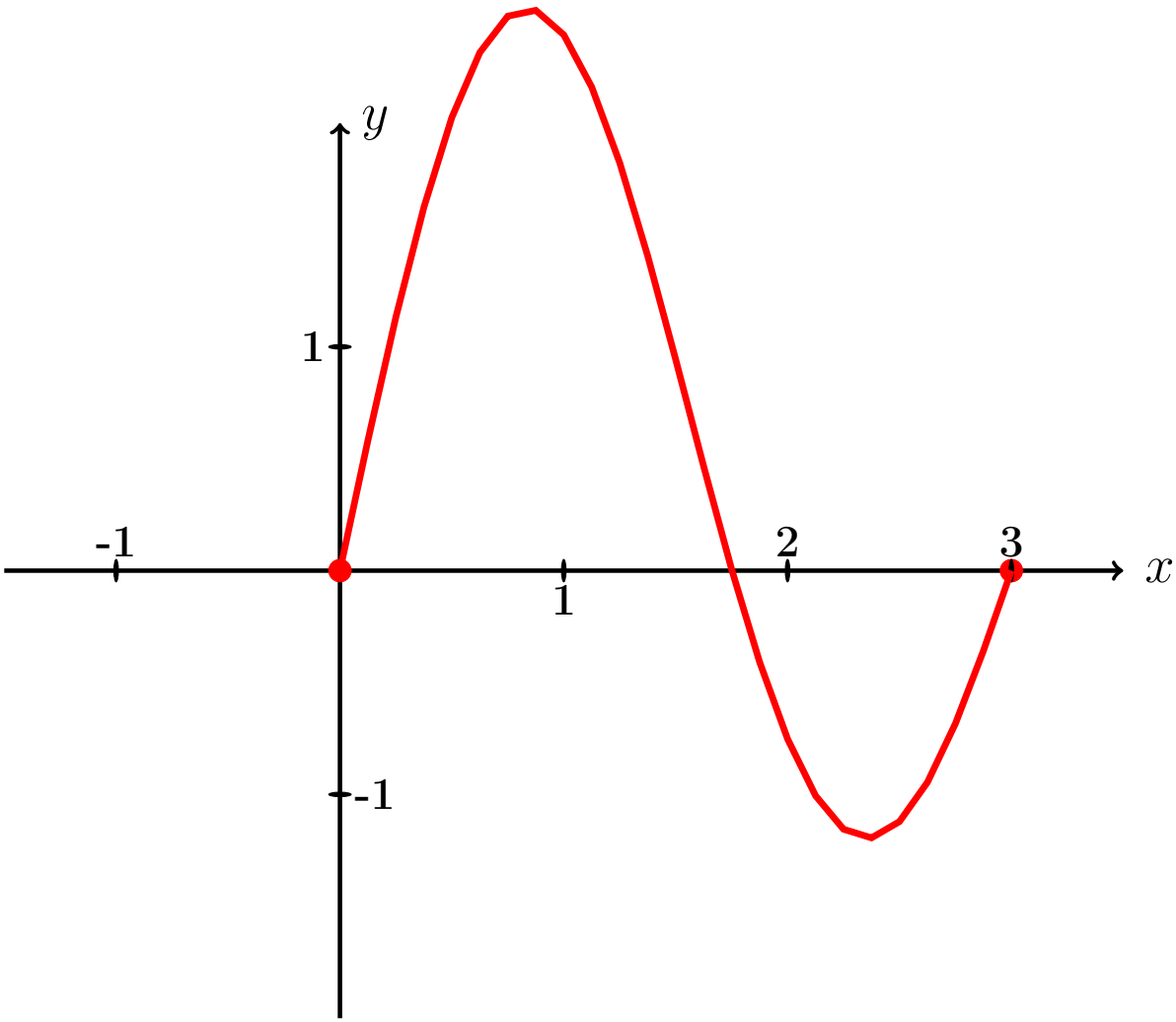


Рис.:

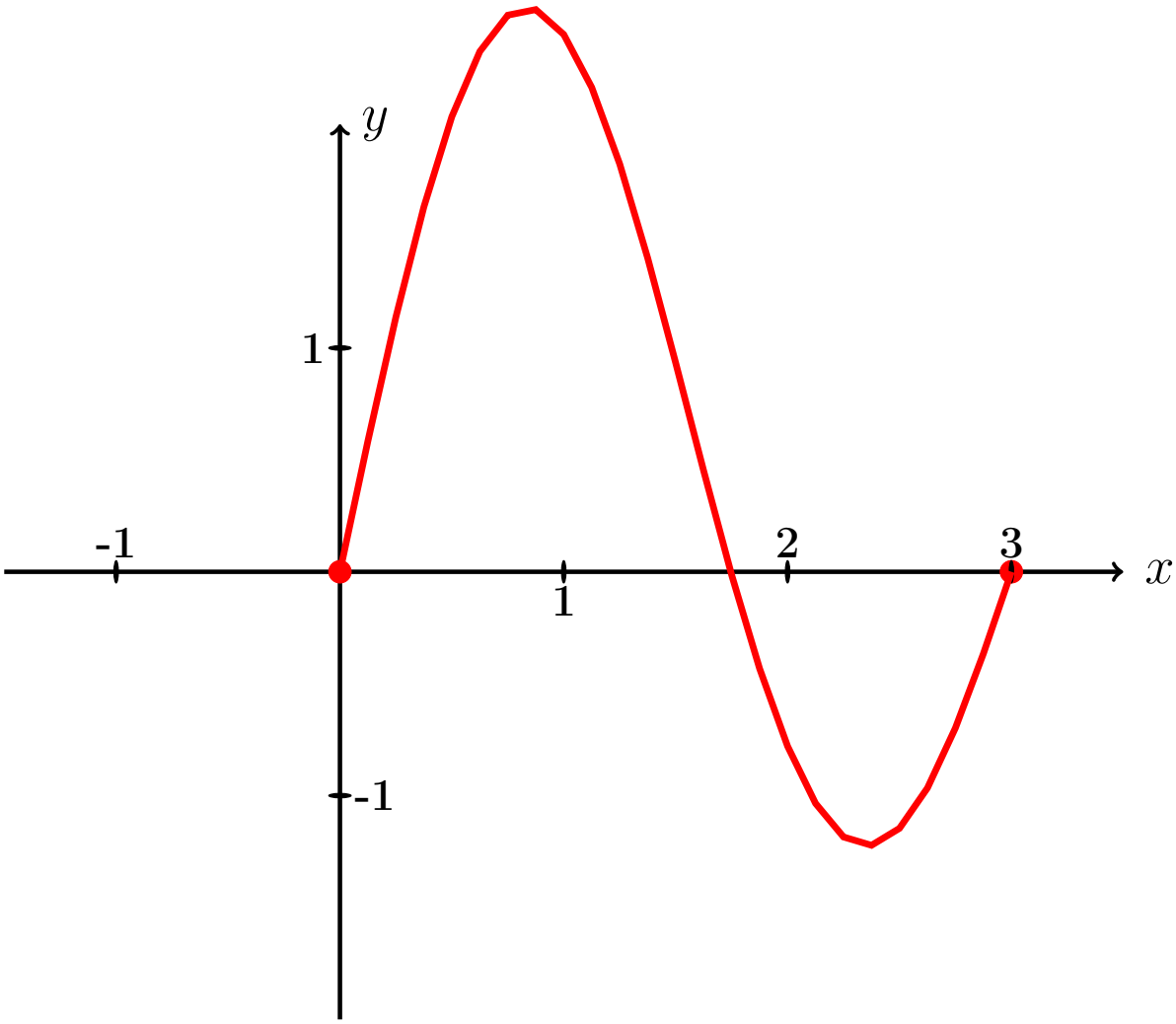


Рис.:

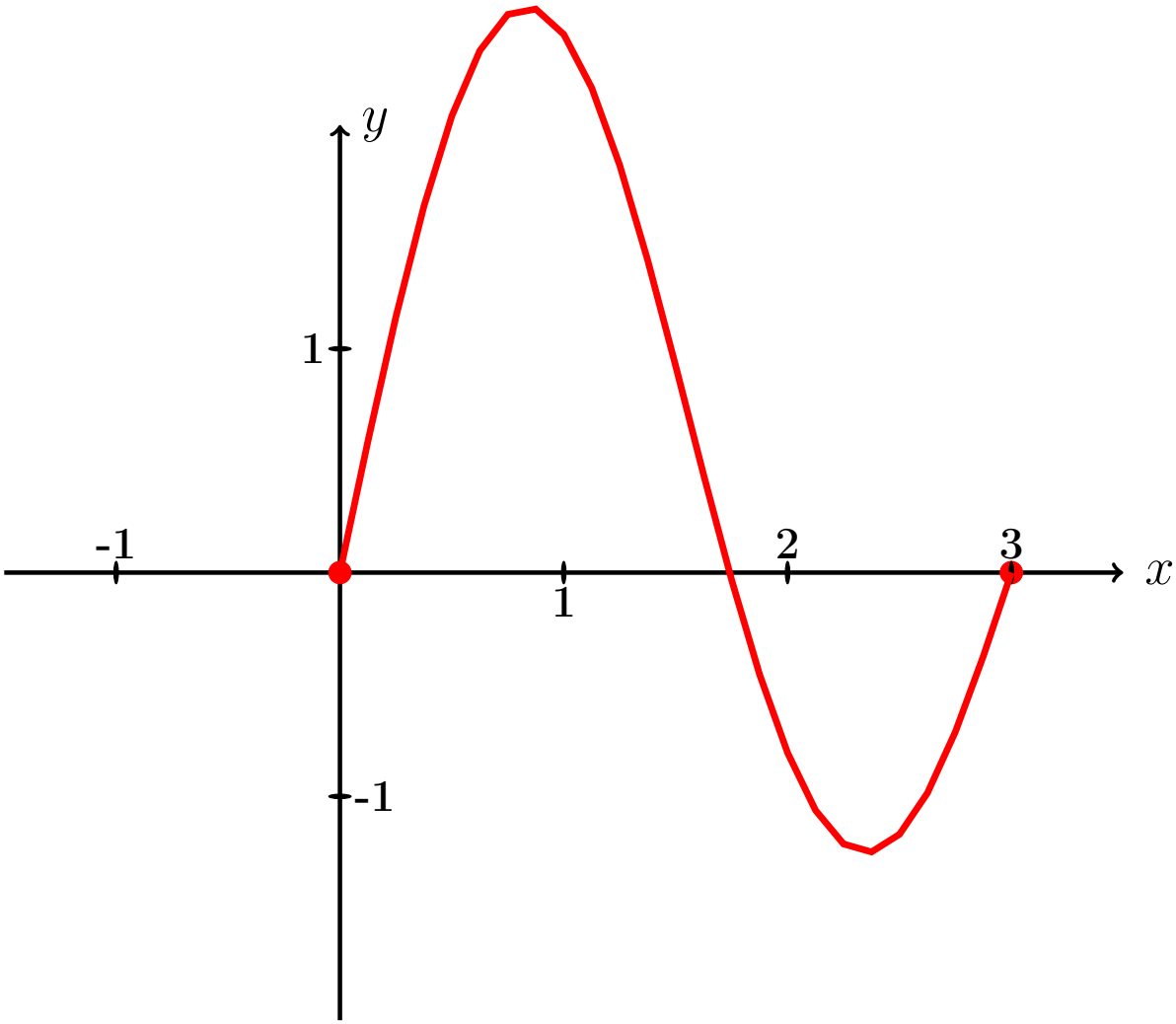


Рис.:

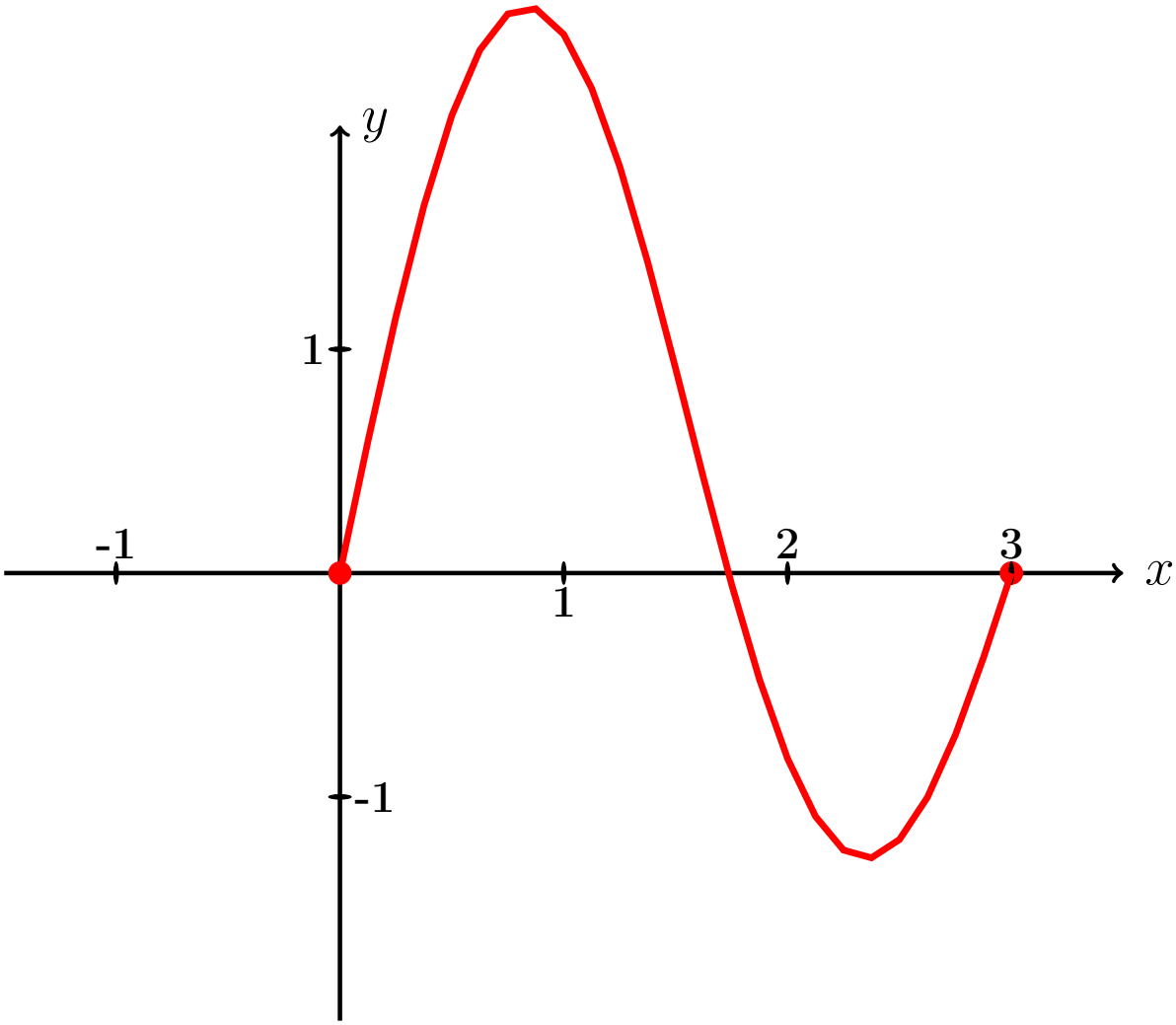


Рис.:

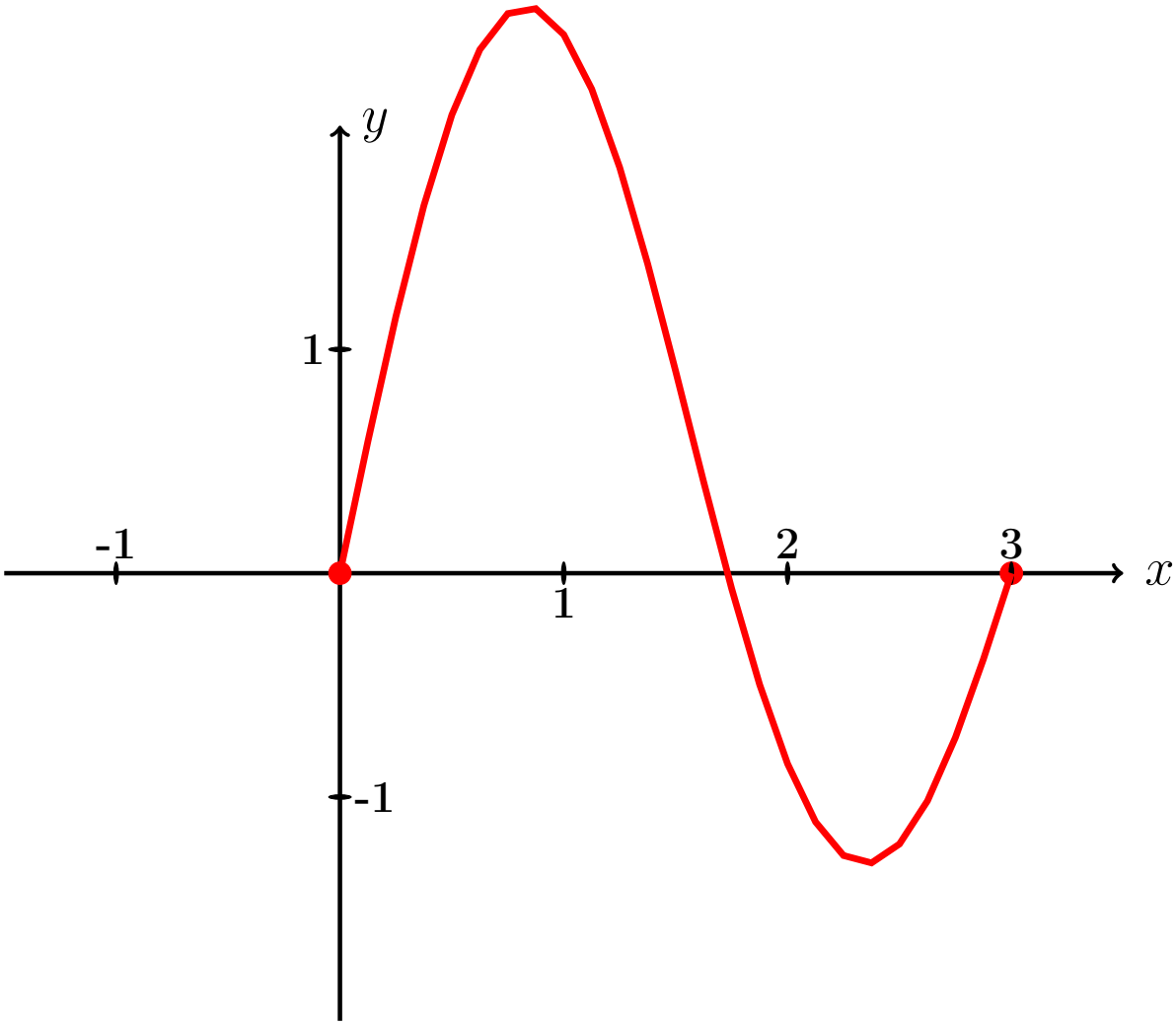


Рис.:

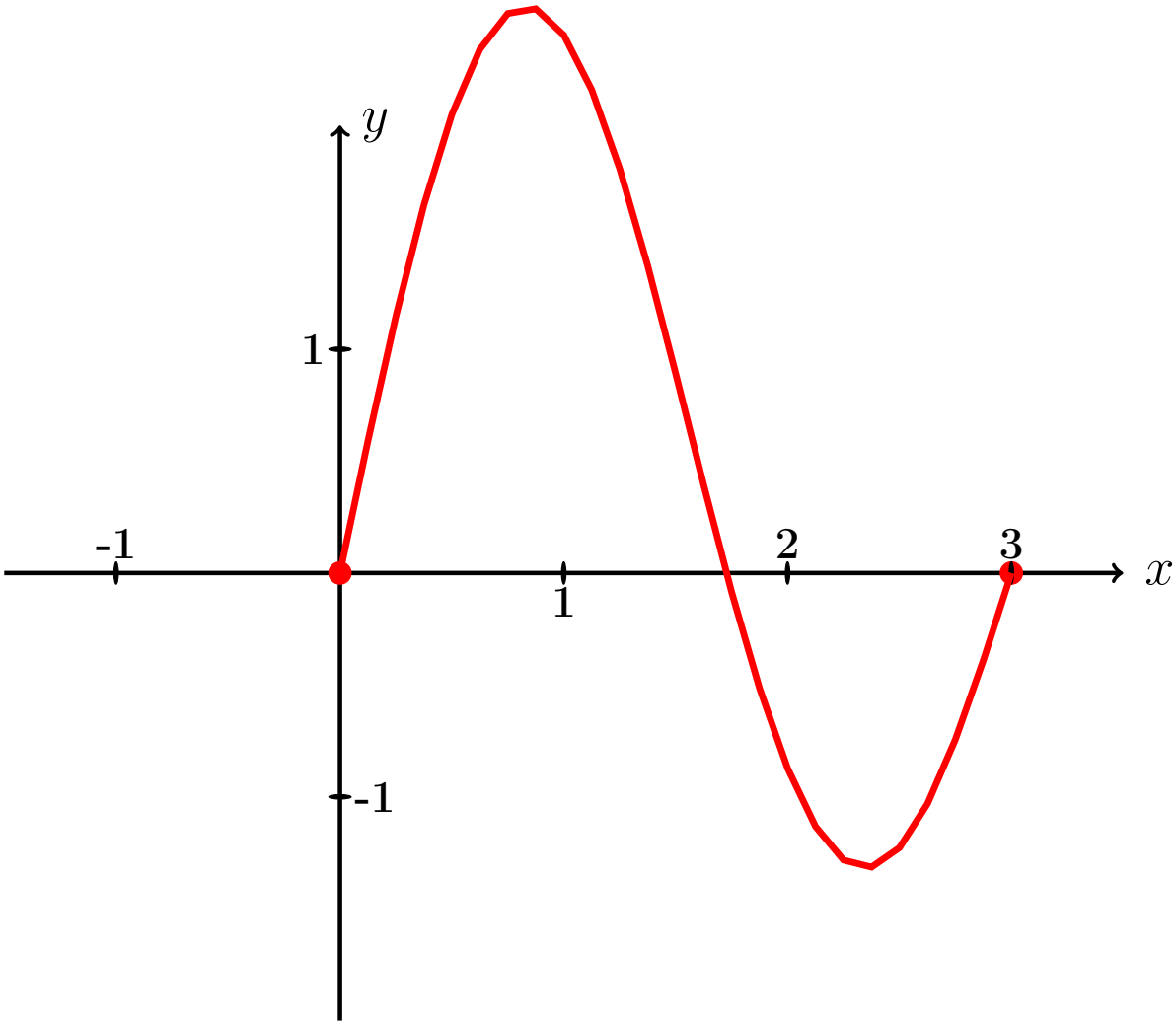


Рис.:

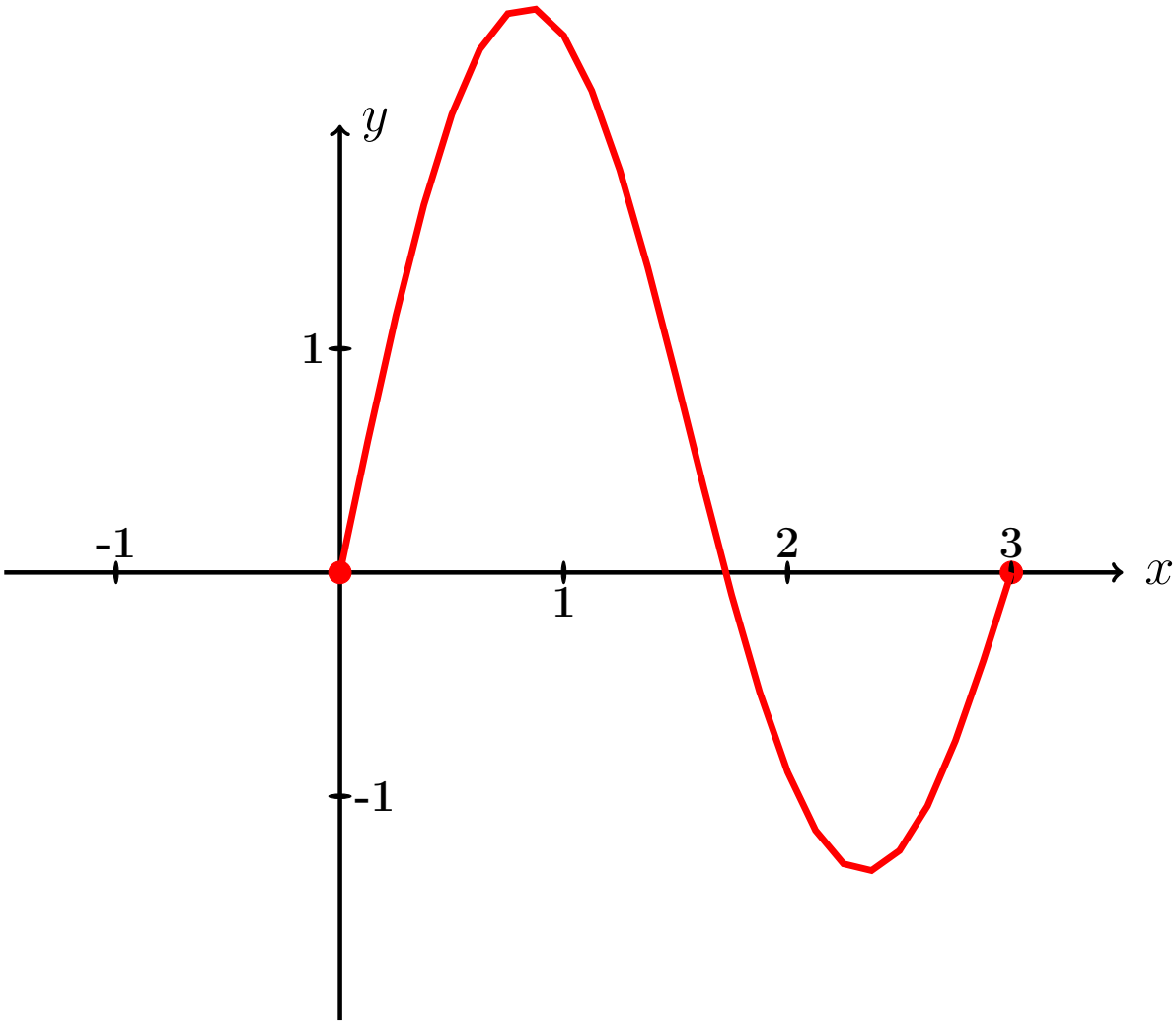


Рис.:

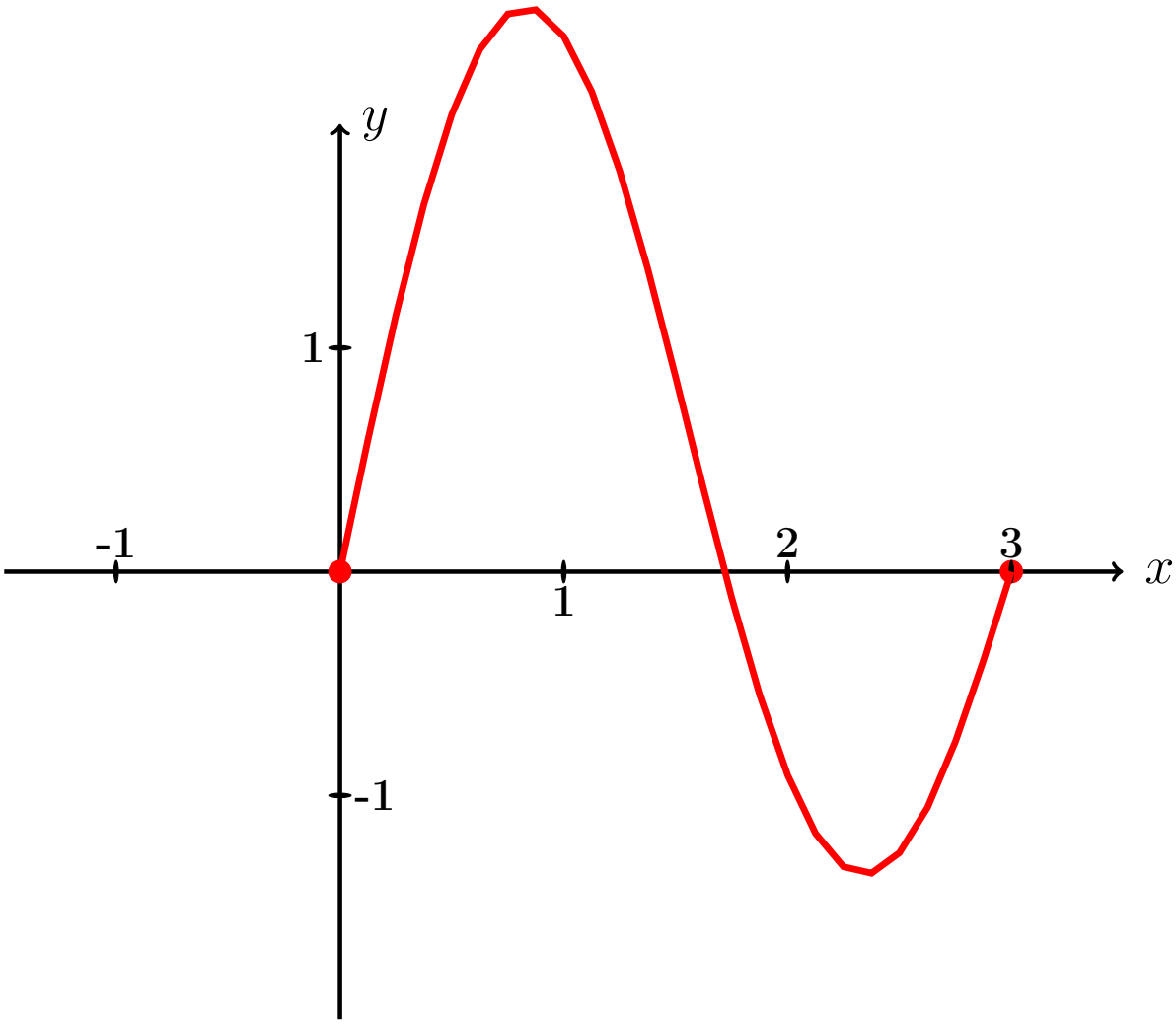


Рис.:

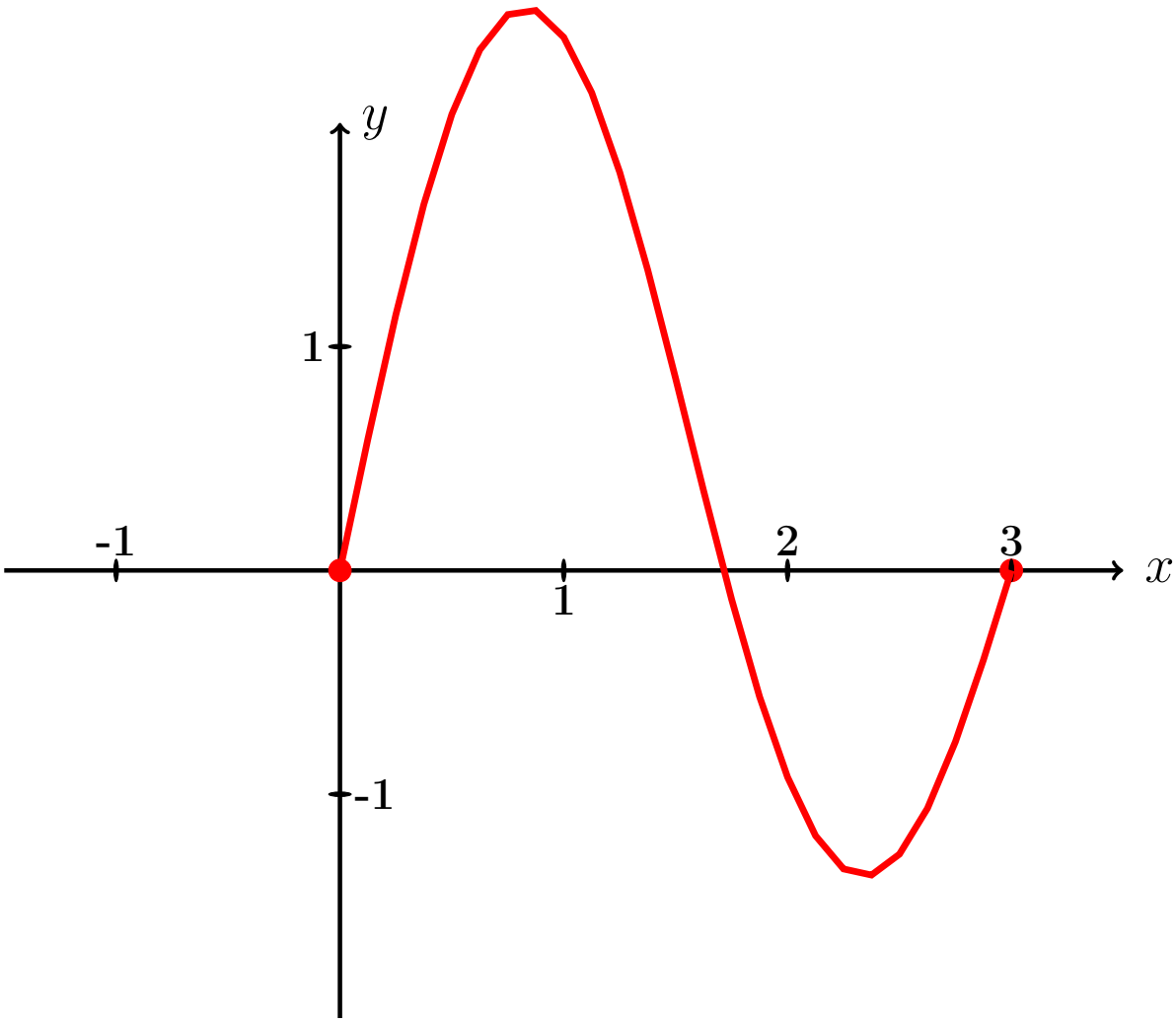


Рис.:

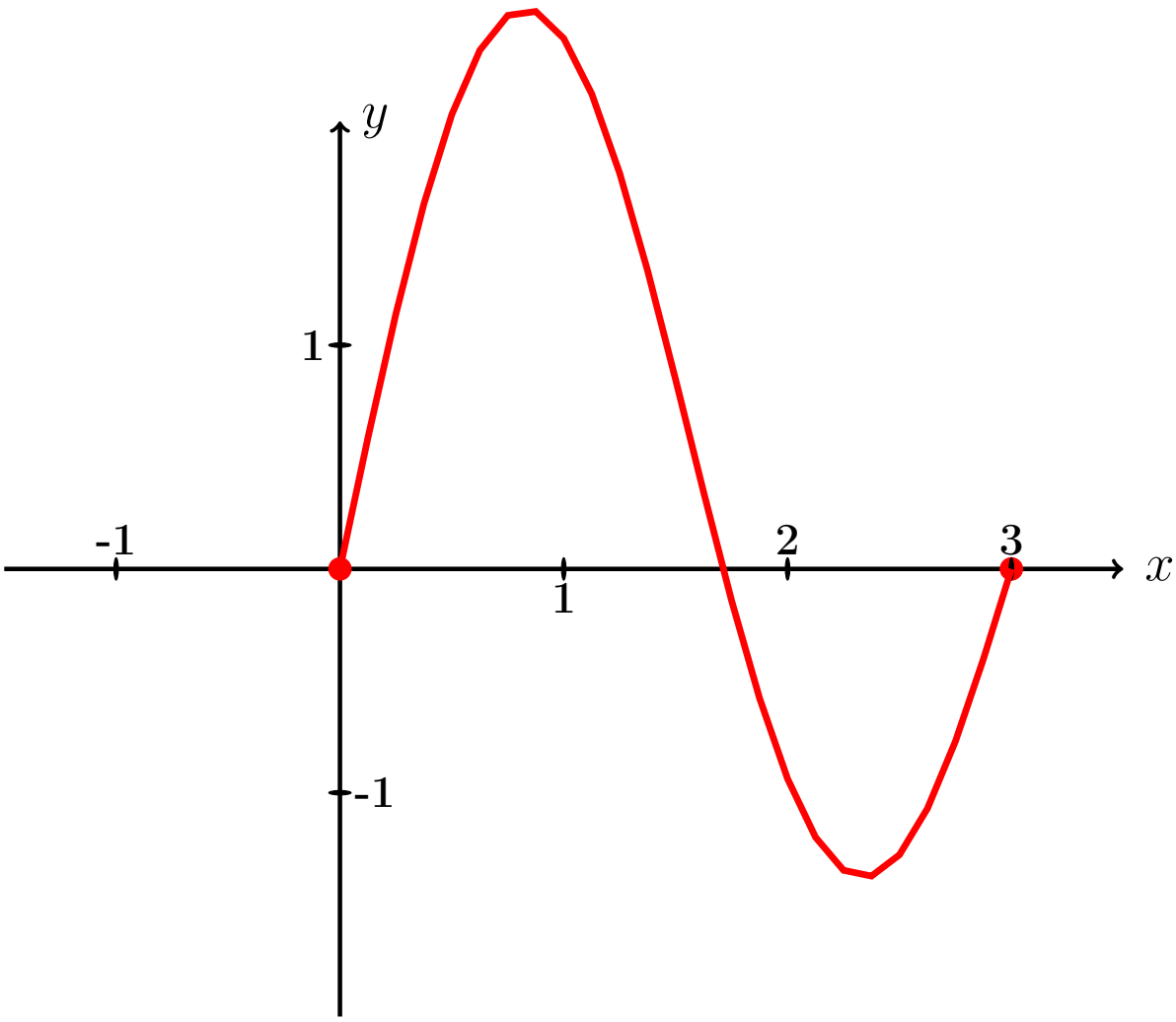


Рис.:

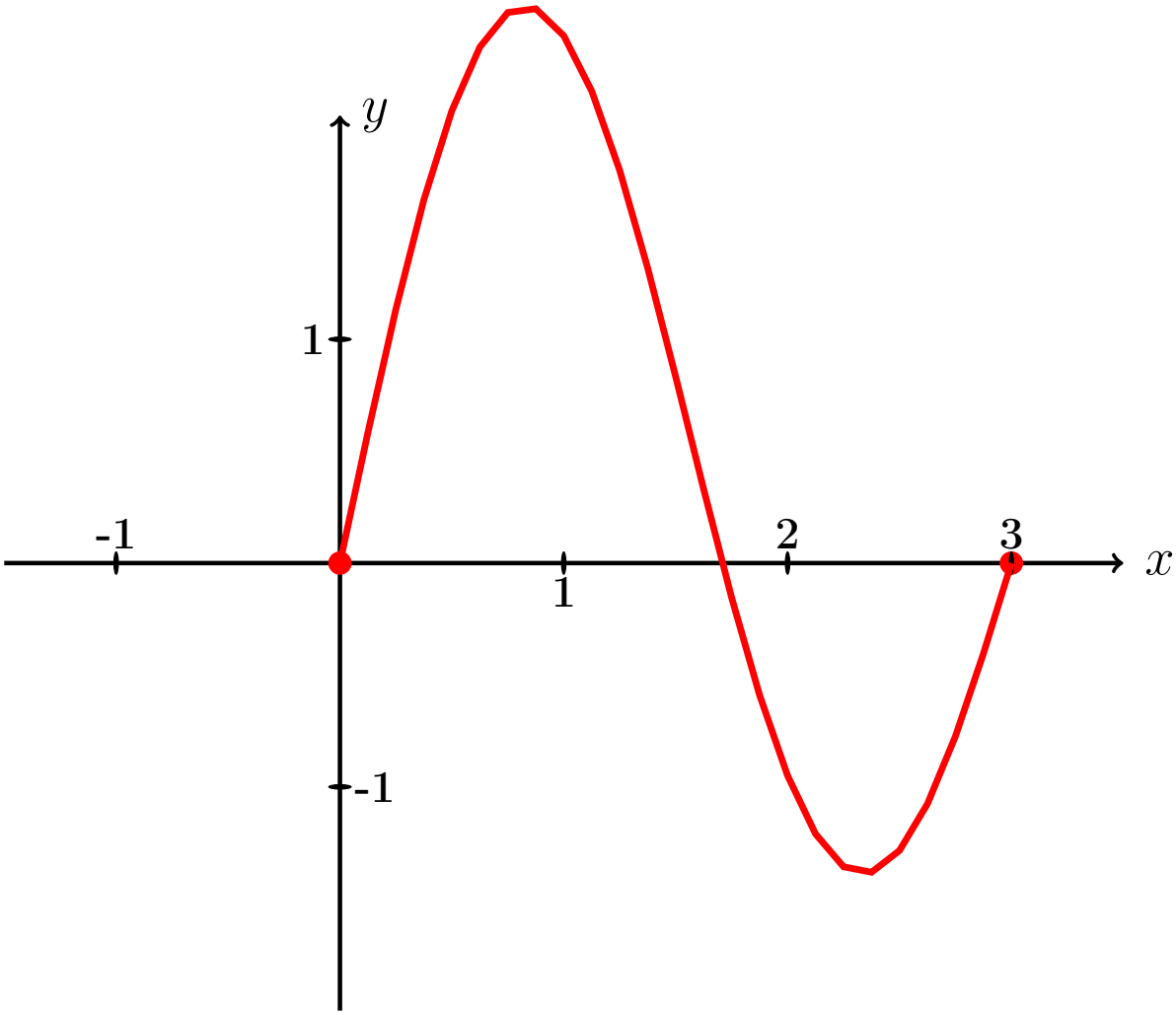


Рис.:

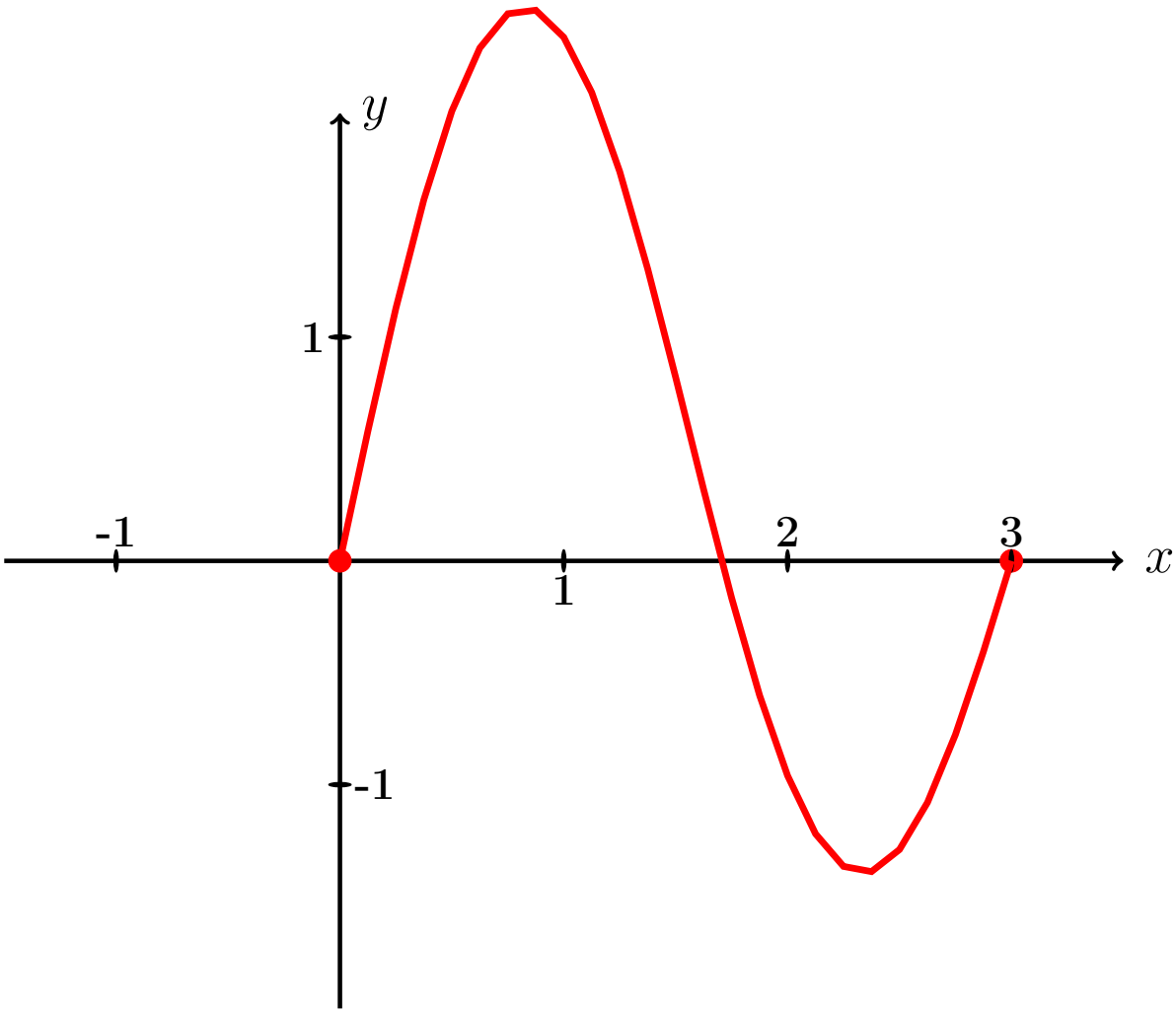


Рис.:

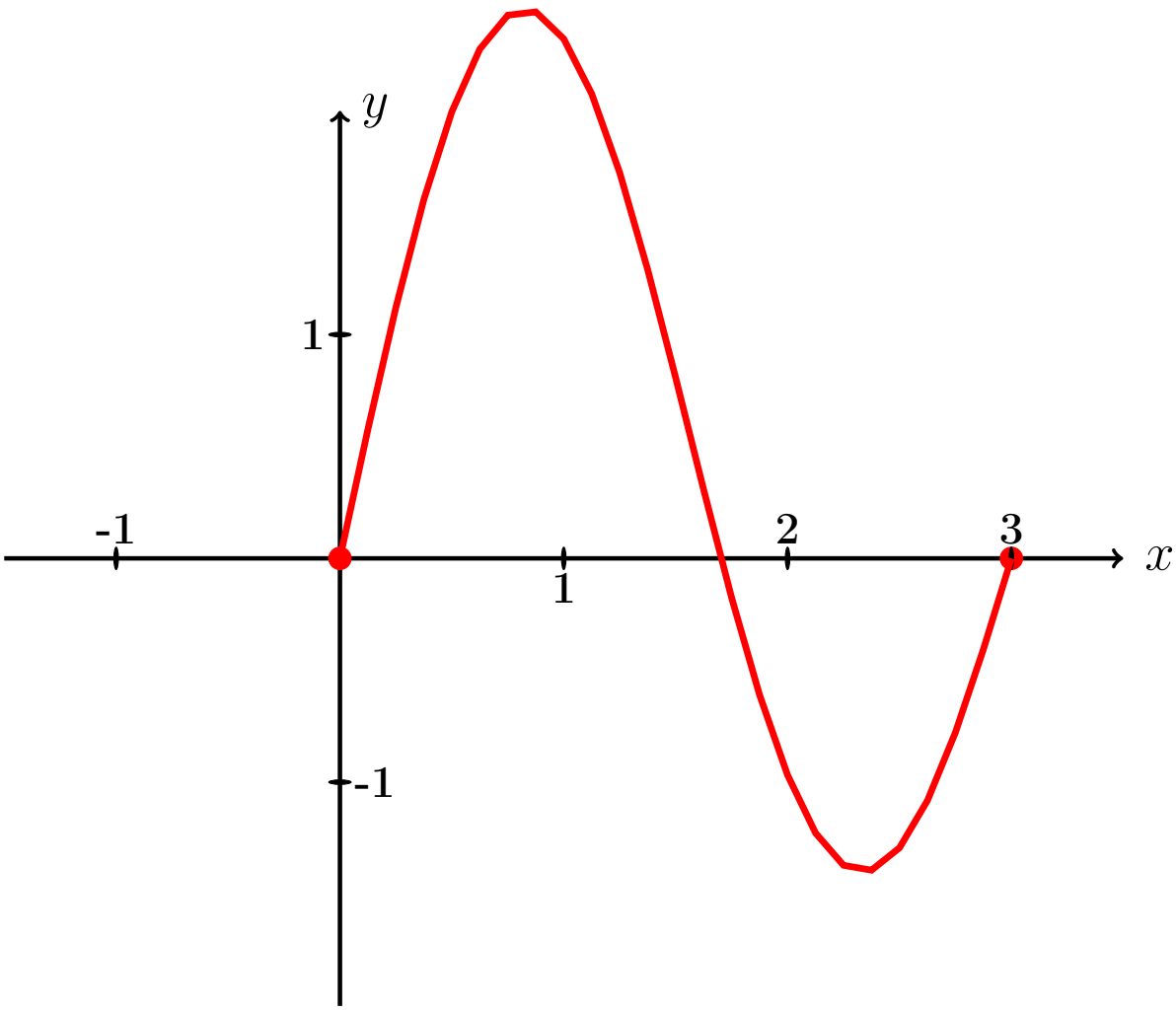


Рис.:

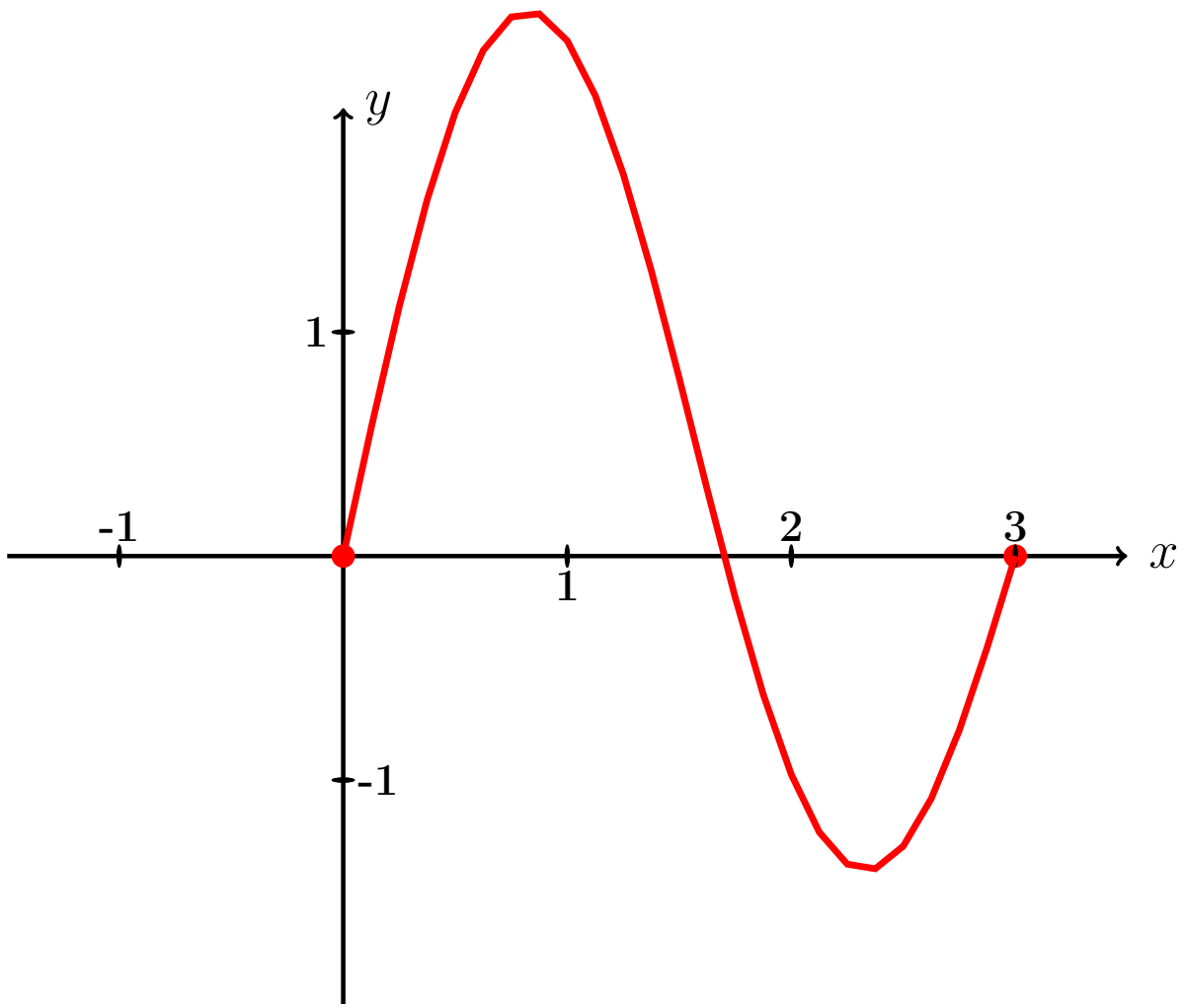


Рис.:

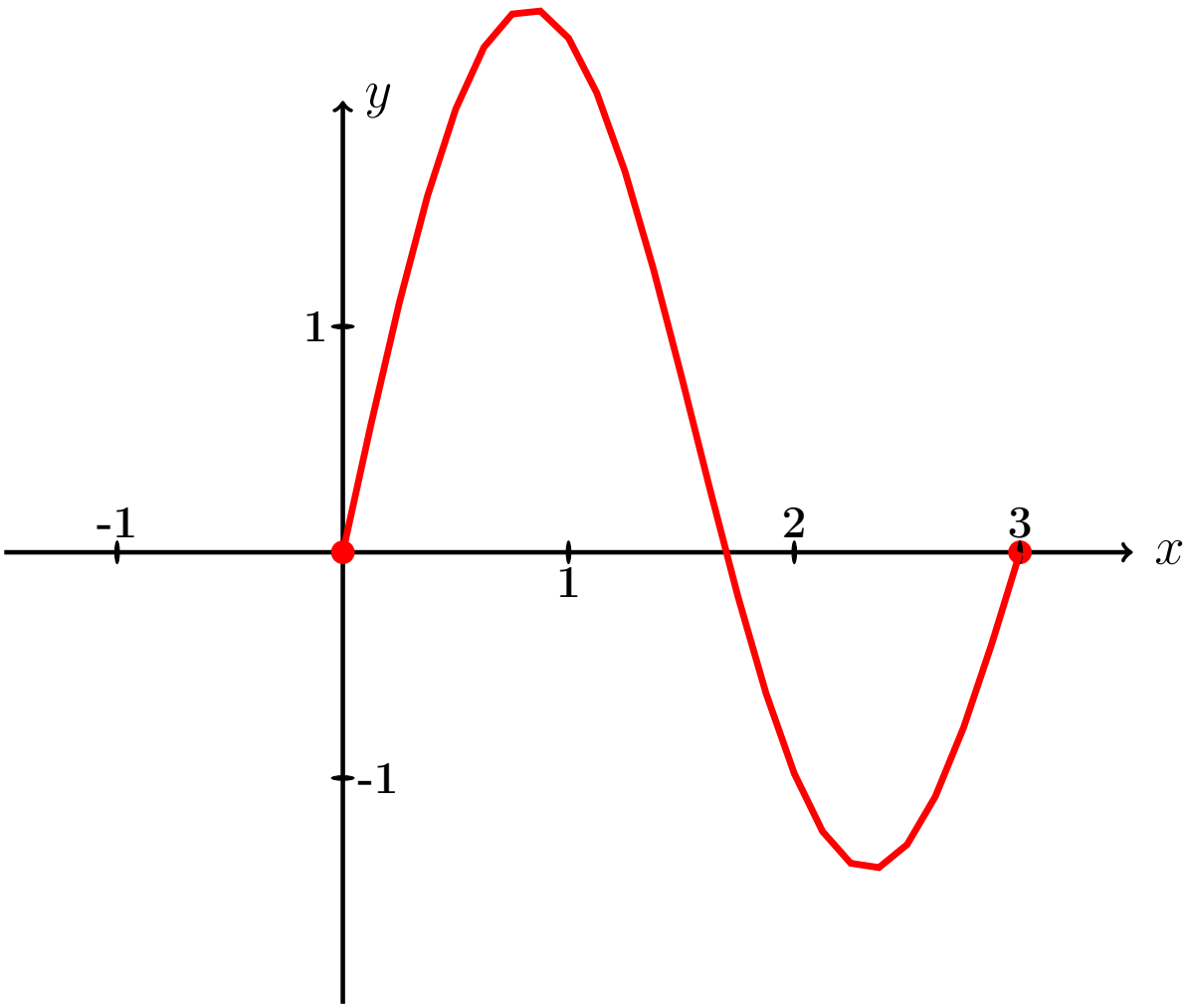


Рис.:

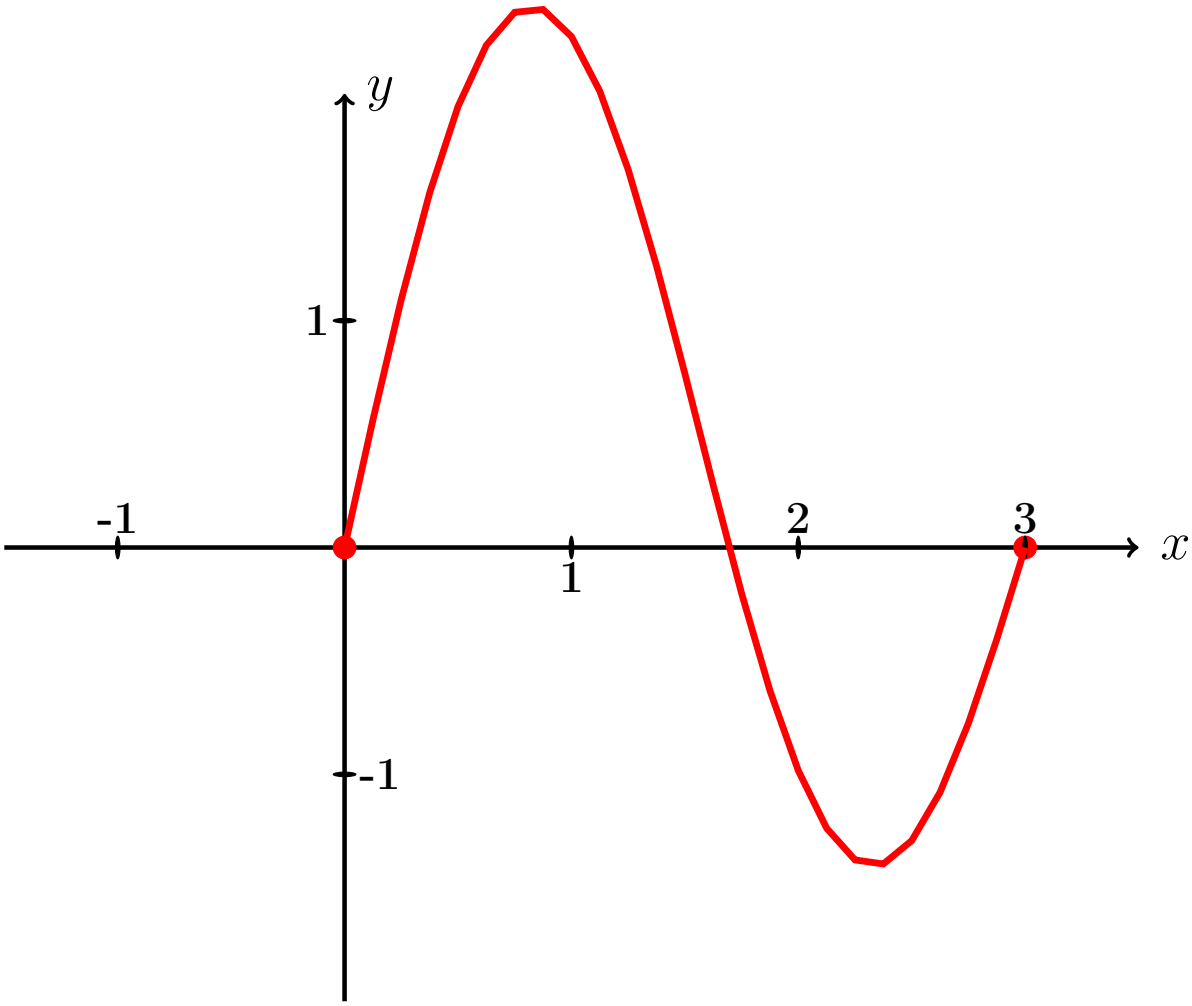


Рис.:

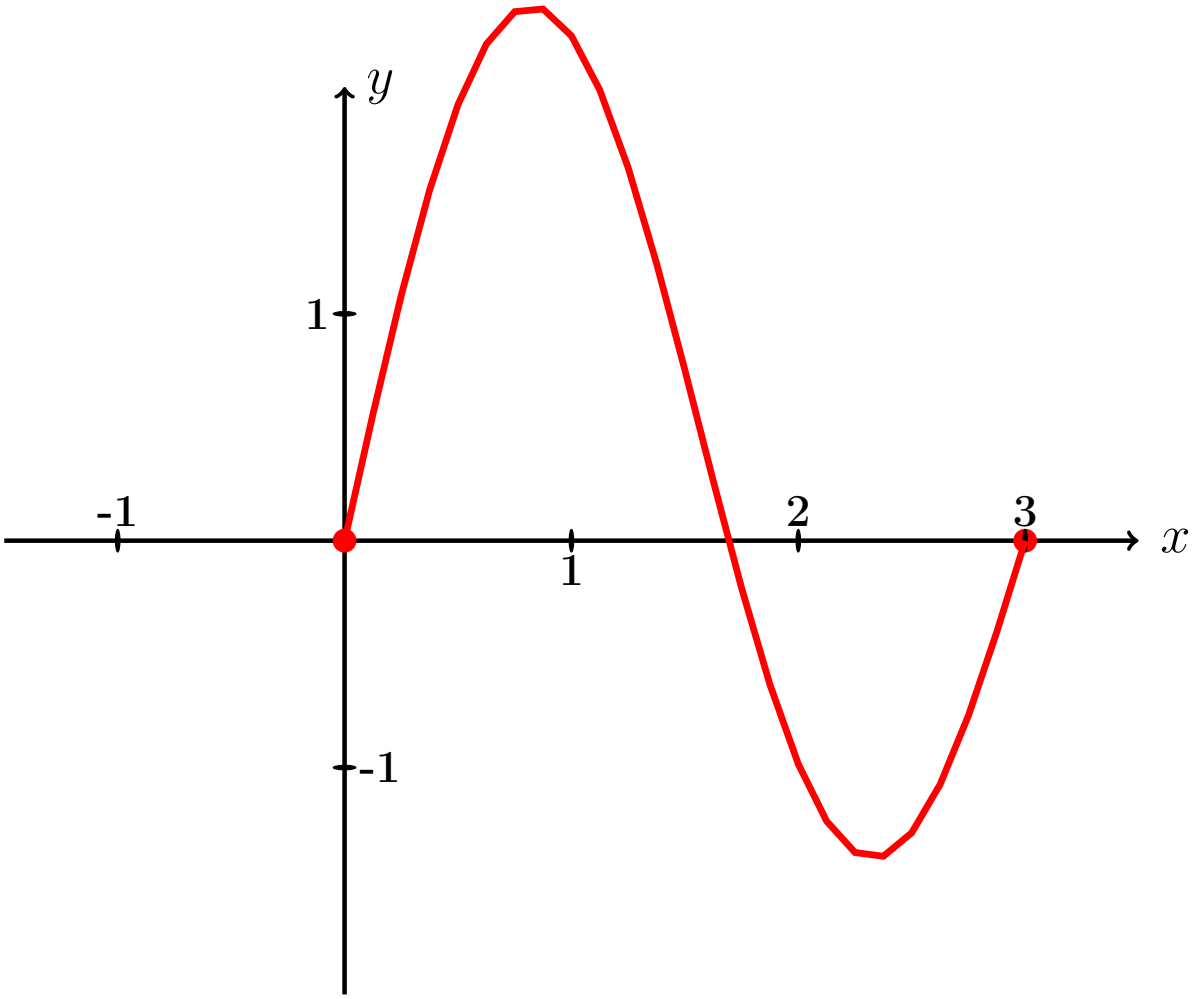


Рис.:

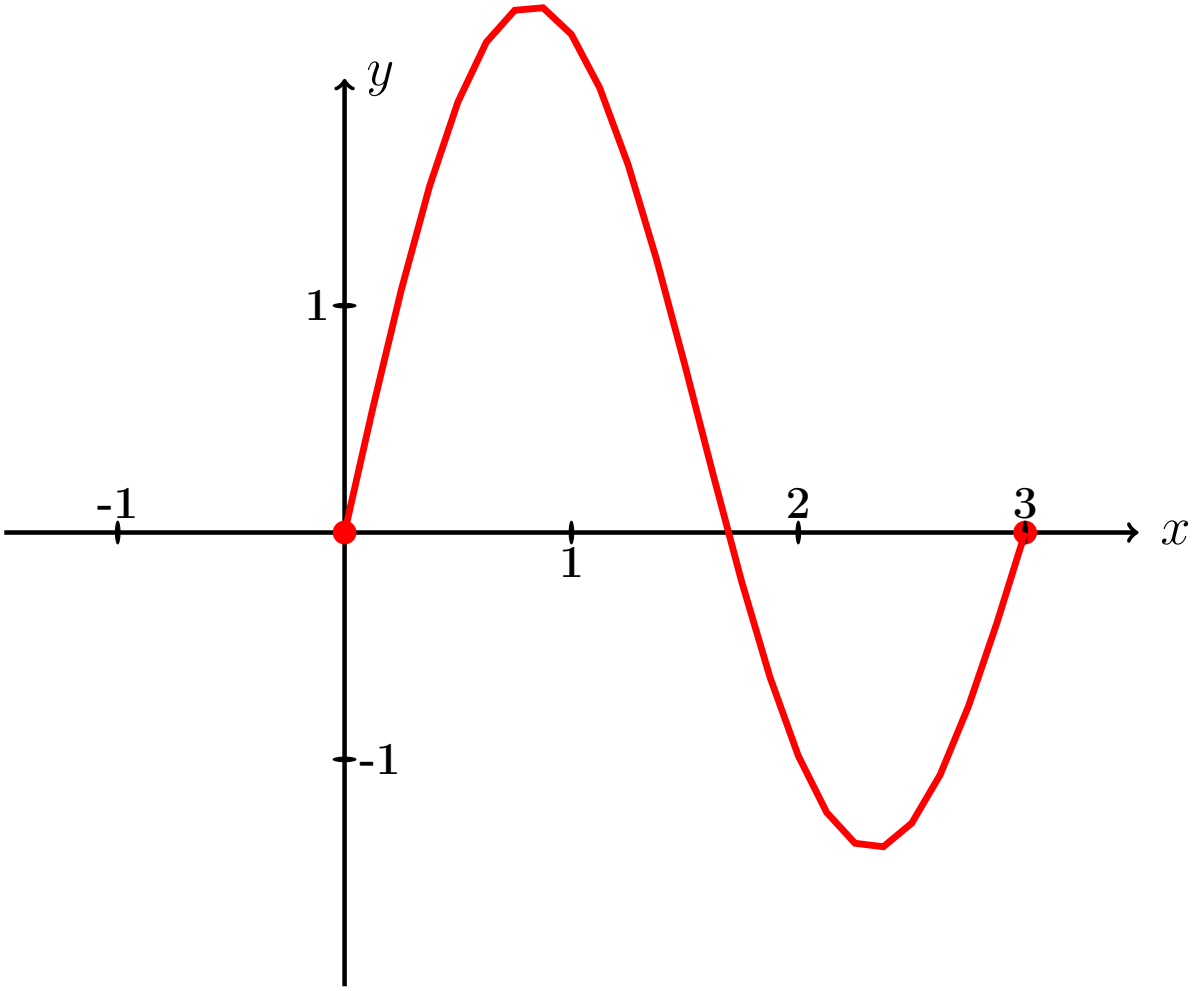


Рис.:

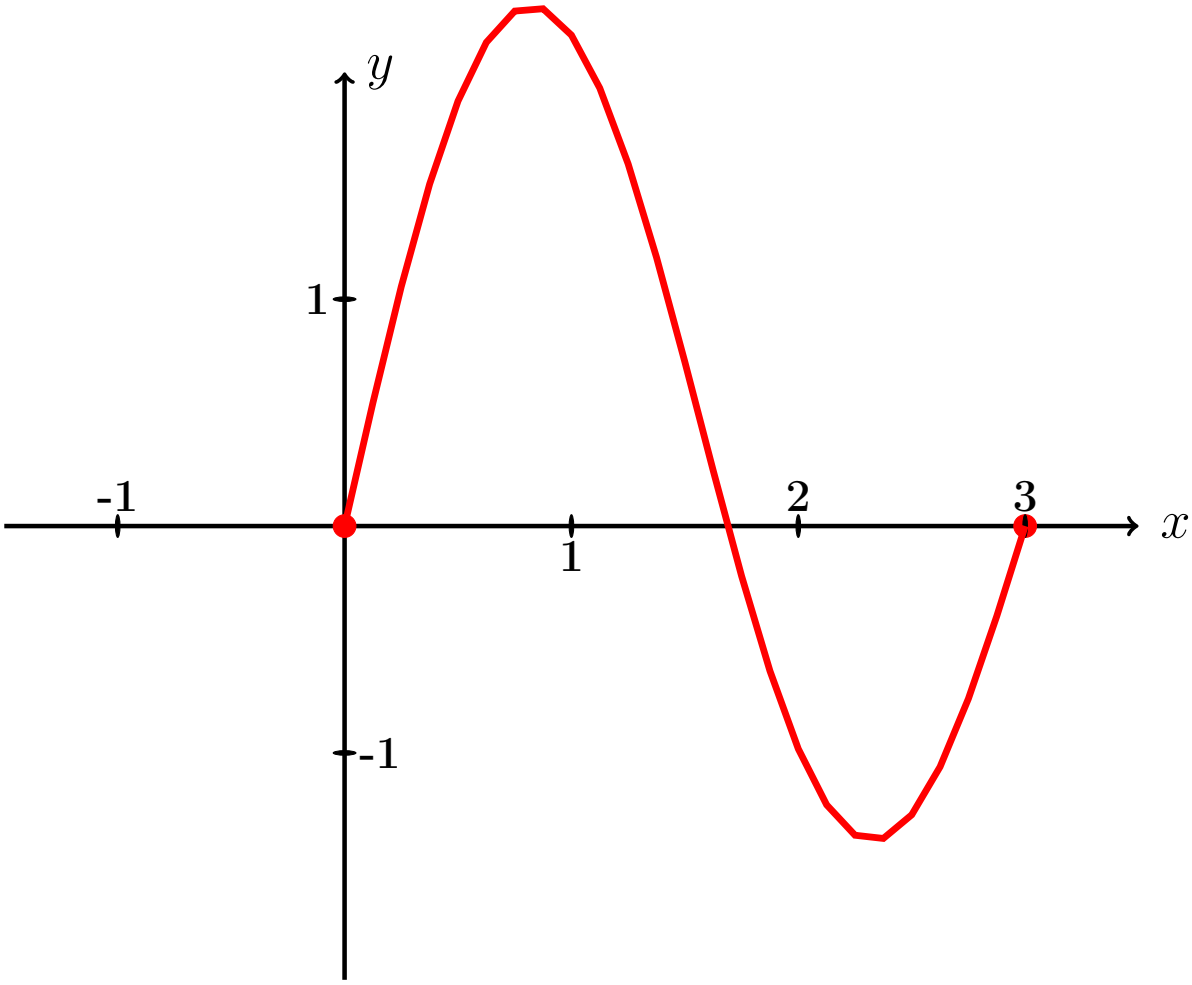


Рис.:

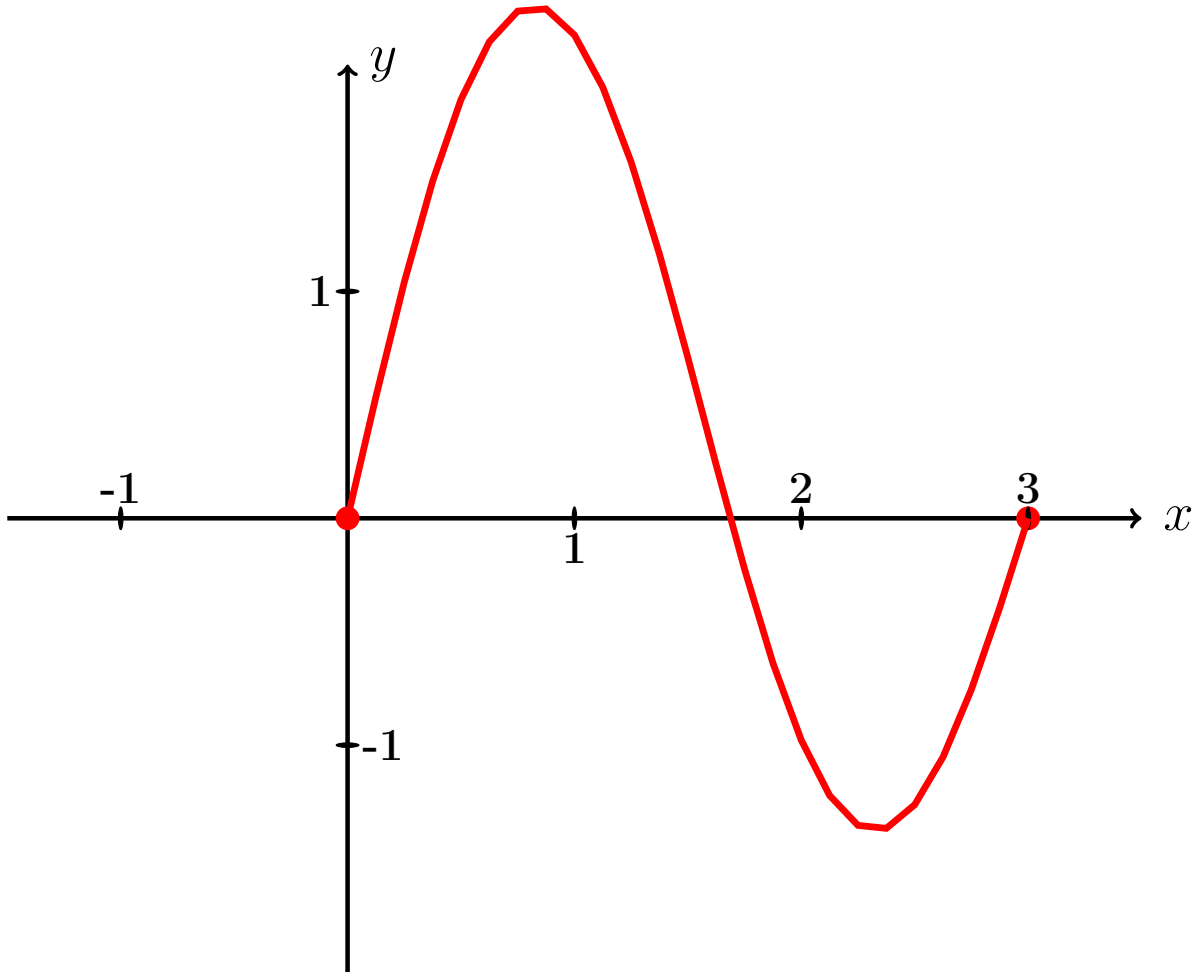


Рис.:

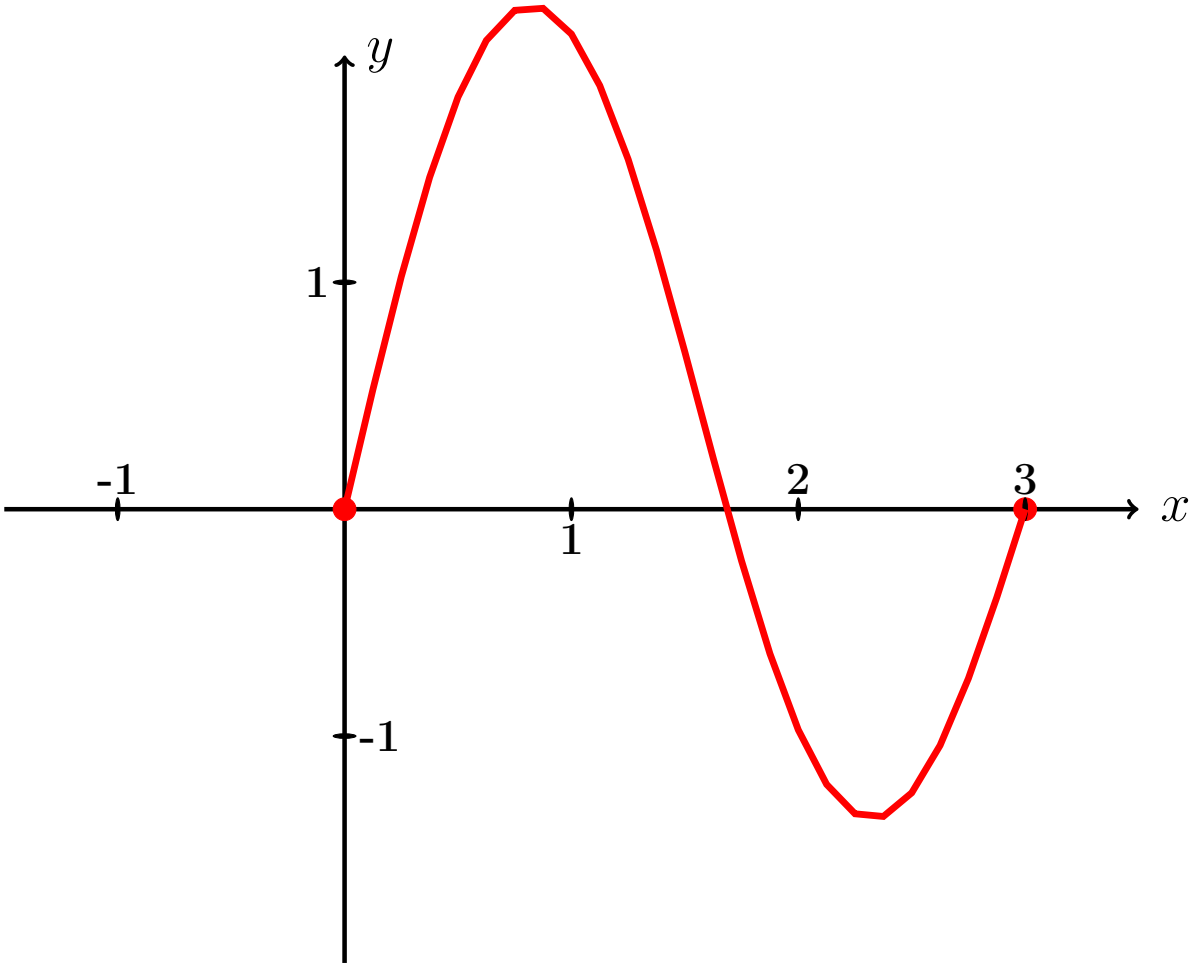


Рис.:

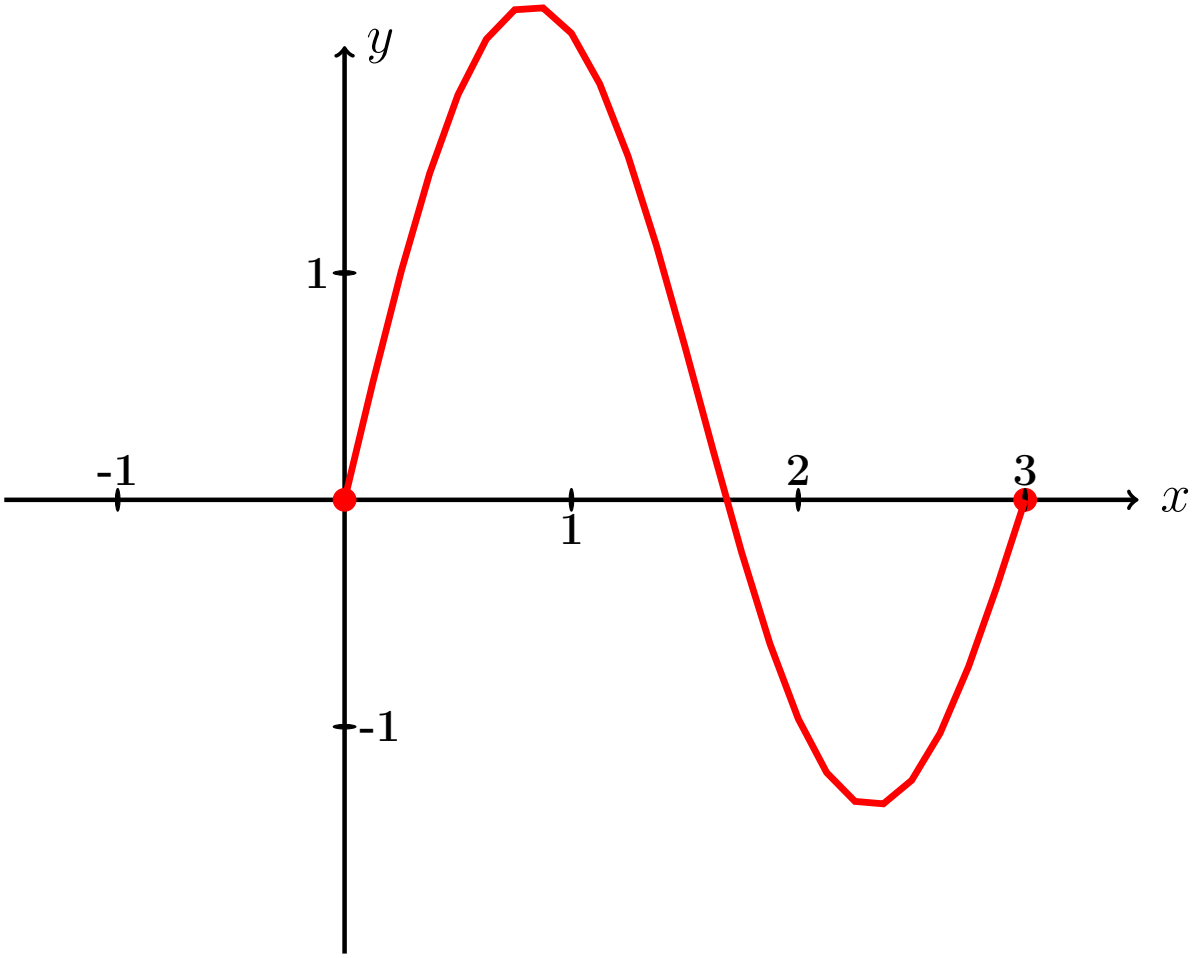


Рис.:

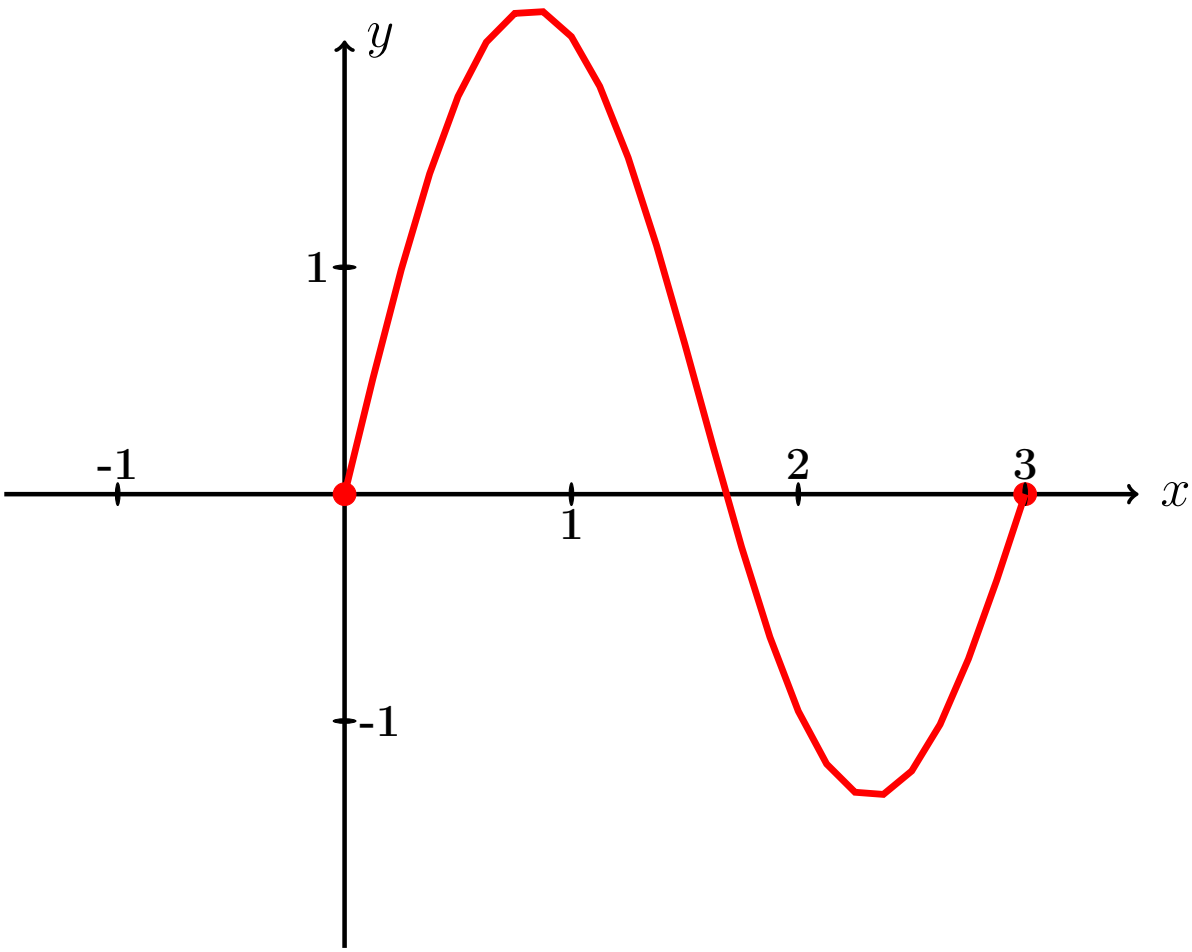


Рис.:

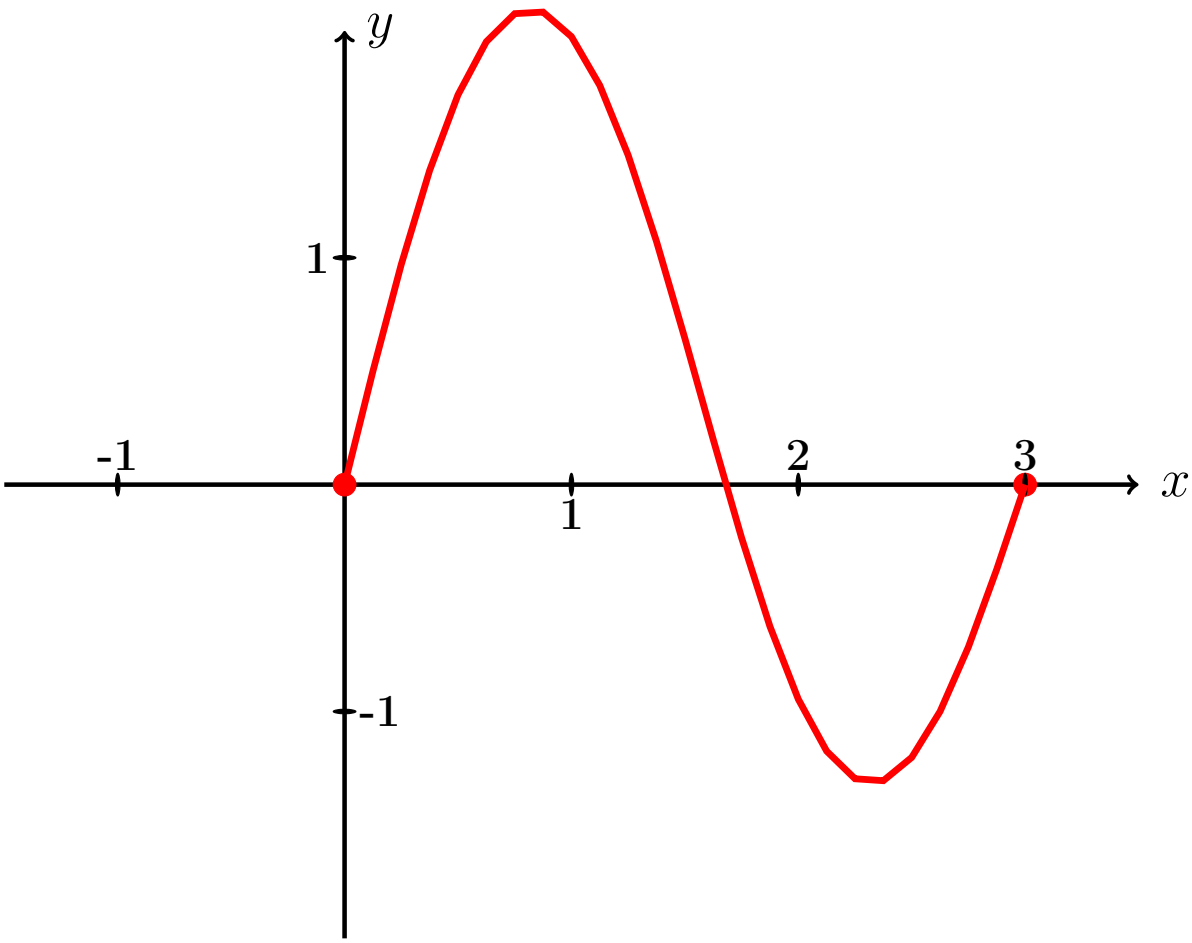


Рис.:

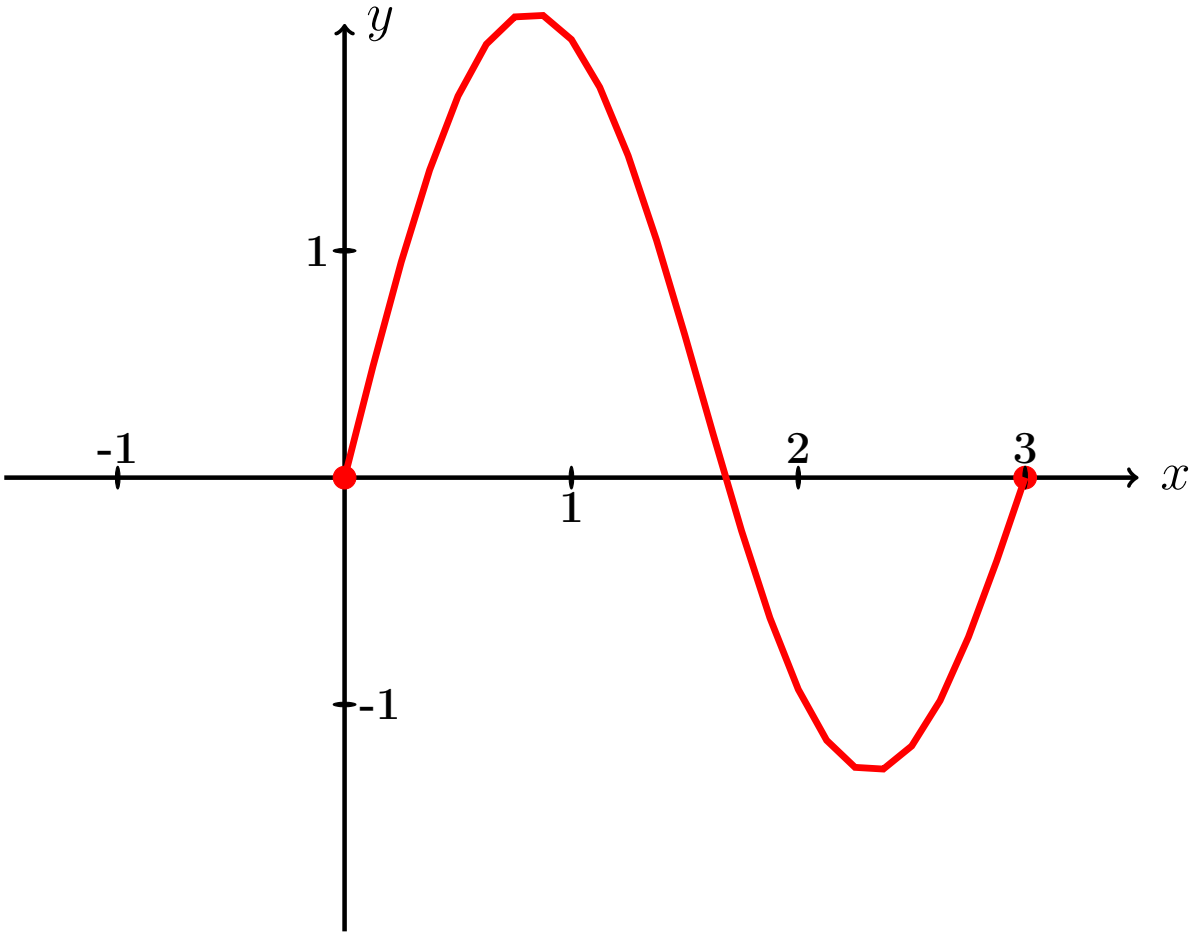


Рис.:

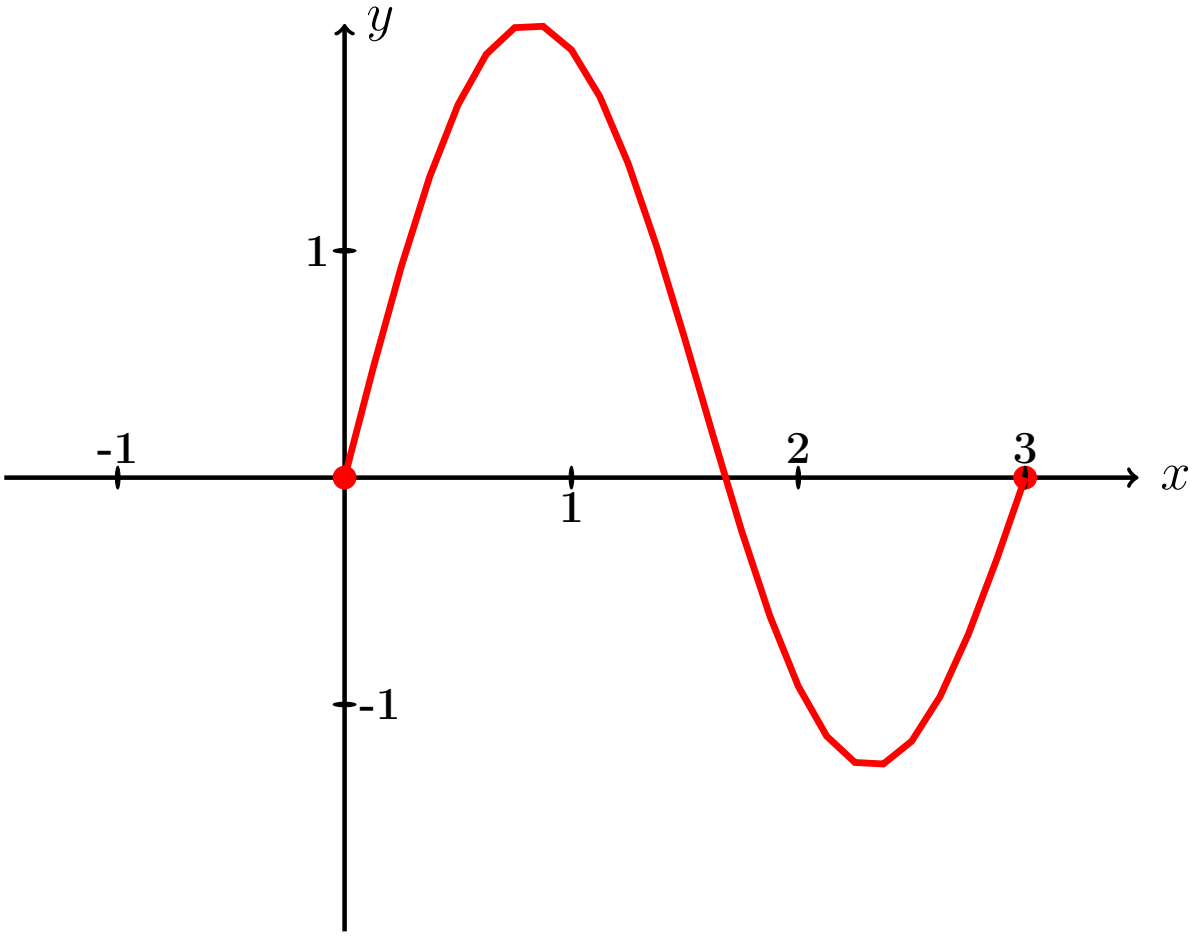


Рис.:

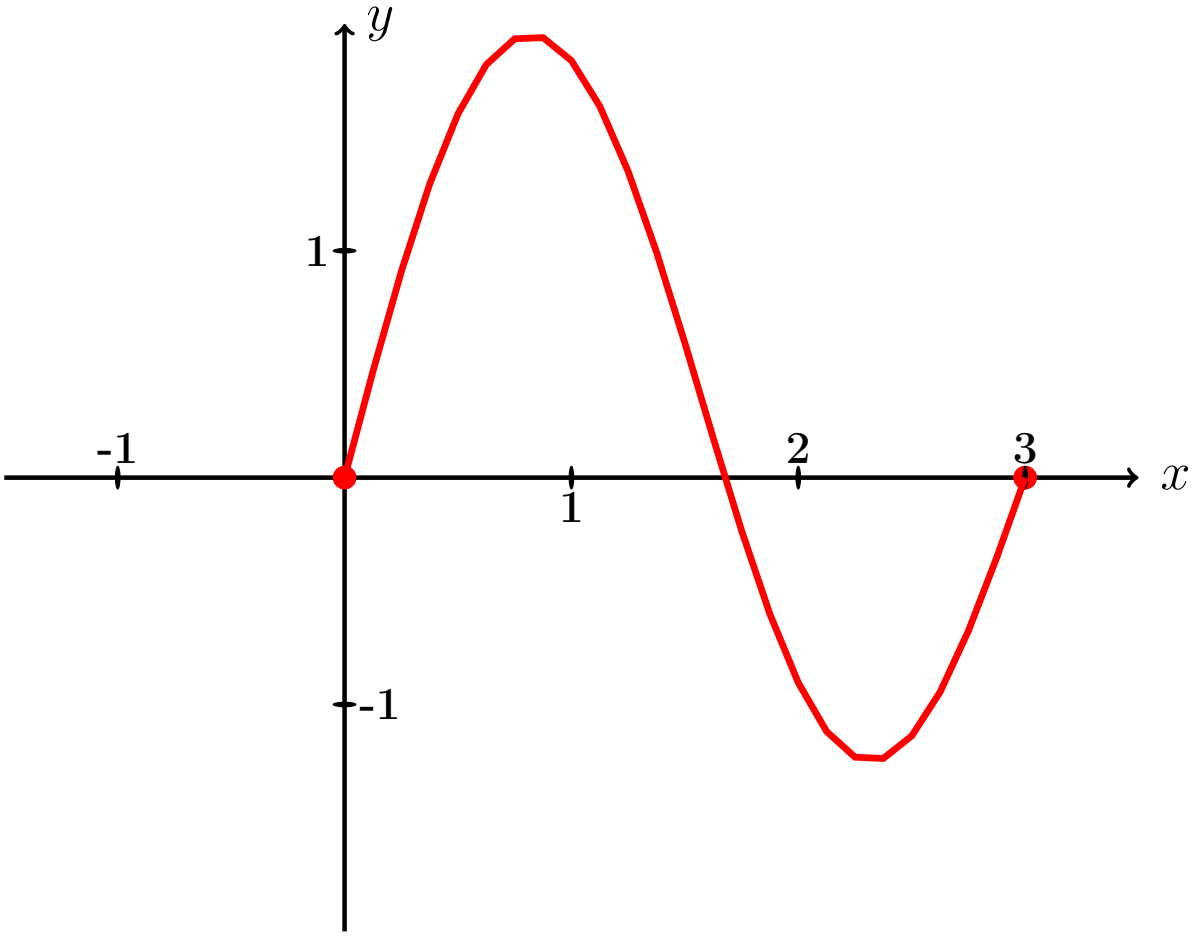


Рис.:

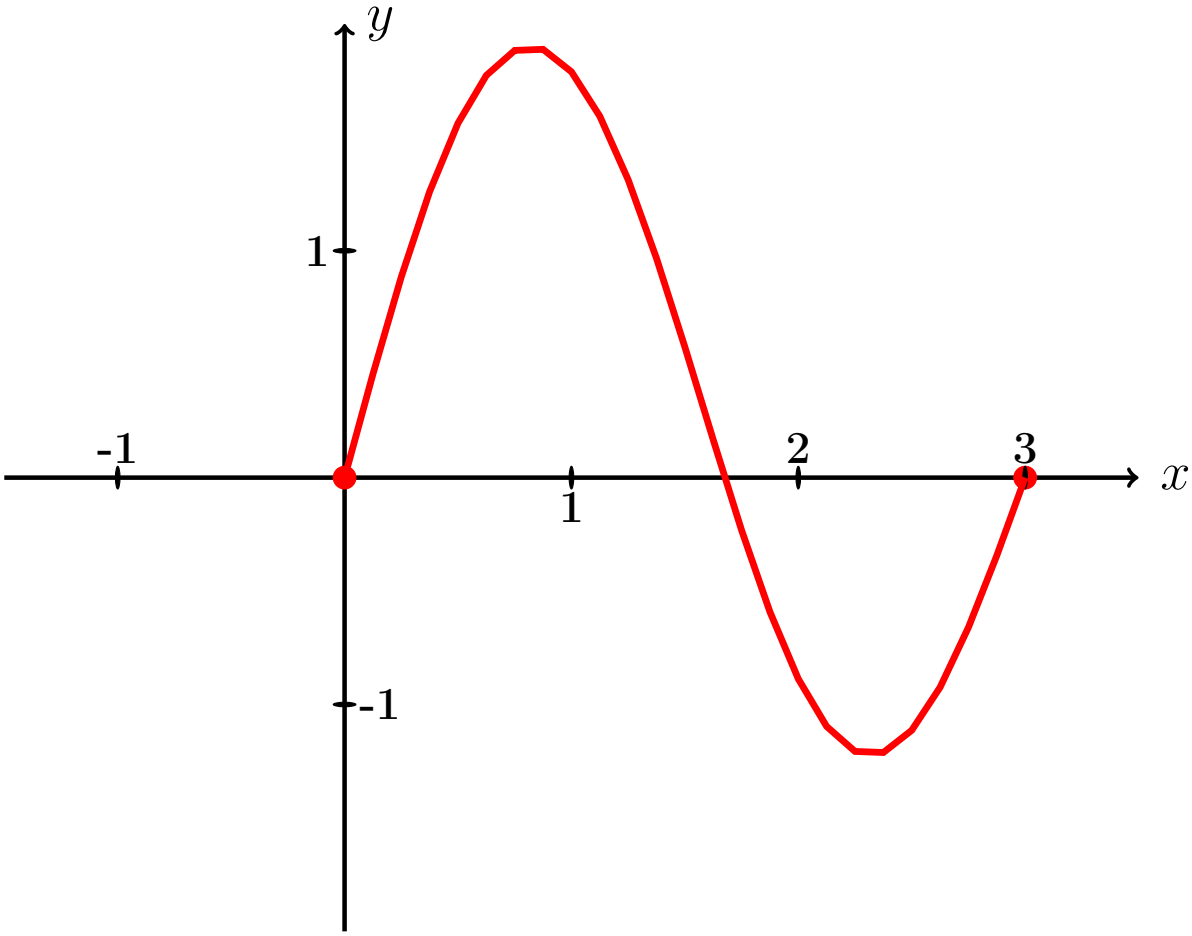


Рис.:

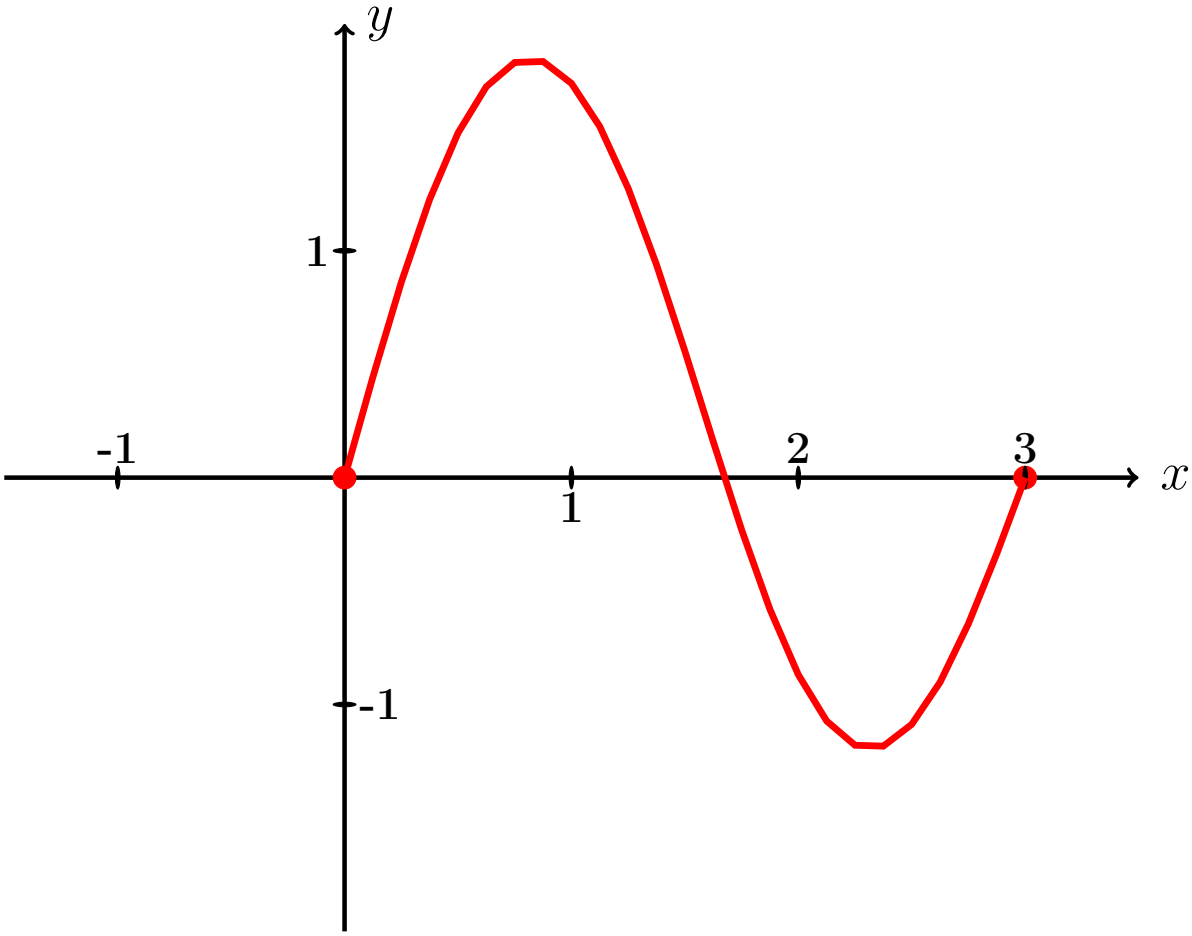


Рис.:

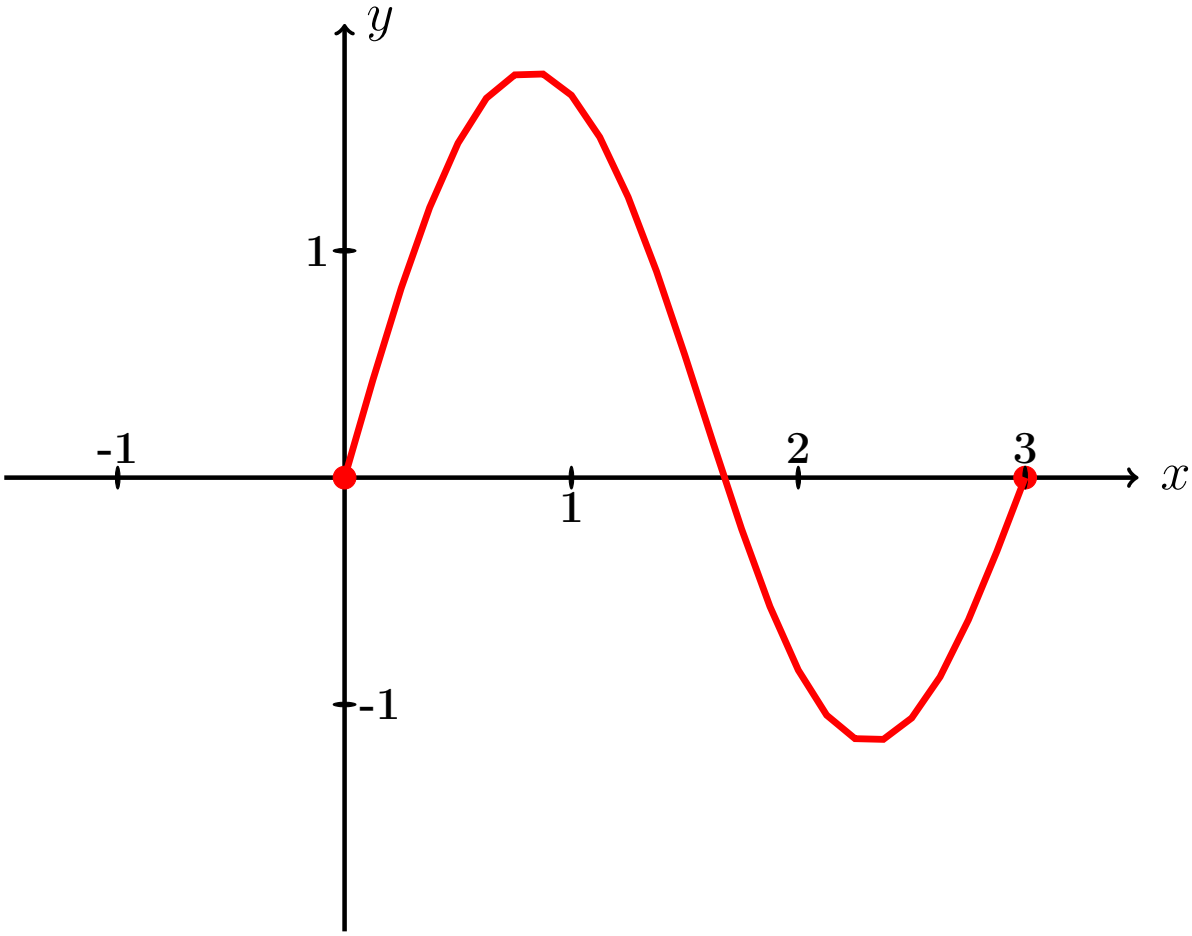


Рис.:

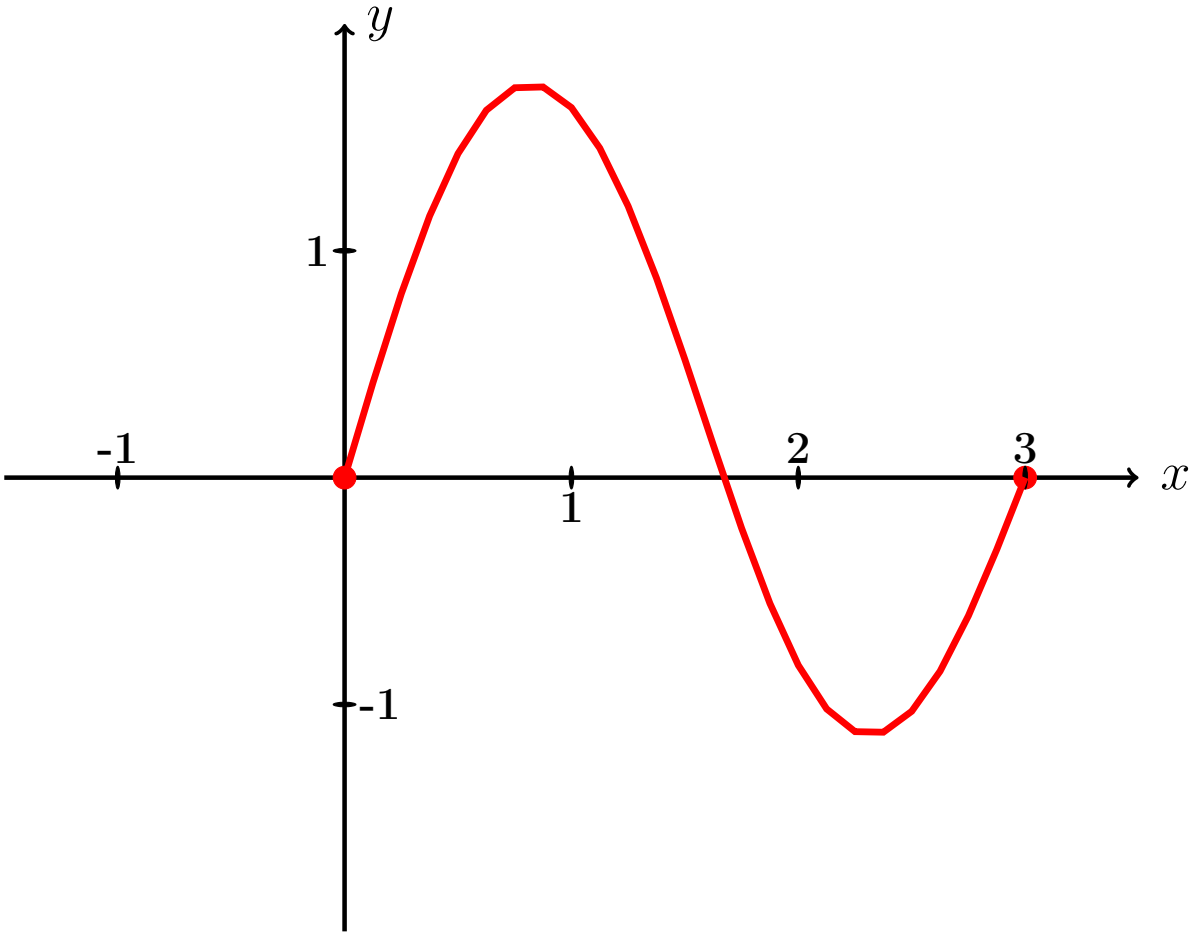


Рис.:

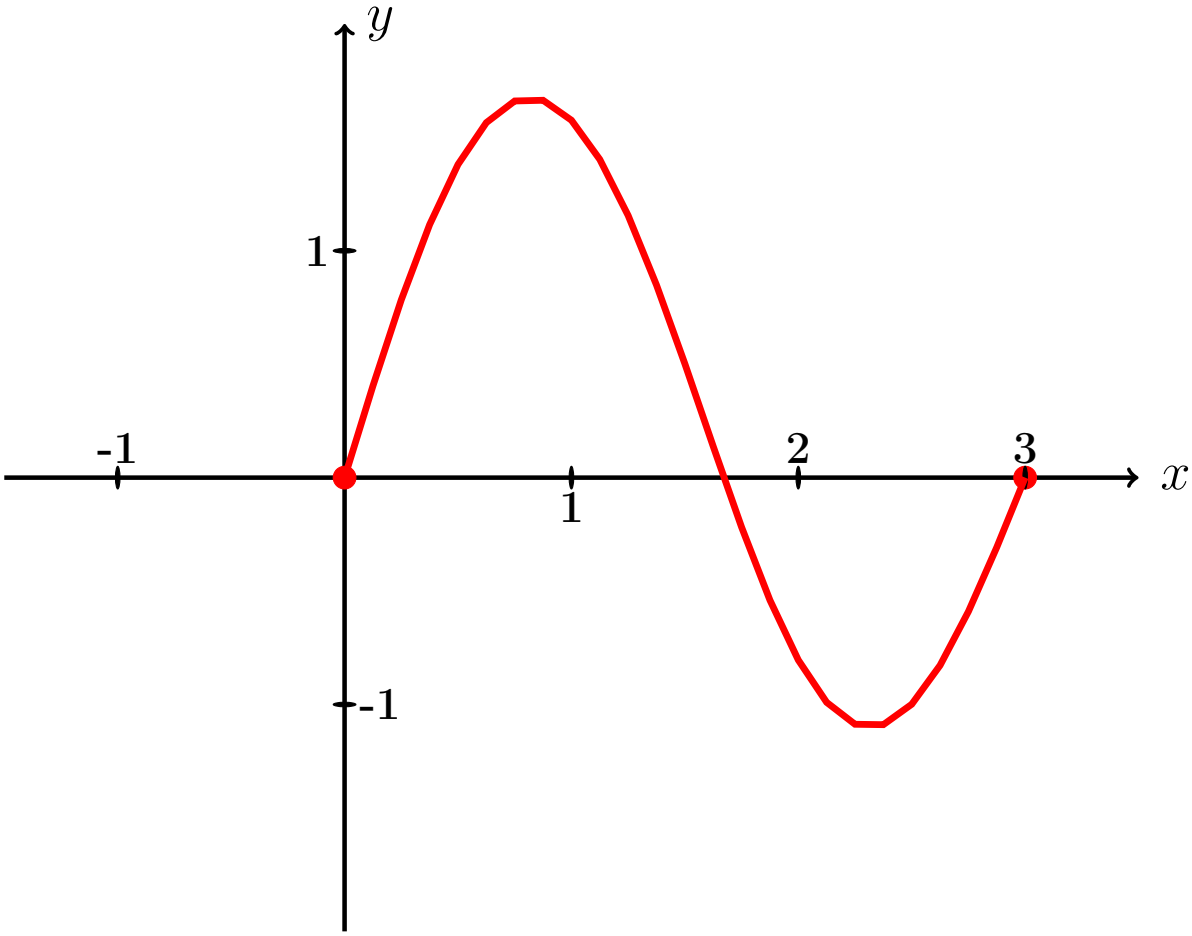


Рис.:

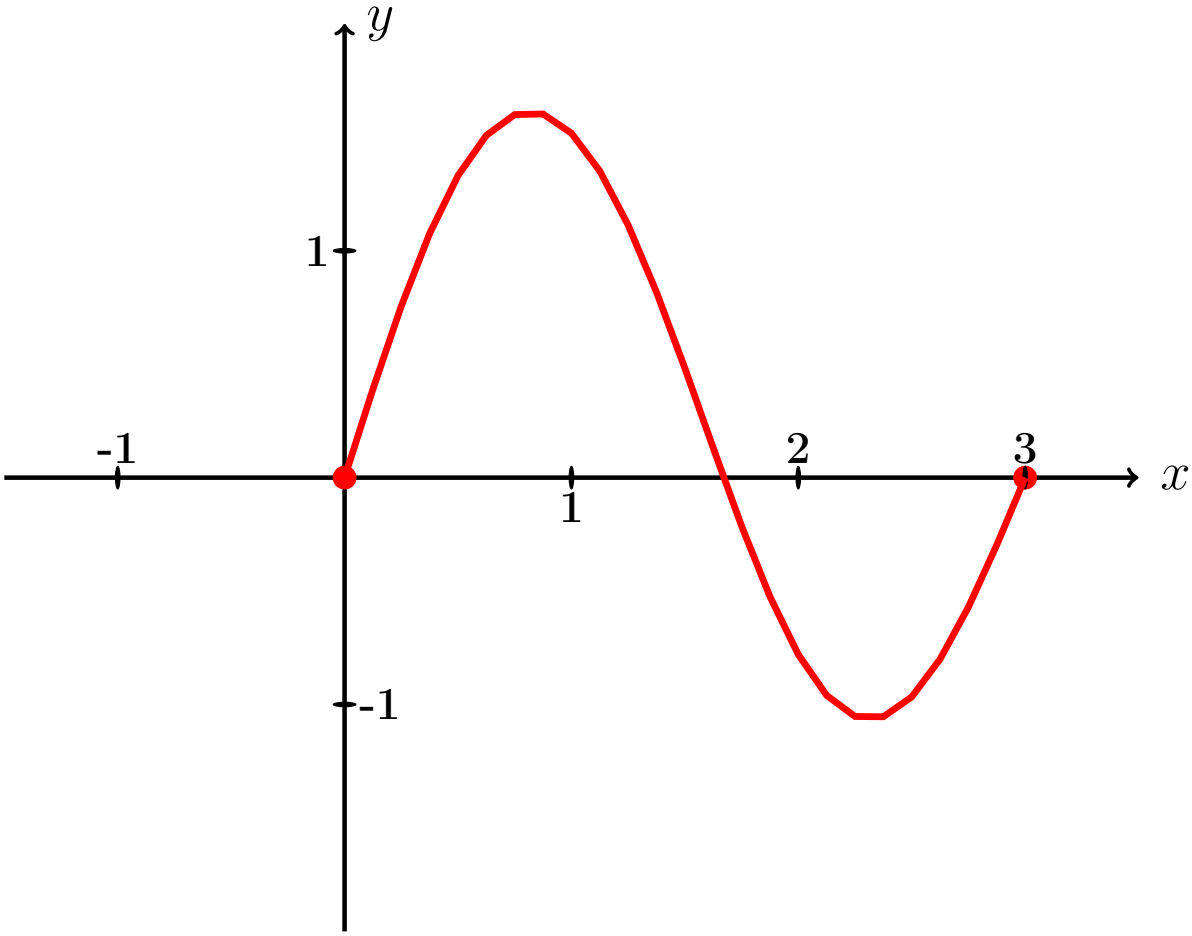


Рис.:

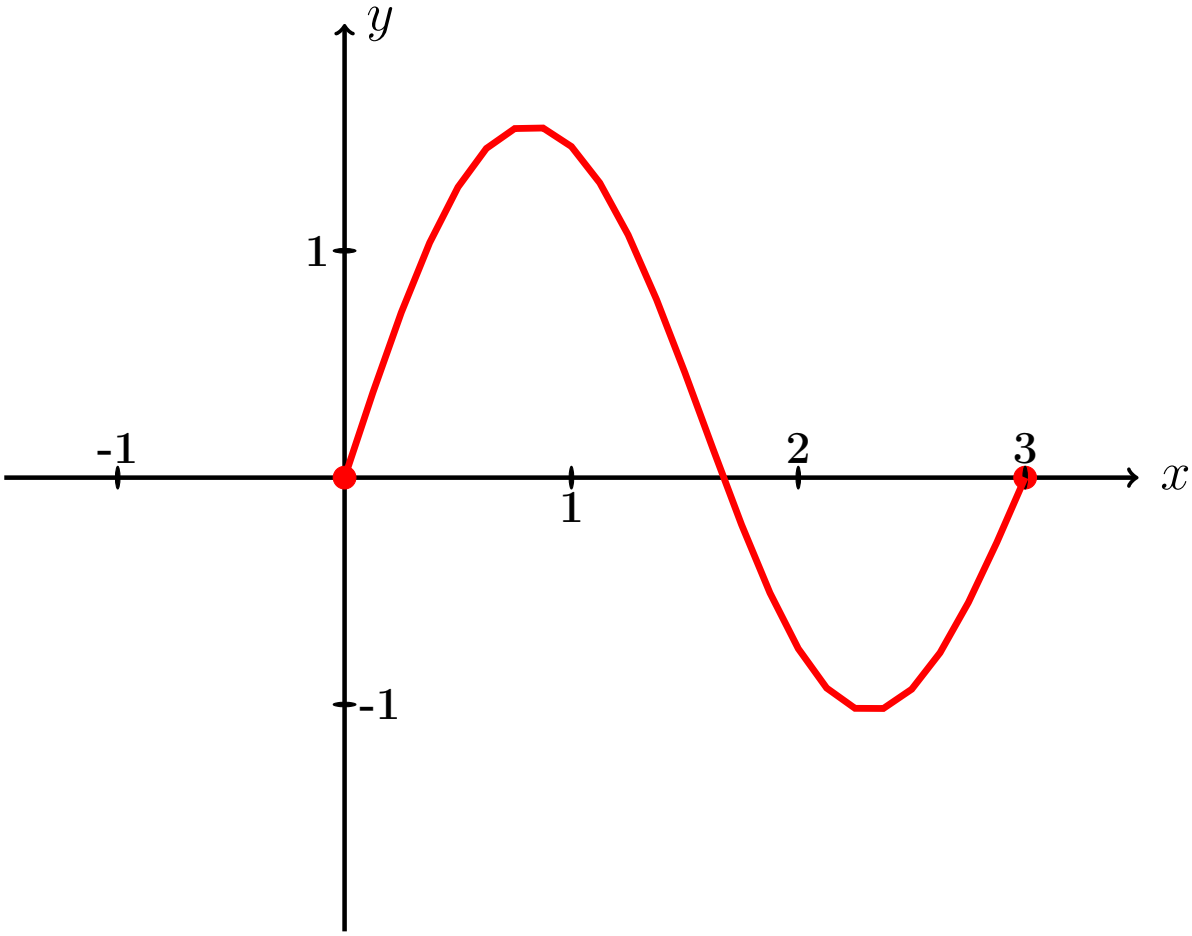


Рис.:

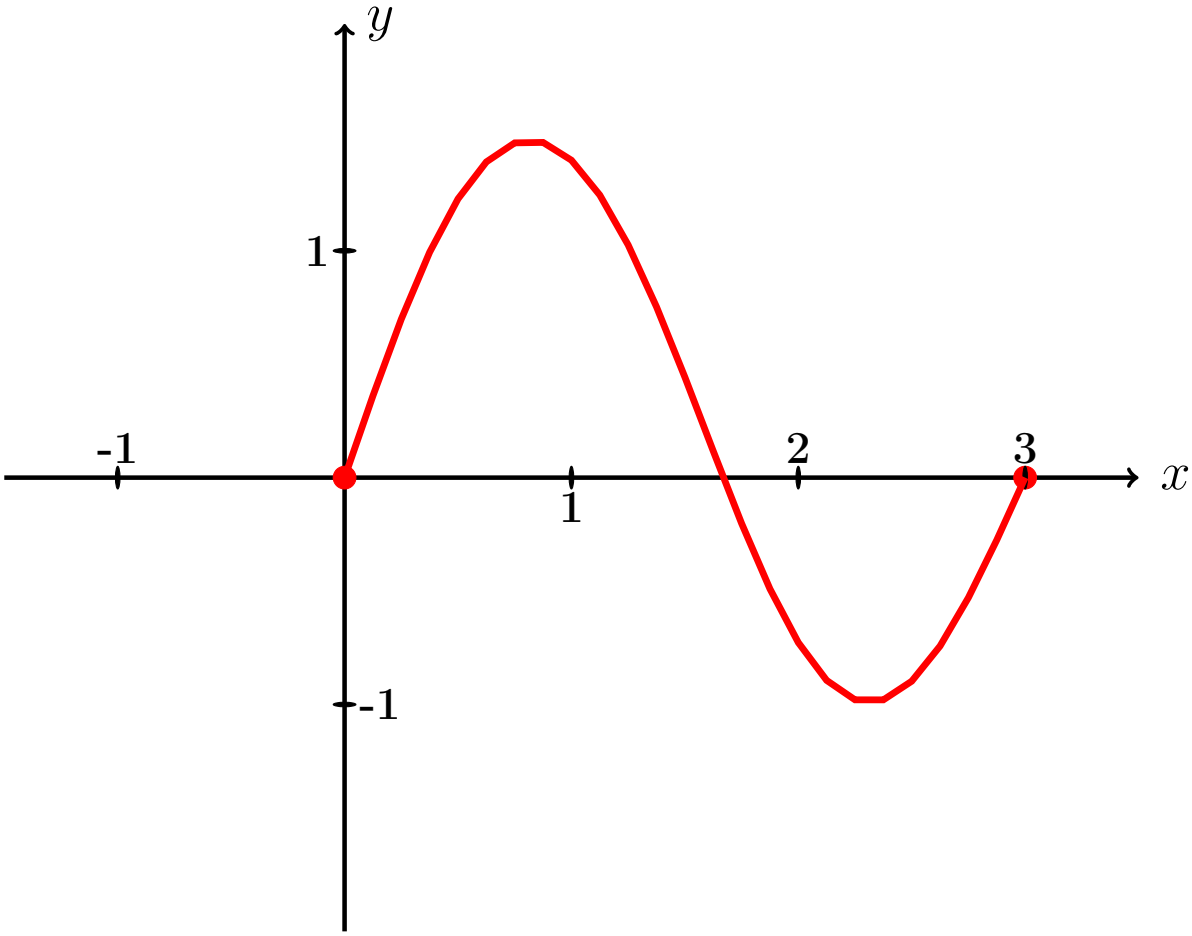


Рис.:

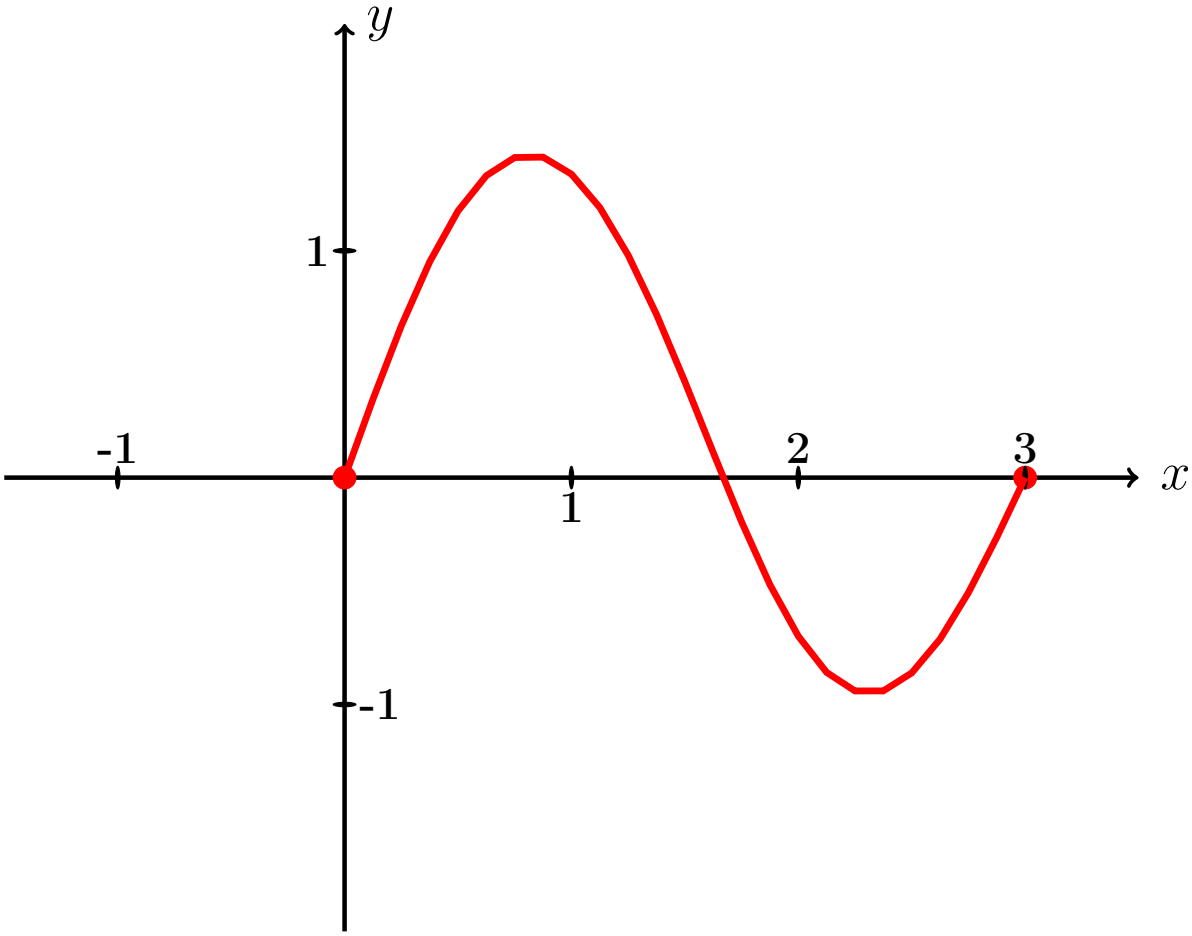


Рис.:

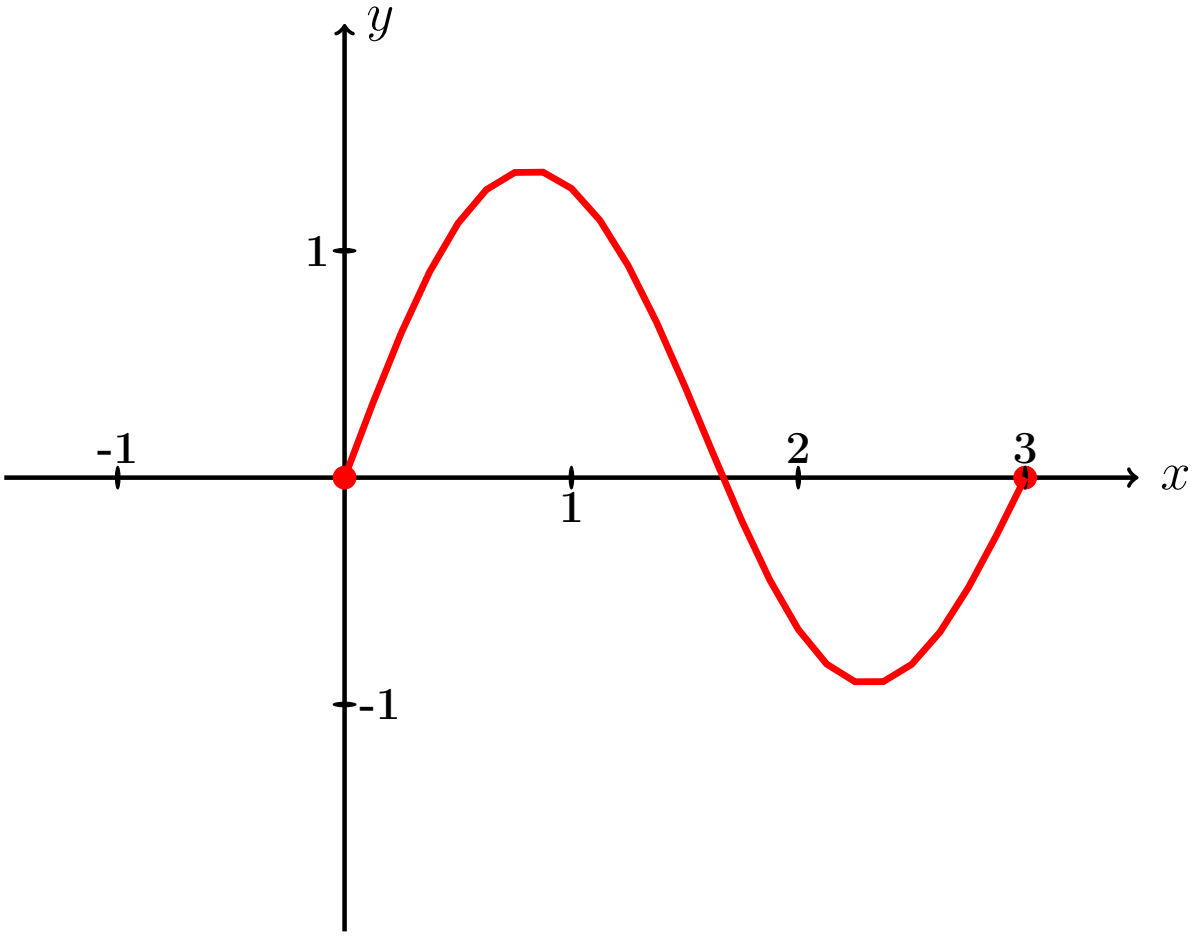


Рис.:

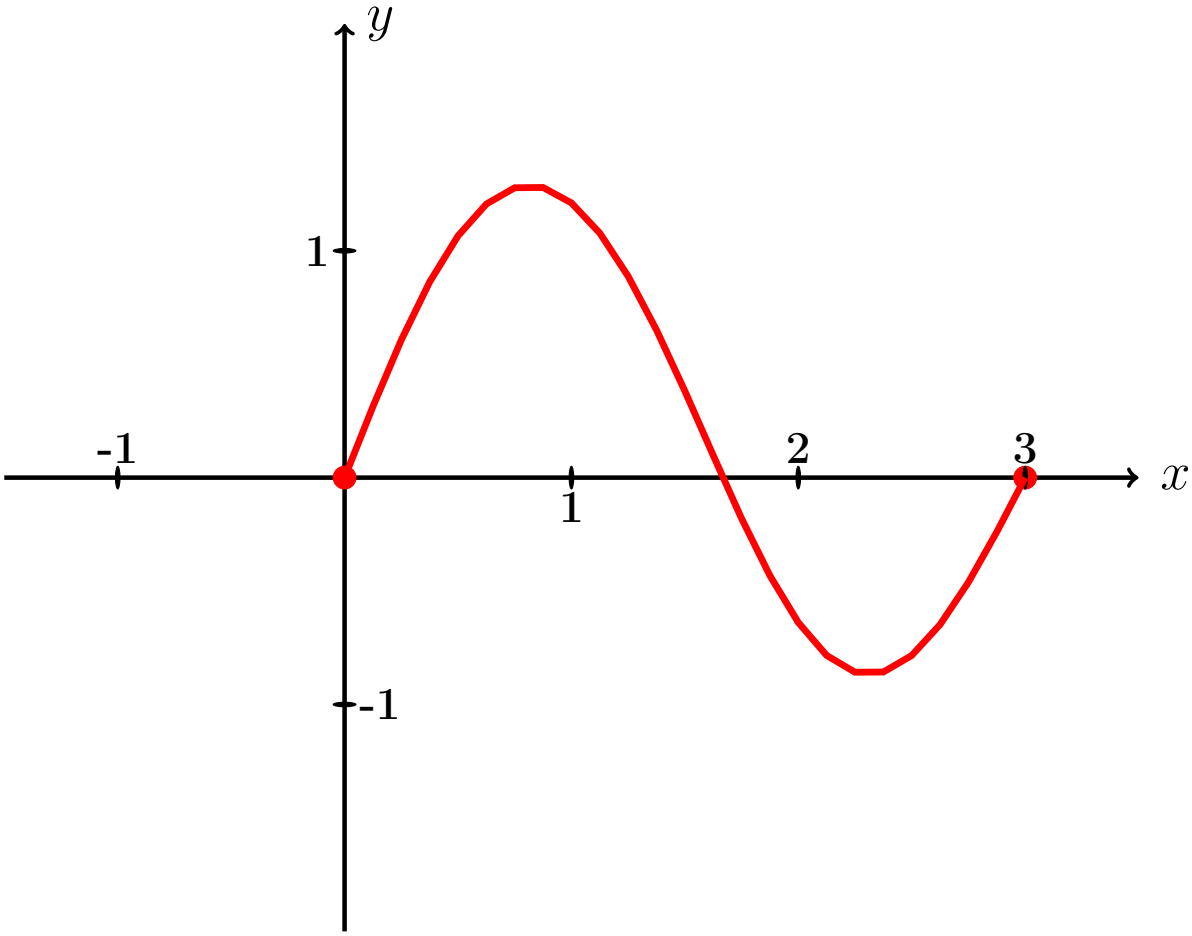


Рис.:

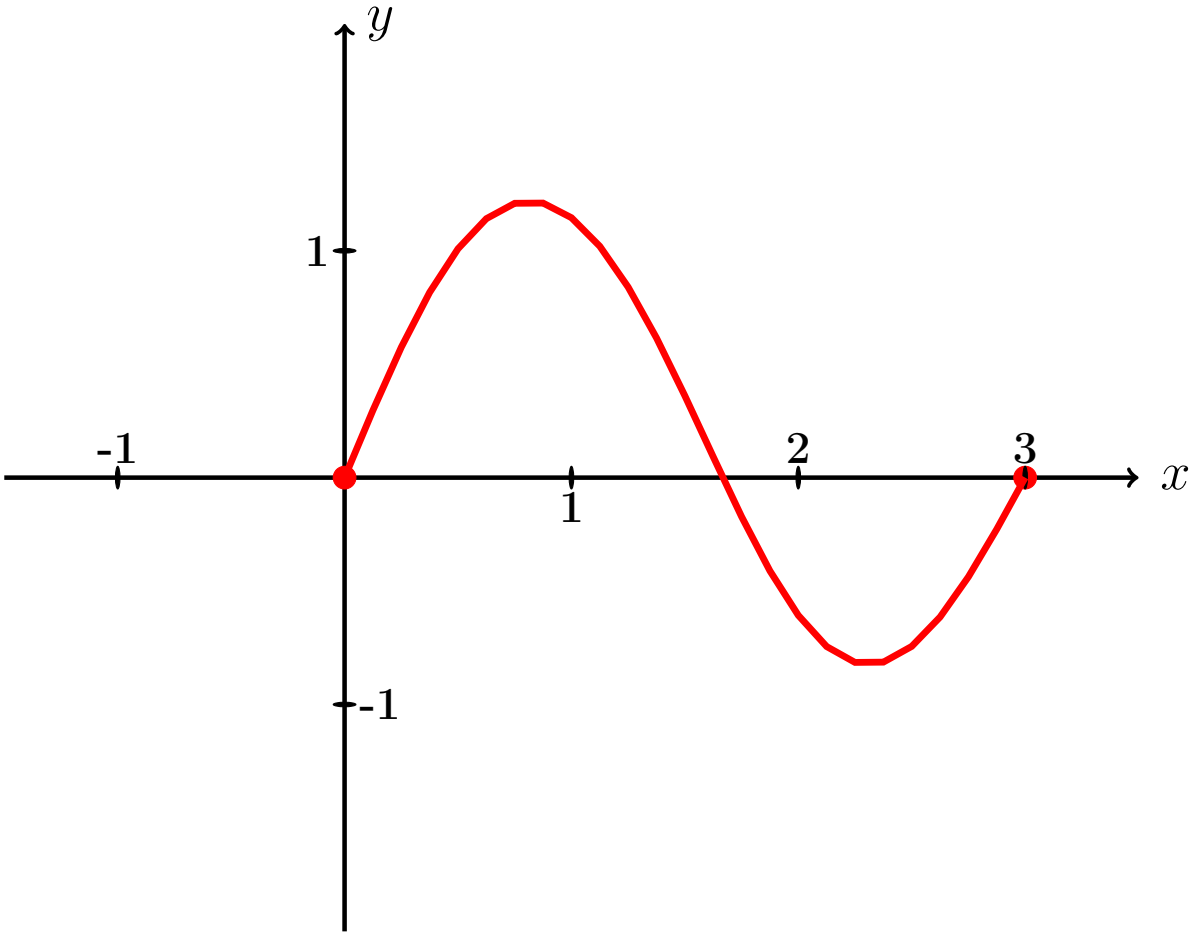


Рис.:

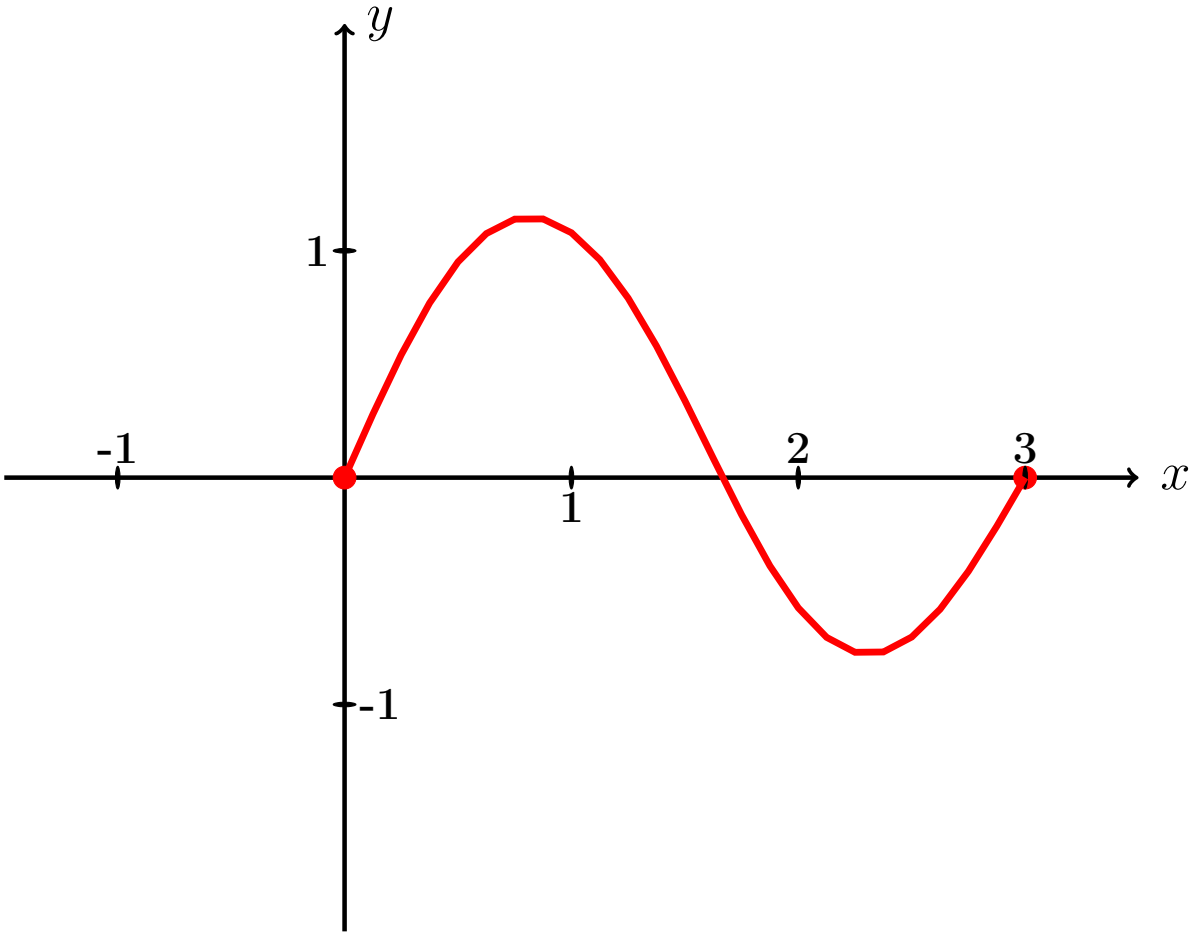


Рис.:

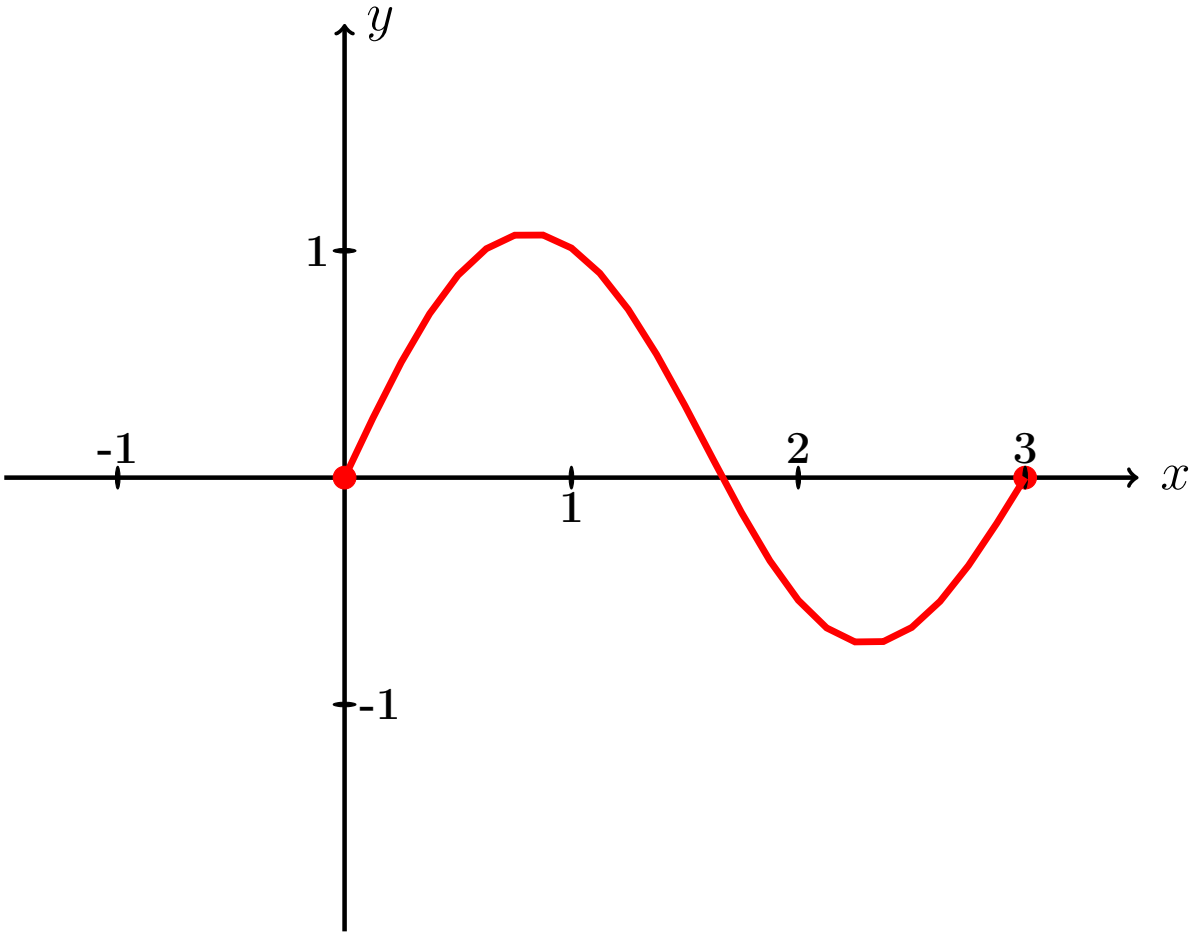


Рис.:

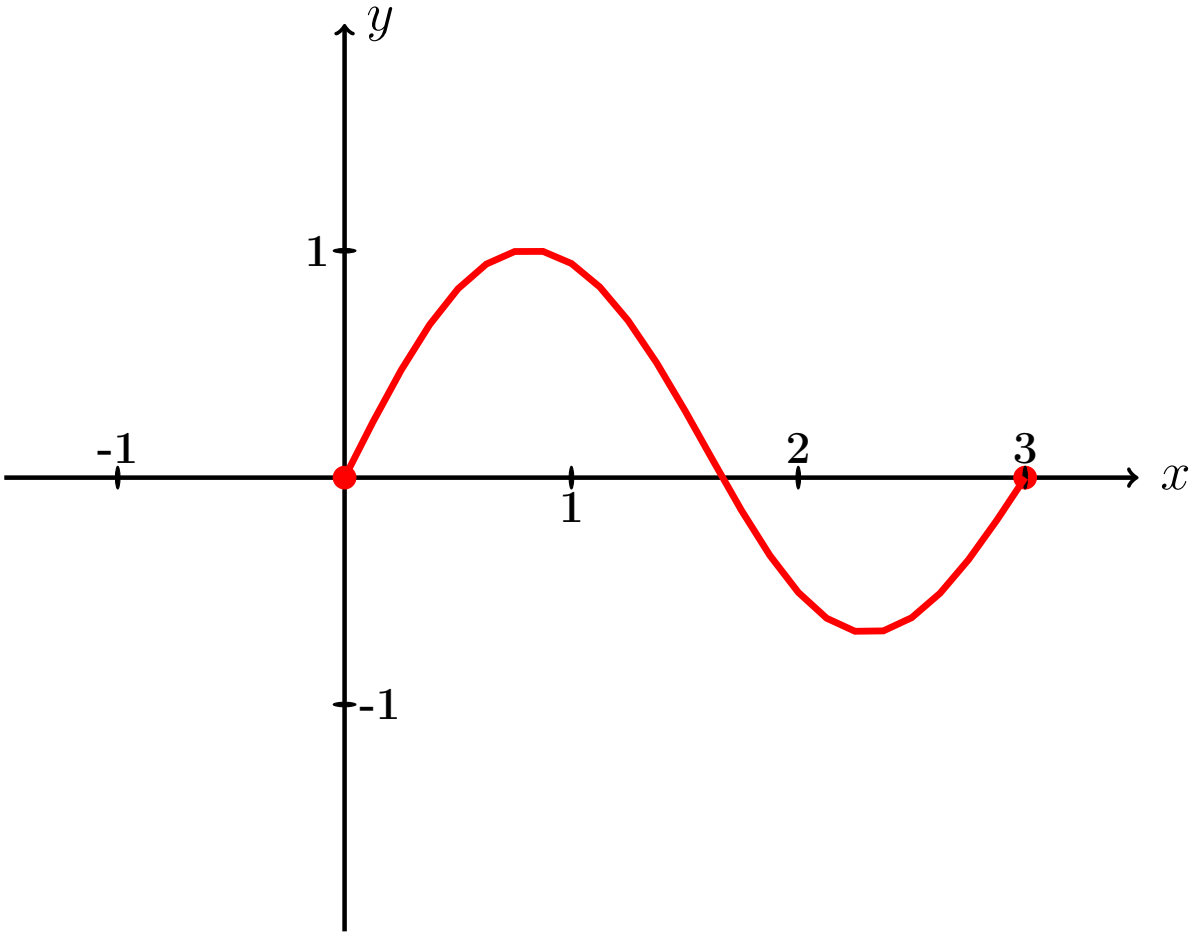


Рис.:

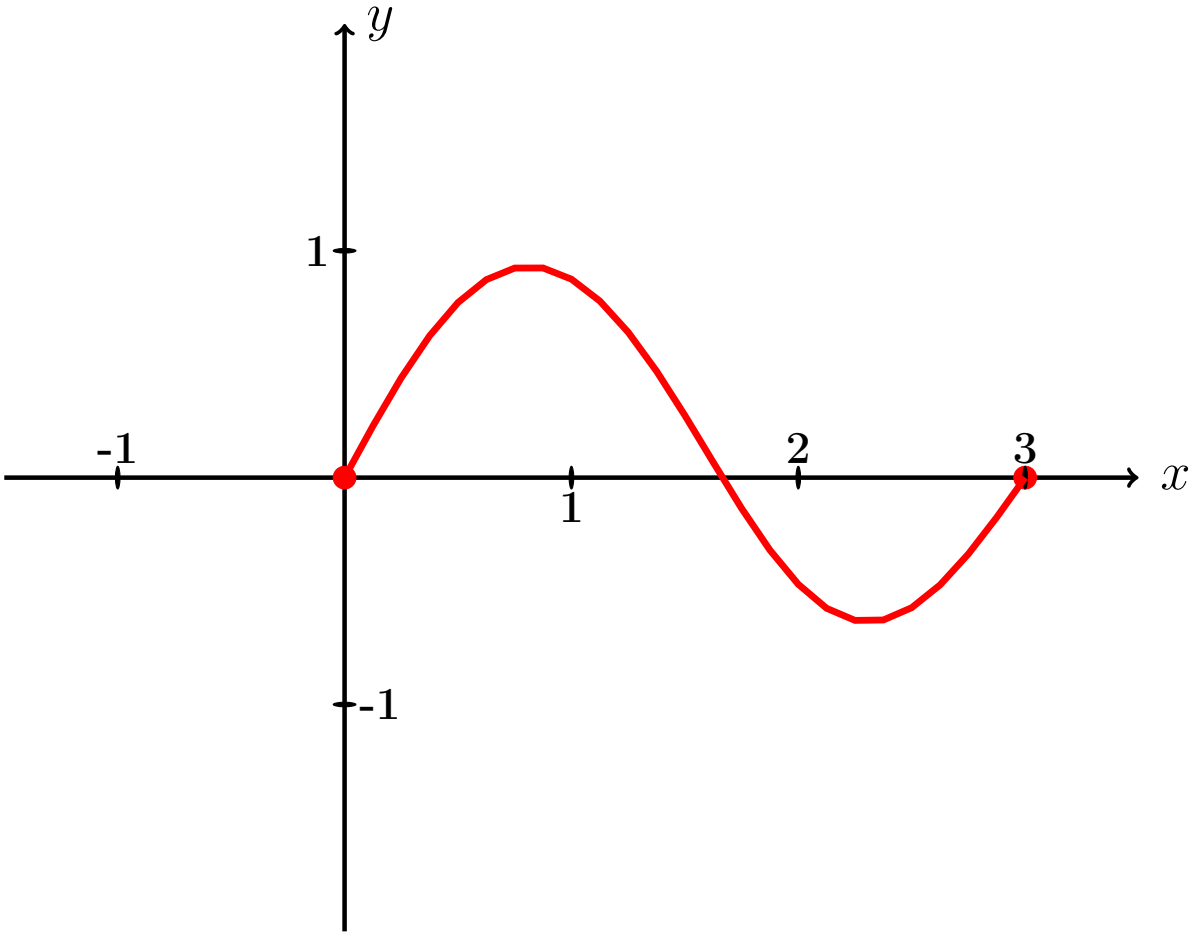


Рис.:

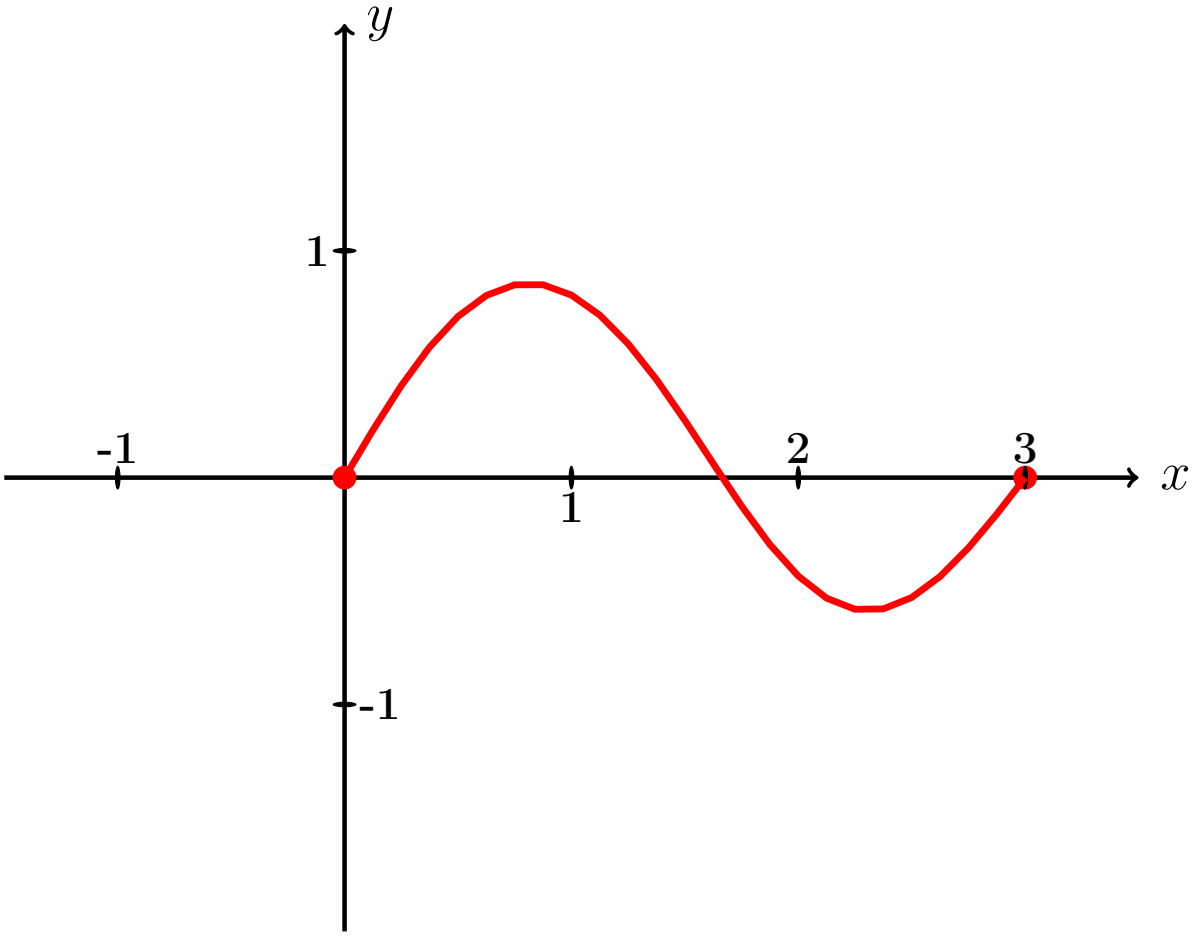


Рис.:

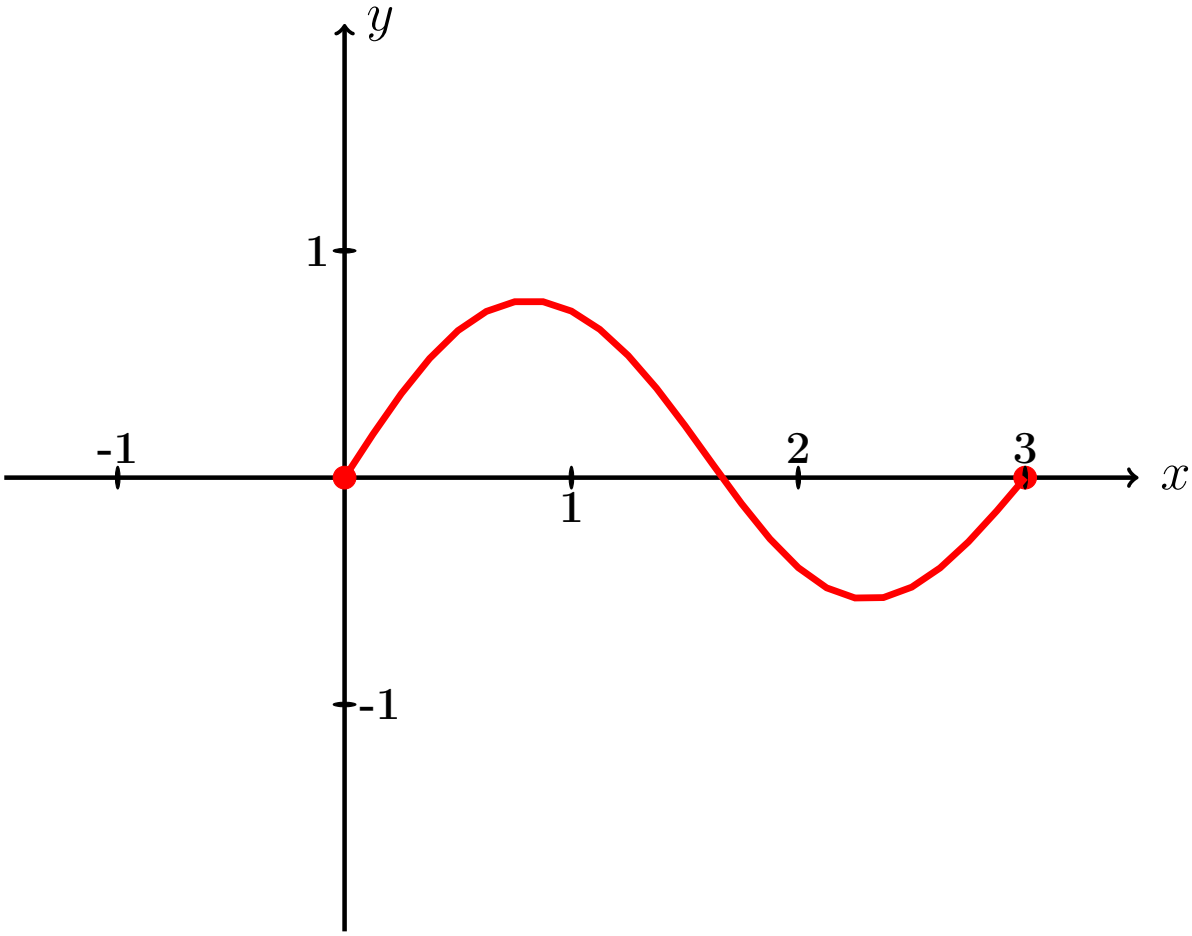


Рис.:

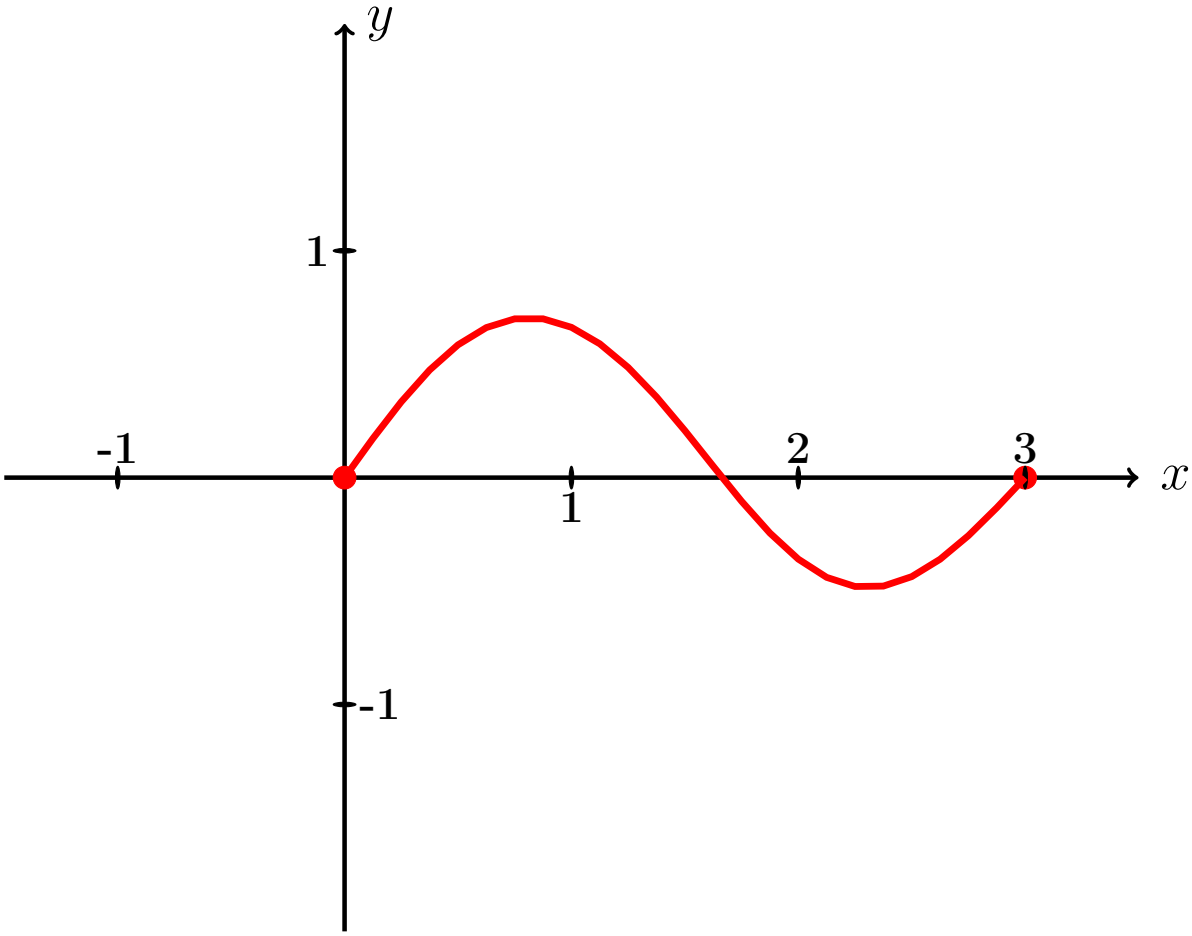


Рис.:

Пример П5 анимация возврат огл

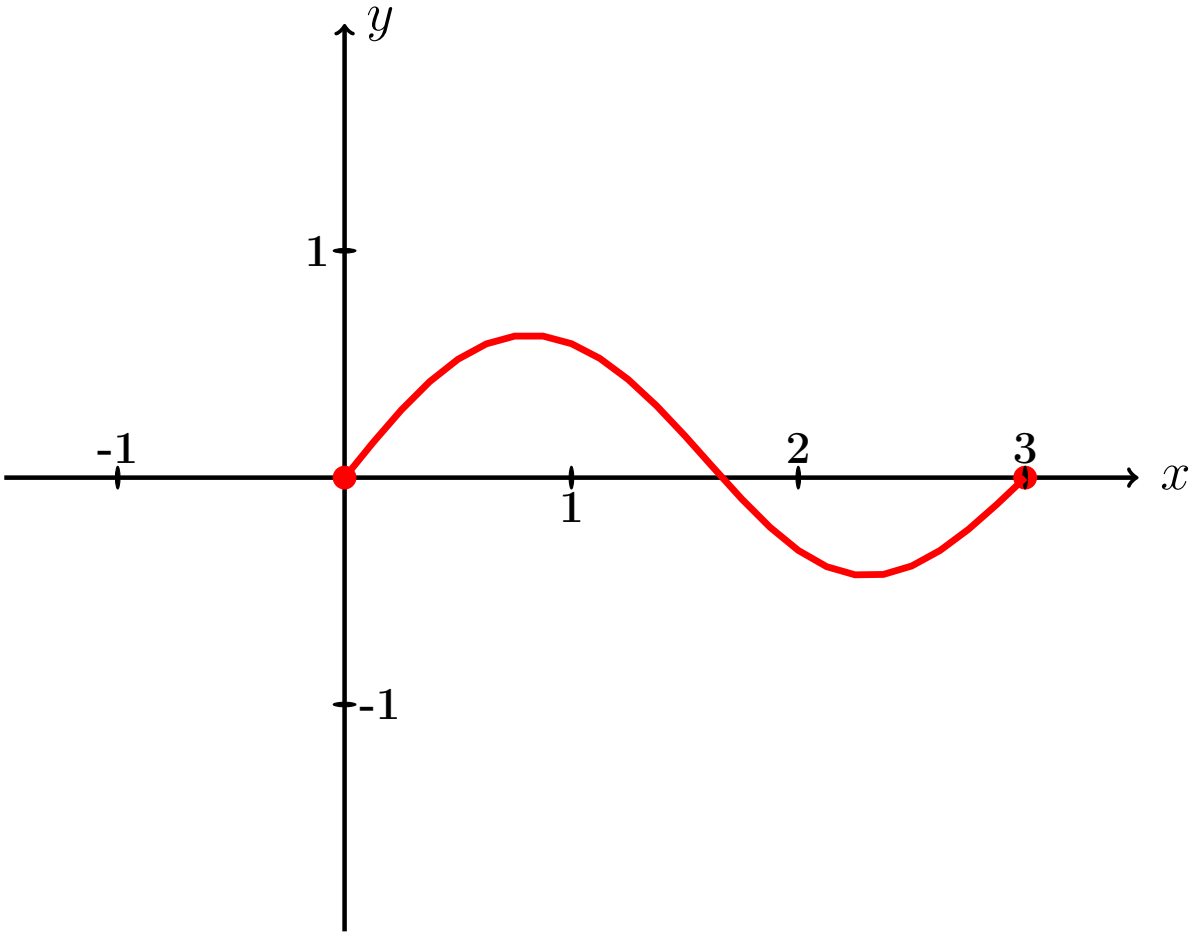


Рис.:

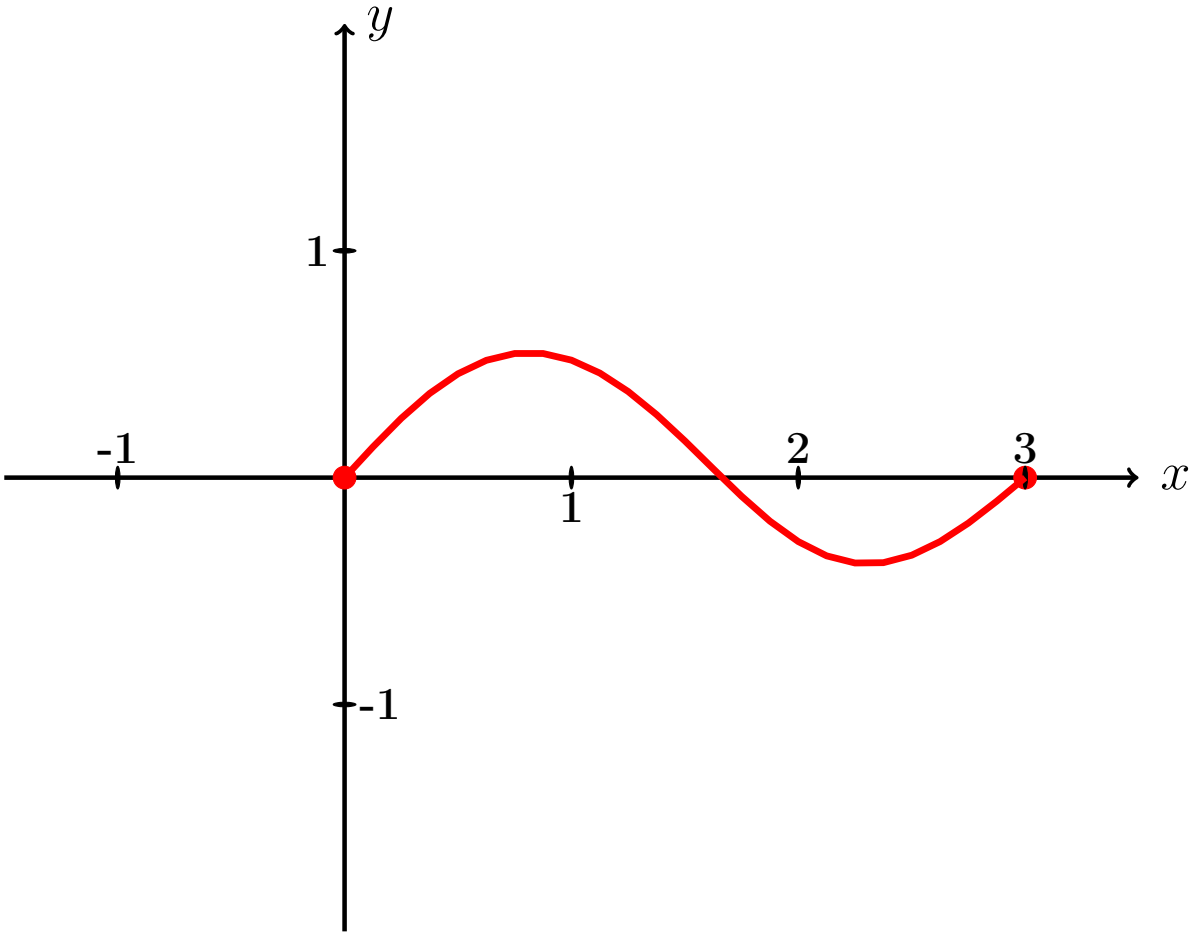


Рис.:

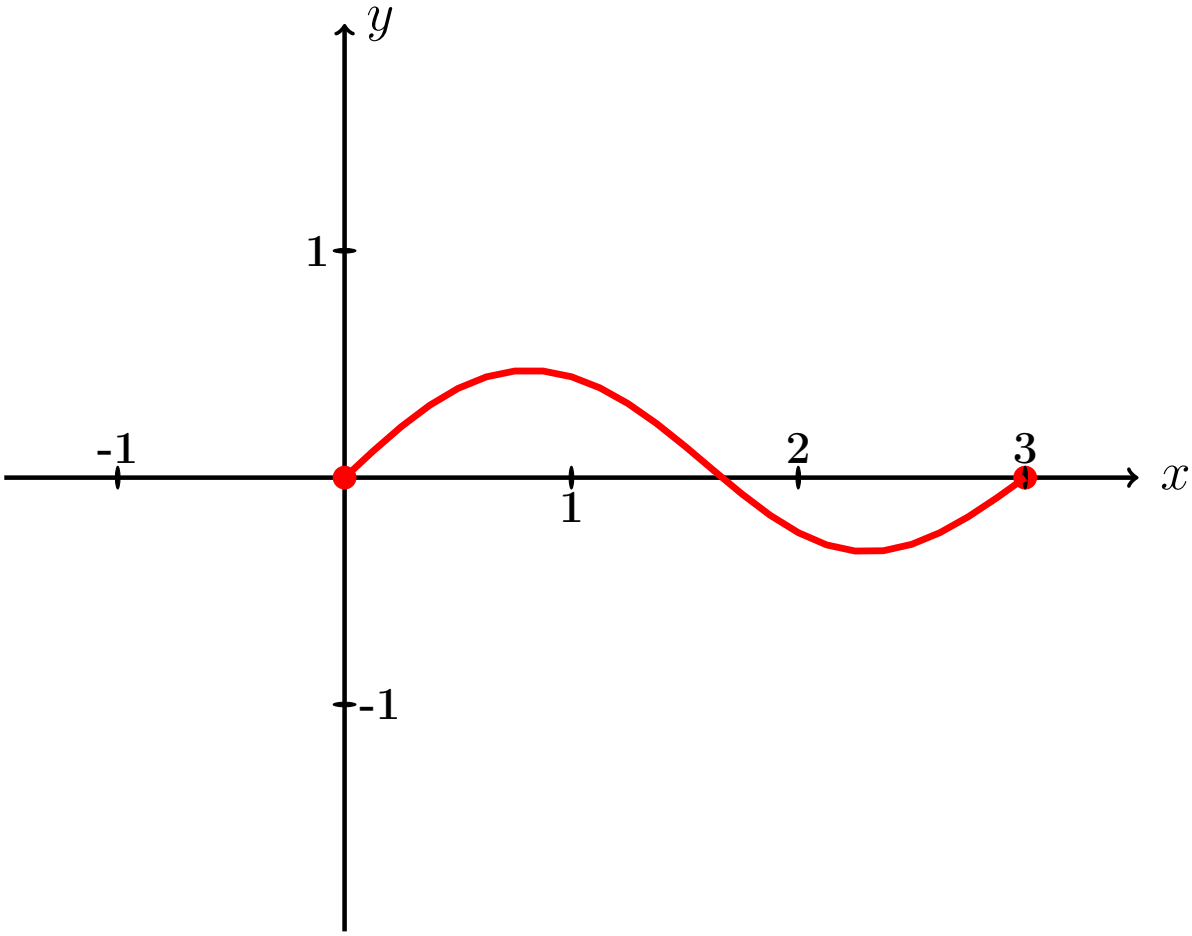


Рис.:

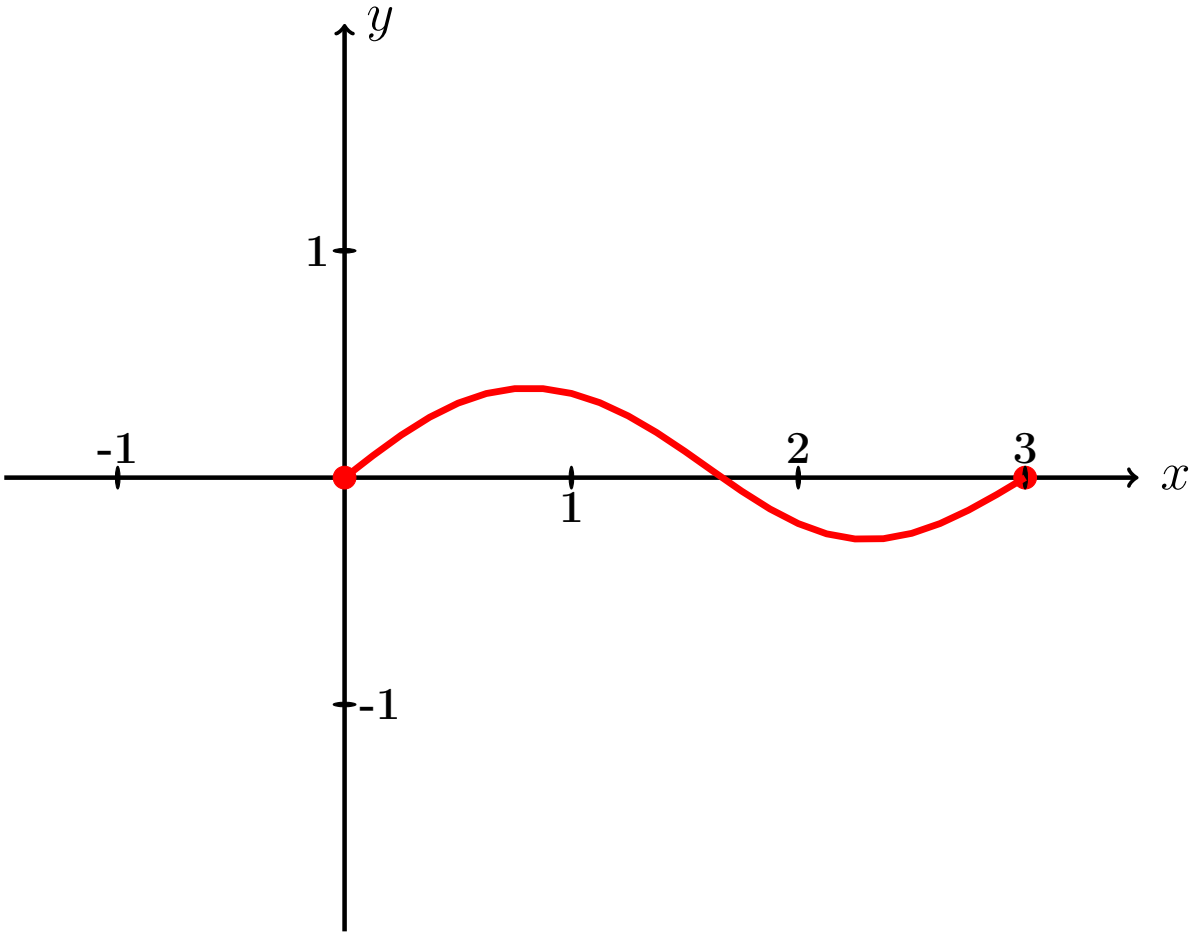


Рис.:

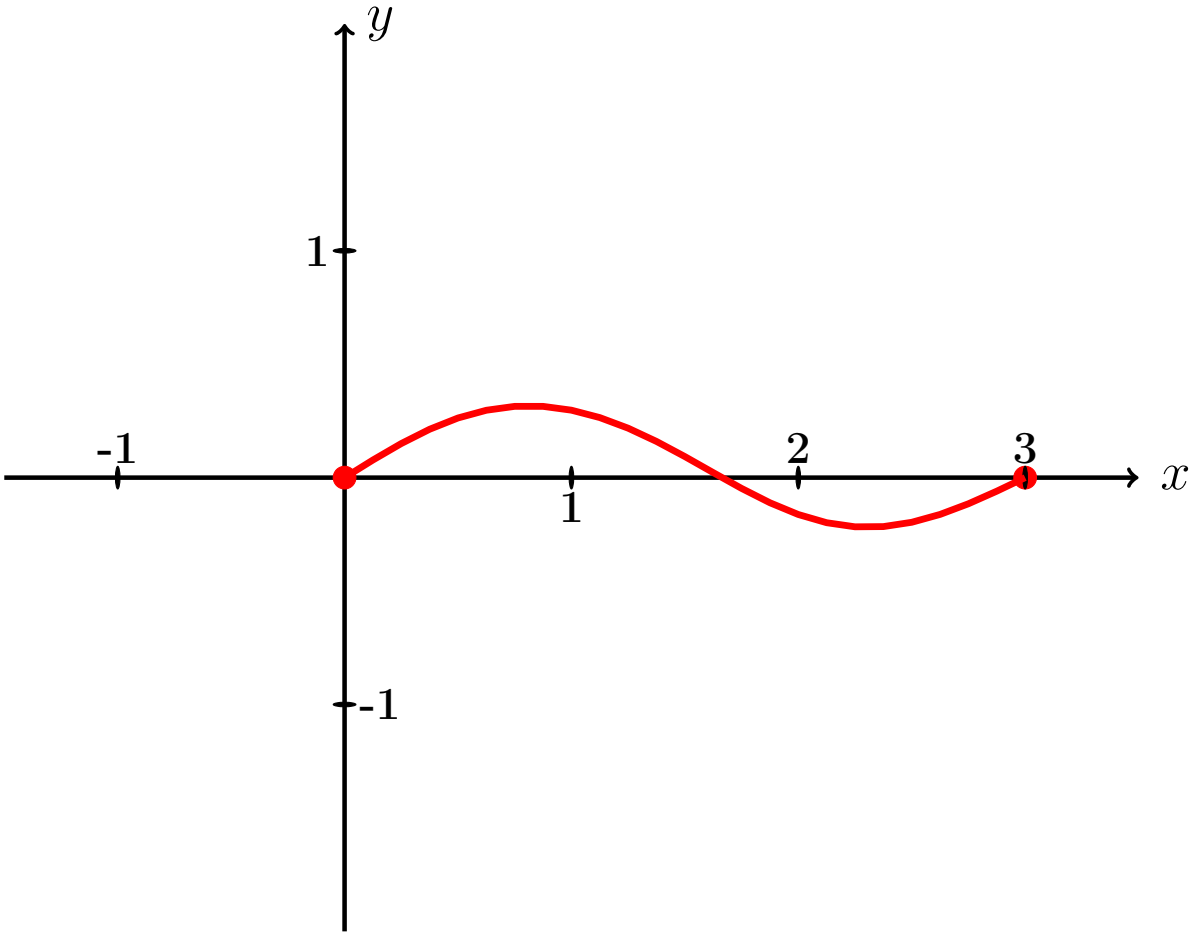


Рис.:

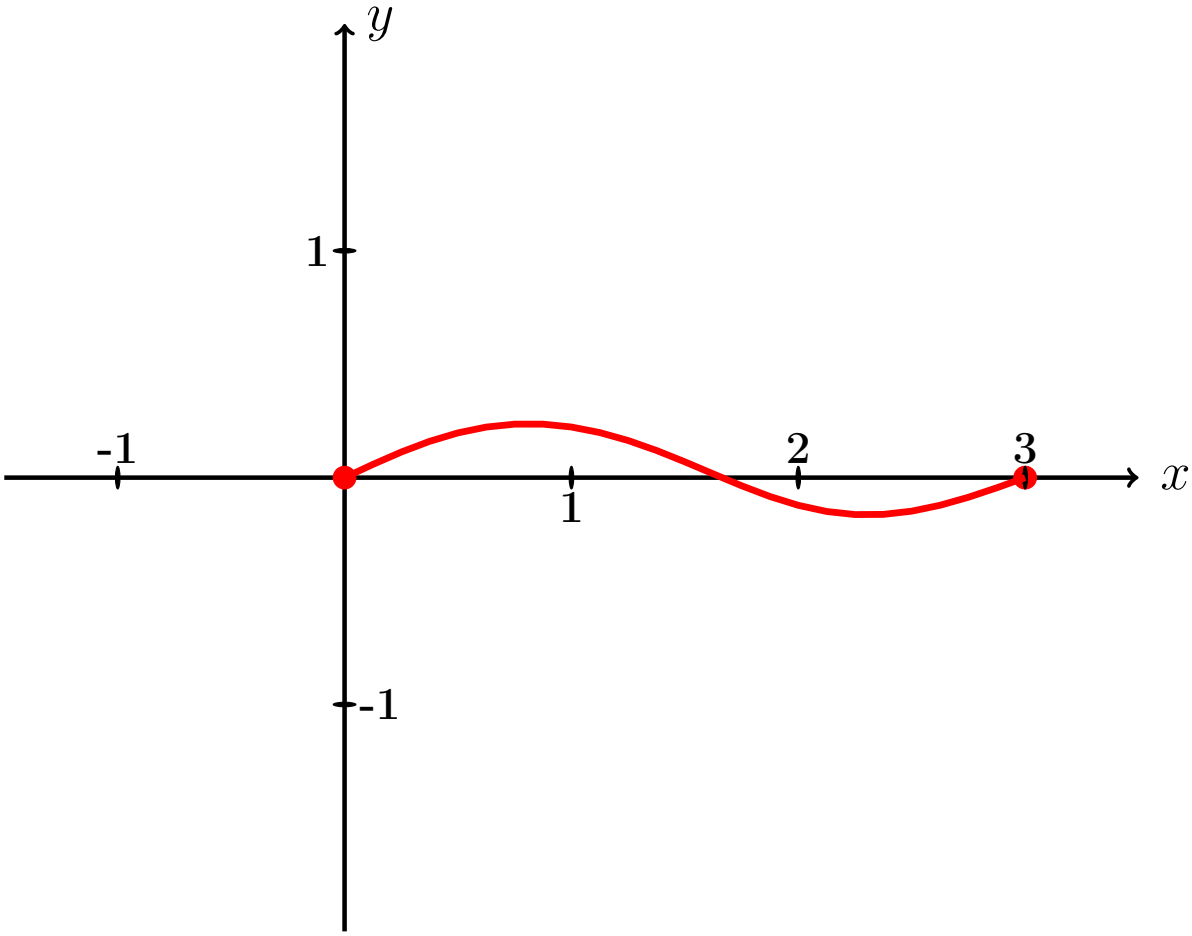


Рис.:

Пример П5 анимация возврат огл

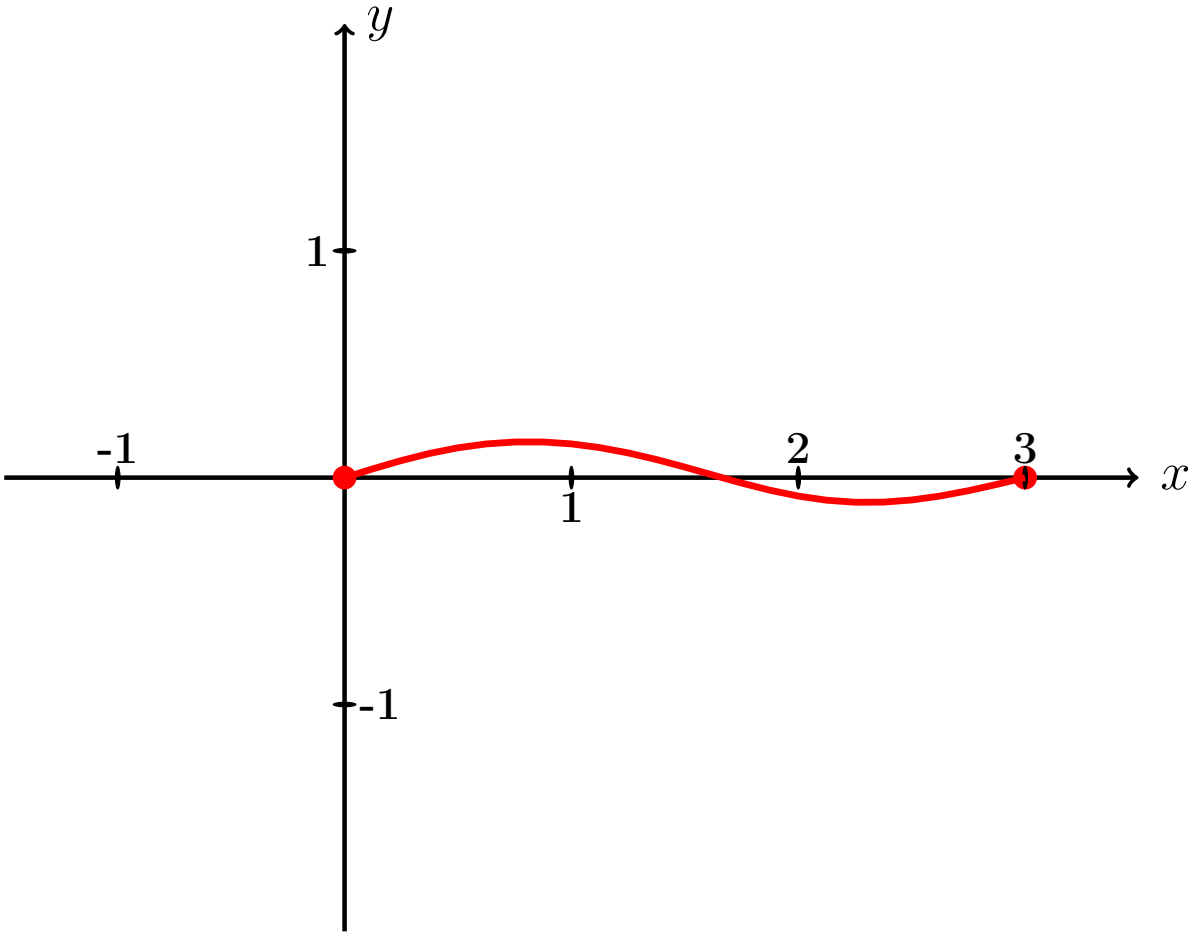


Рис.:

Пример П5 анимация возврат огл

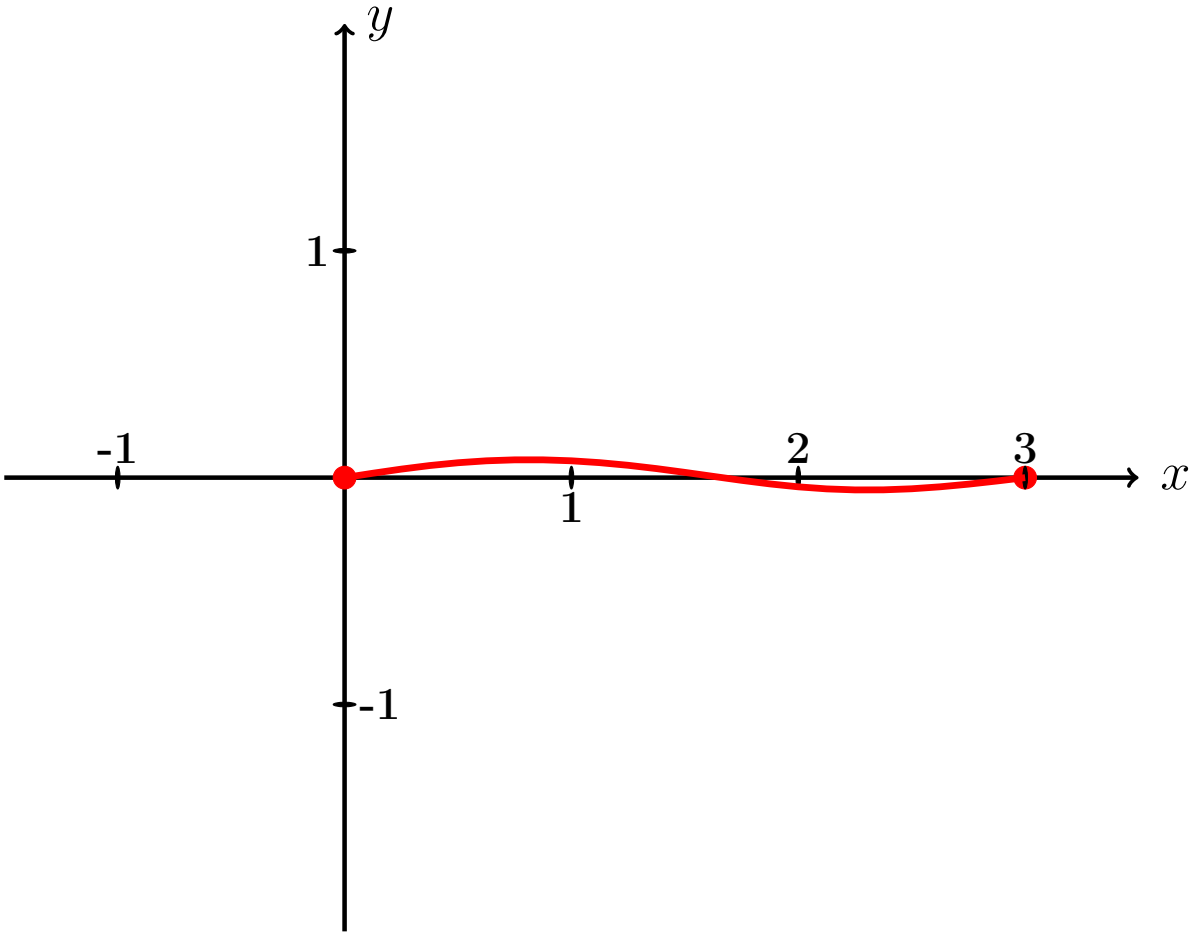


Рис.:

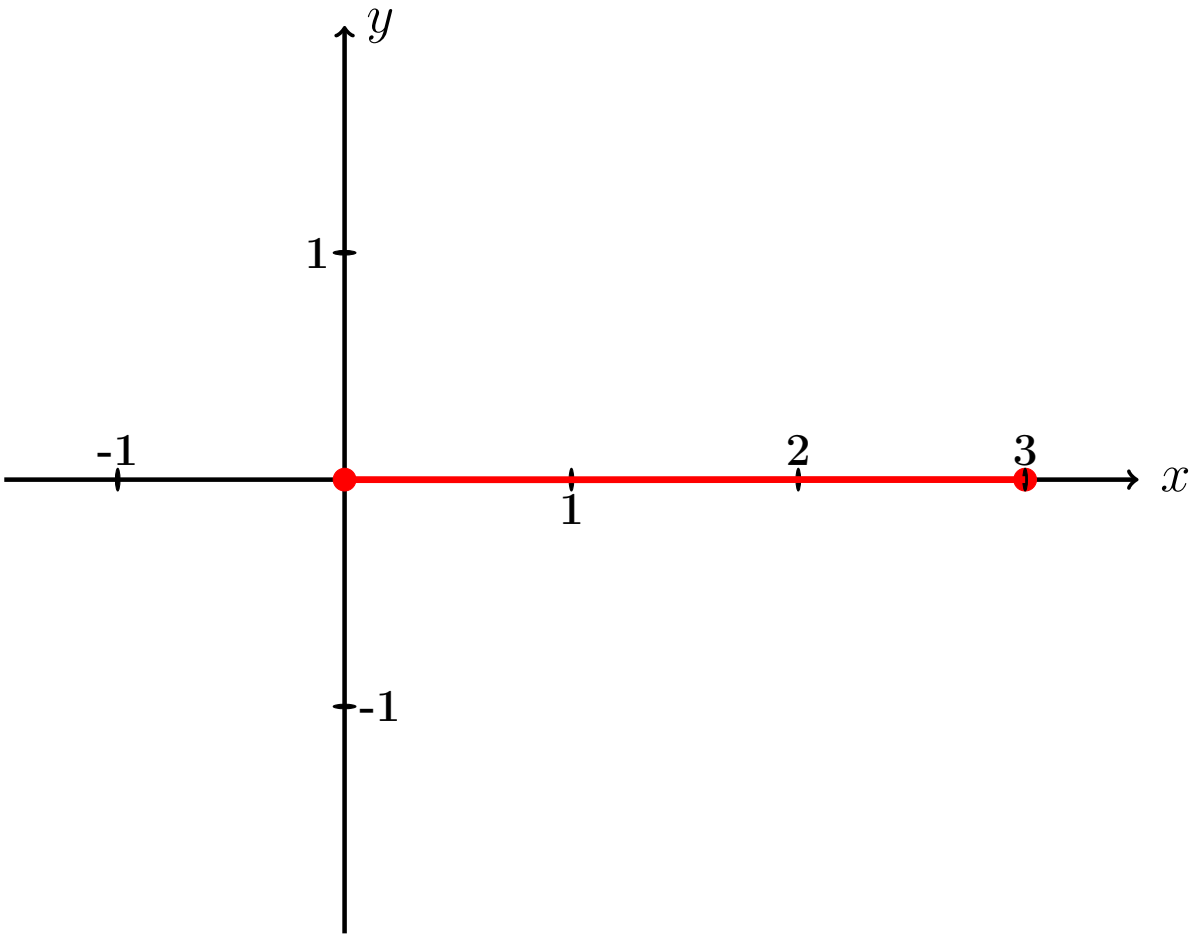


Рис.:

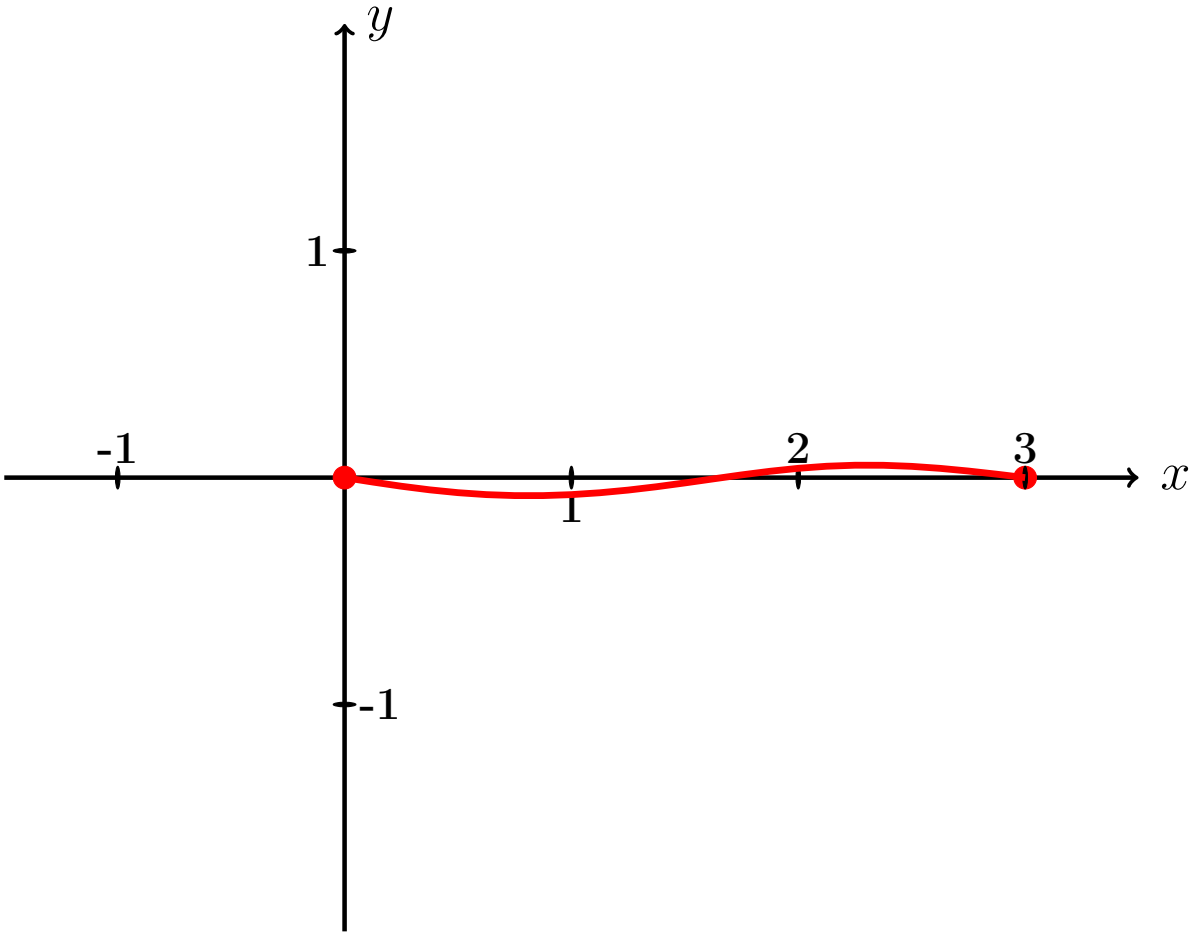


Рис.:

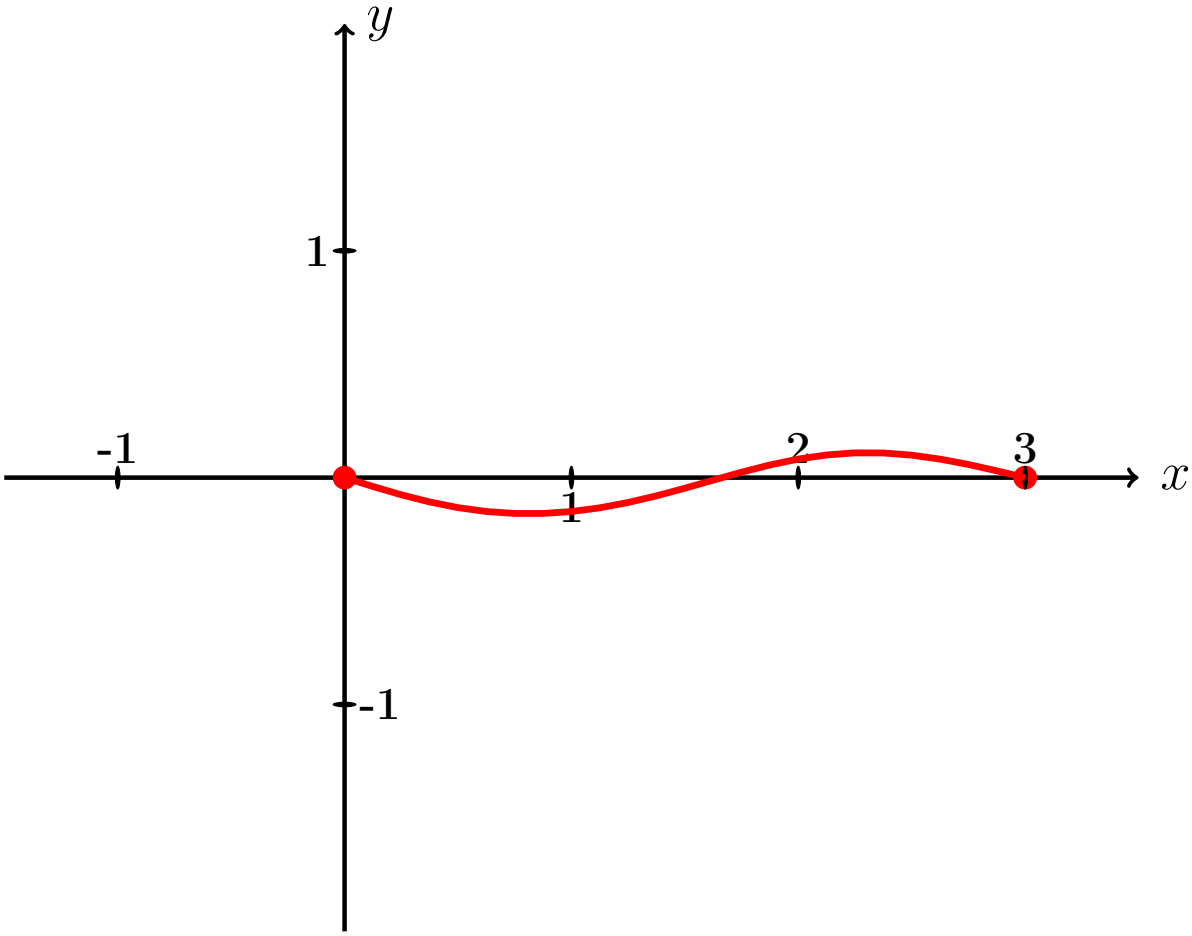


Рис.:

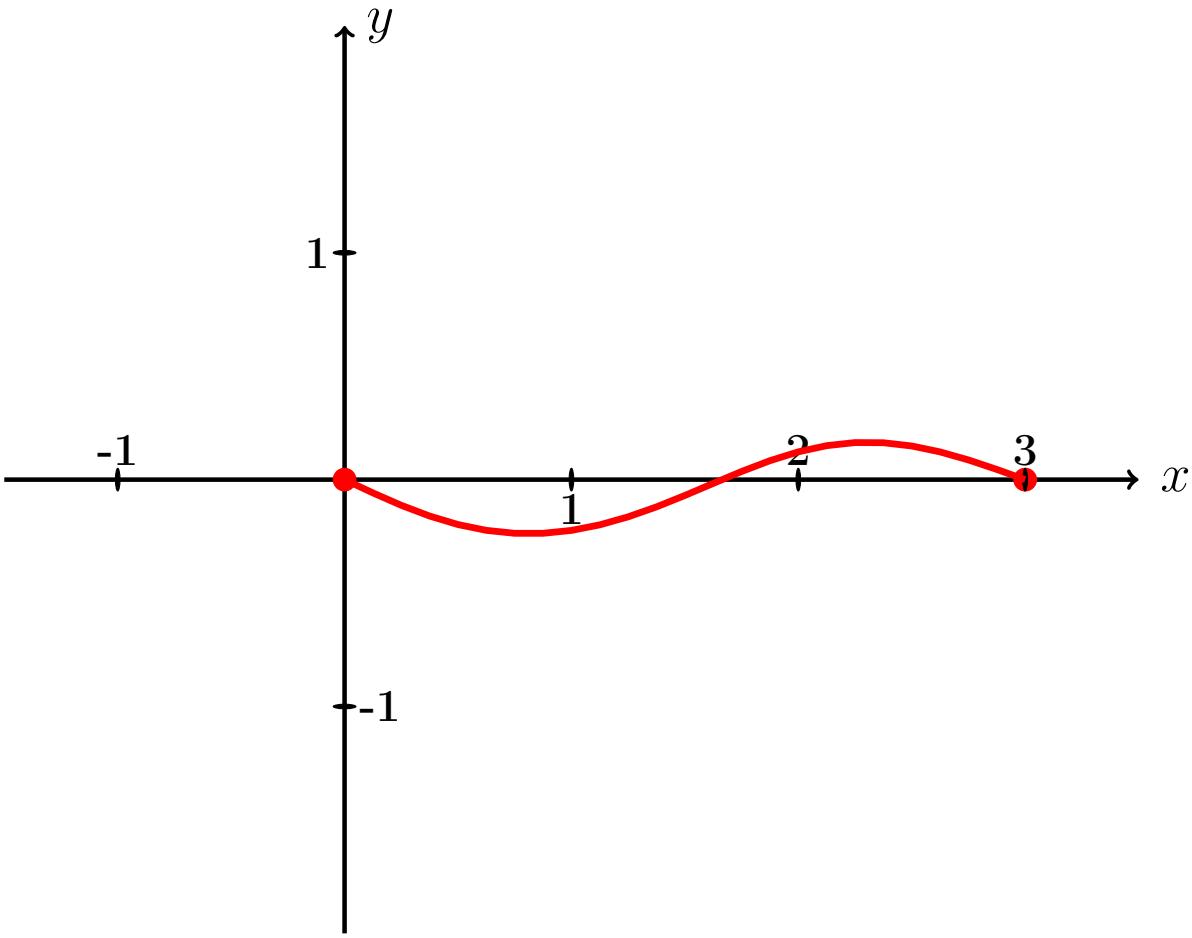


Рис.:

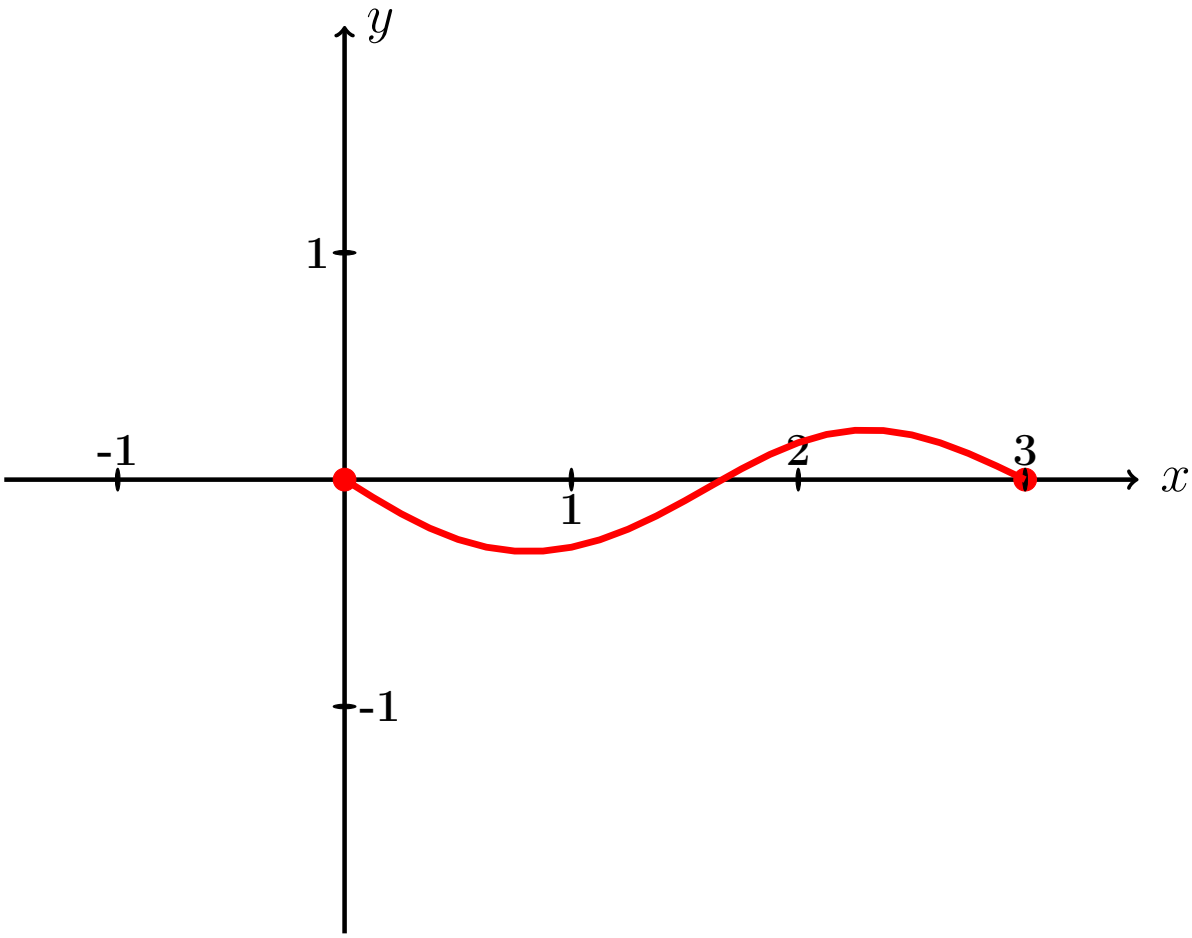


Рис.:

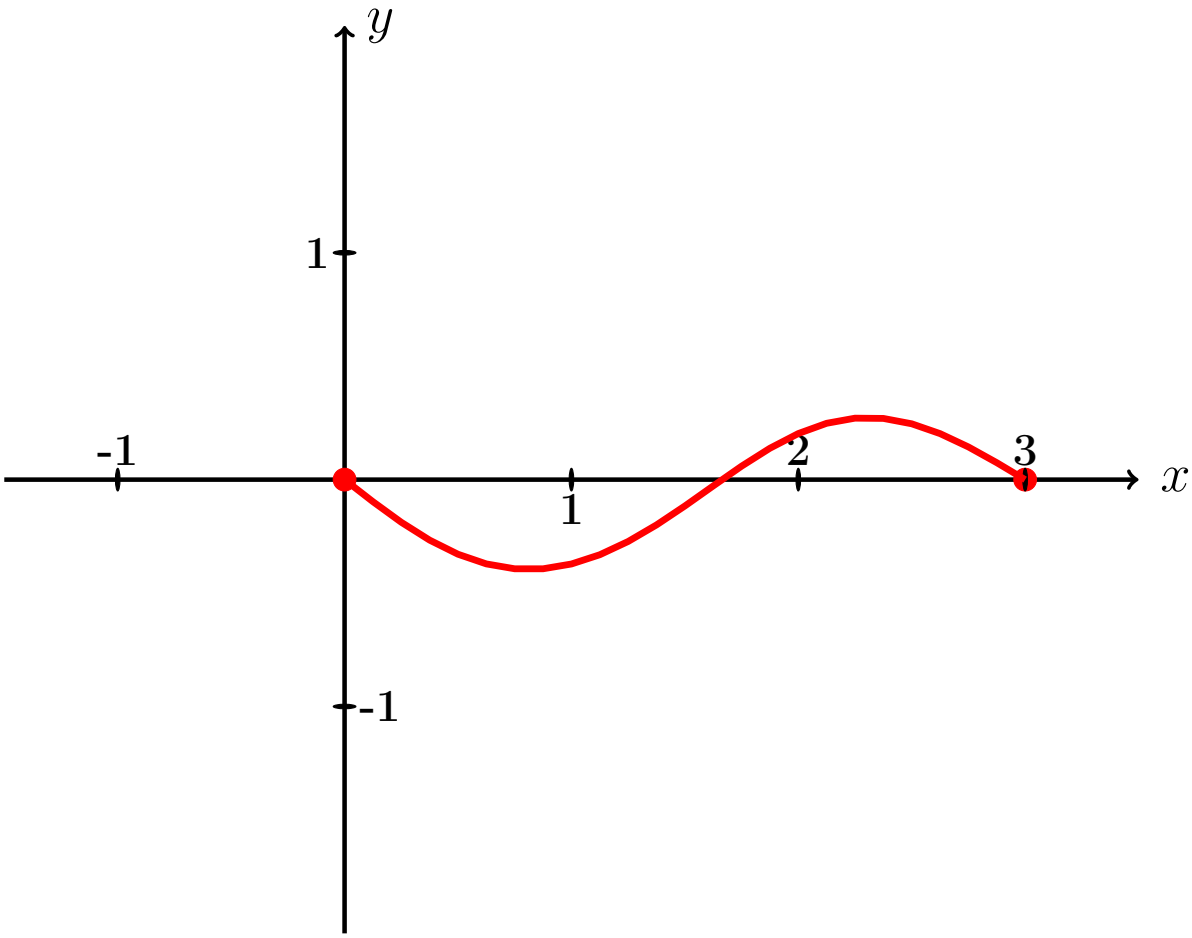


Рис.:

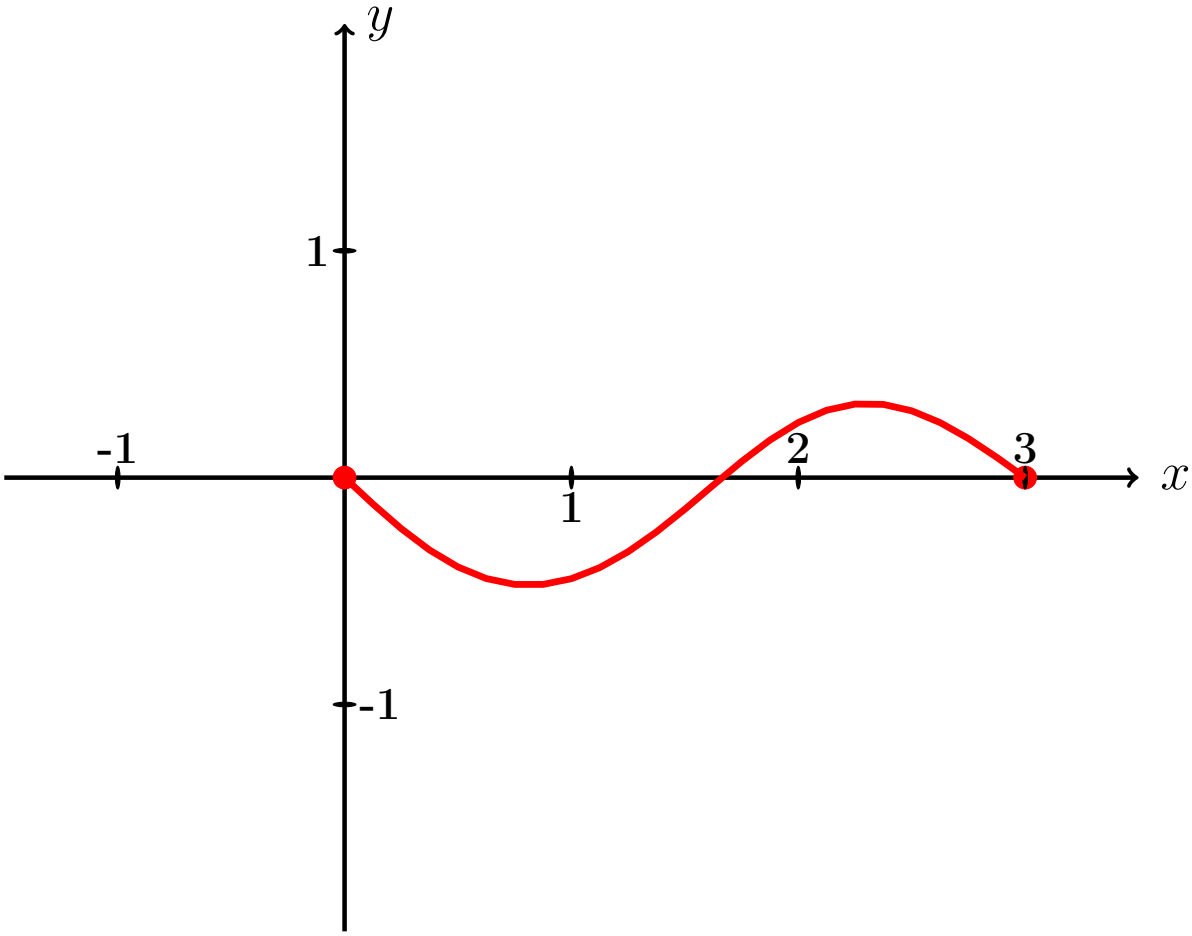


Рис.:

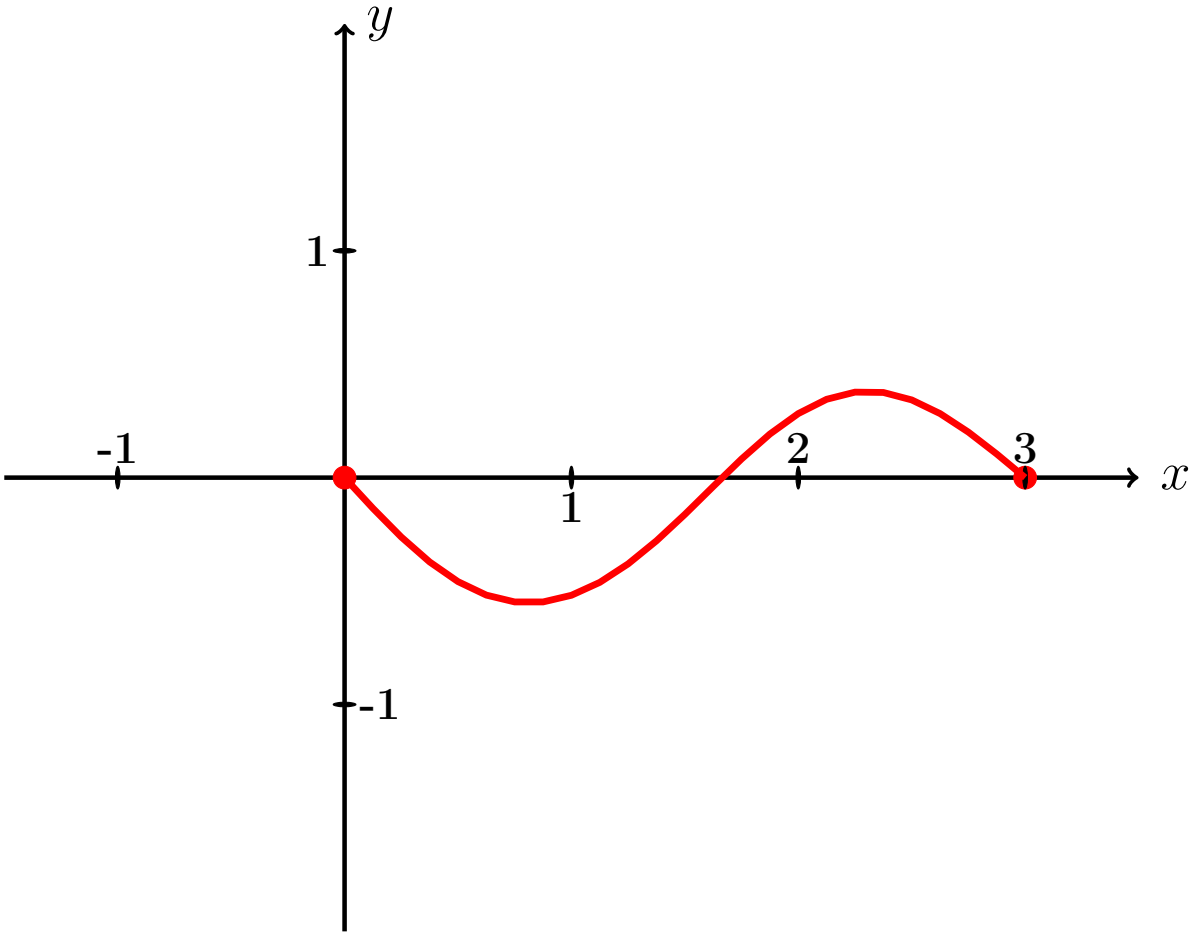


Рис.:

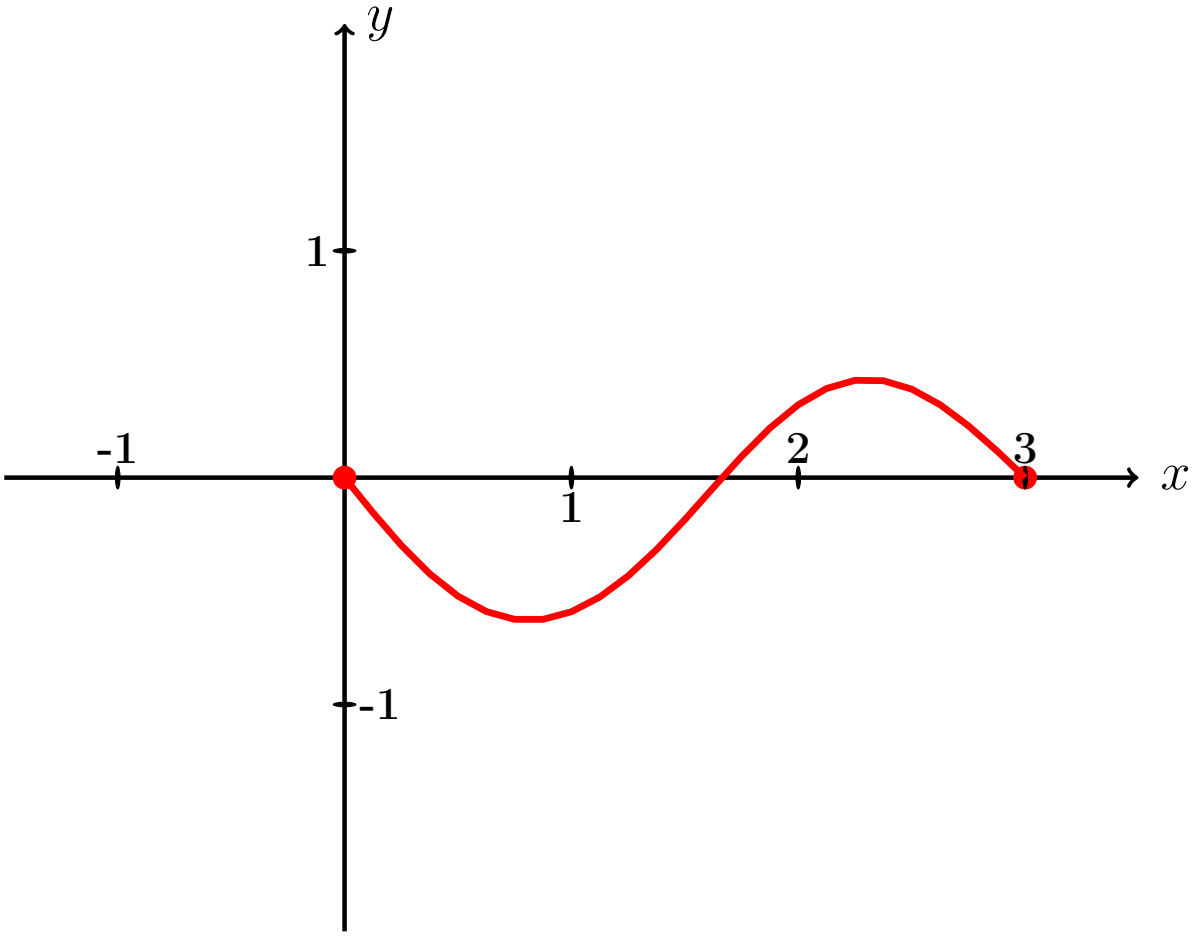


Рис.:

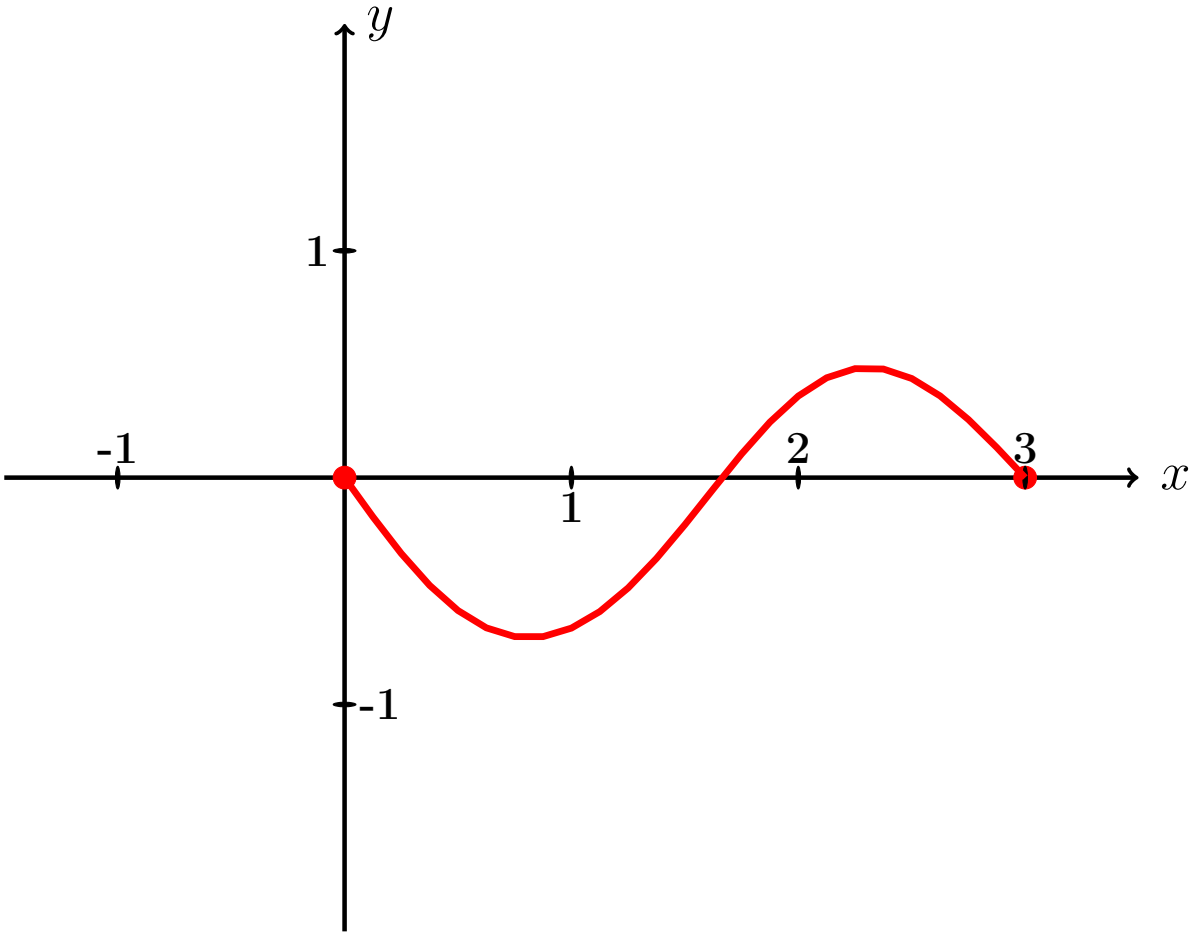


Рис.:

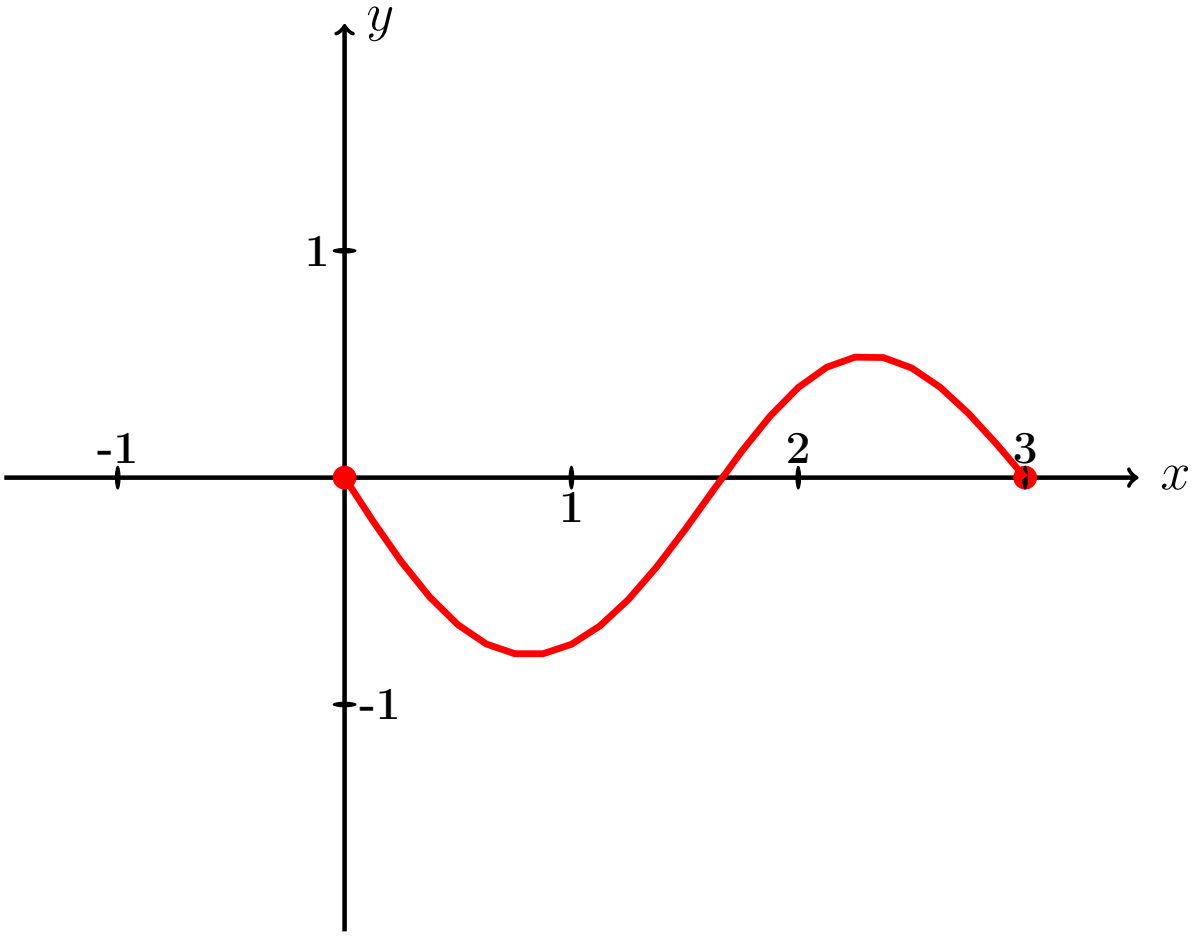


Рис.:

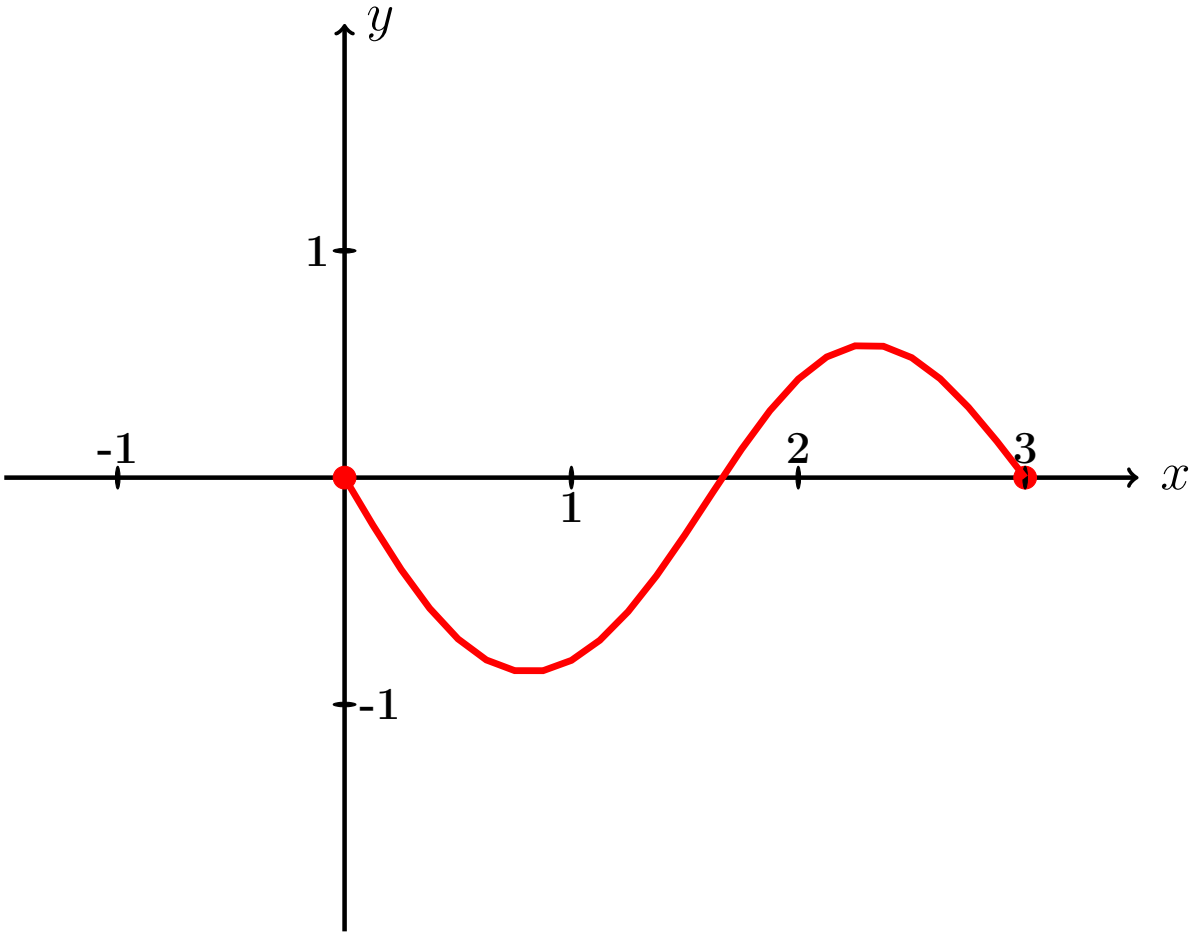


Рис.:

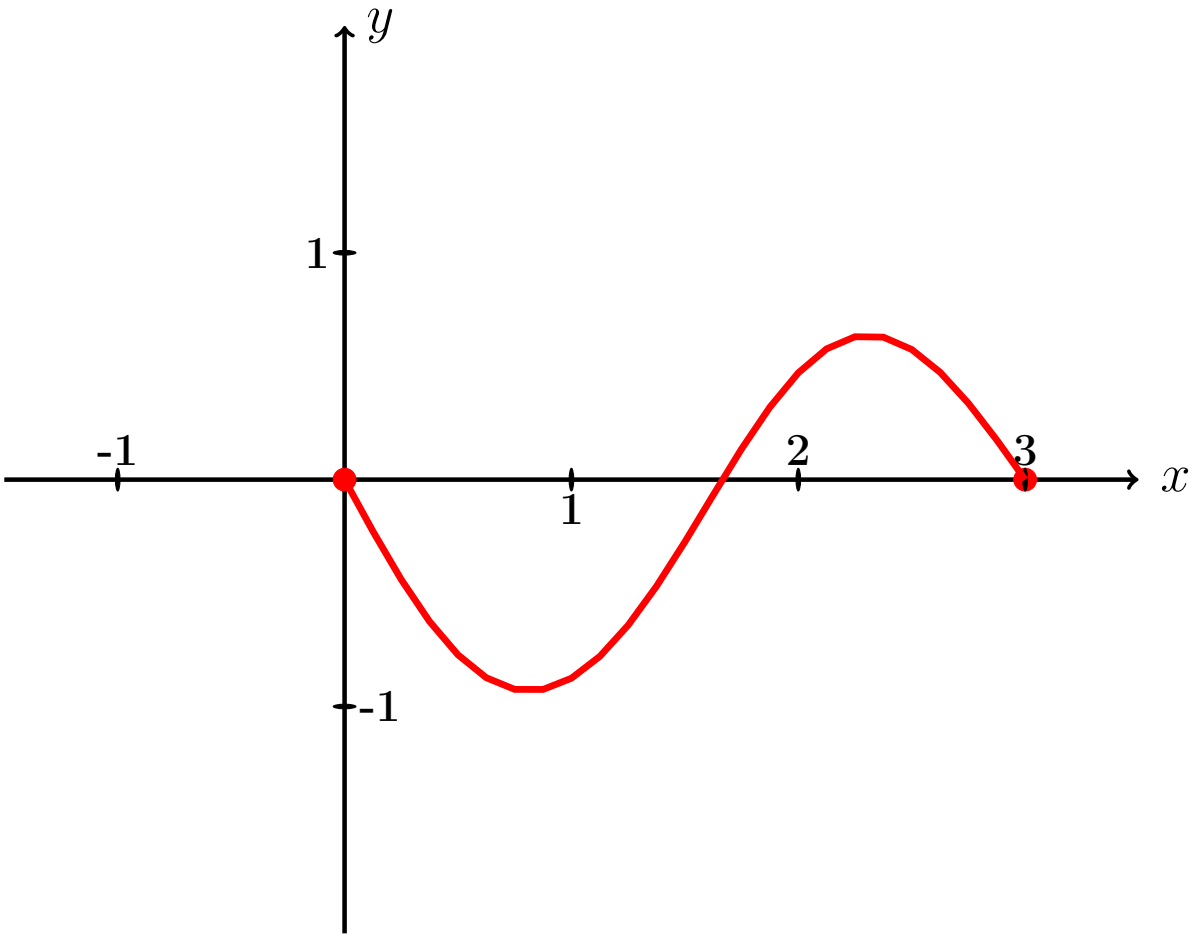


Рис.:

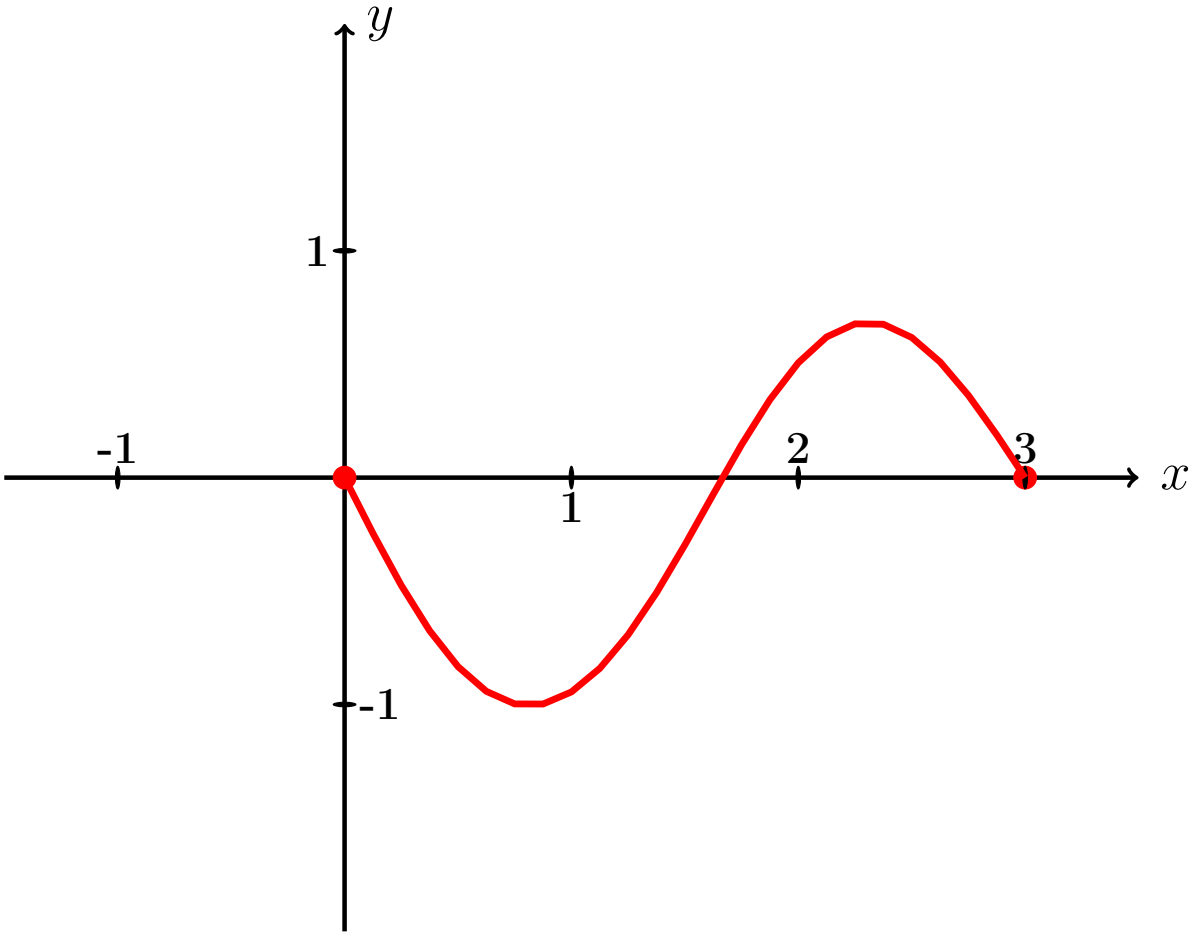


Рис.:

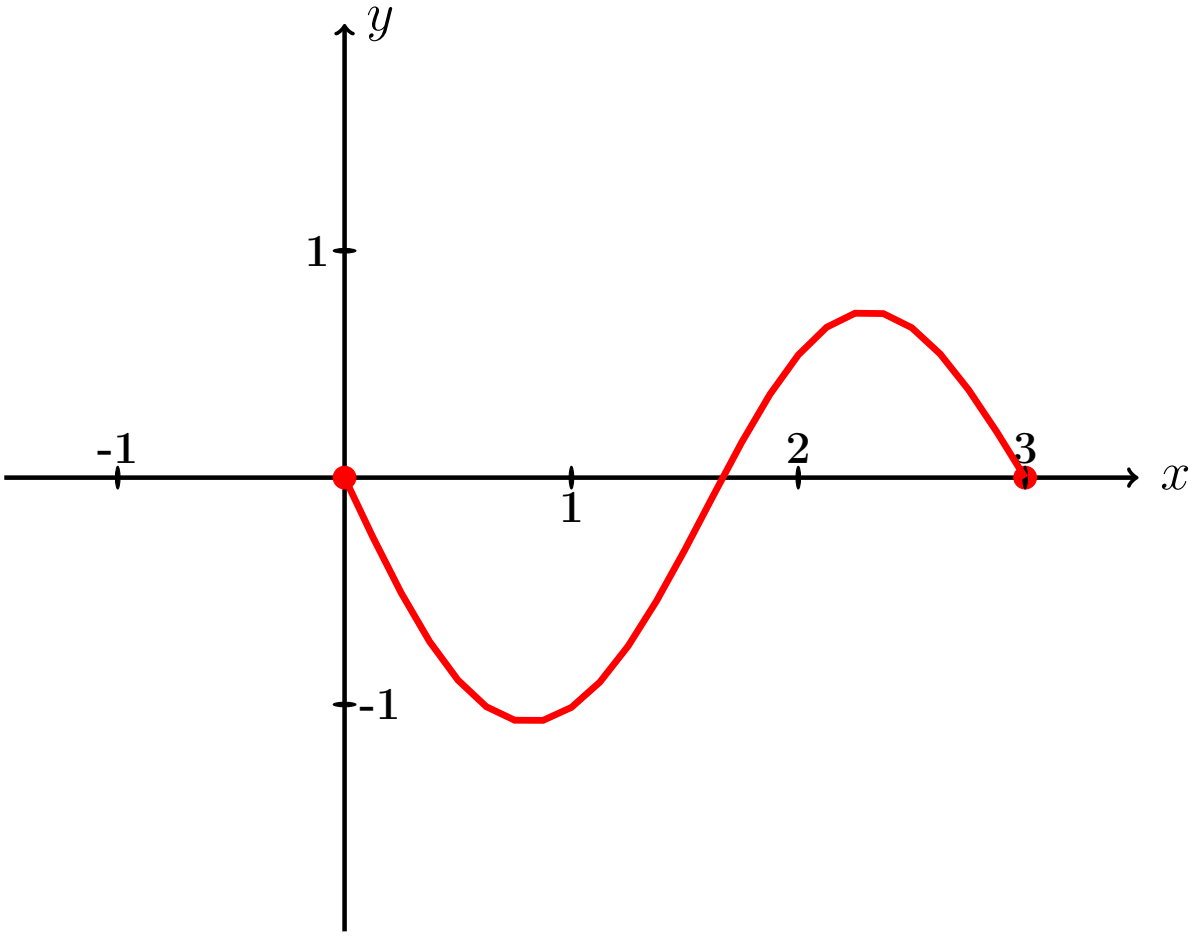


Рис.:

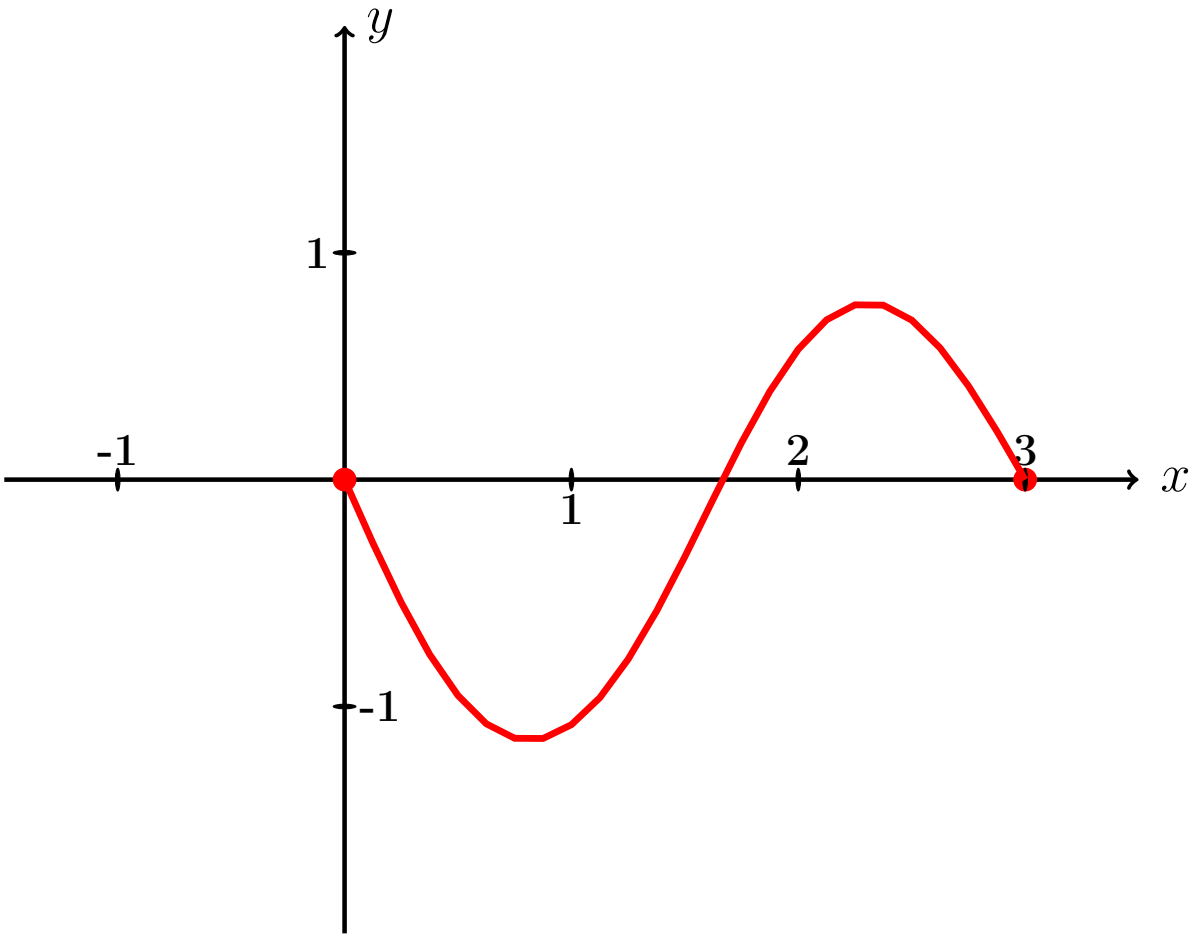


Рис.:

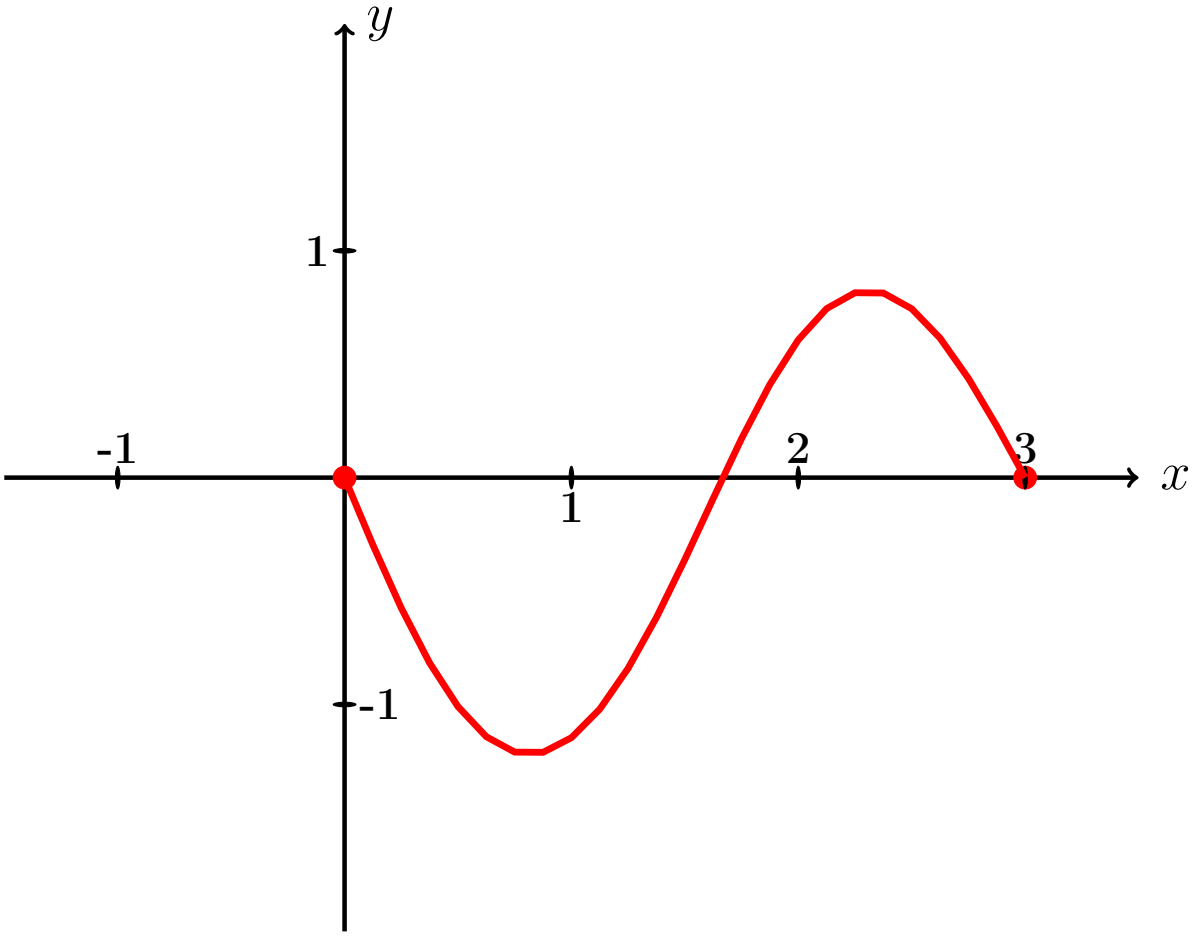


Рис.:

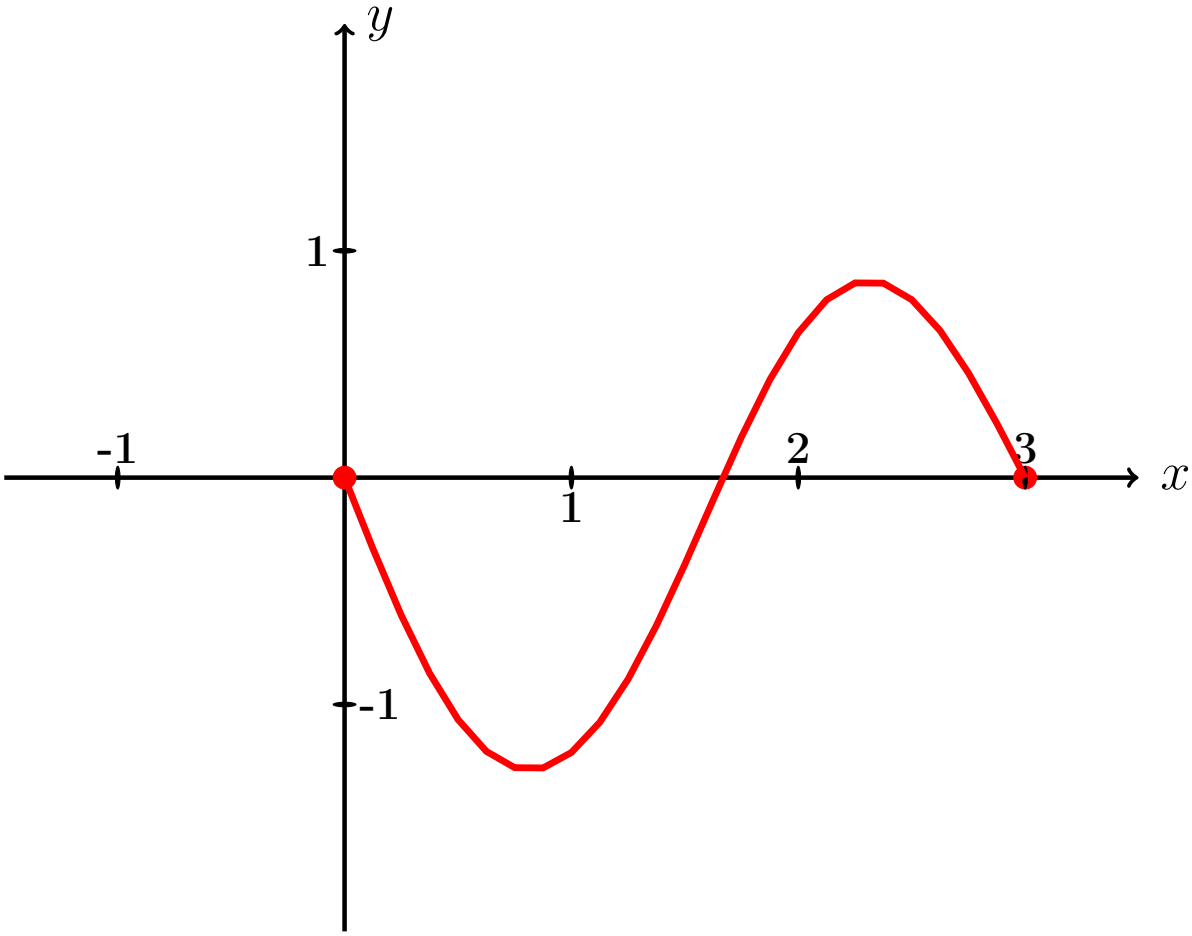


Рис.:

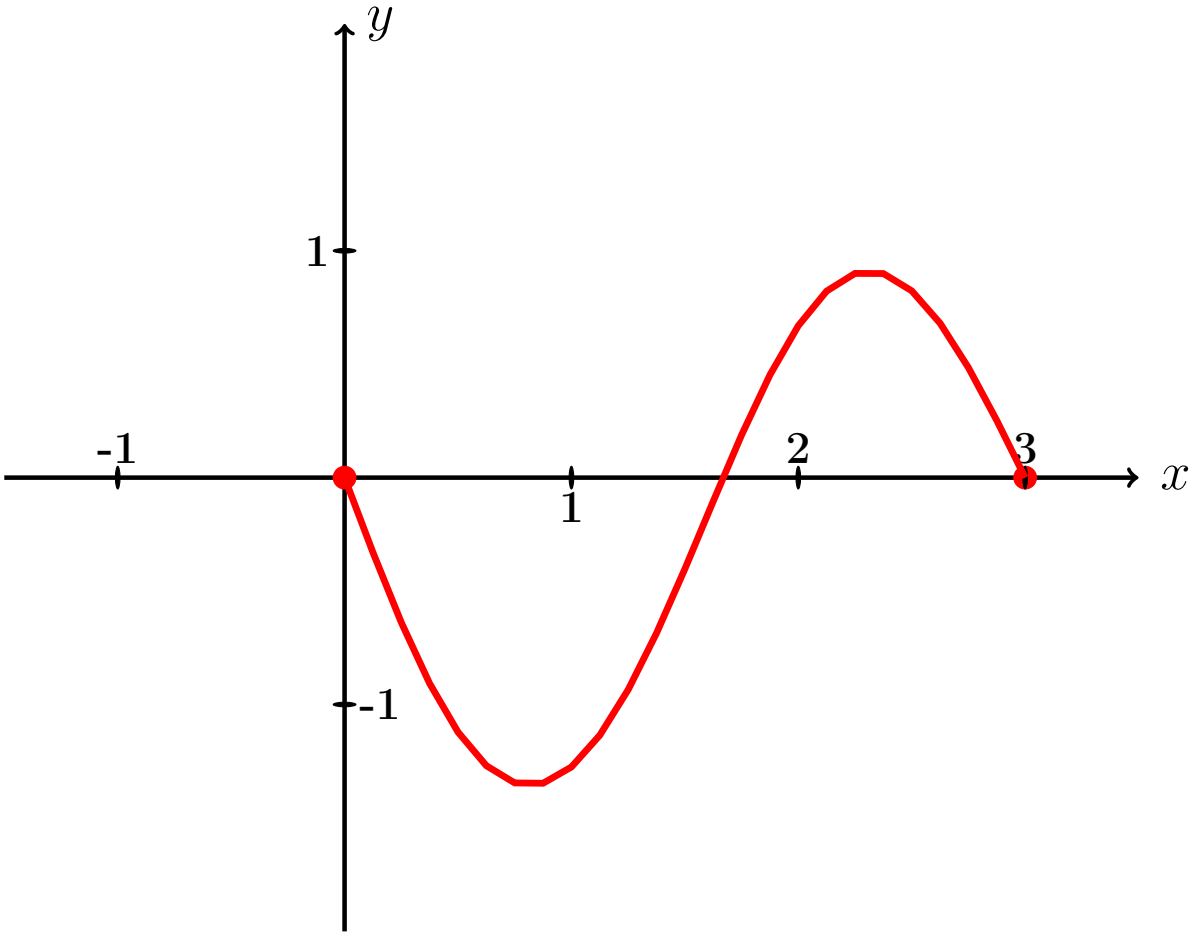


Рис.:

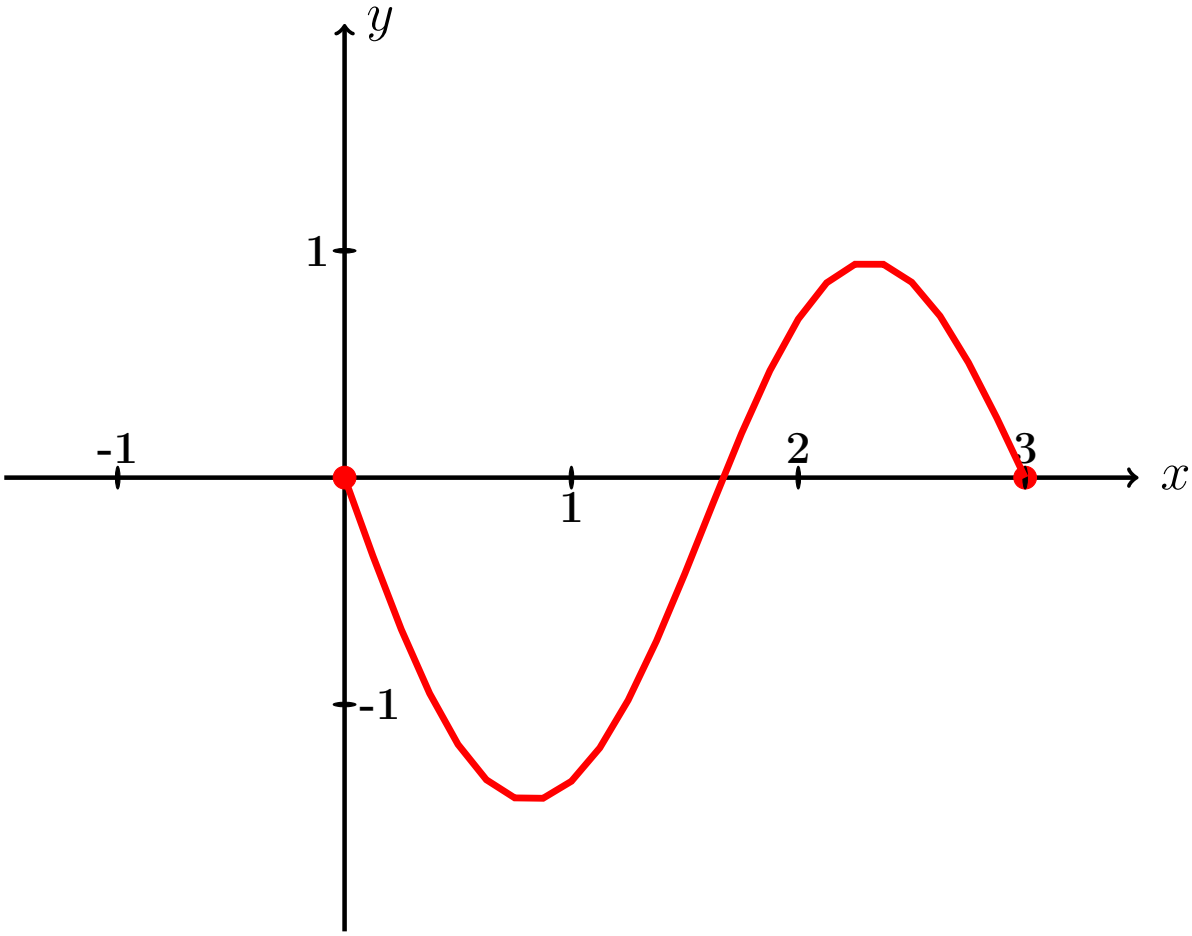


Рис.:

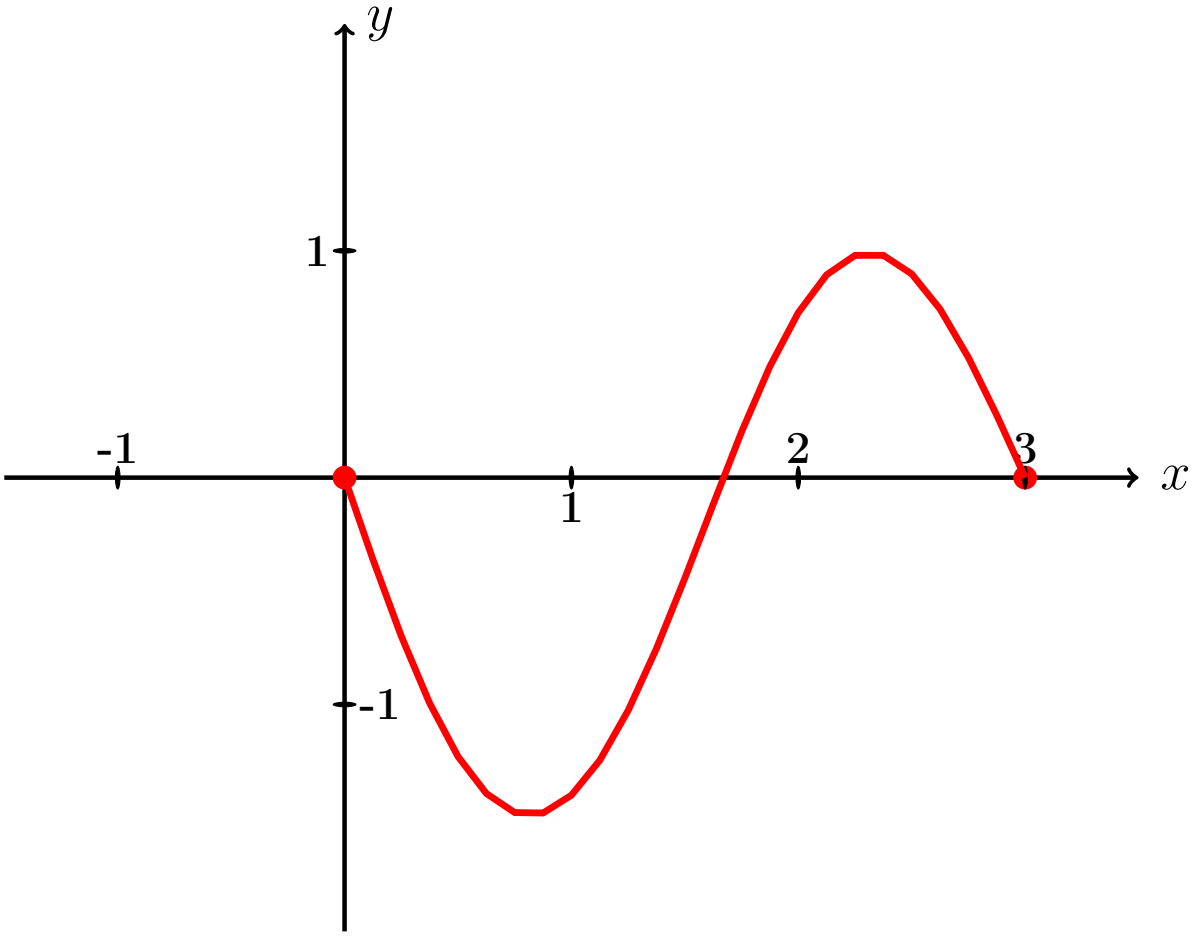


Рис.:

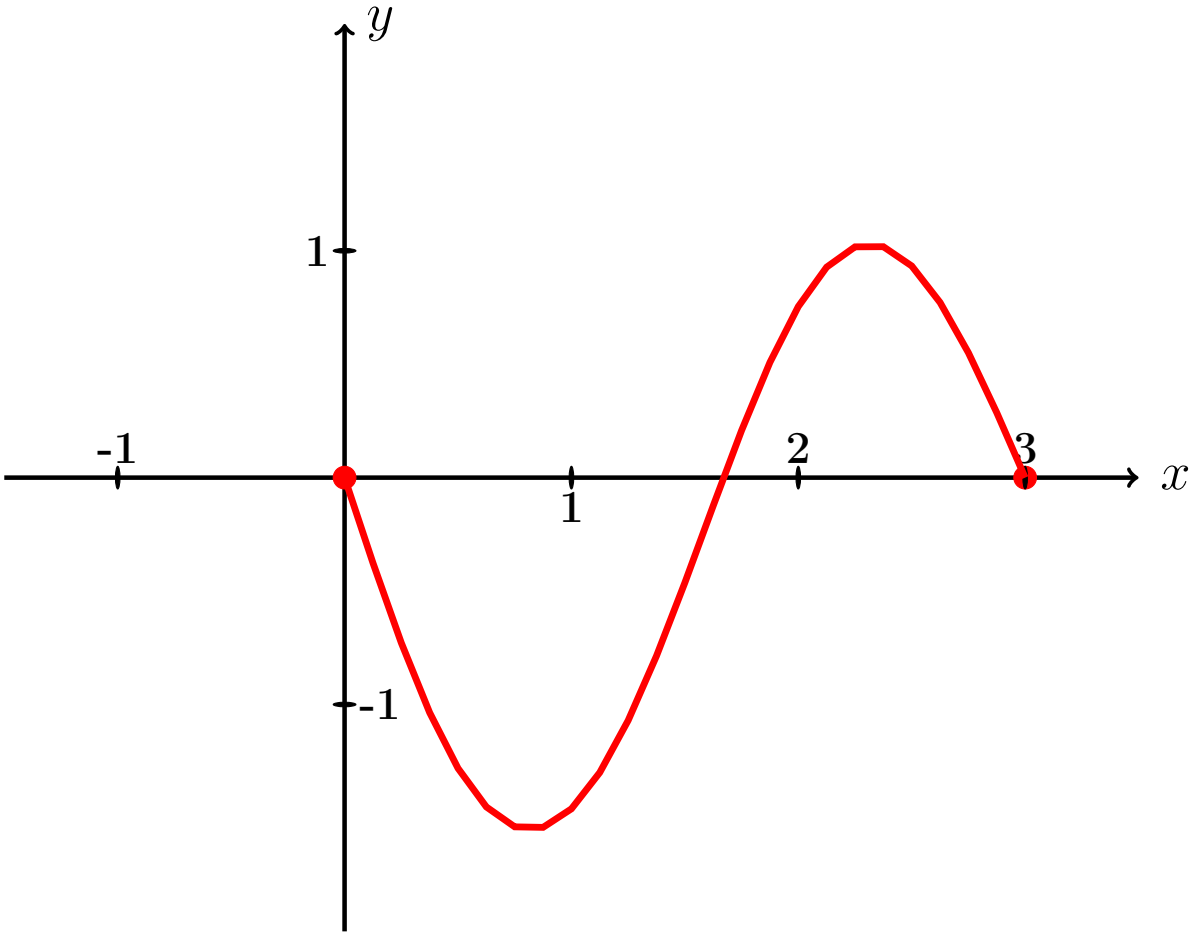


Рис.:

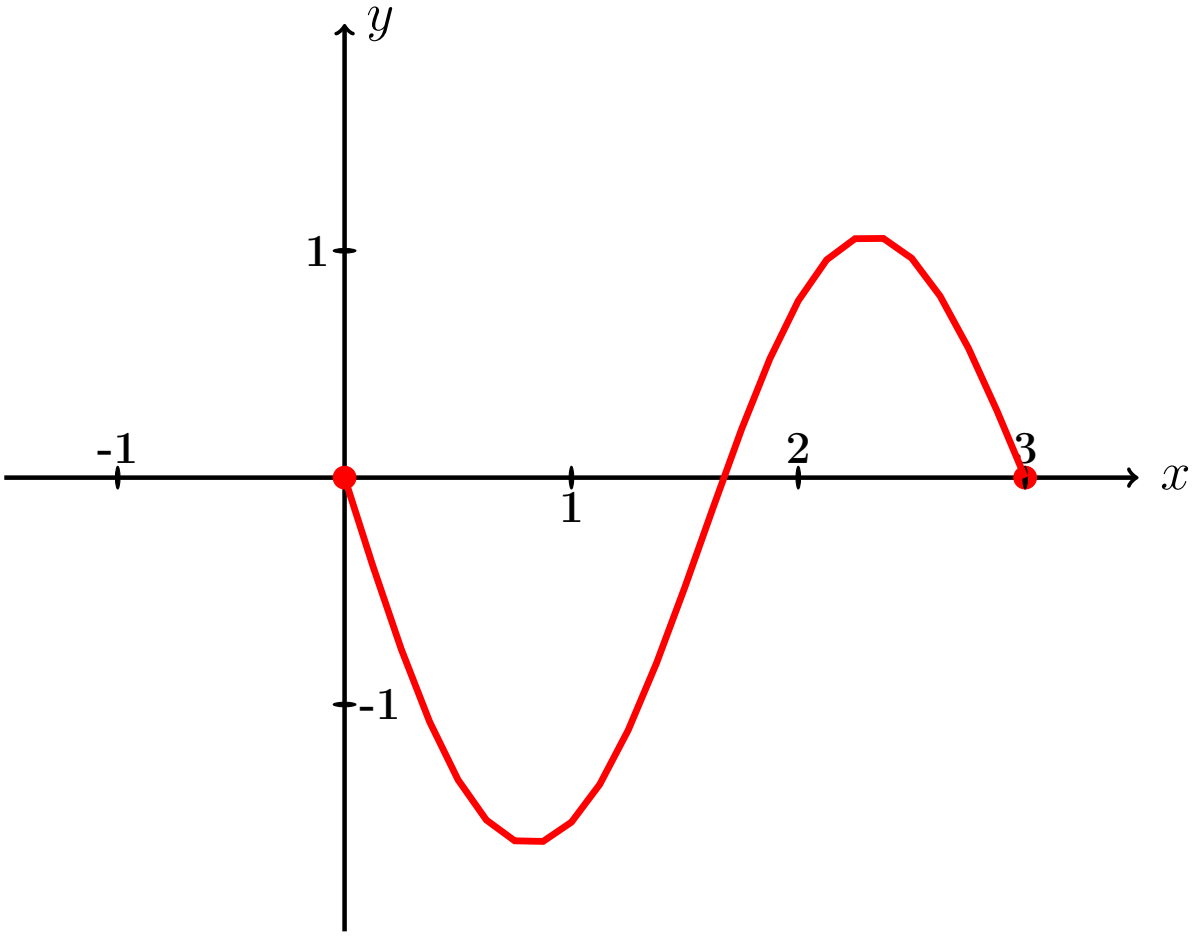


Рис.:

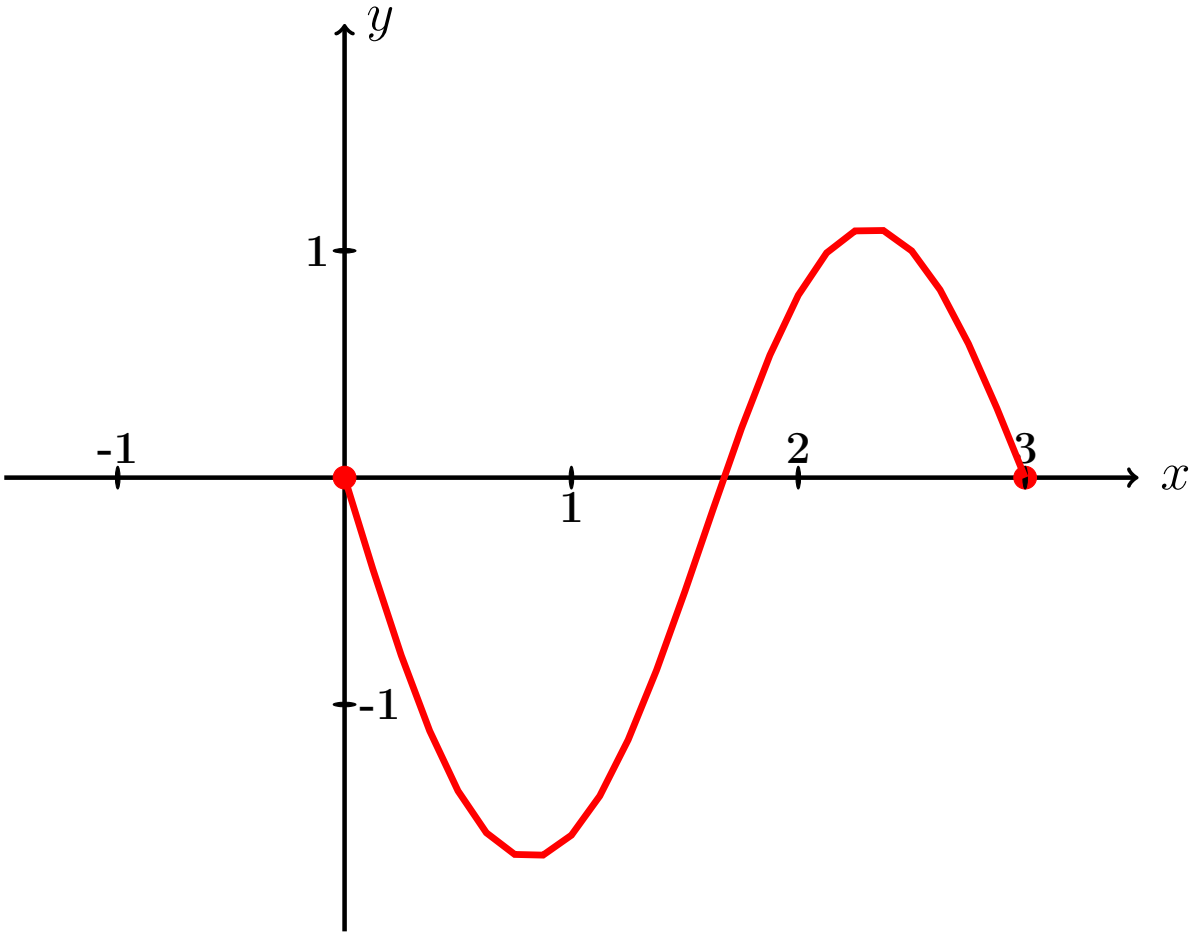


Рис.:

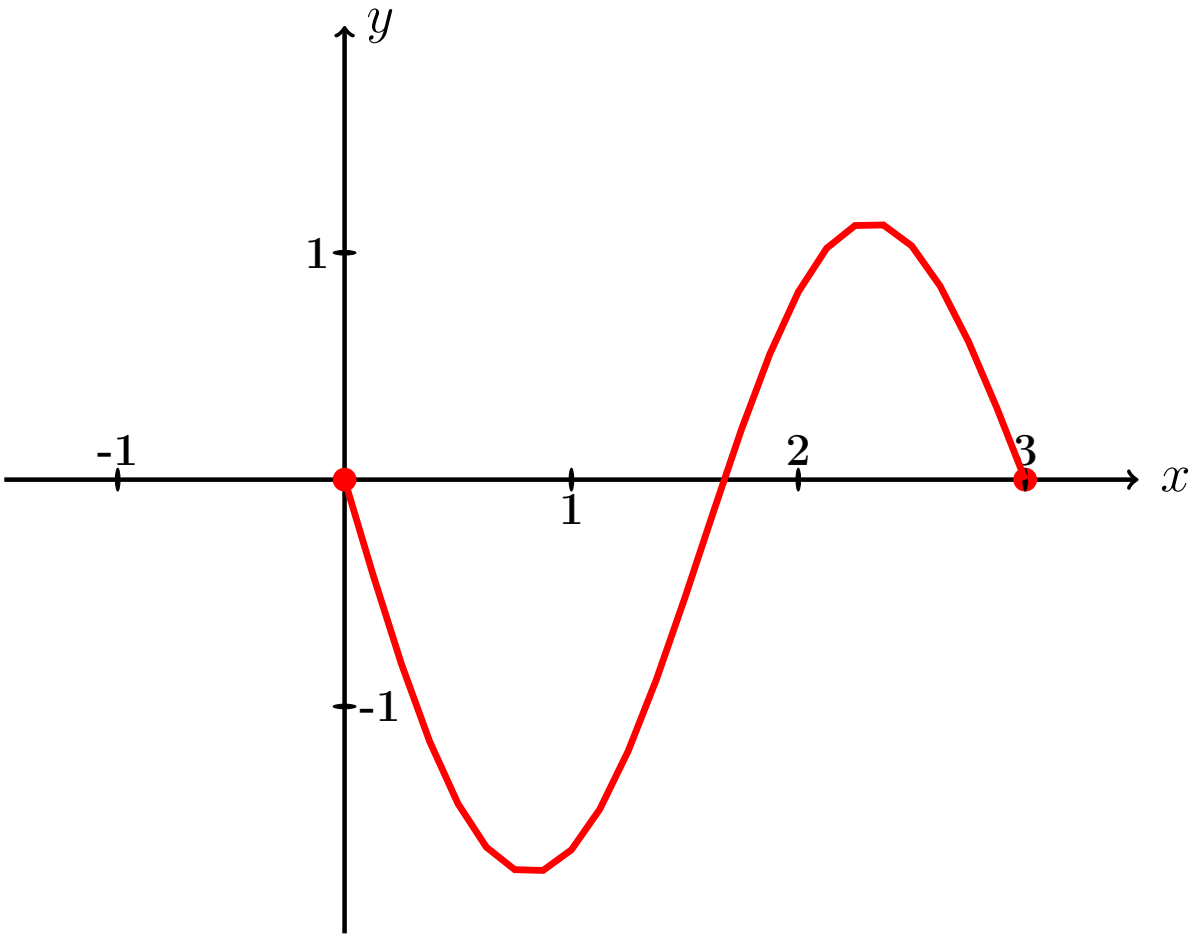


Рис.:

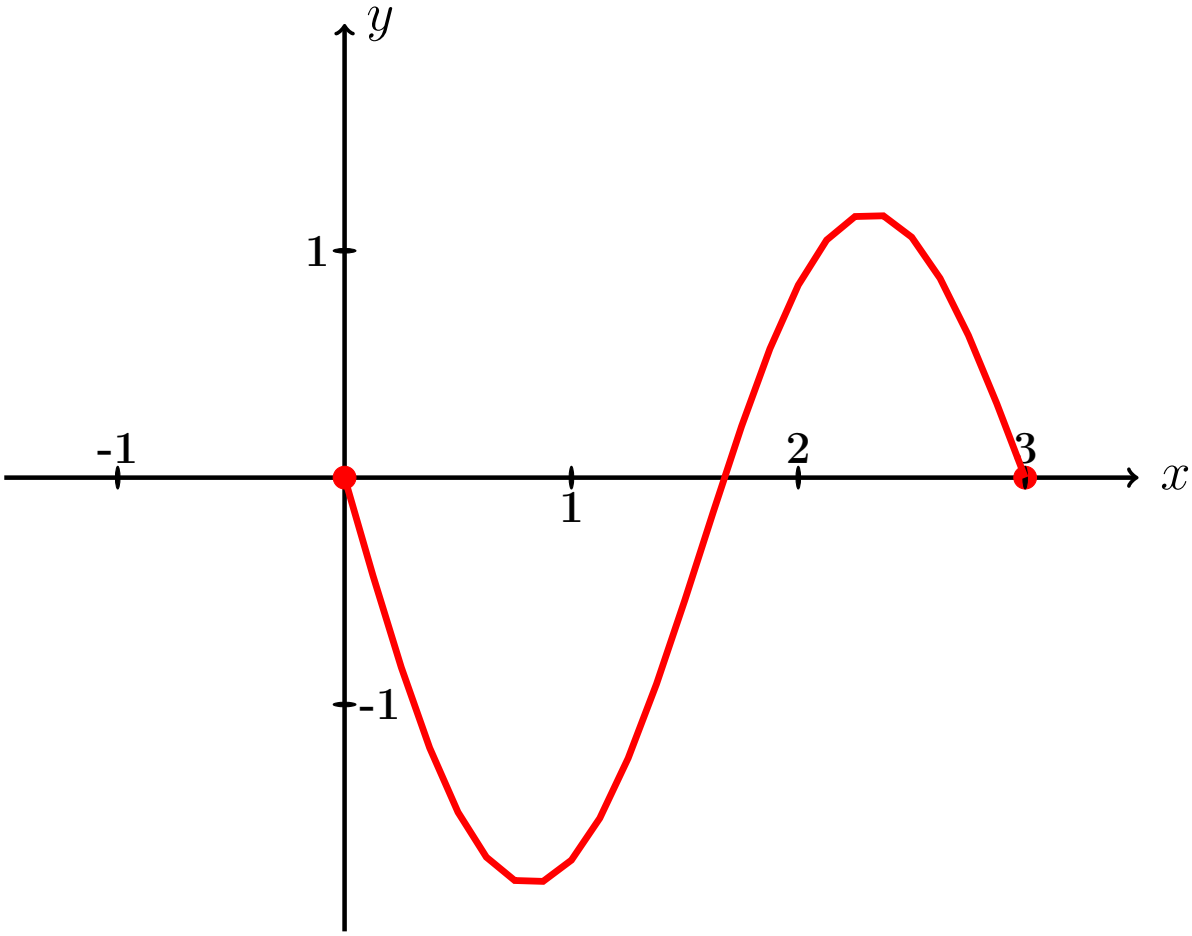


Рис.:

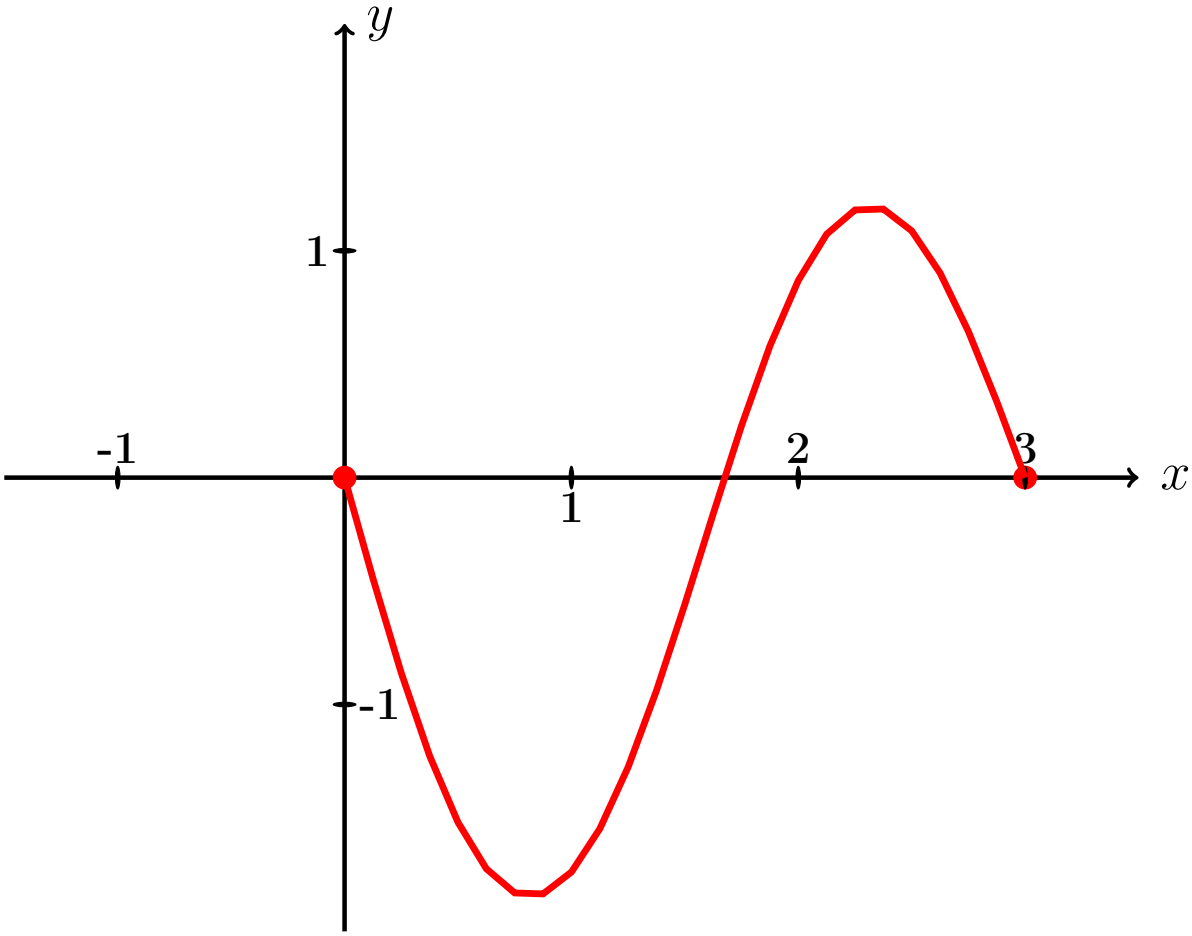


Рис.:

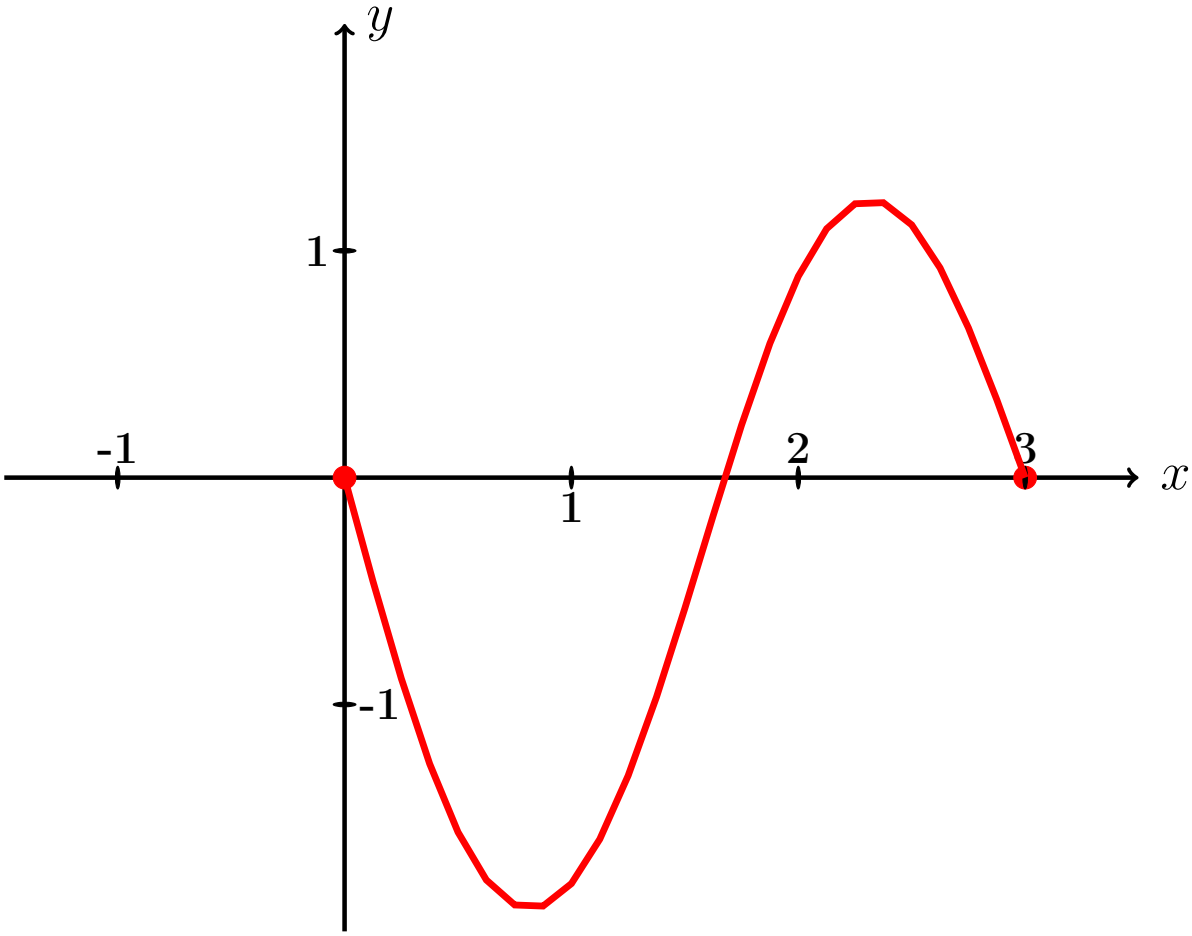


Рис.:

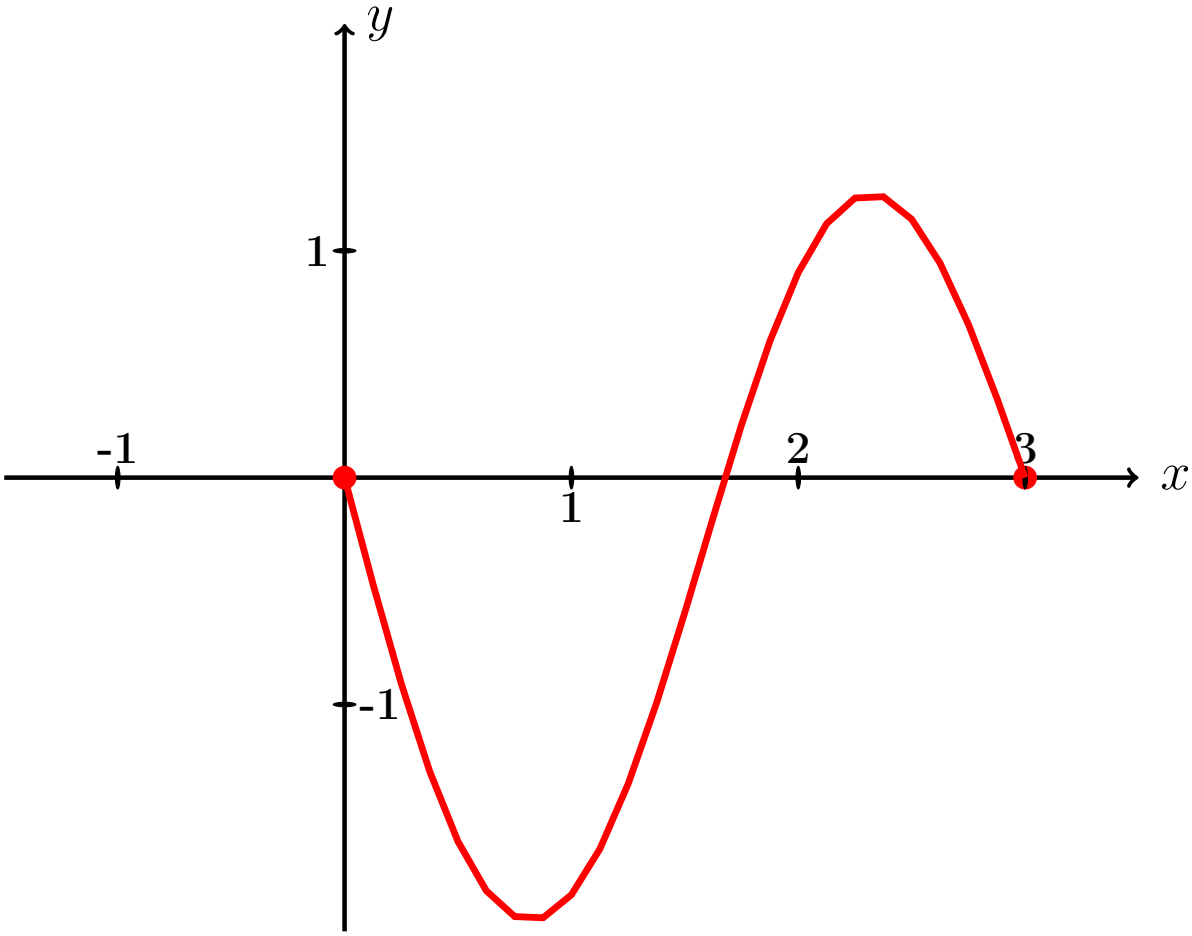


Рис.:

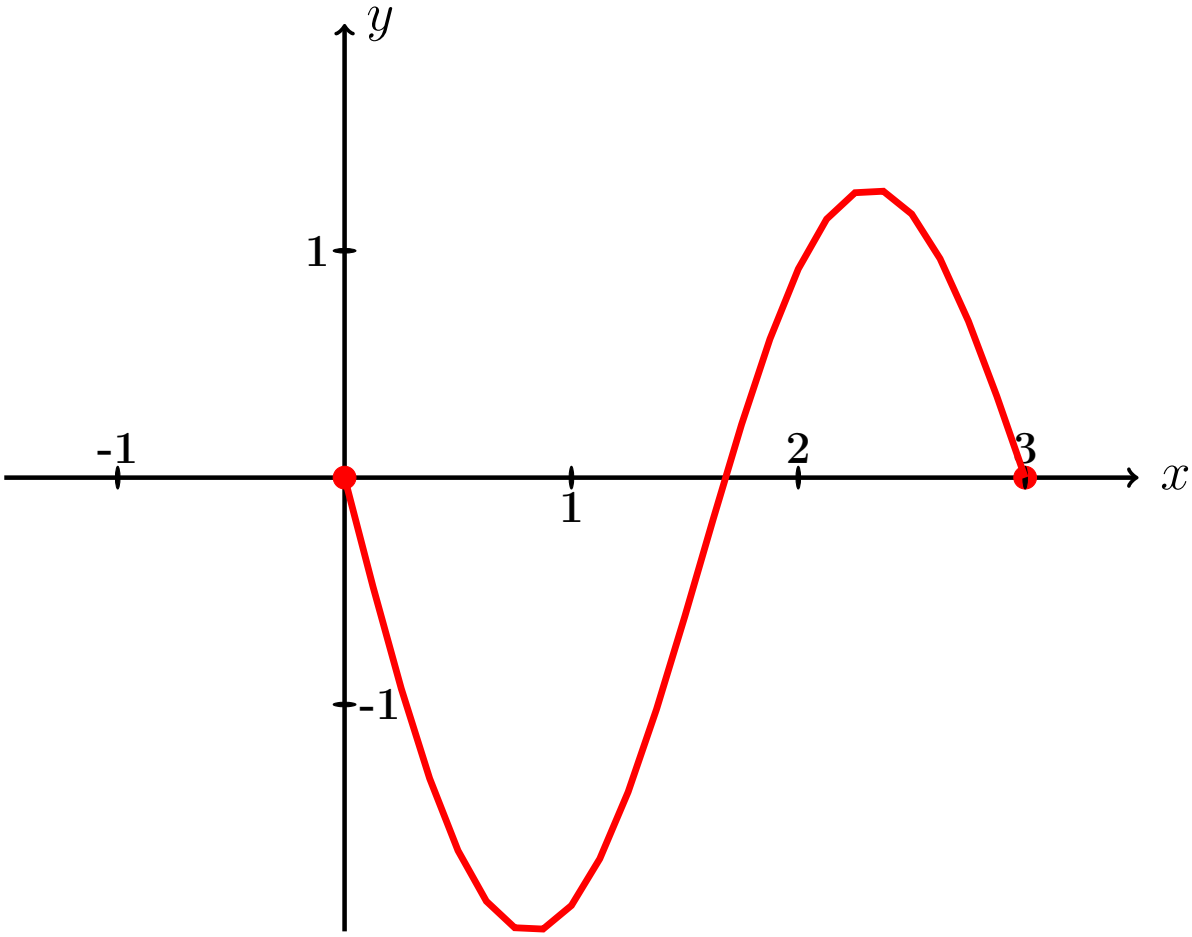


Рис.:

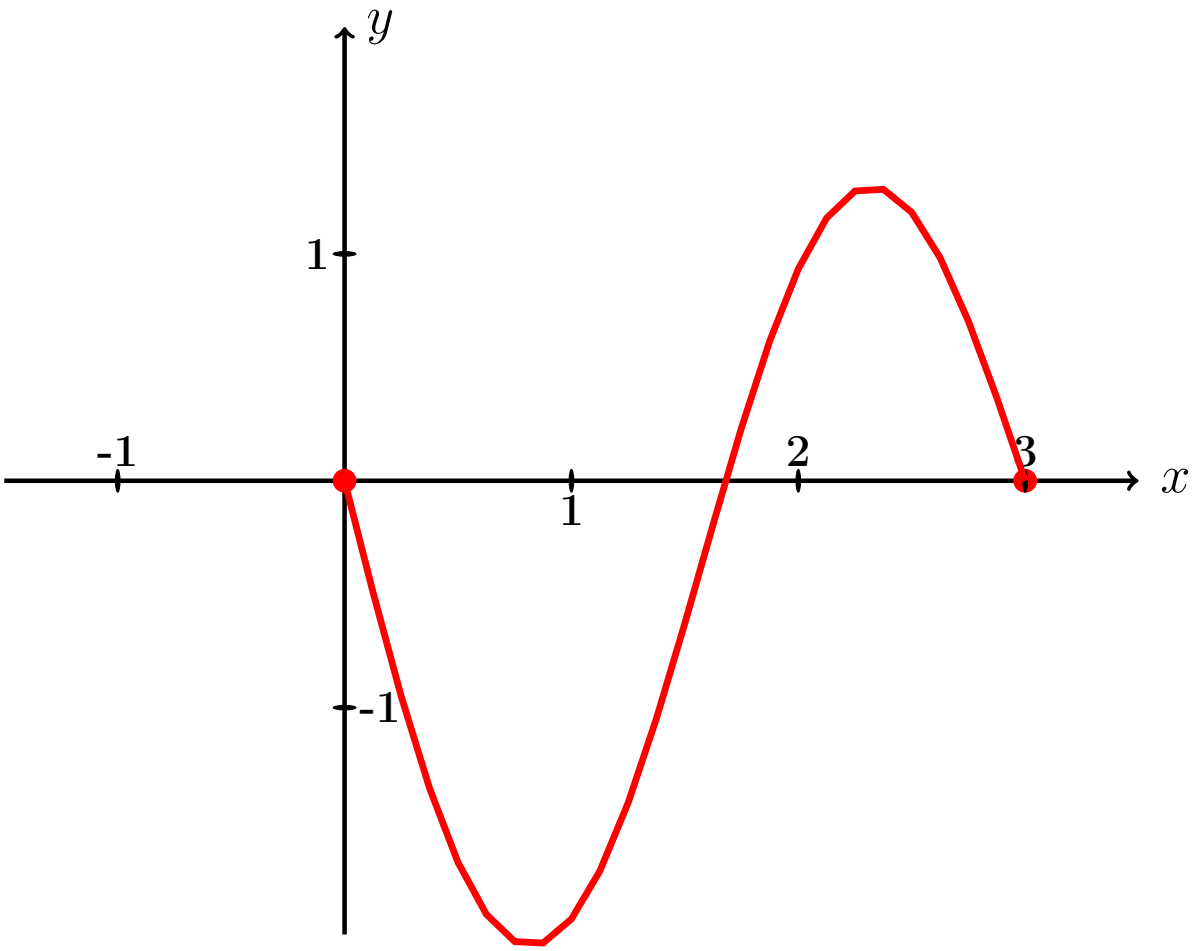


Рис.:

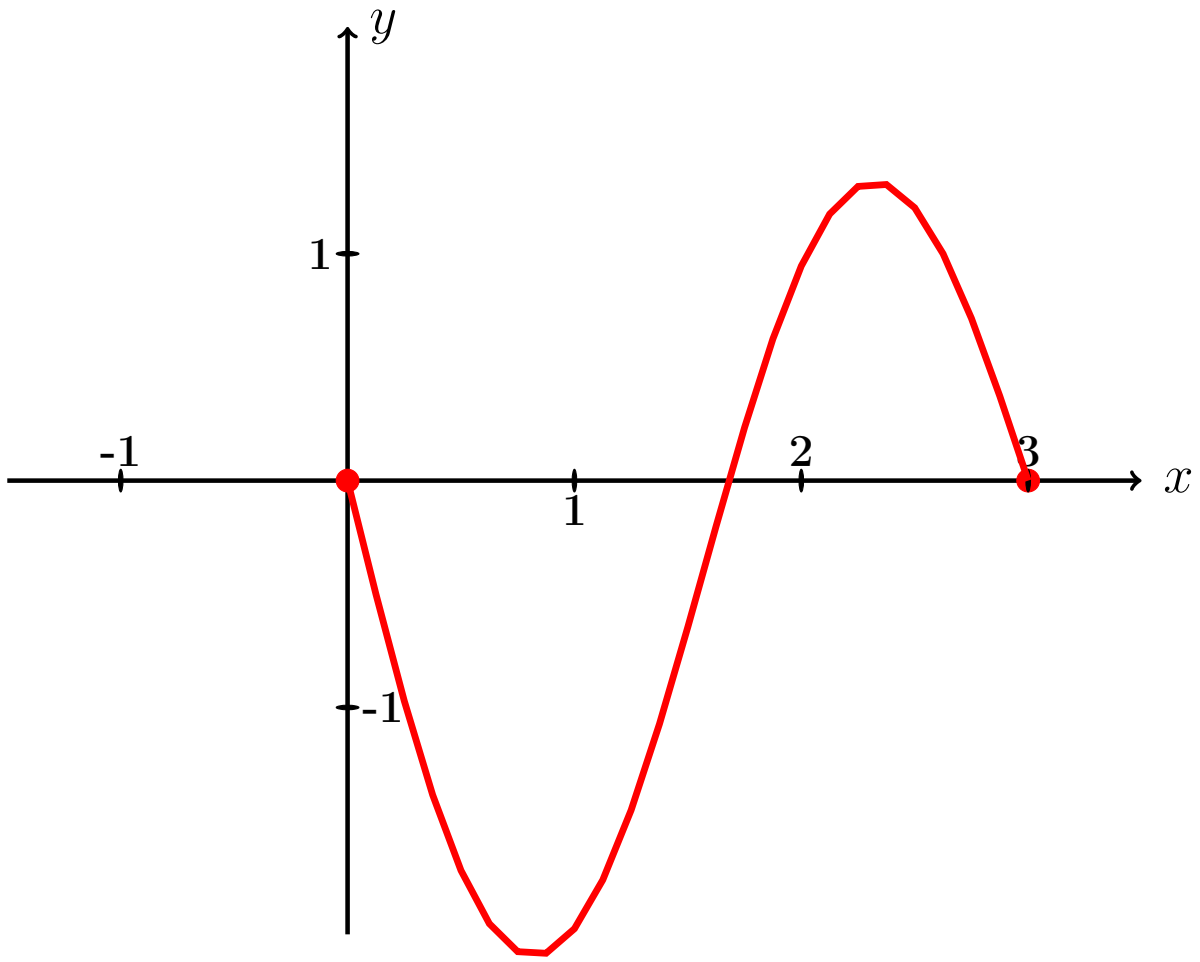


Рис.:

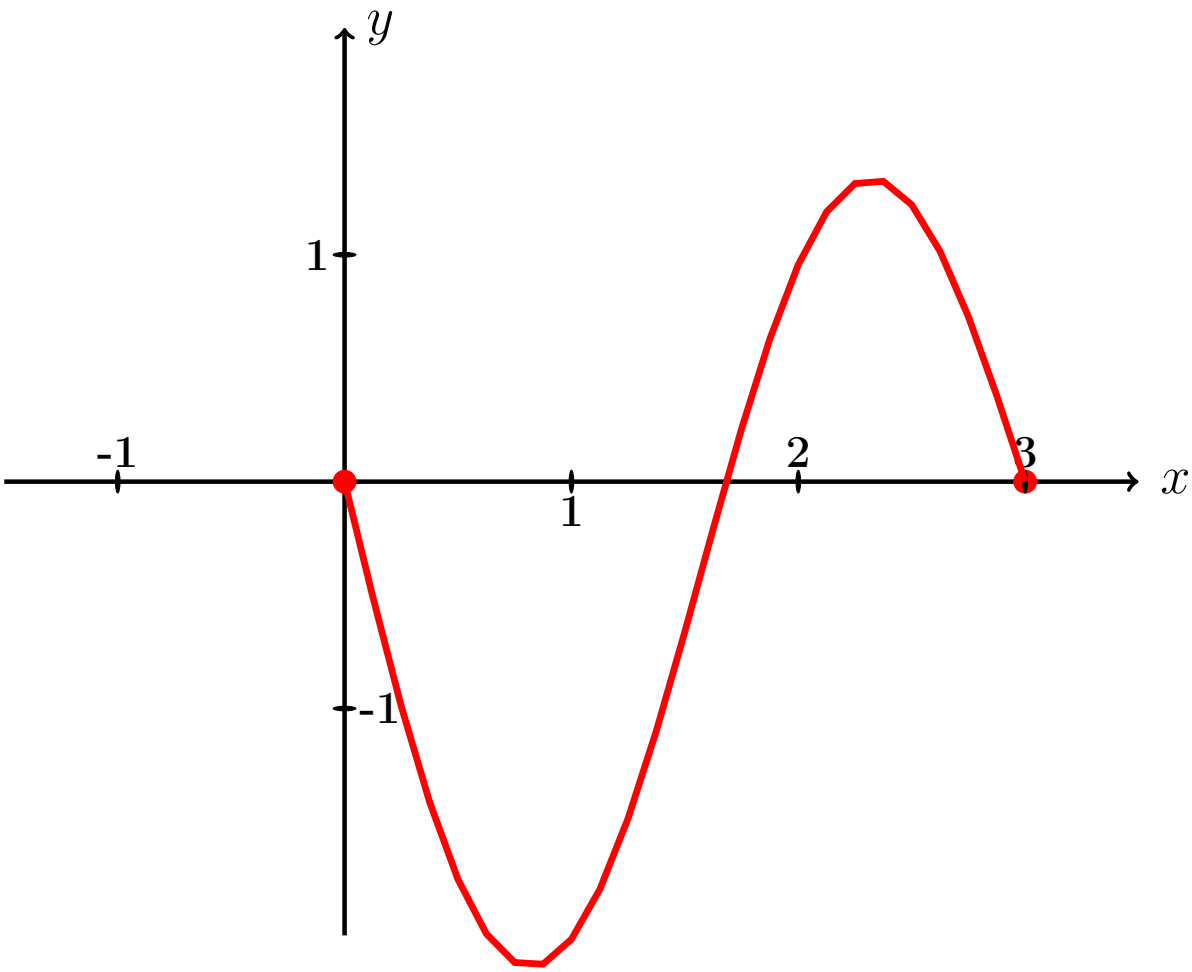


Рис.:

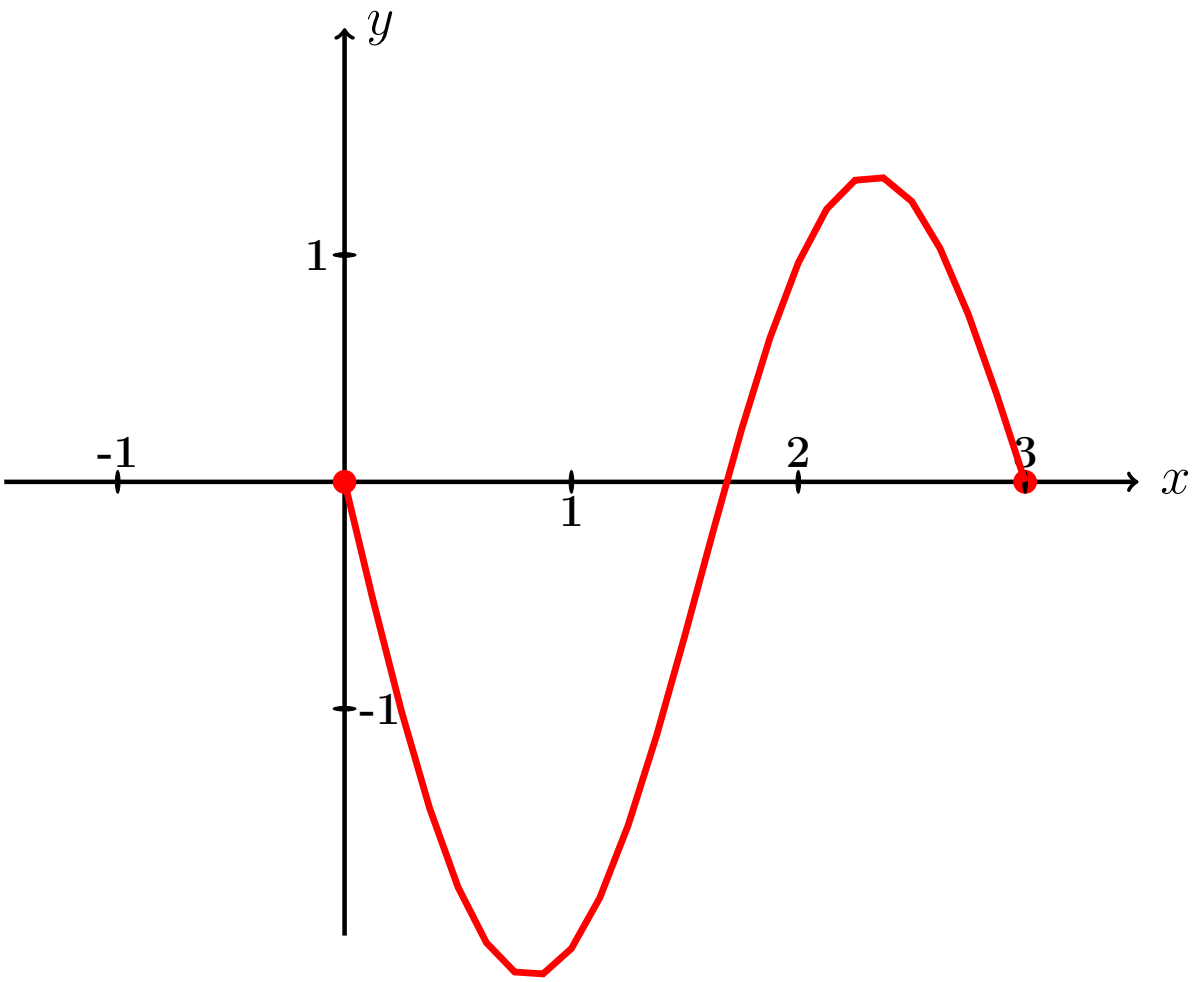


Рис.:

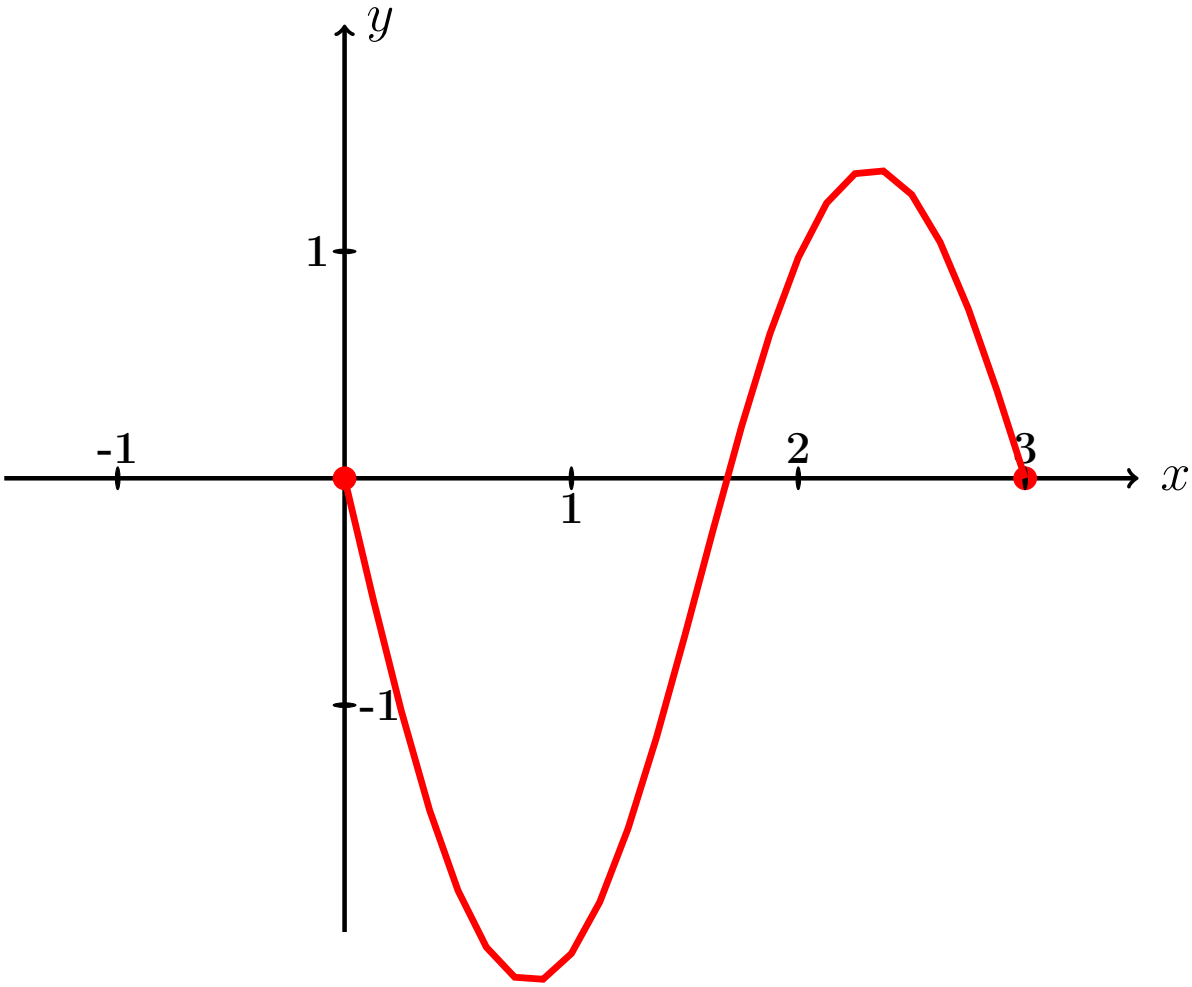


Рис.:

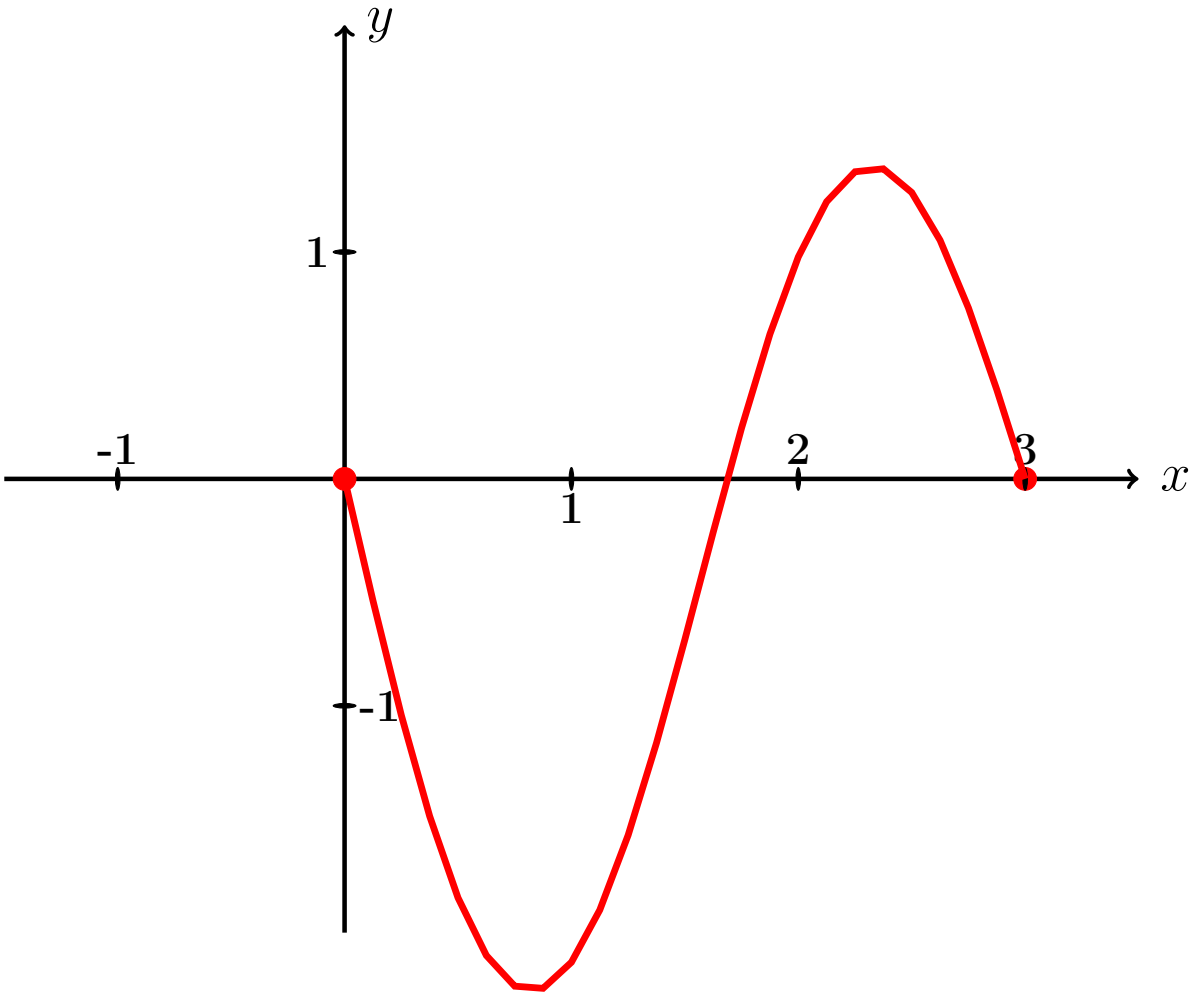


Рис.:

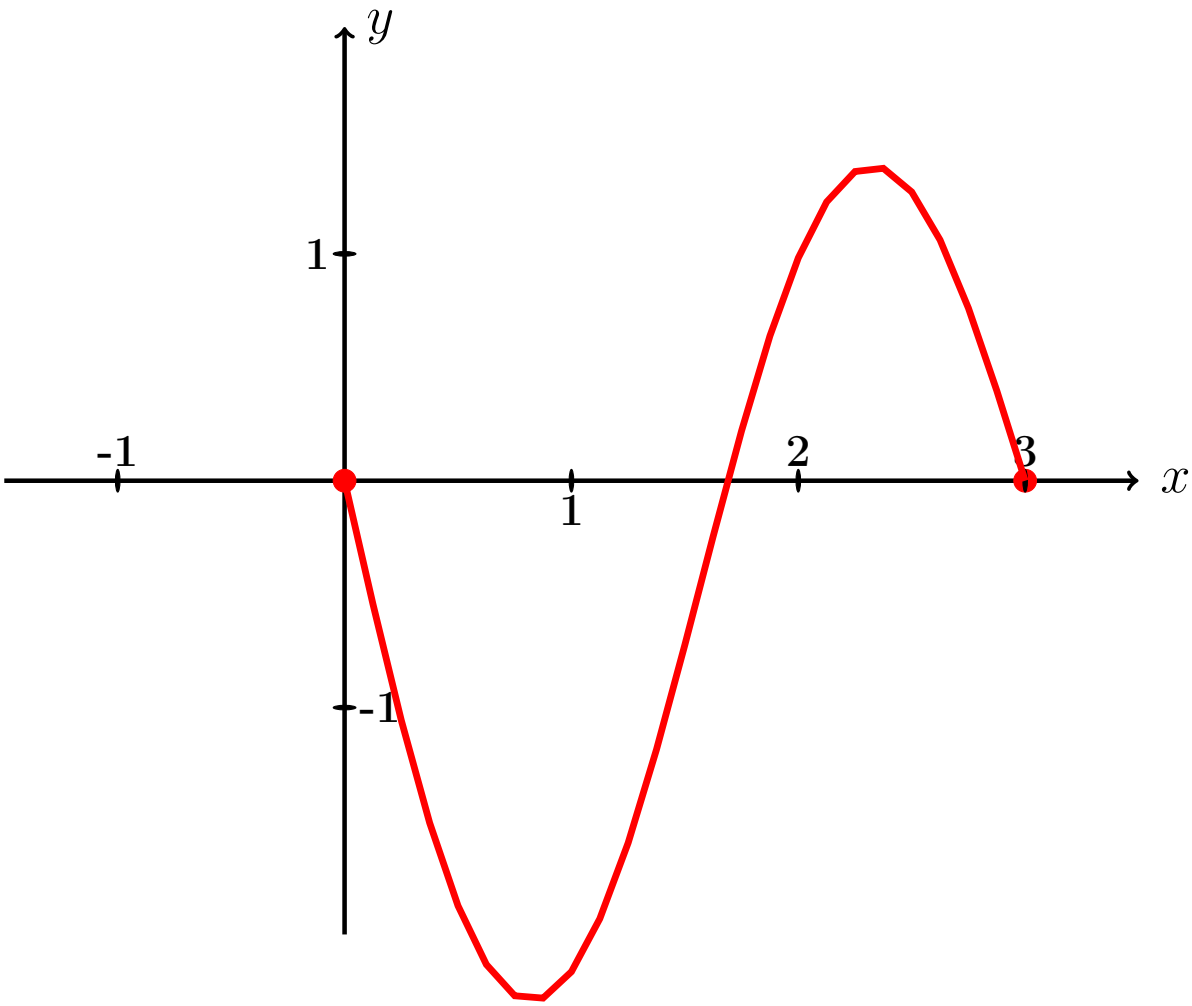


Рис.:

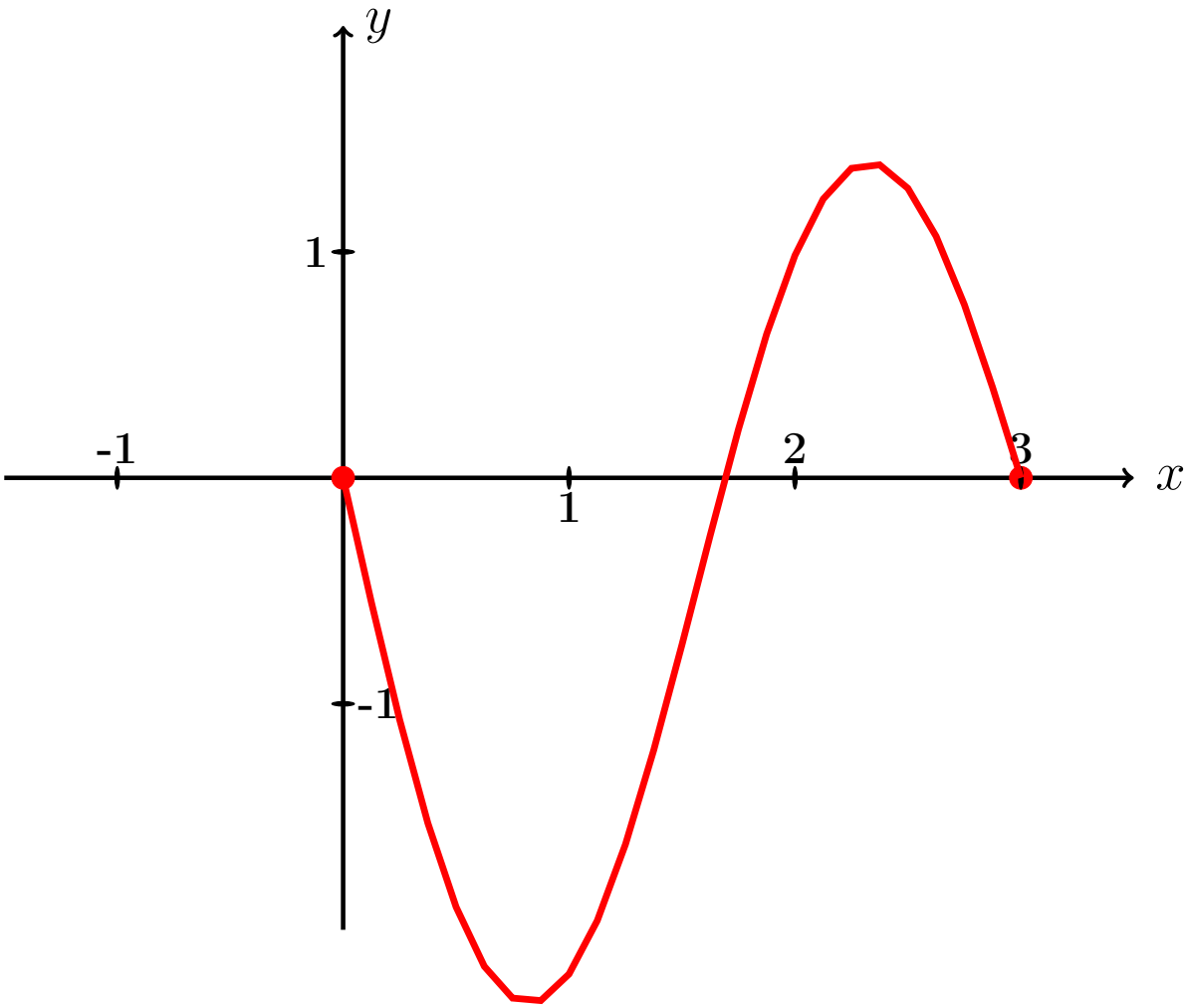


Рис.:

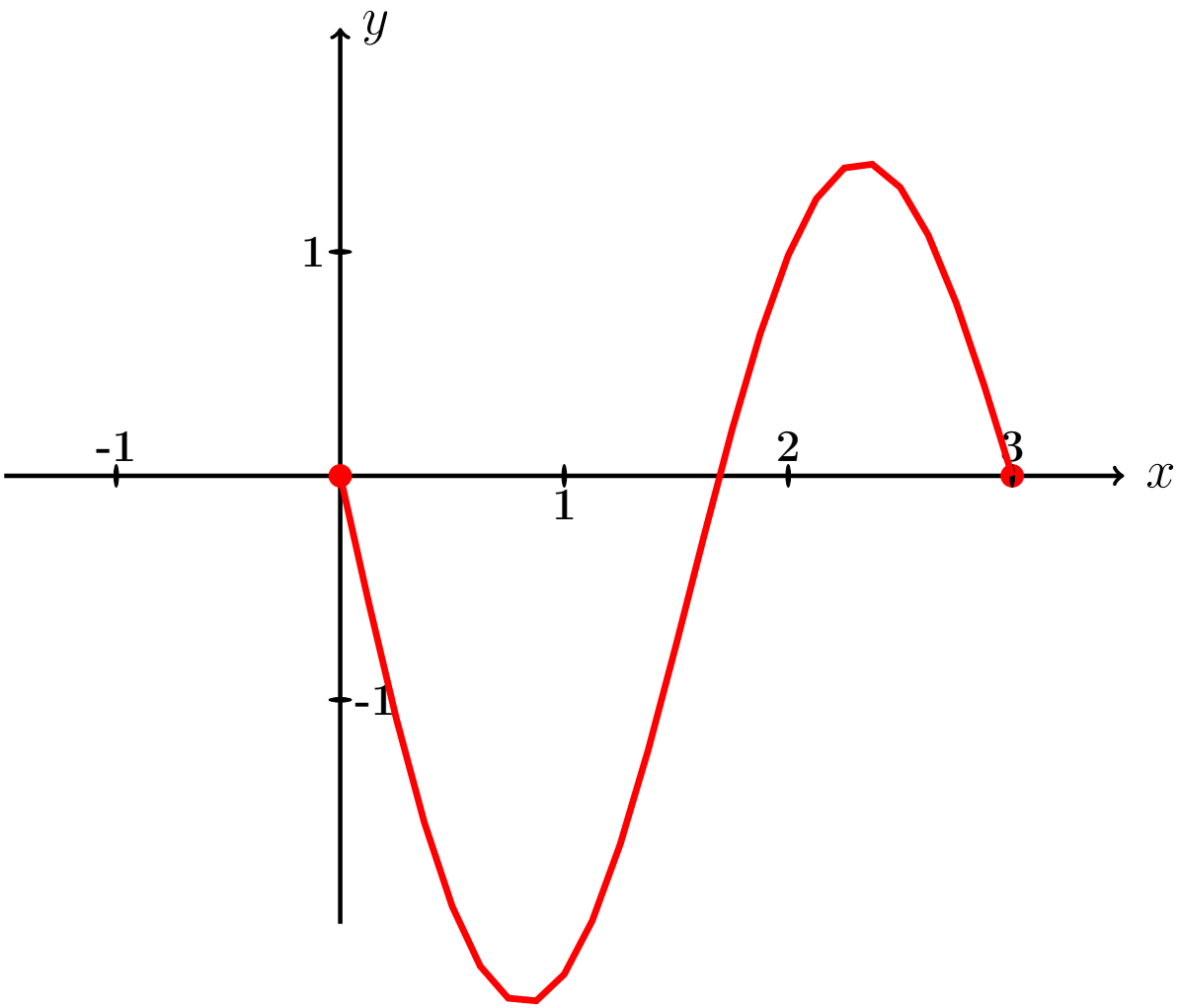


Рис.:

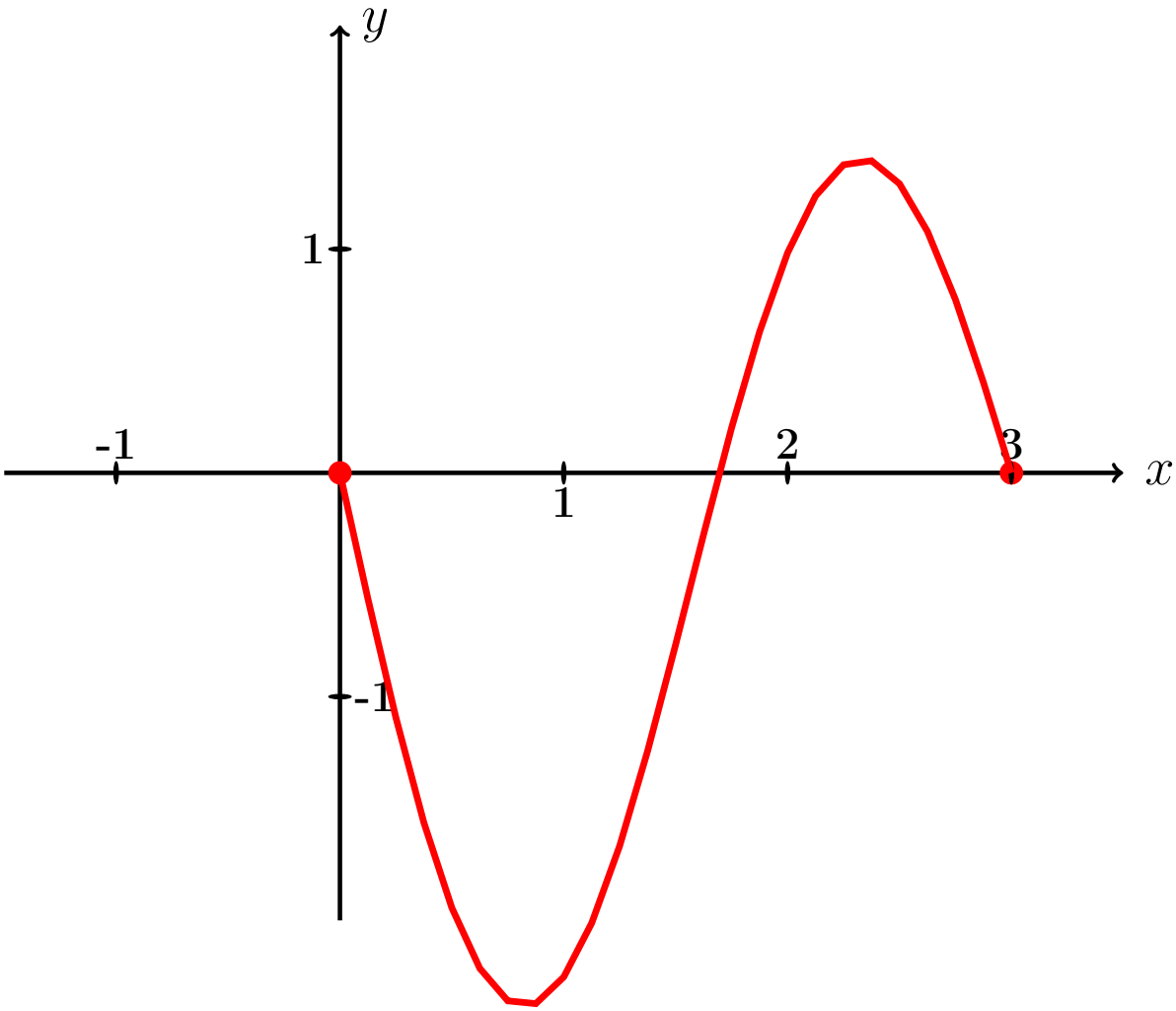


Рис.:

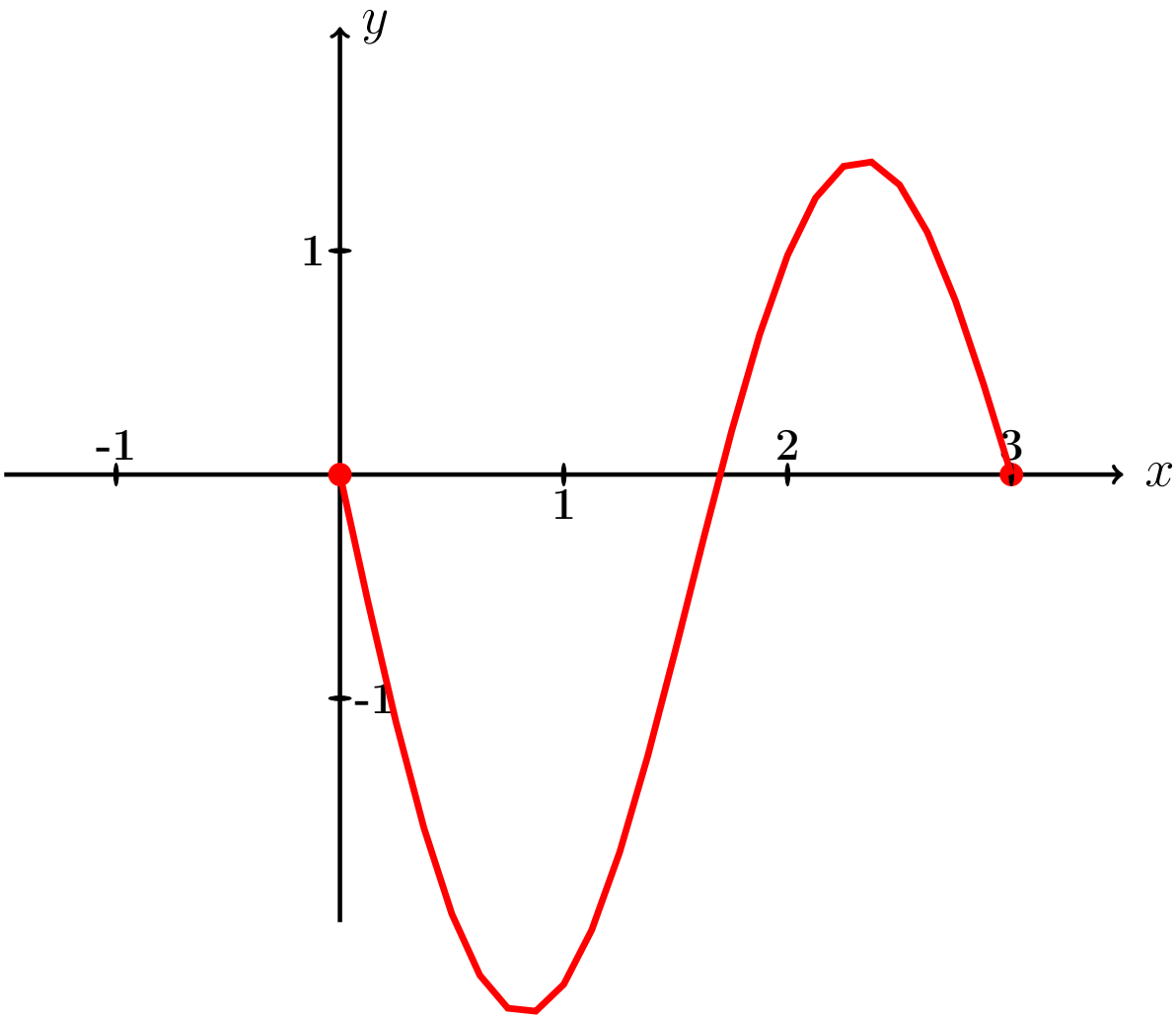


Рис.:

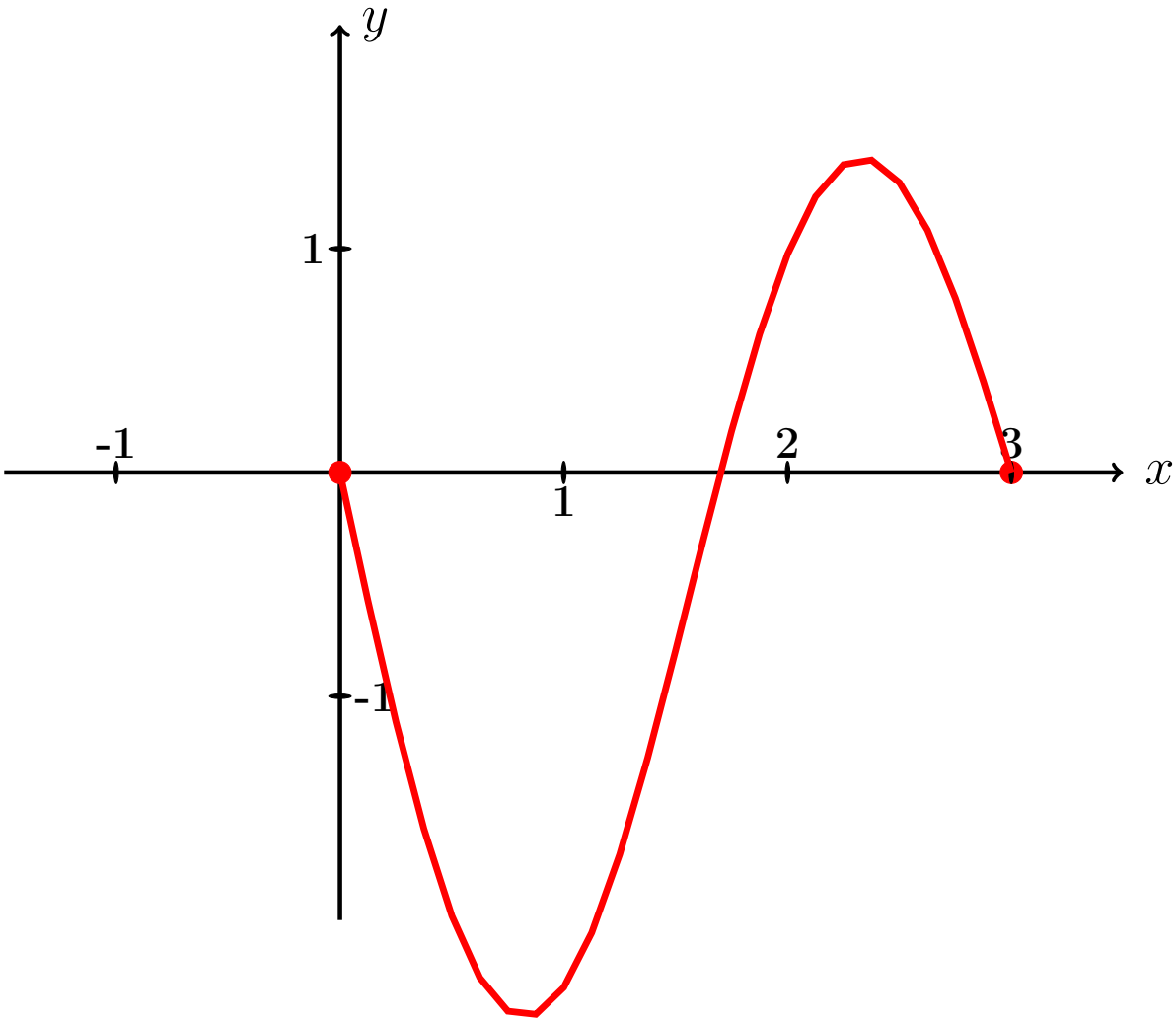


Рис.:

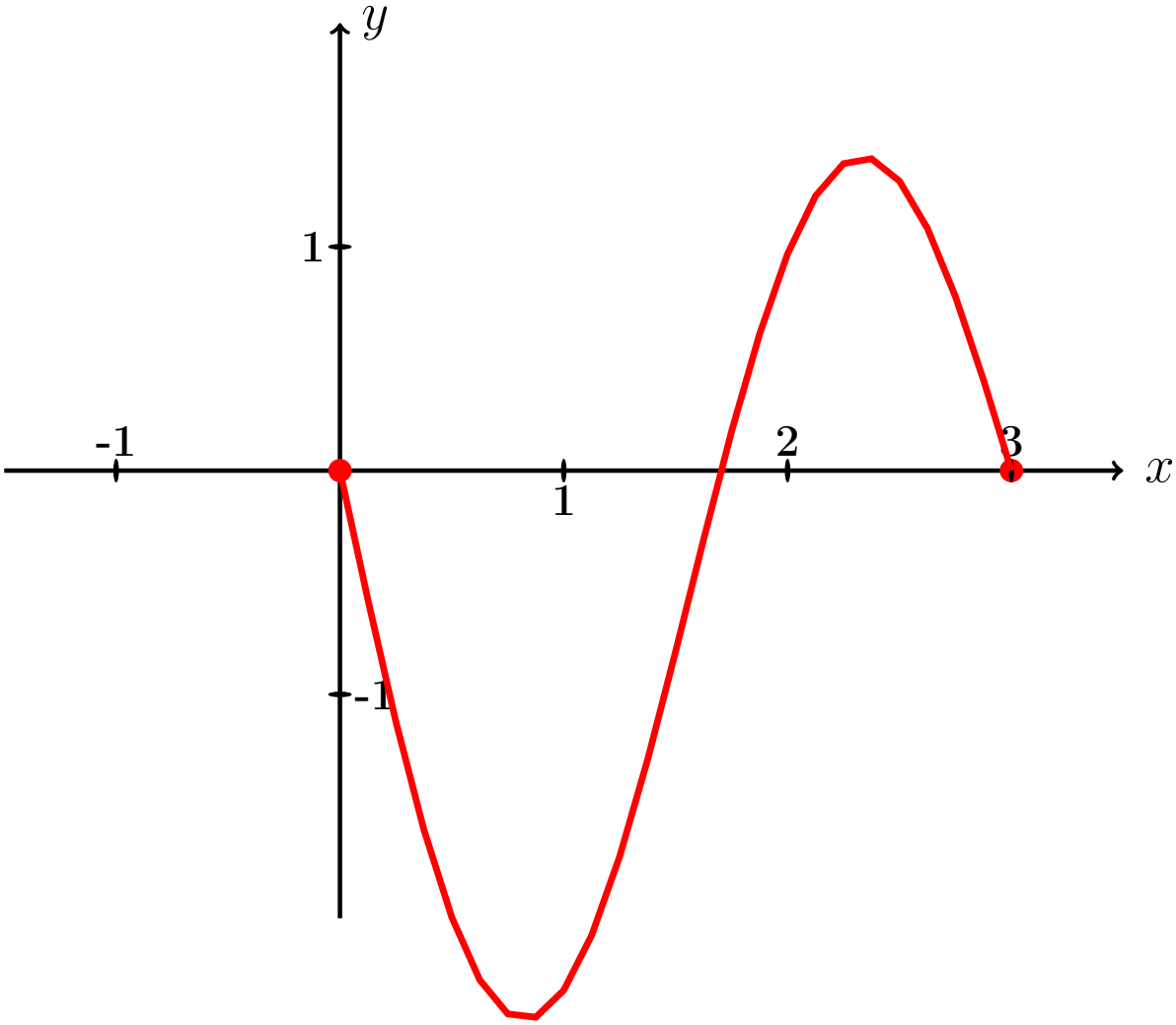


Рис.:

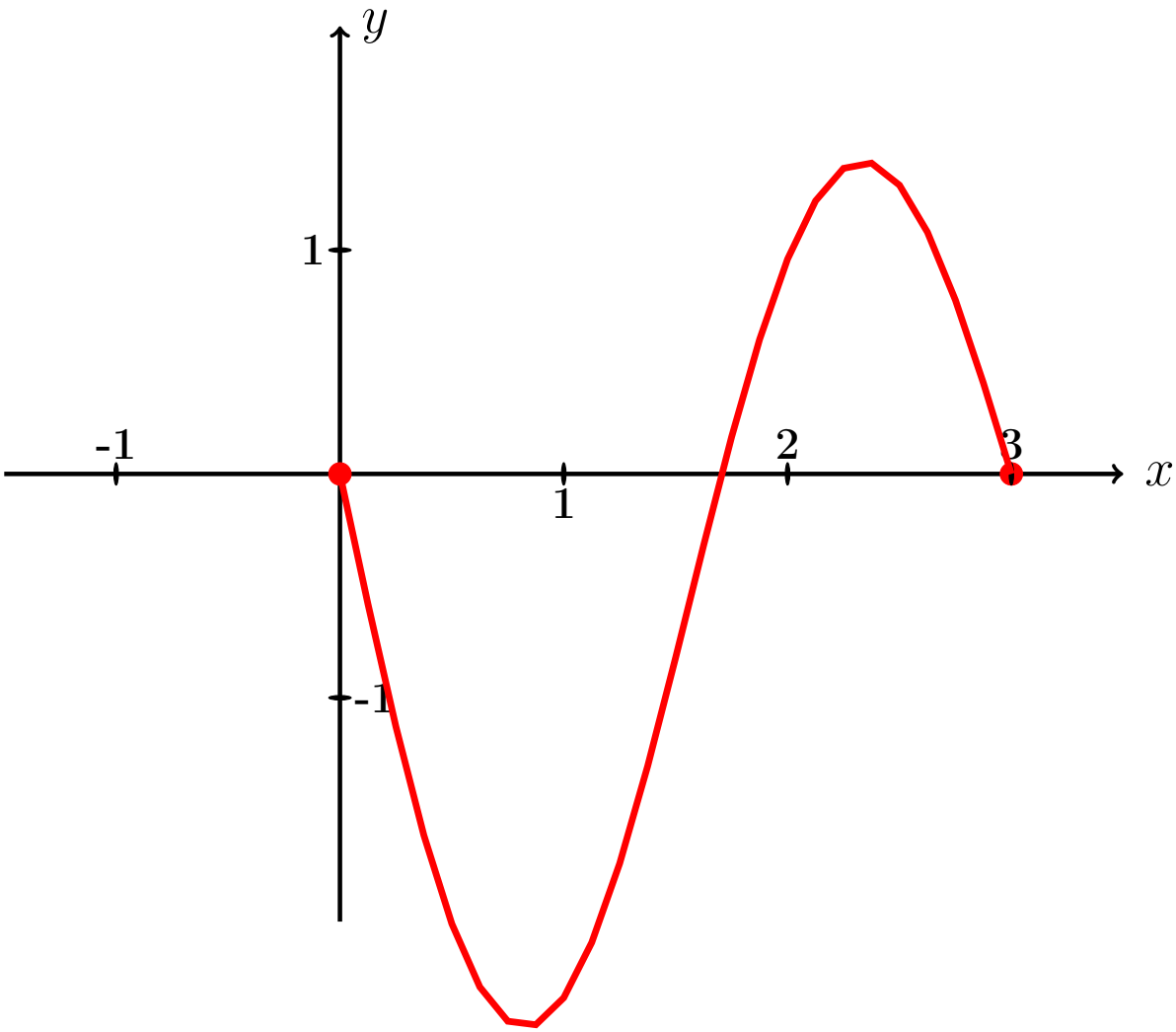


Рис.:

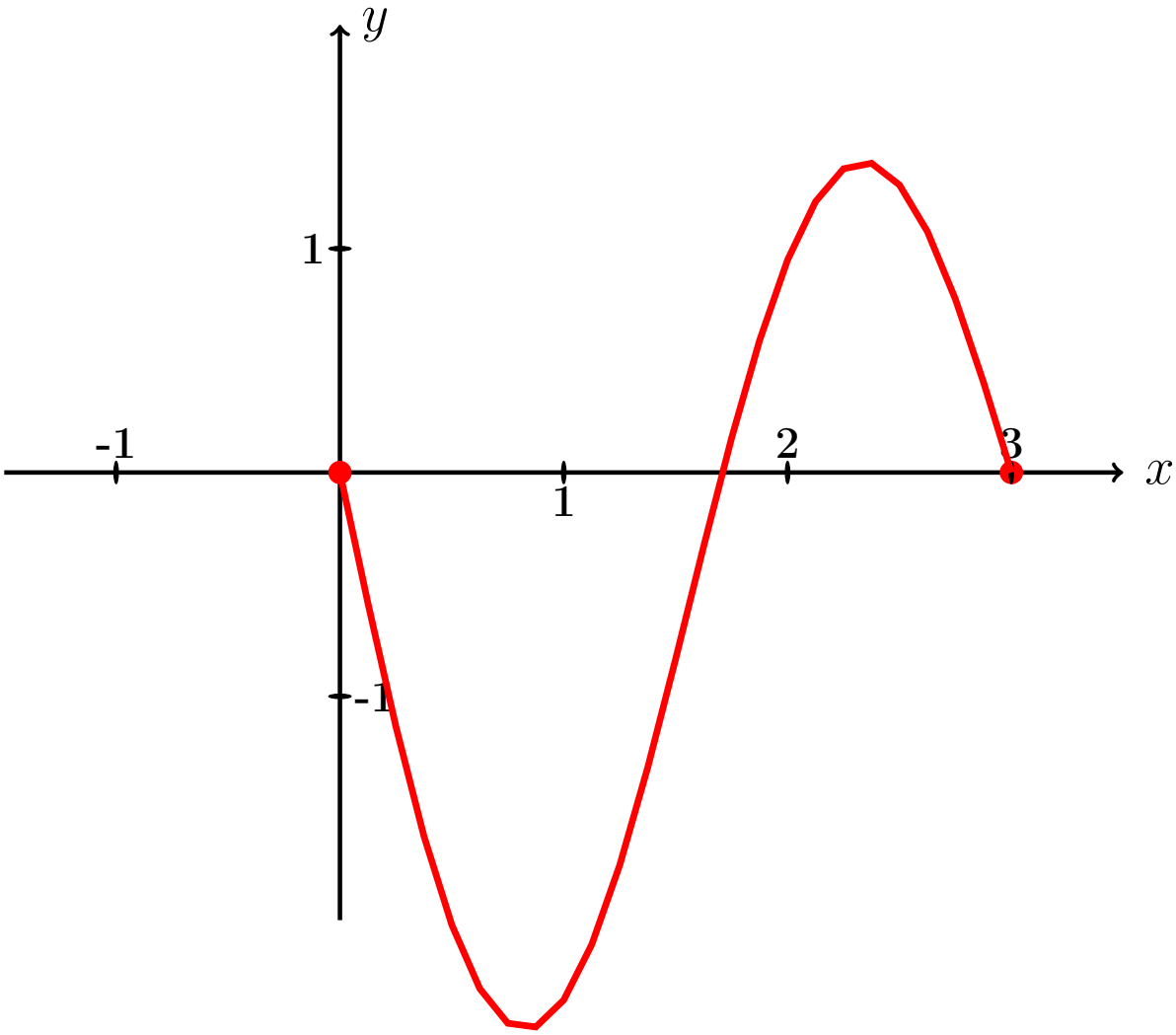


Рис.:

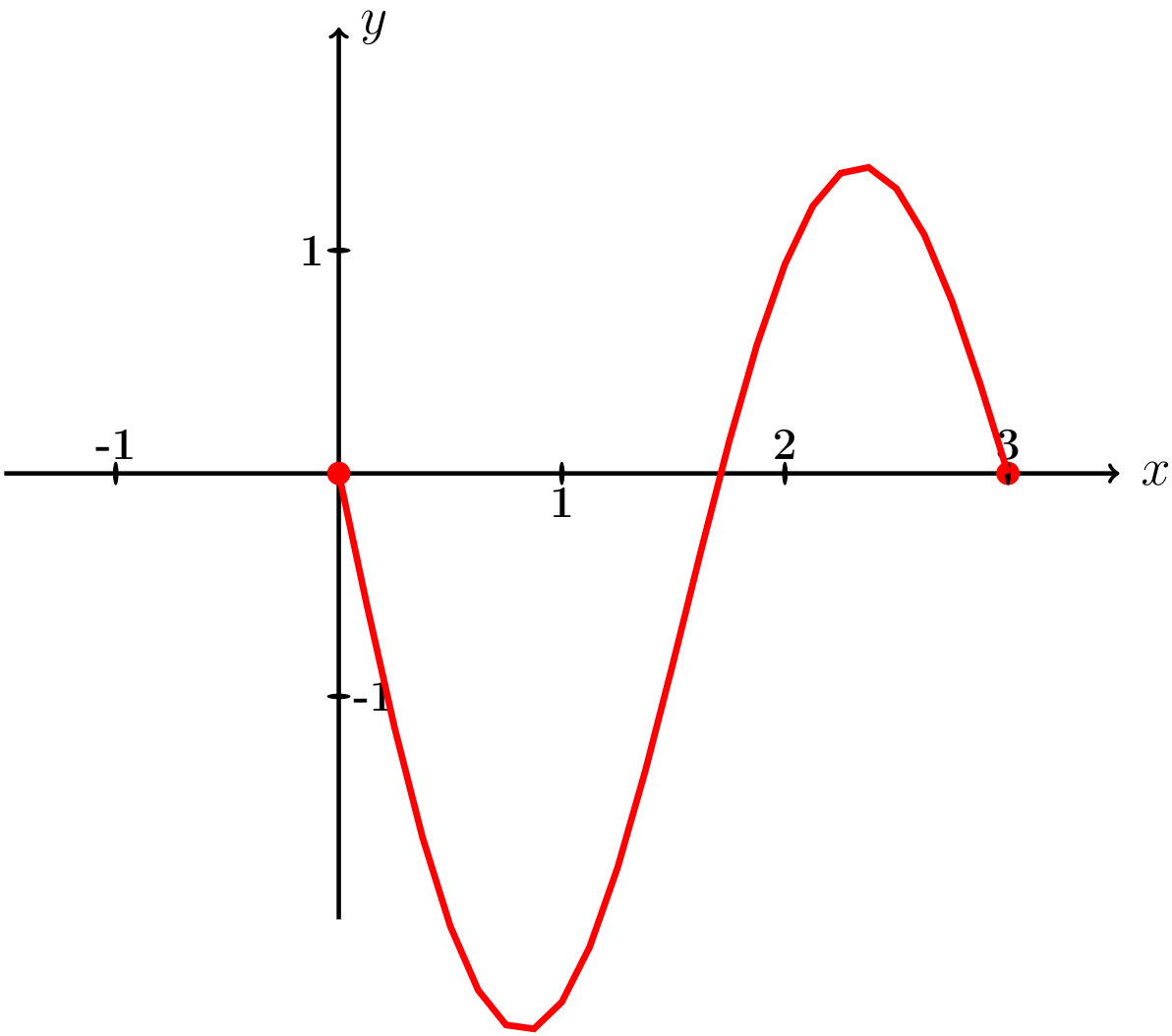


Рис.:

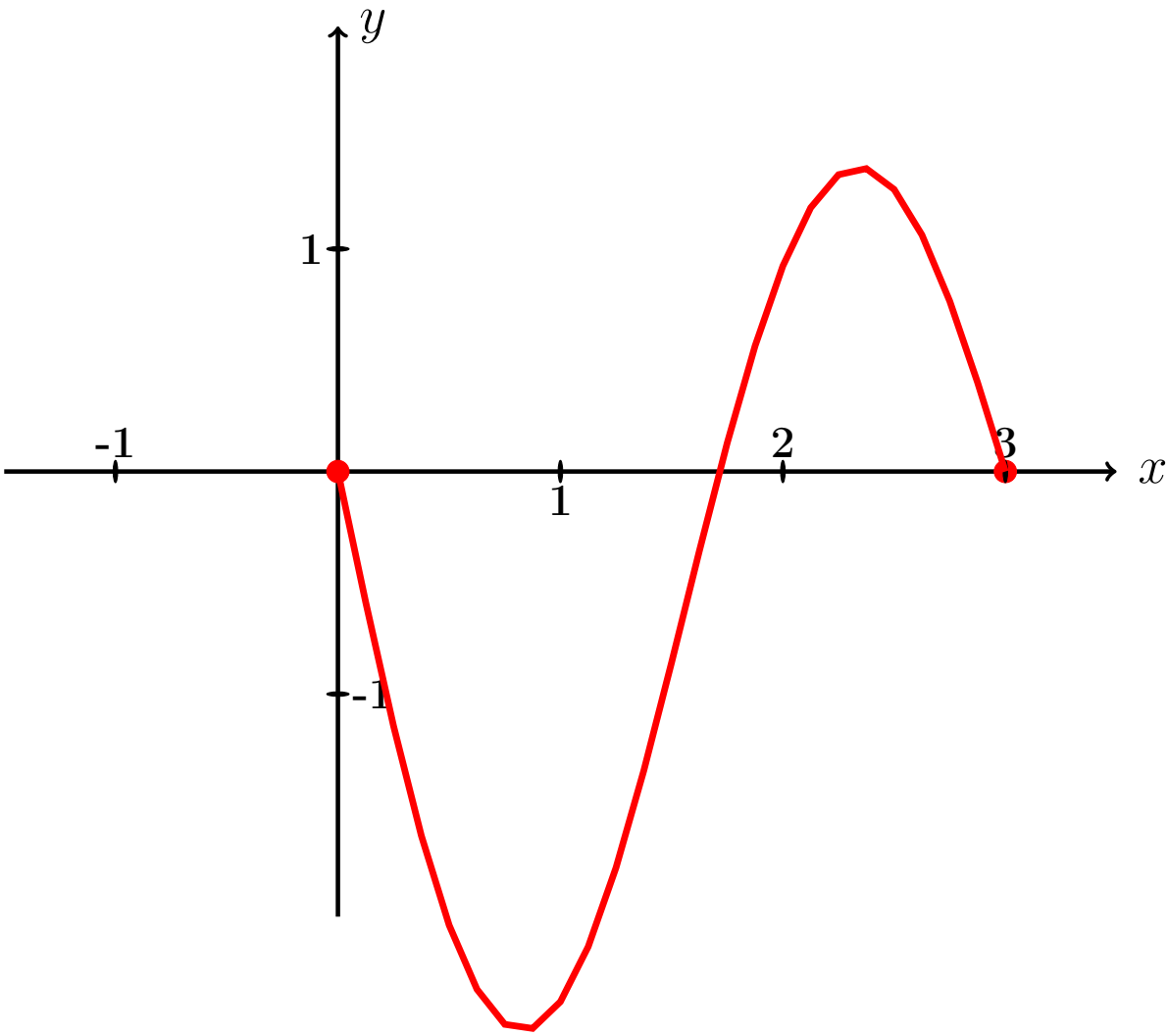


Рис.:

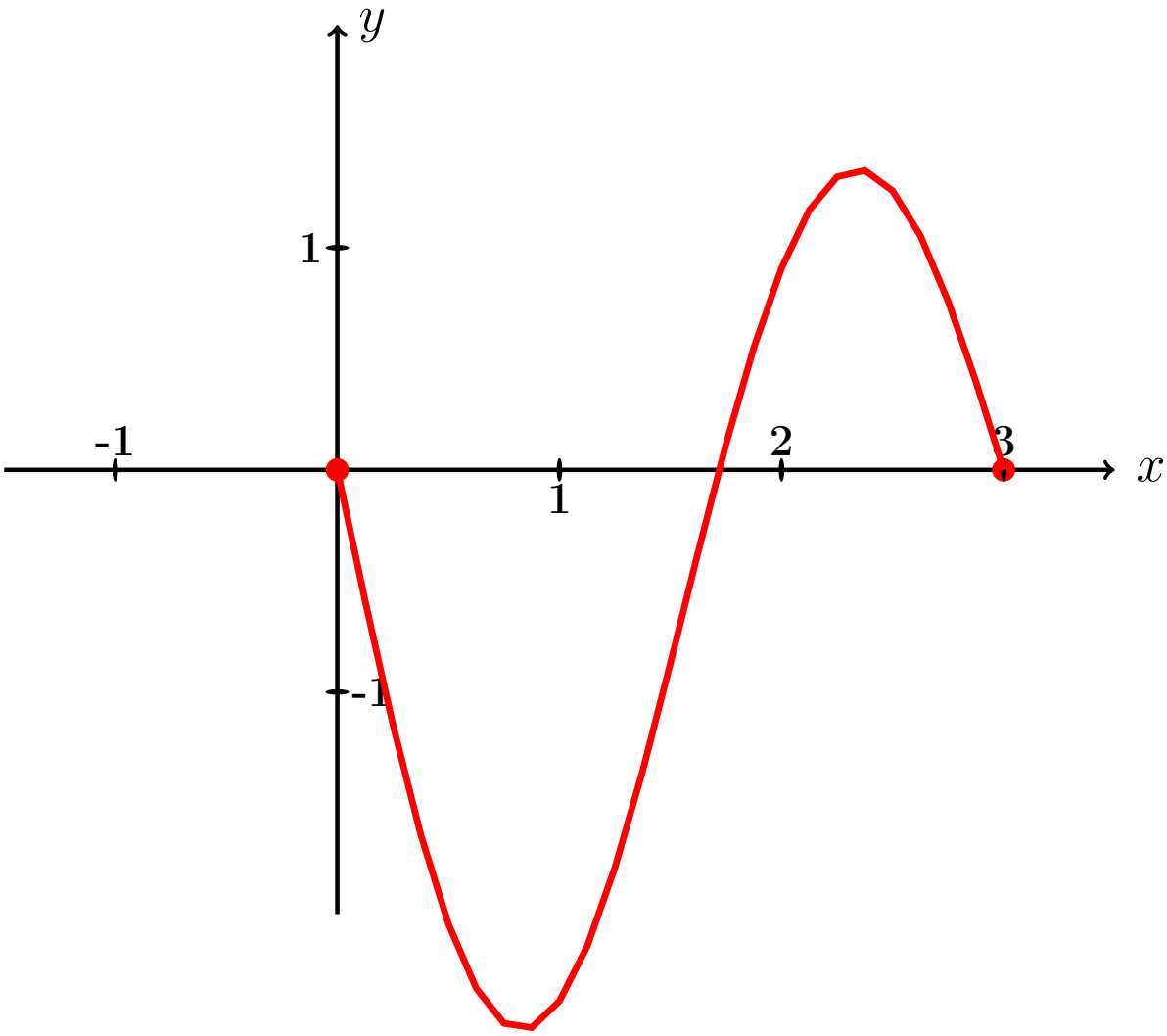


Рис.:

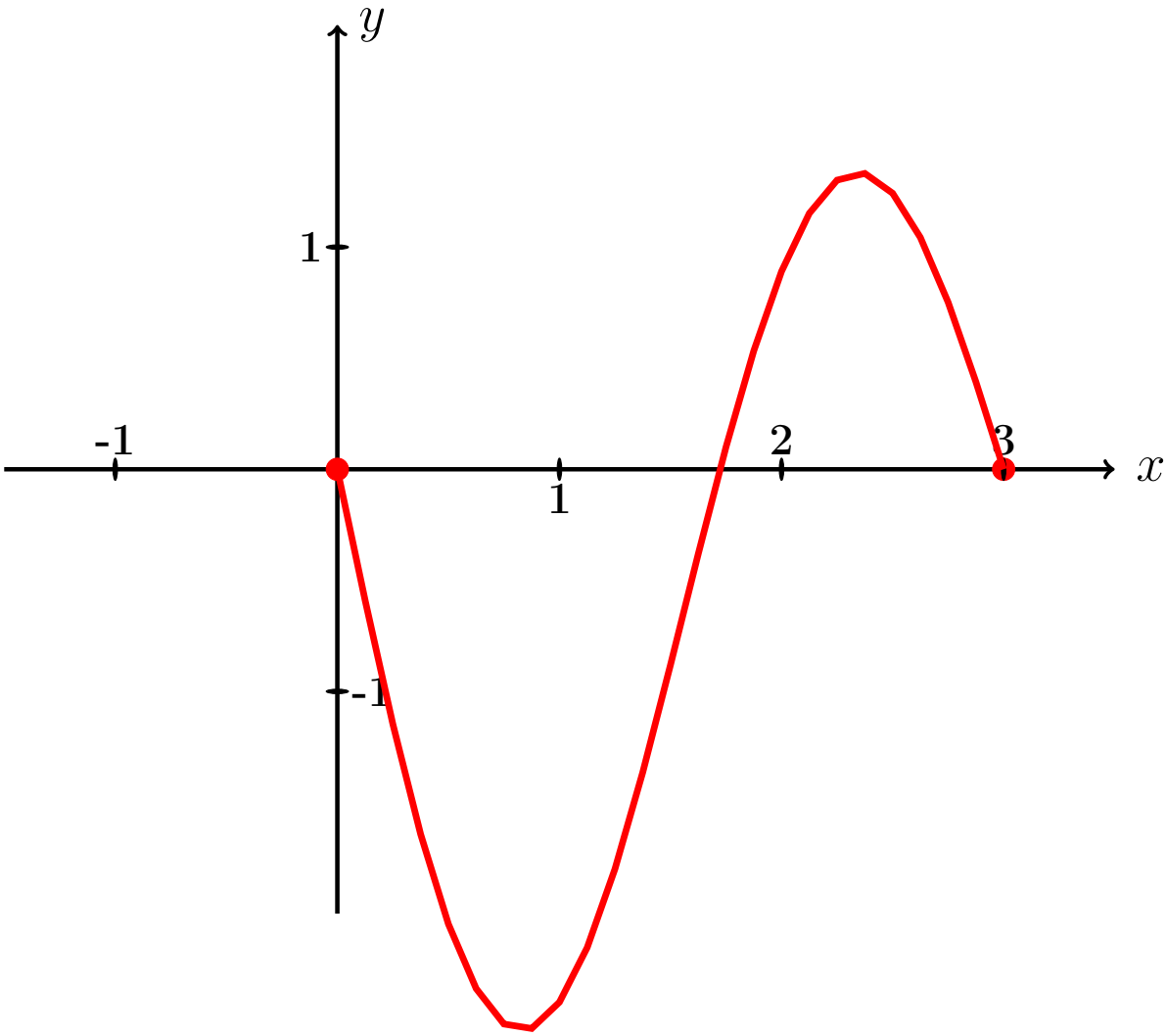


Рис.:

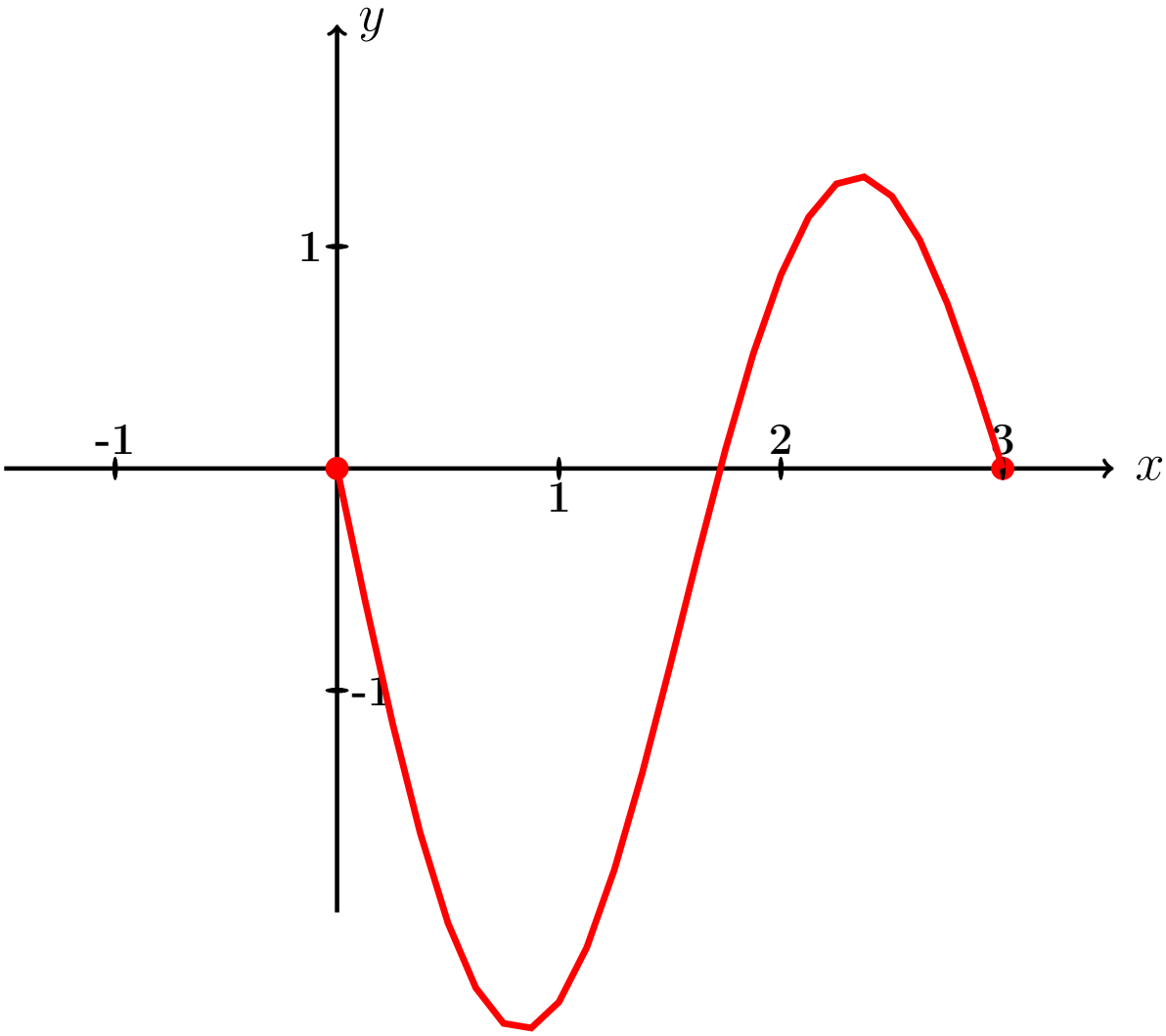


Рис.:

Пример П5 анимация возврат огл

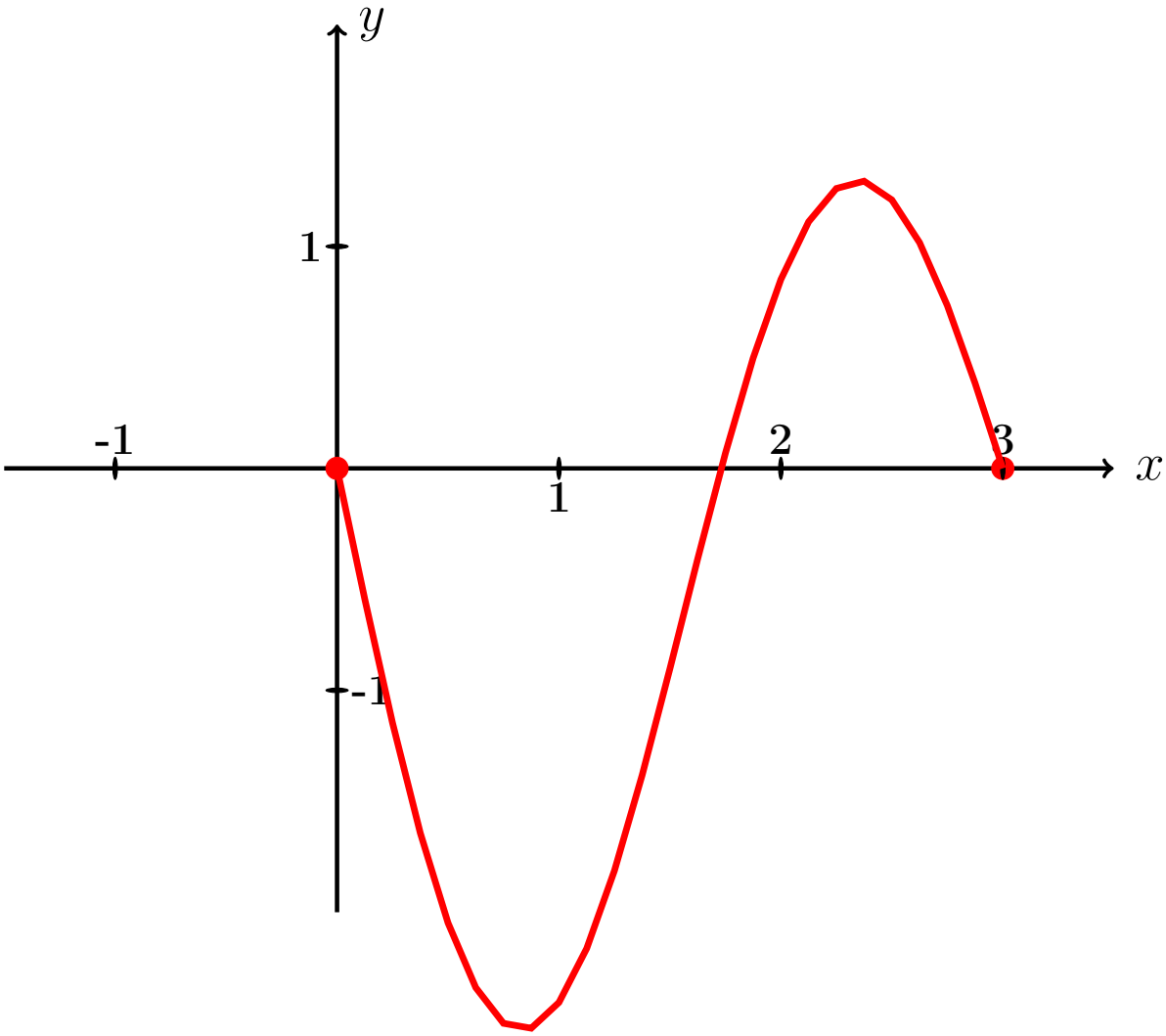


Рис.:

Пример П5 анимация возврат огл

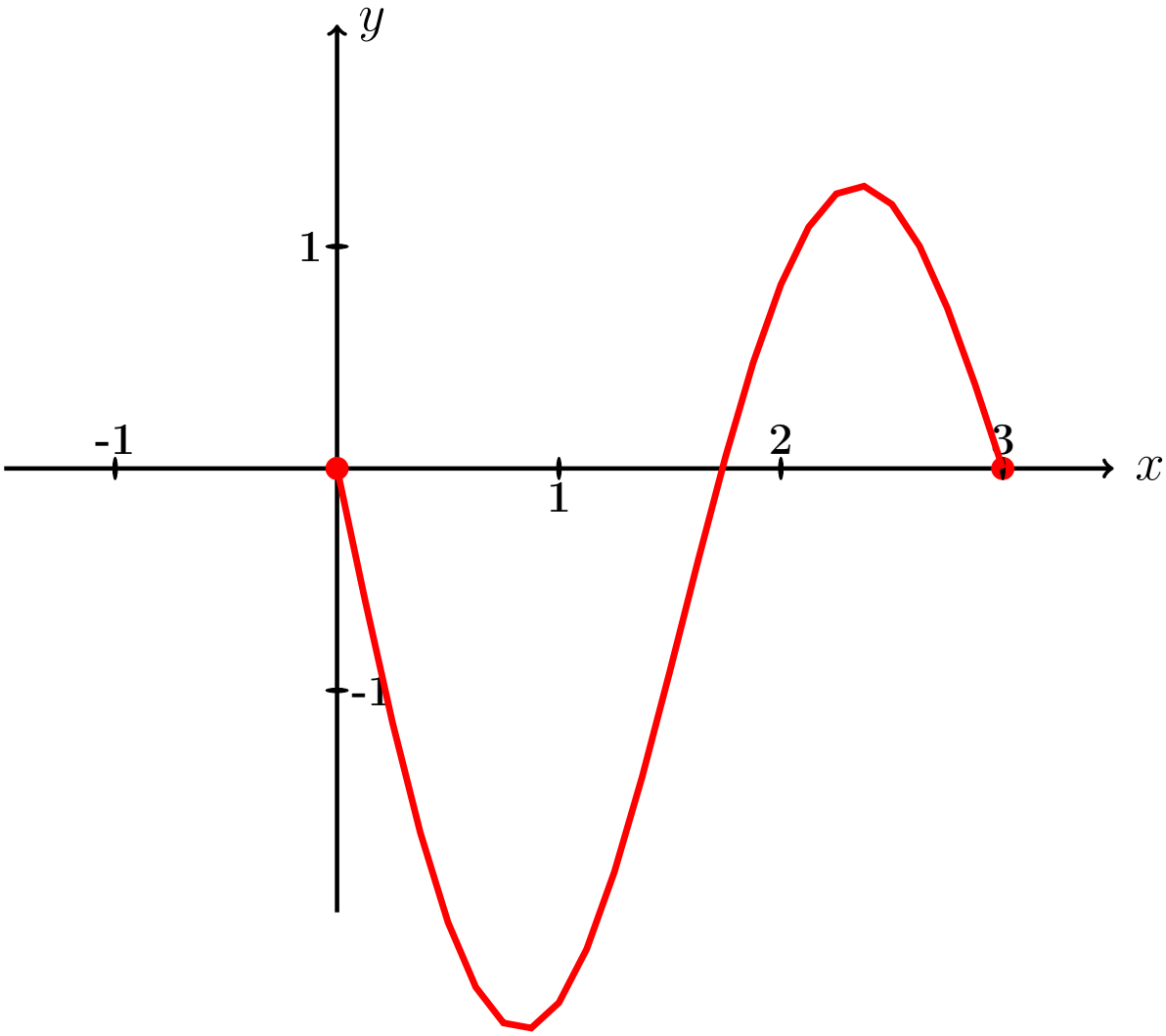


Рис.:

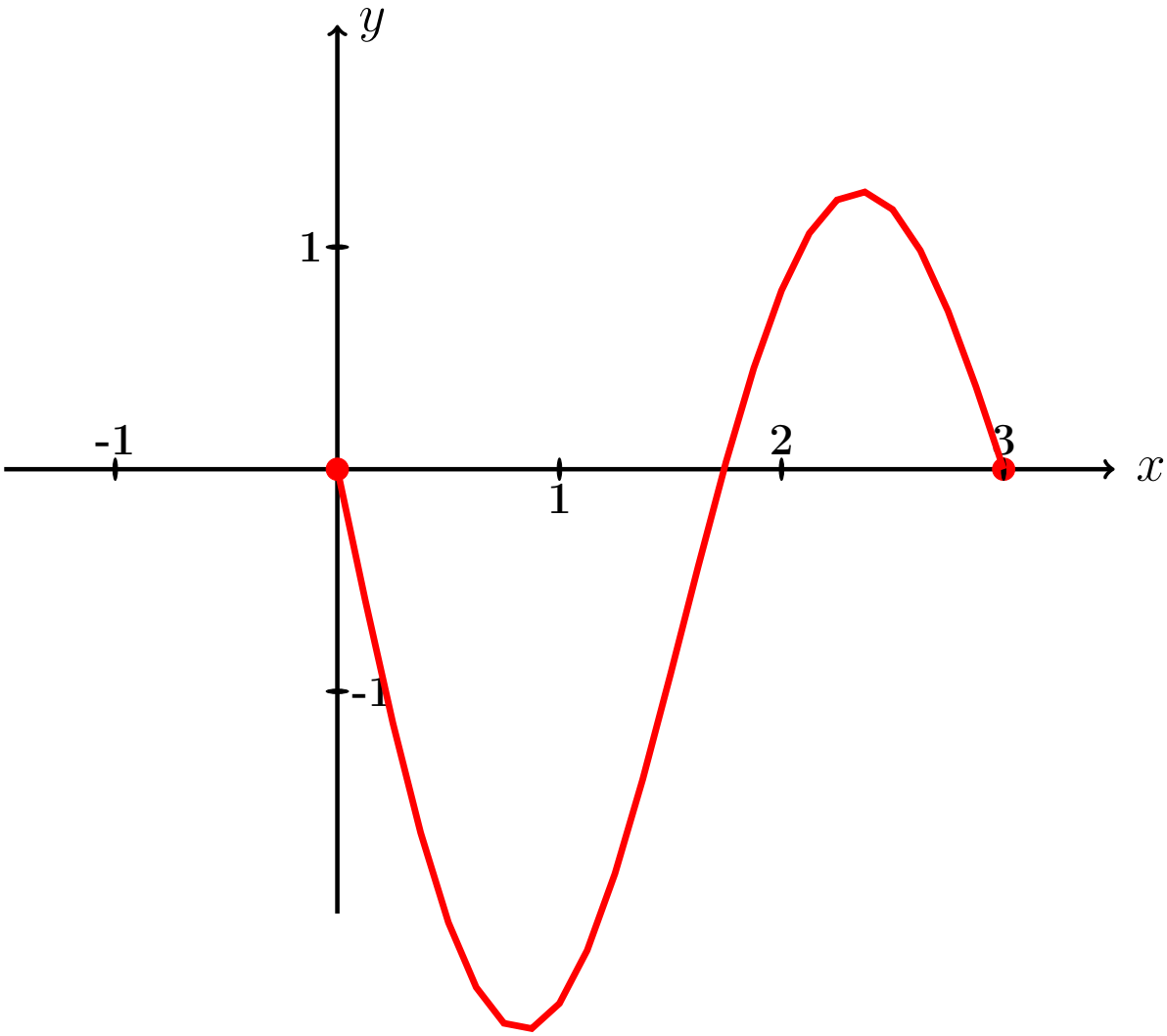


Рис.:

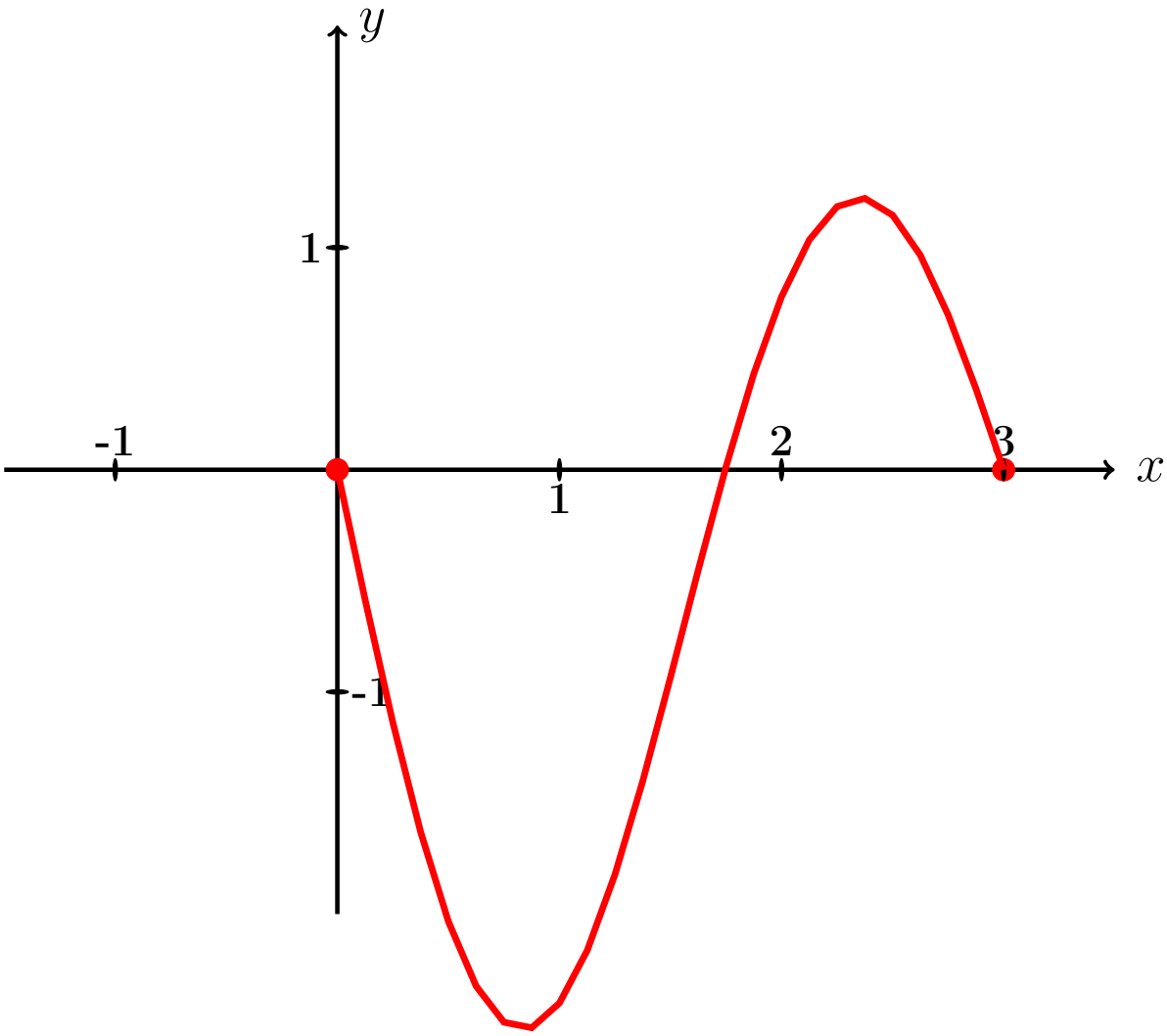


Рис.:

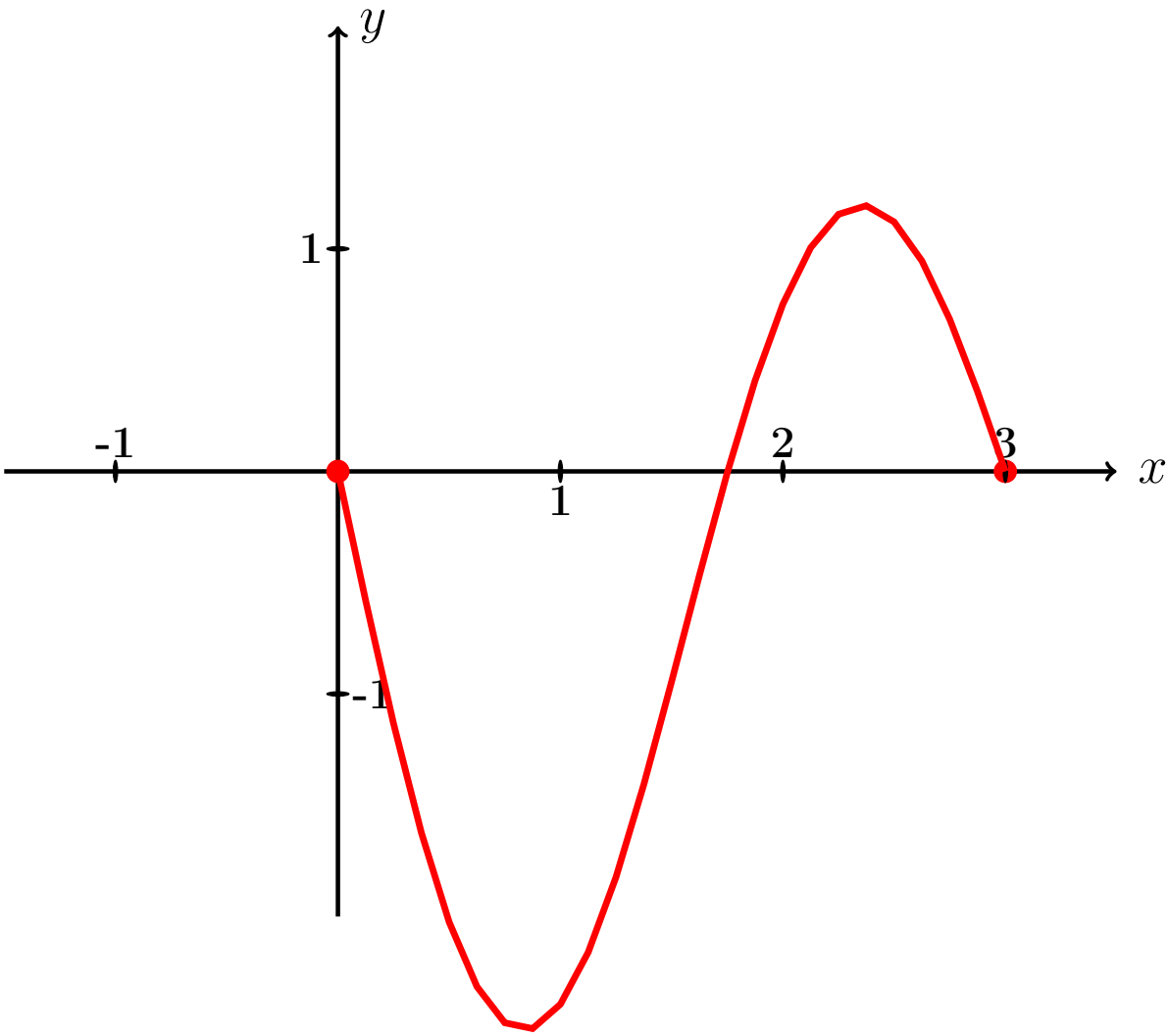


Рис.:

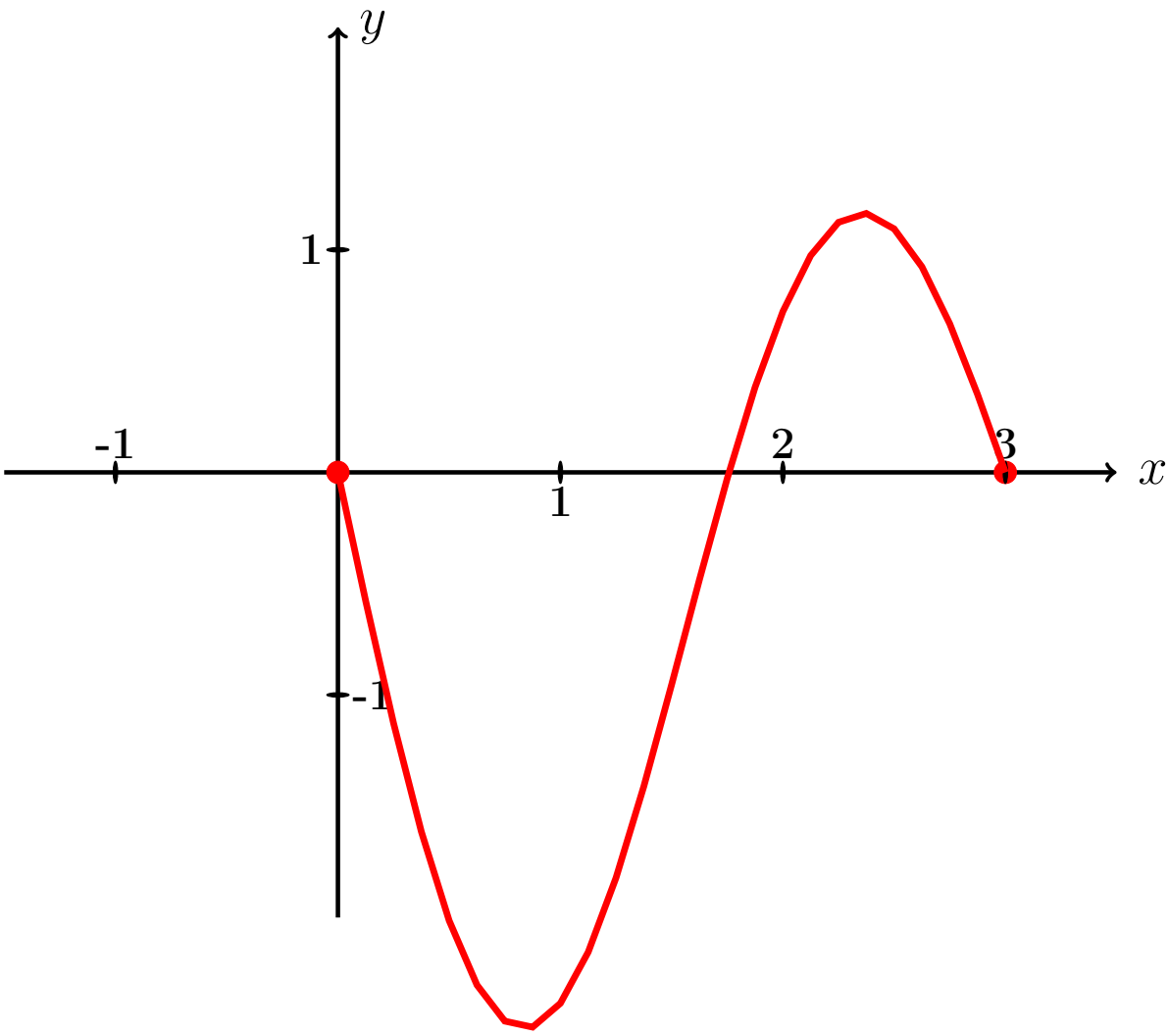


Рис.:

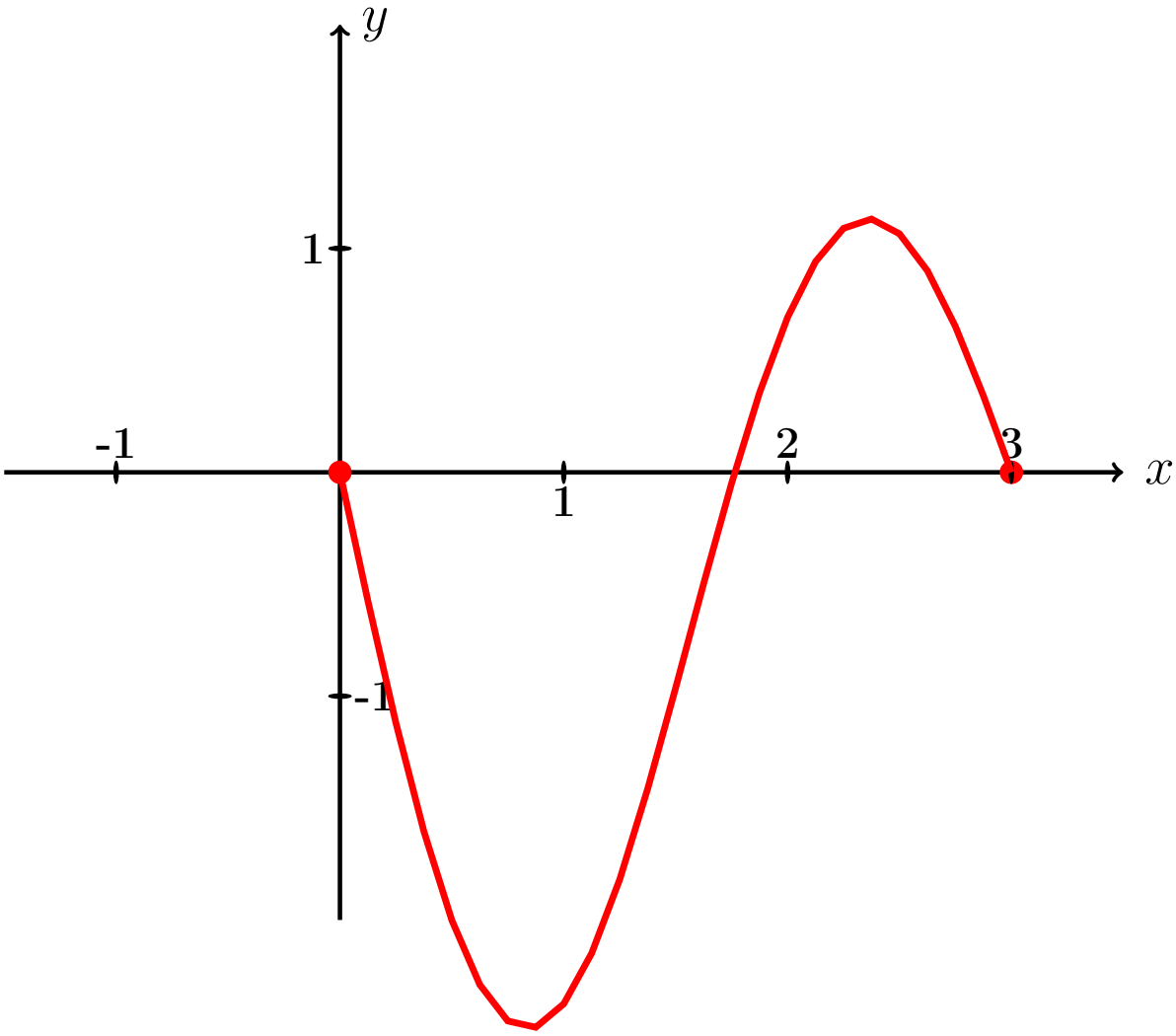


Рис.:

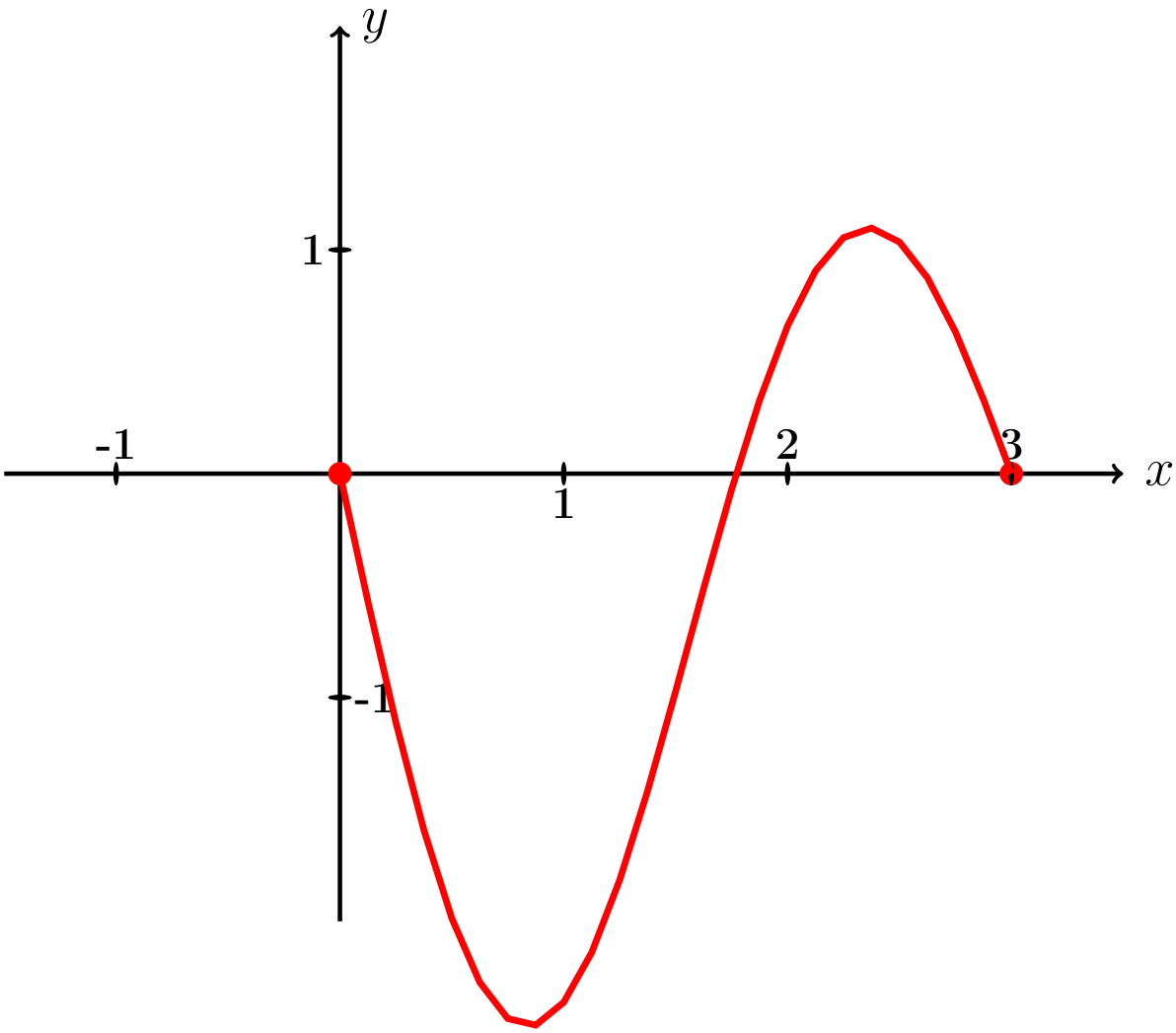


Рис.:

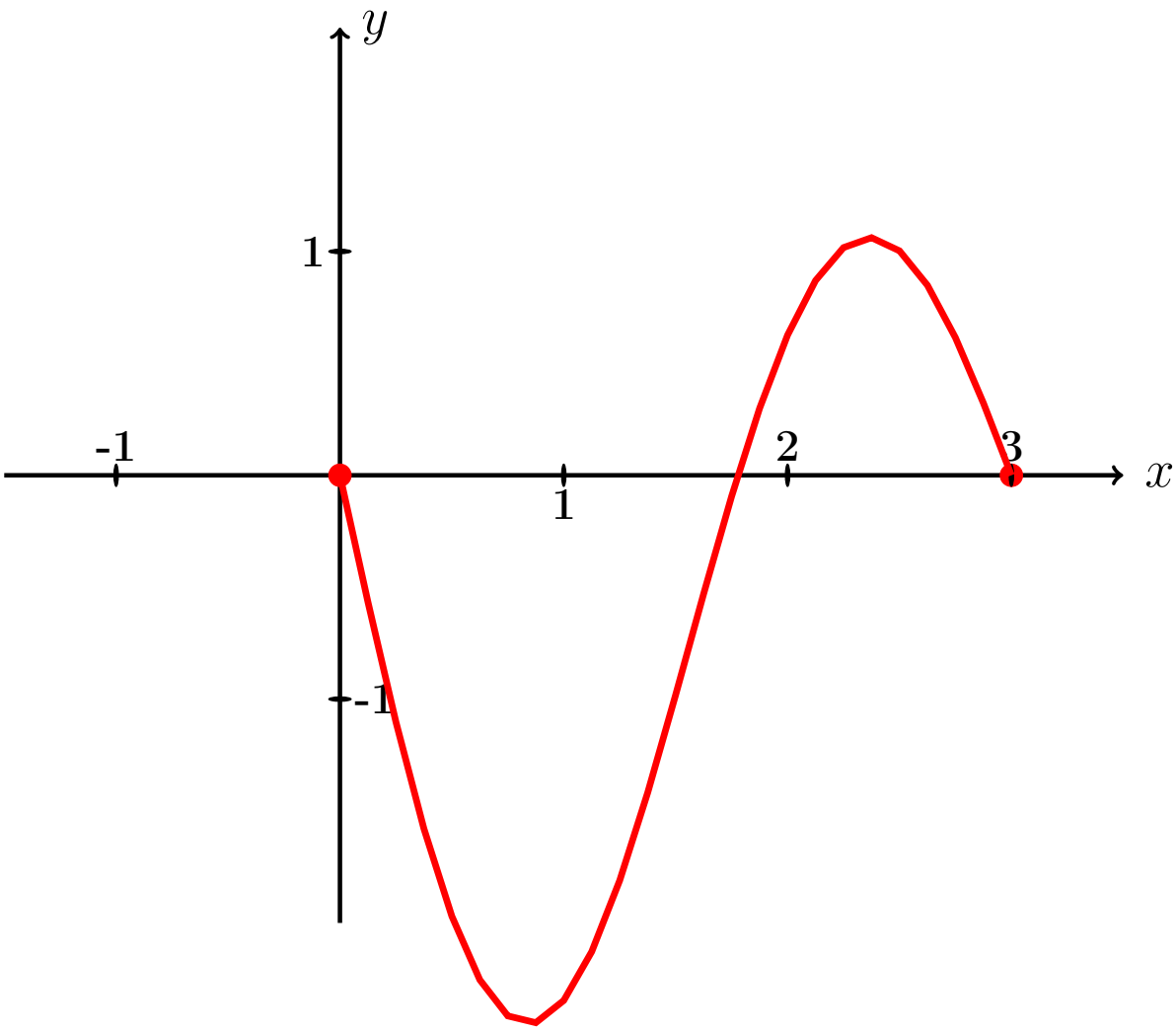


Рис.:

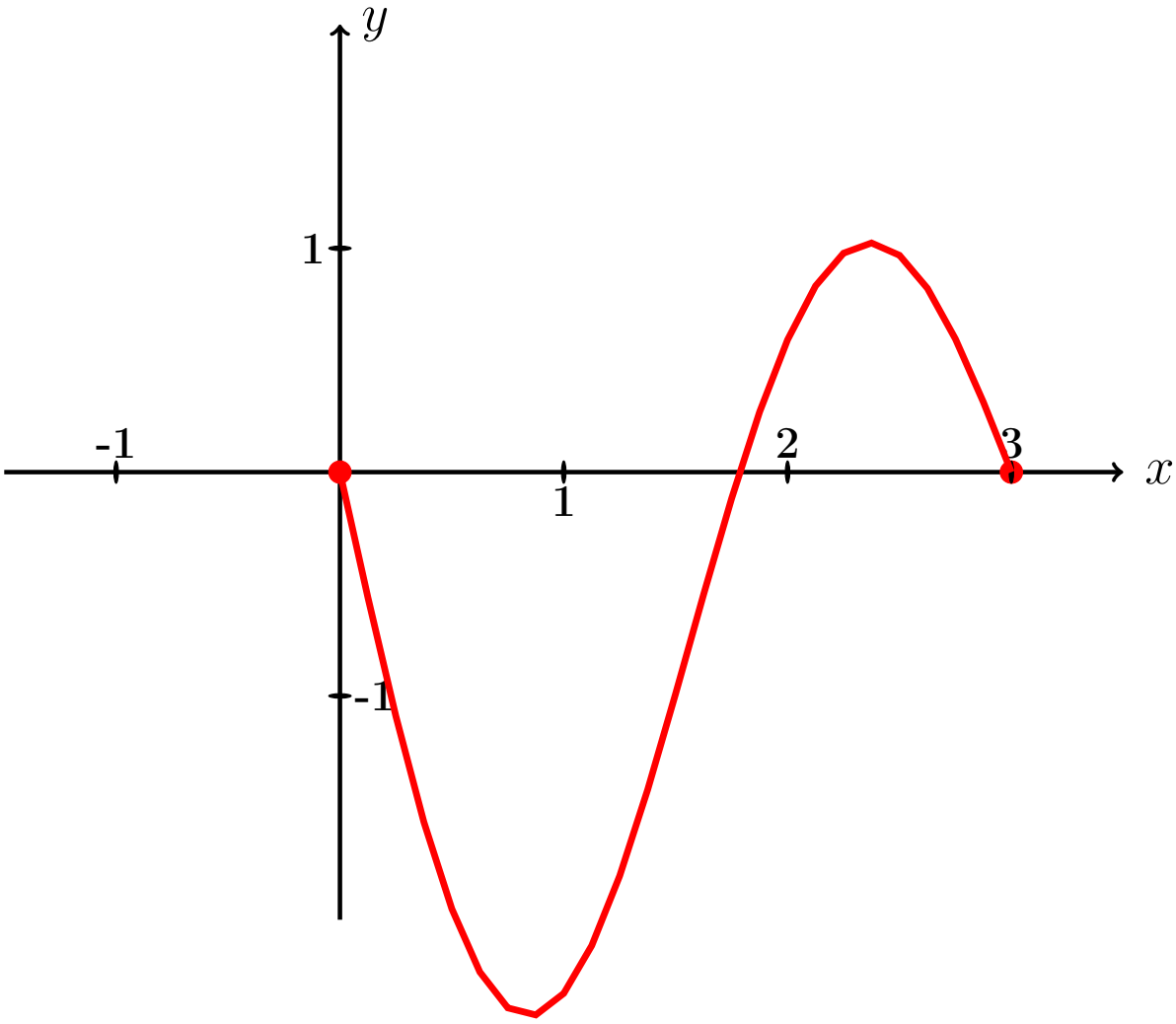


Рис.:

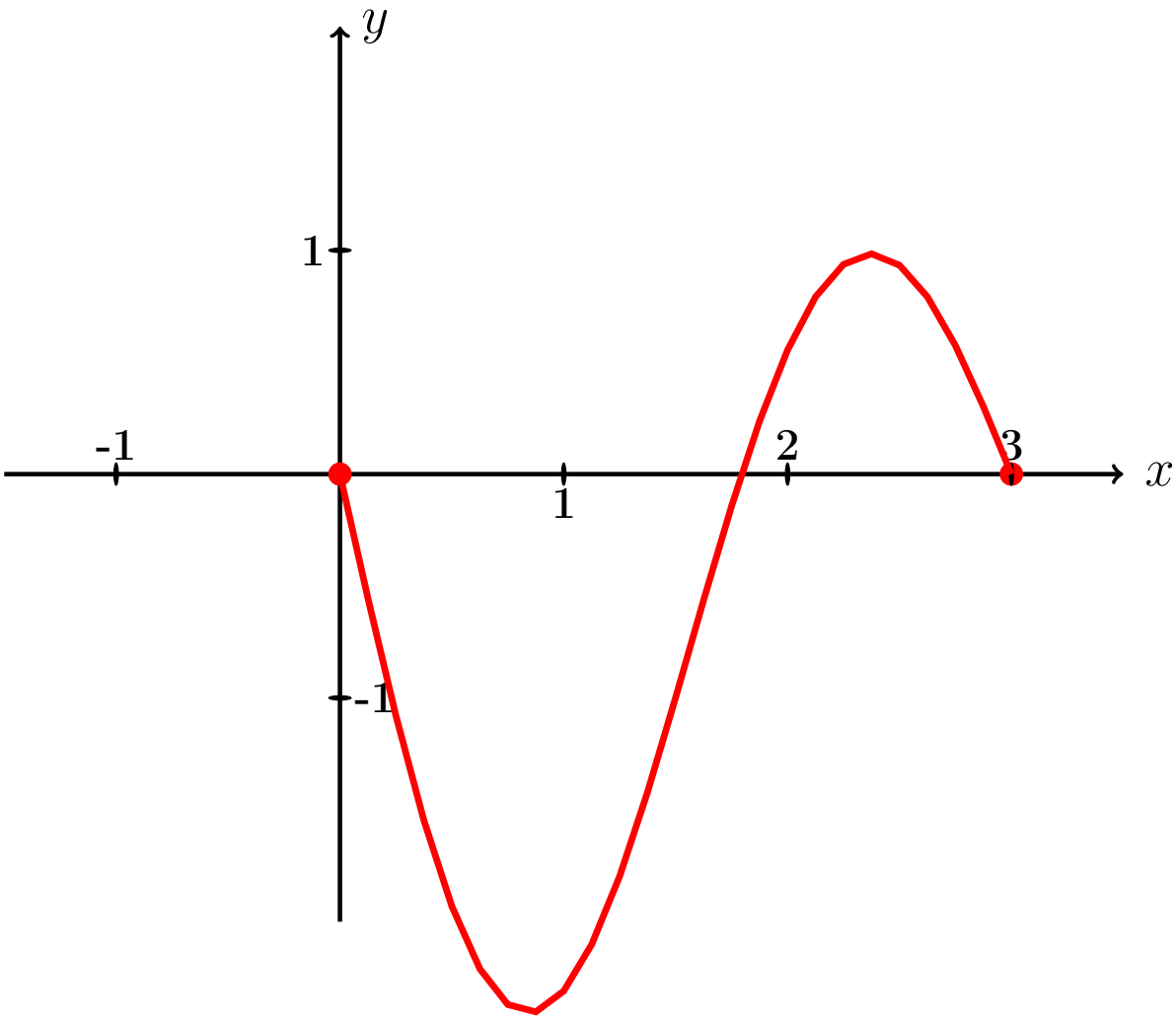


Рис.:

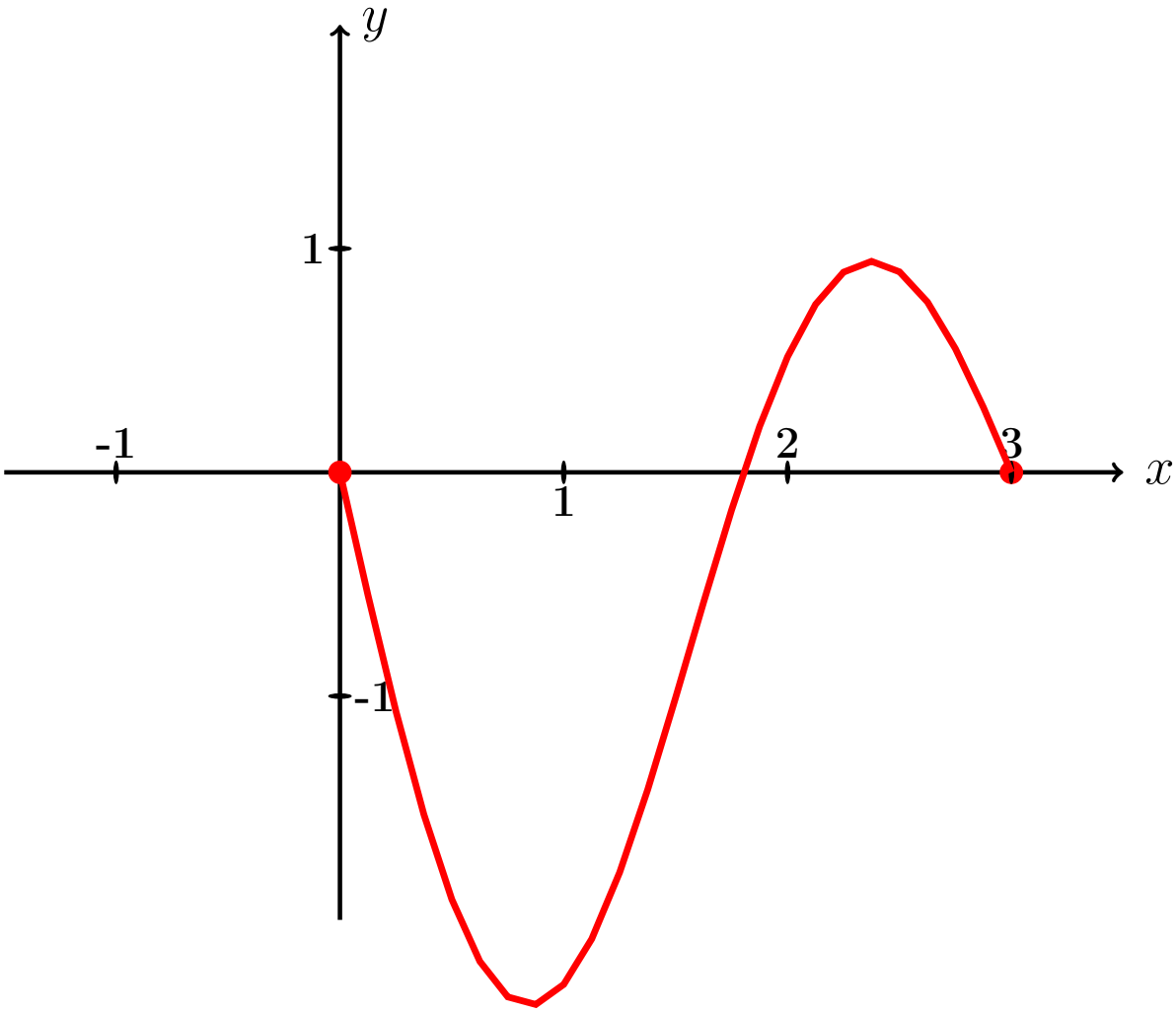


Рис.:

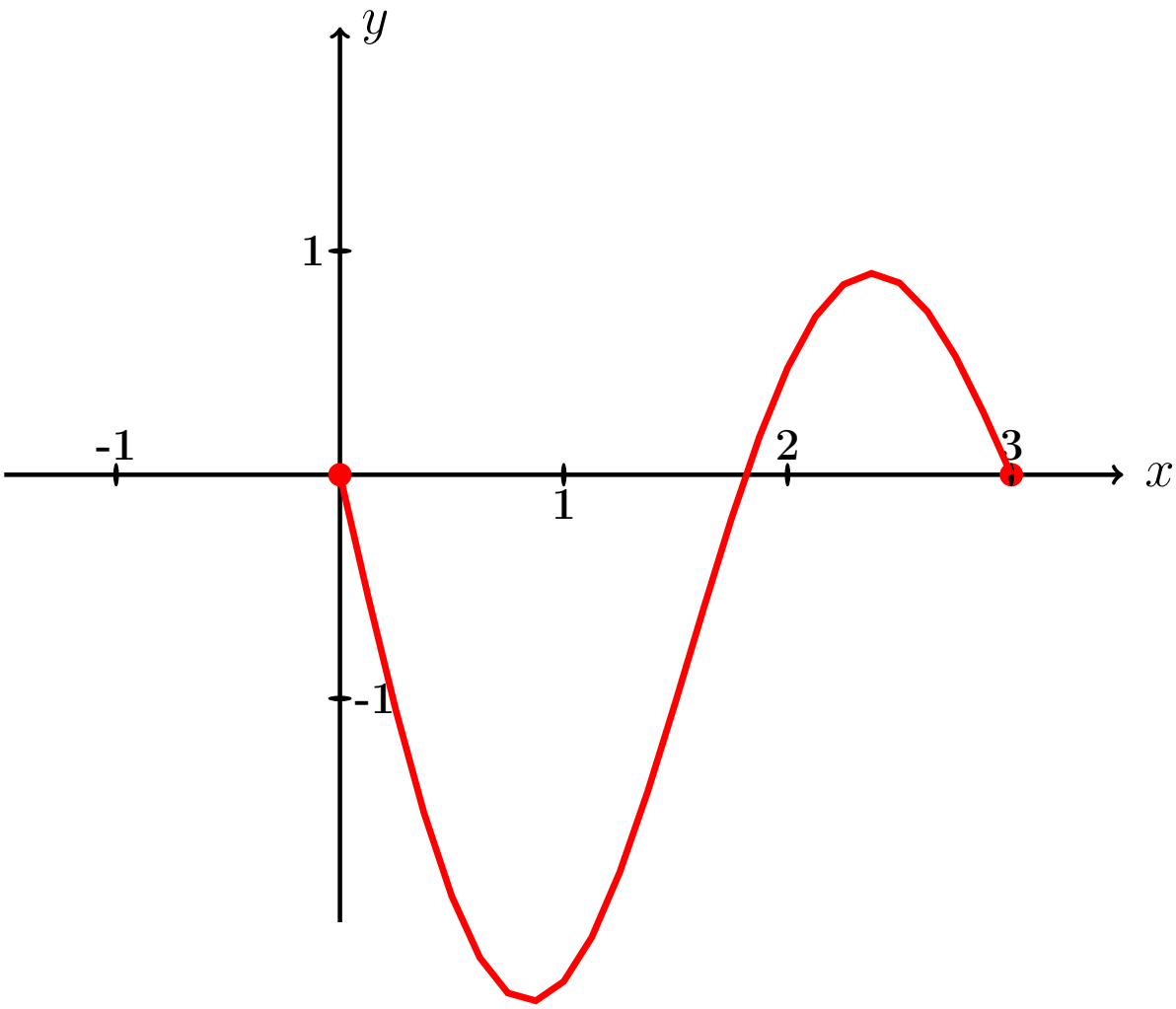


Рис.:

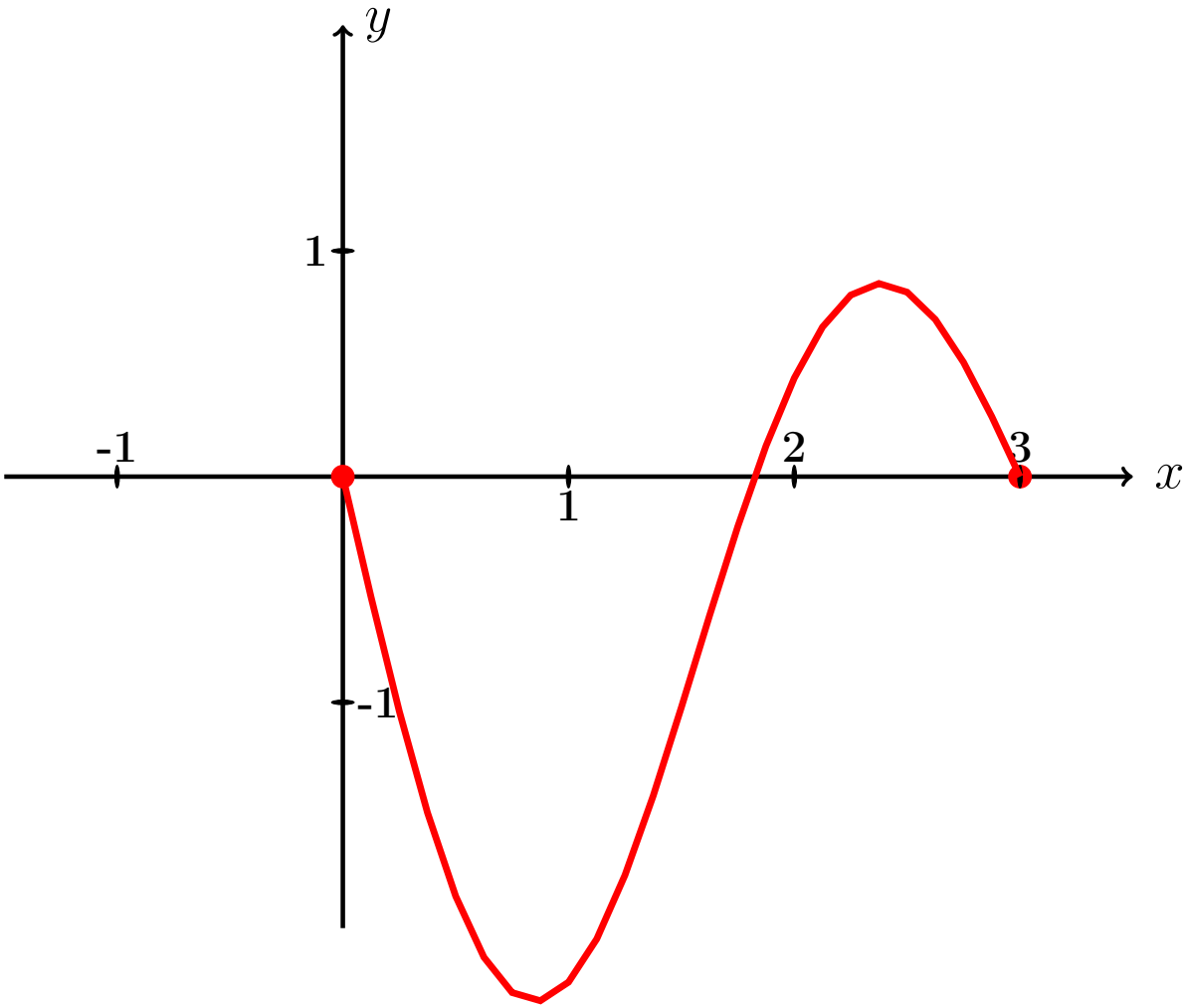


Рис.:

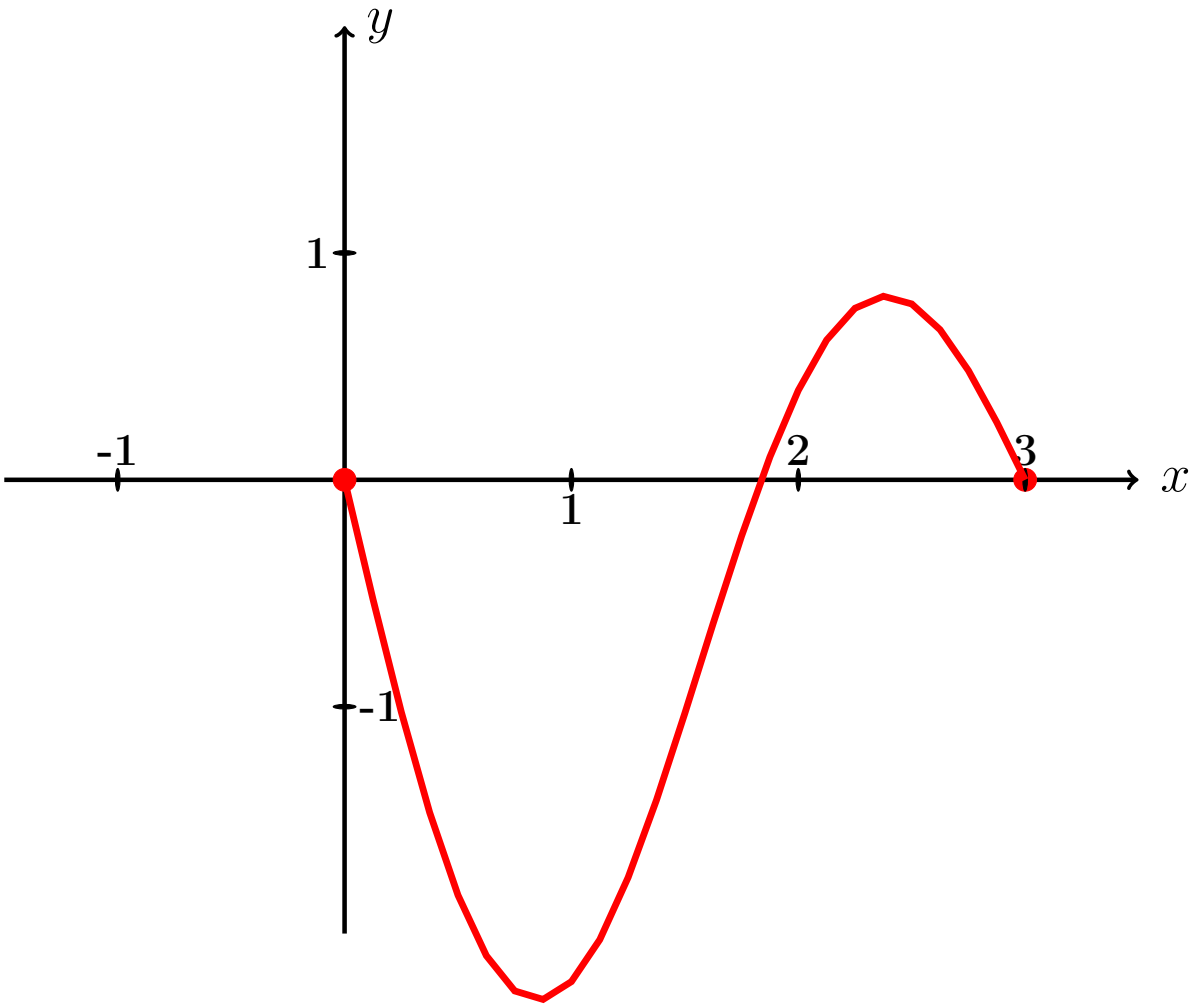


Рис.:

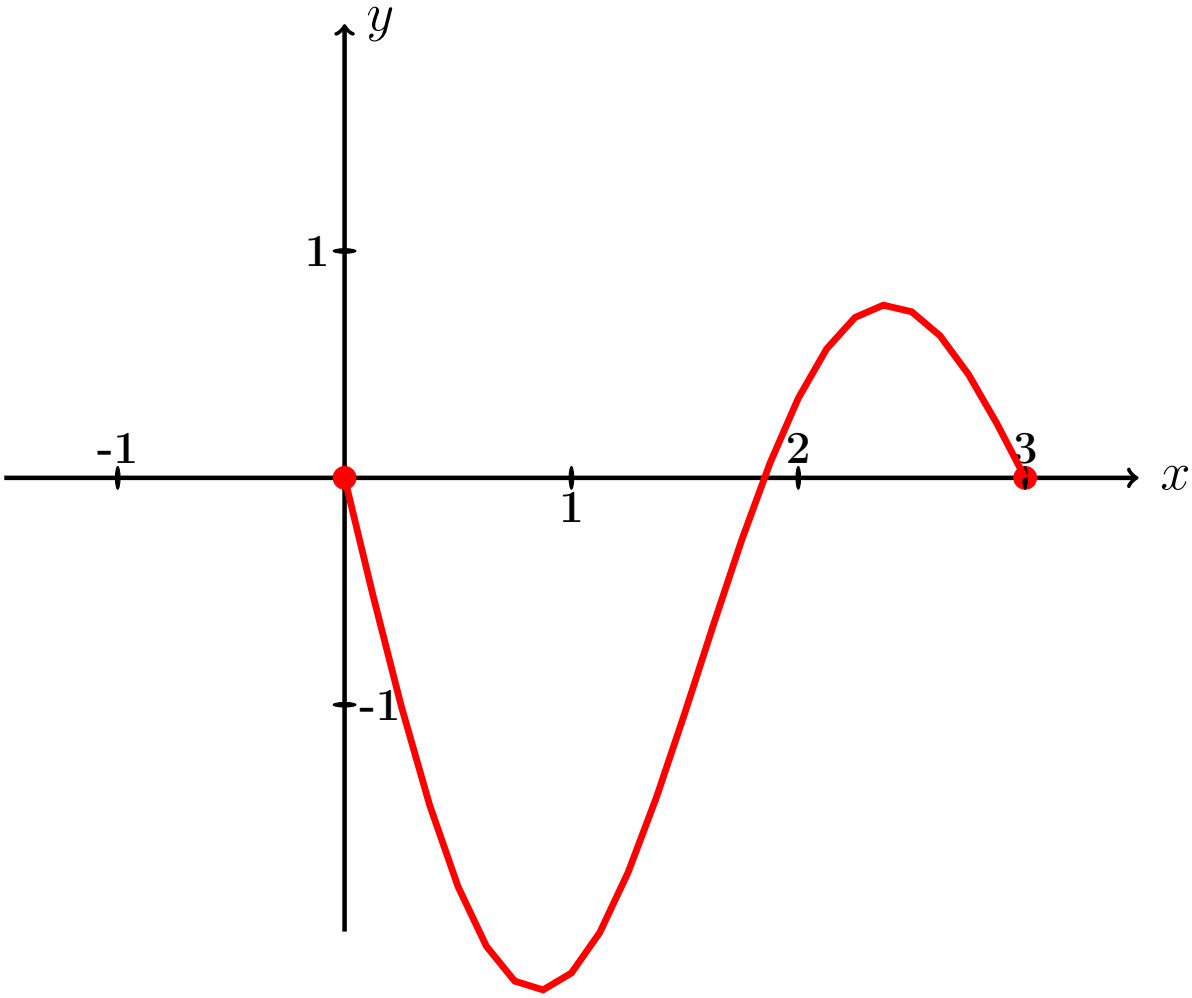


Рис.:

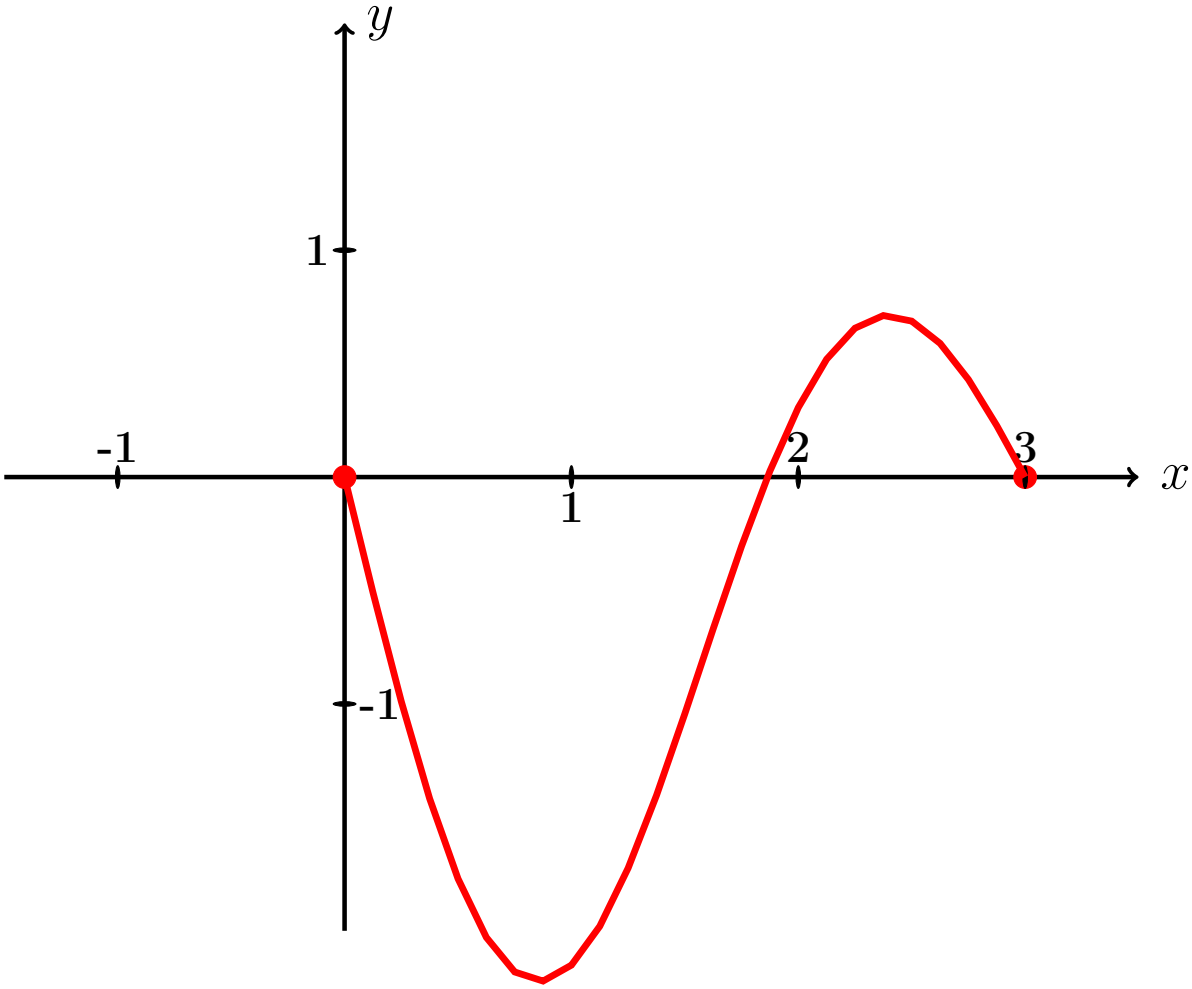


Рис.:

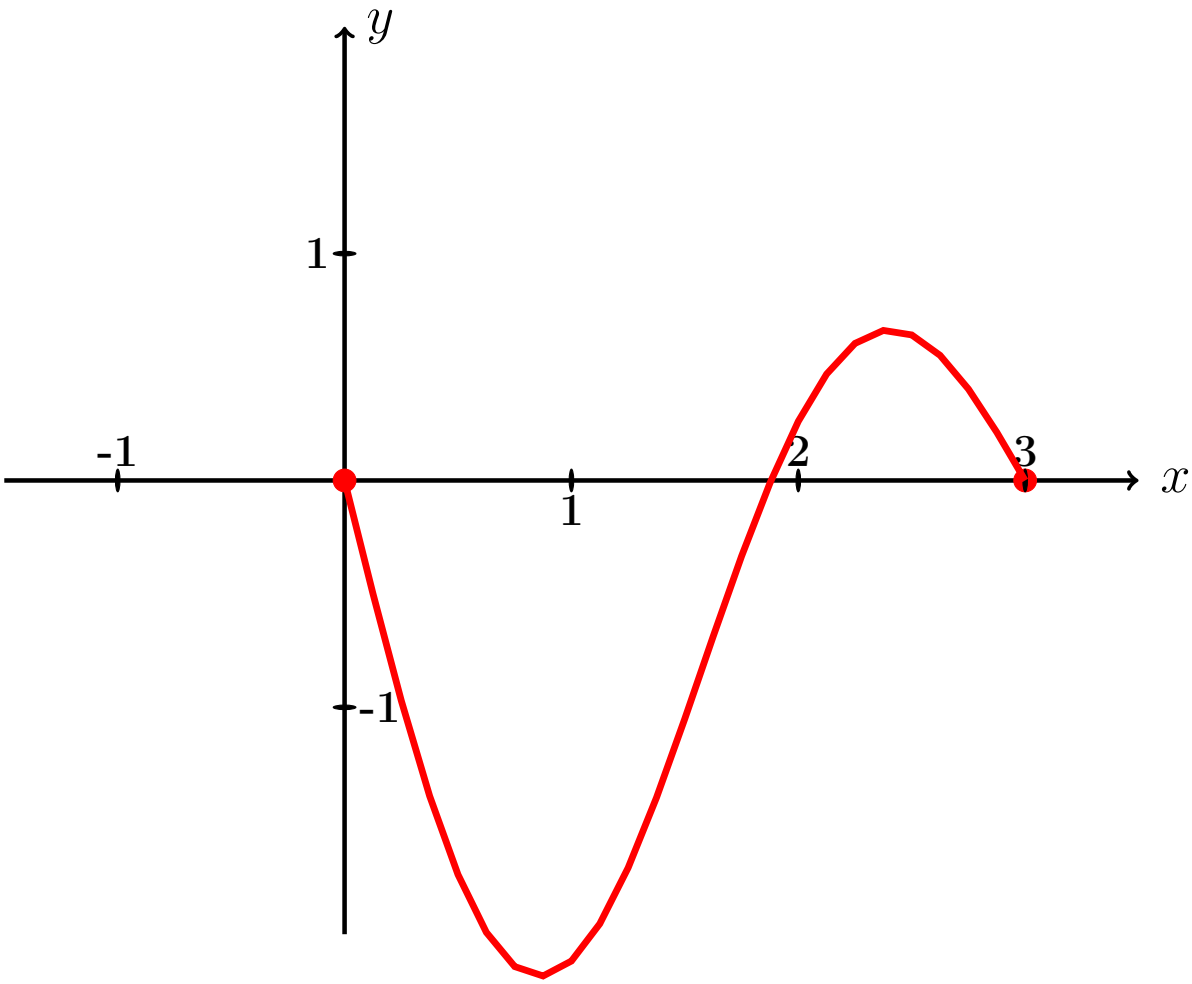


Рис.:

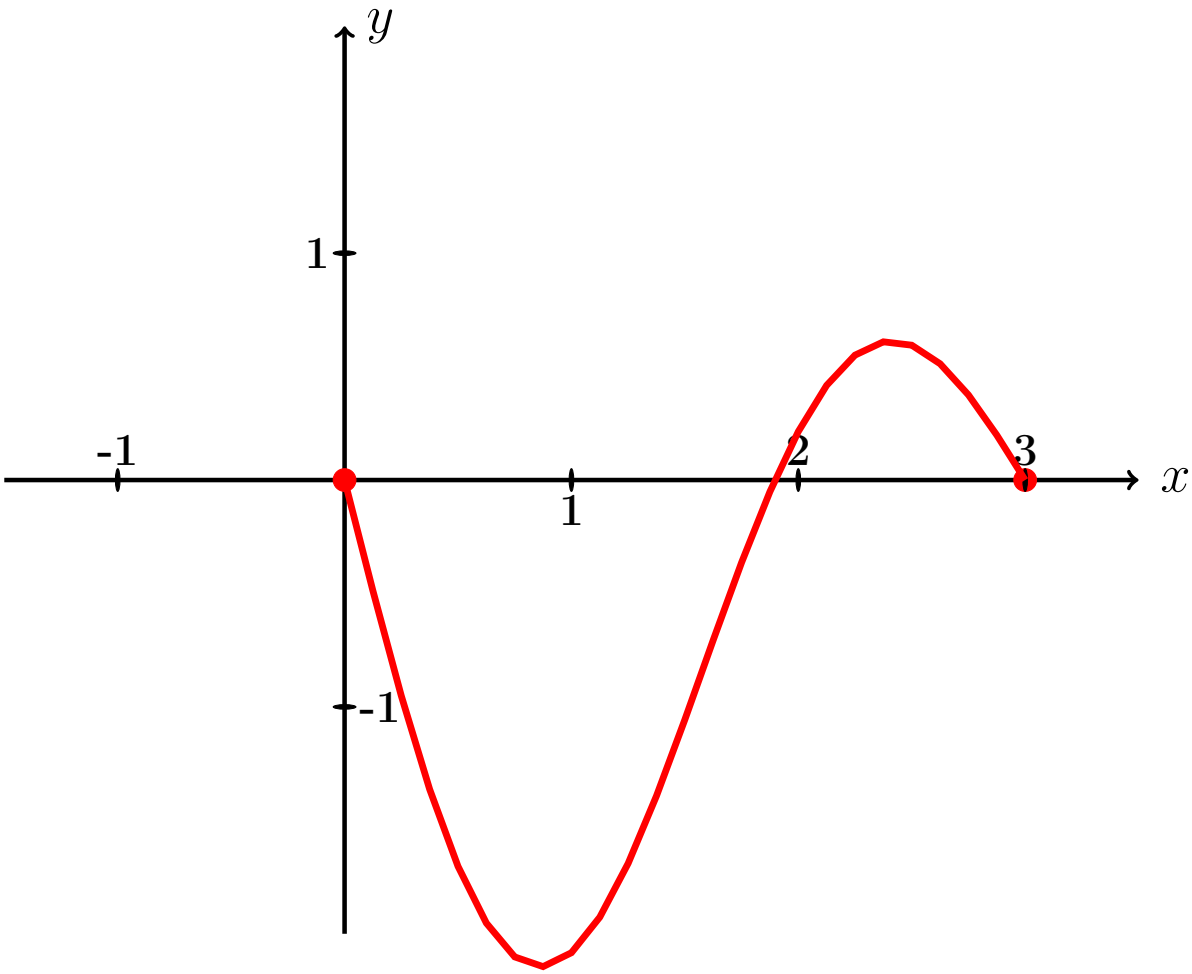


Рис.:

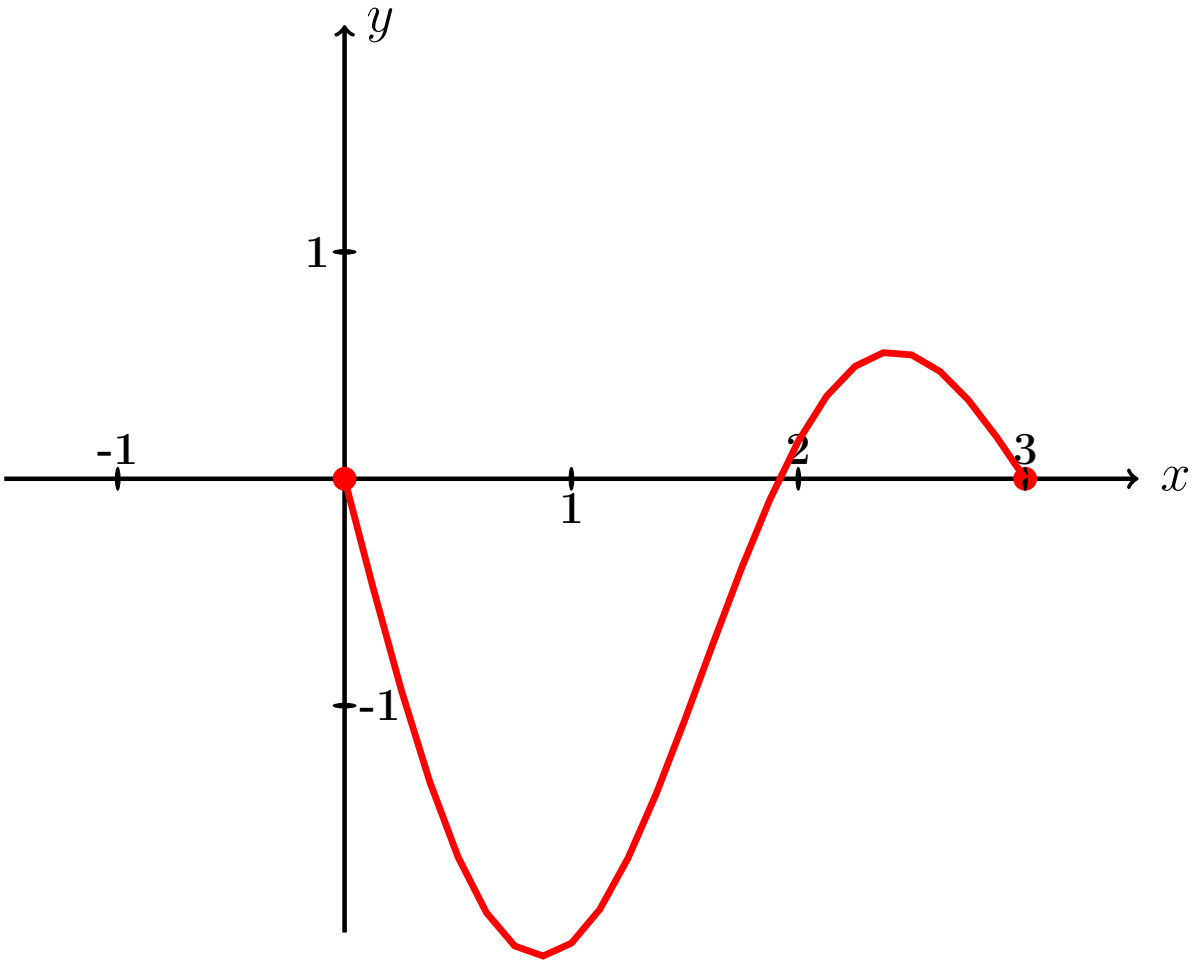


Рис.:

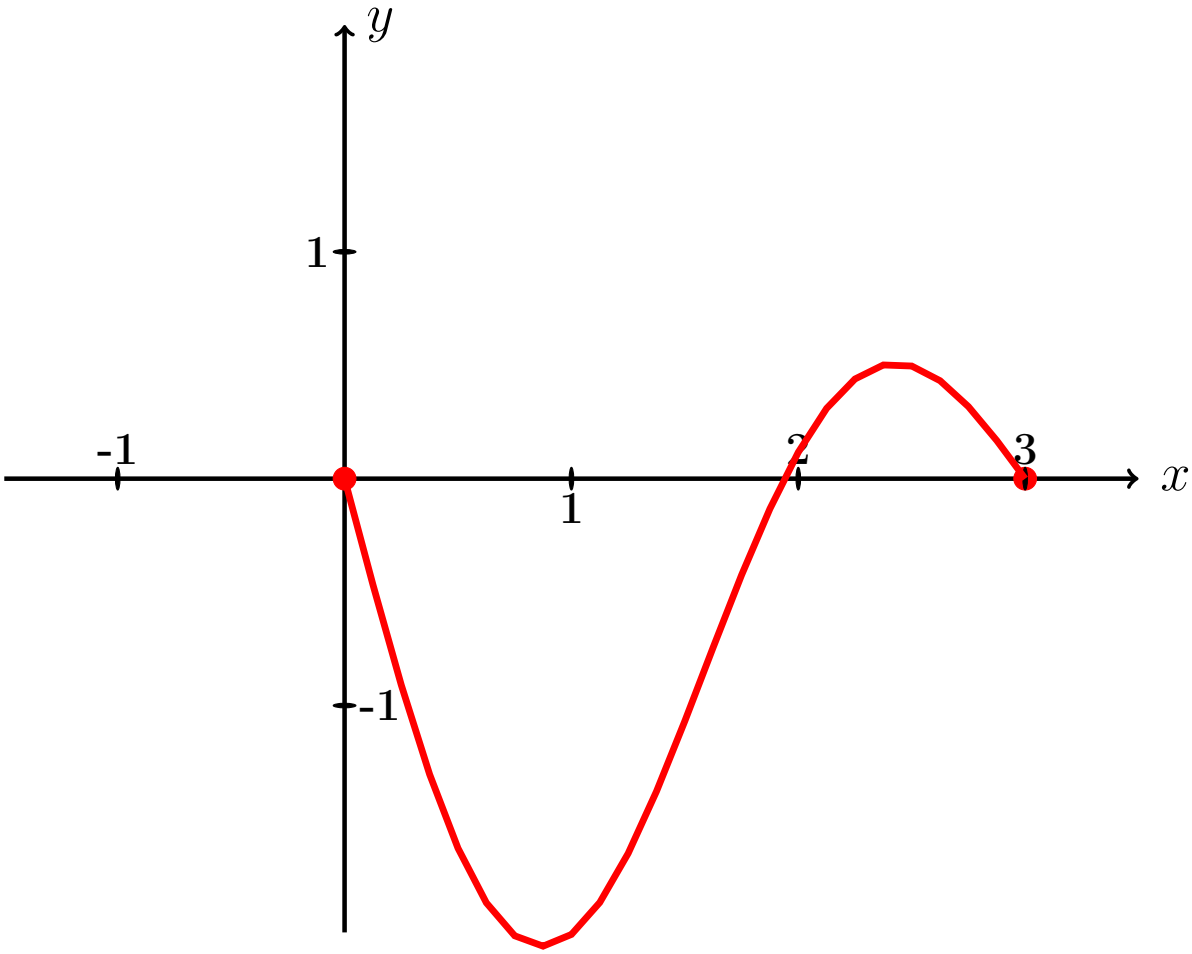


Рис.:

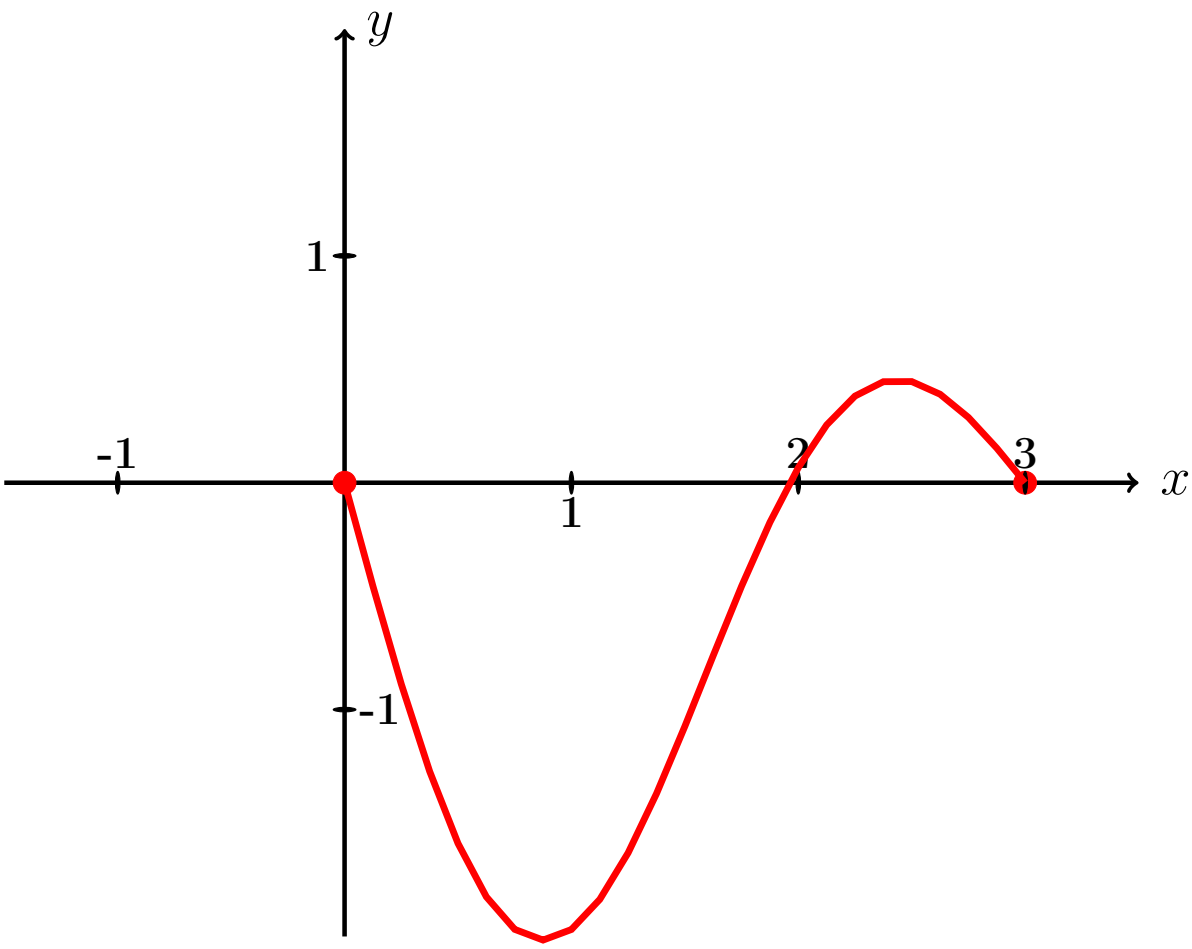


Рис.:

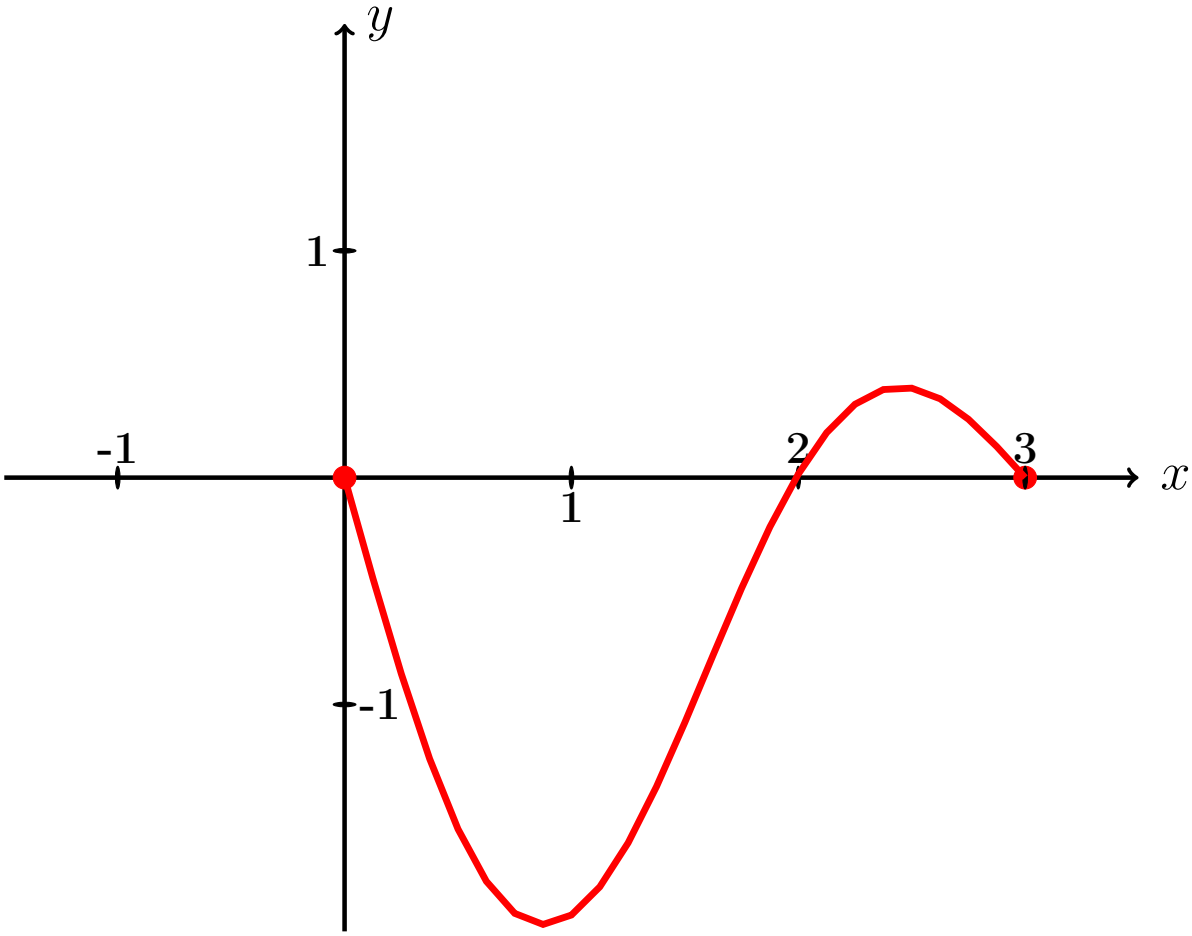


Рис.:

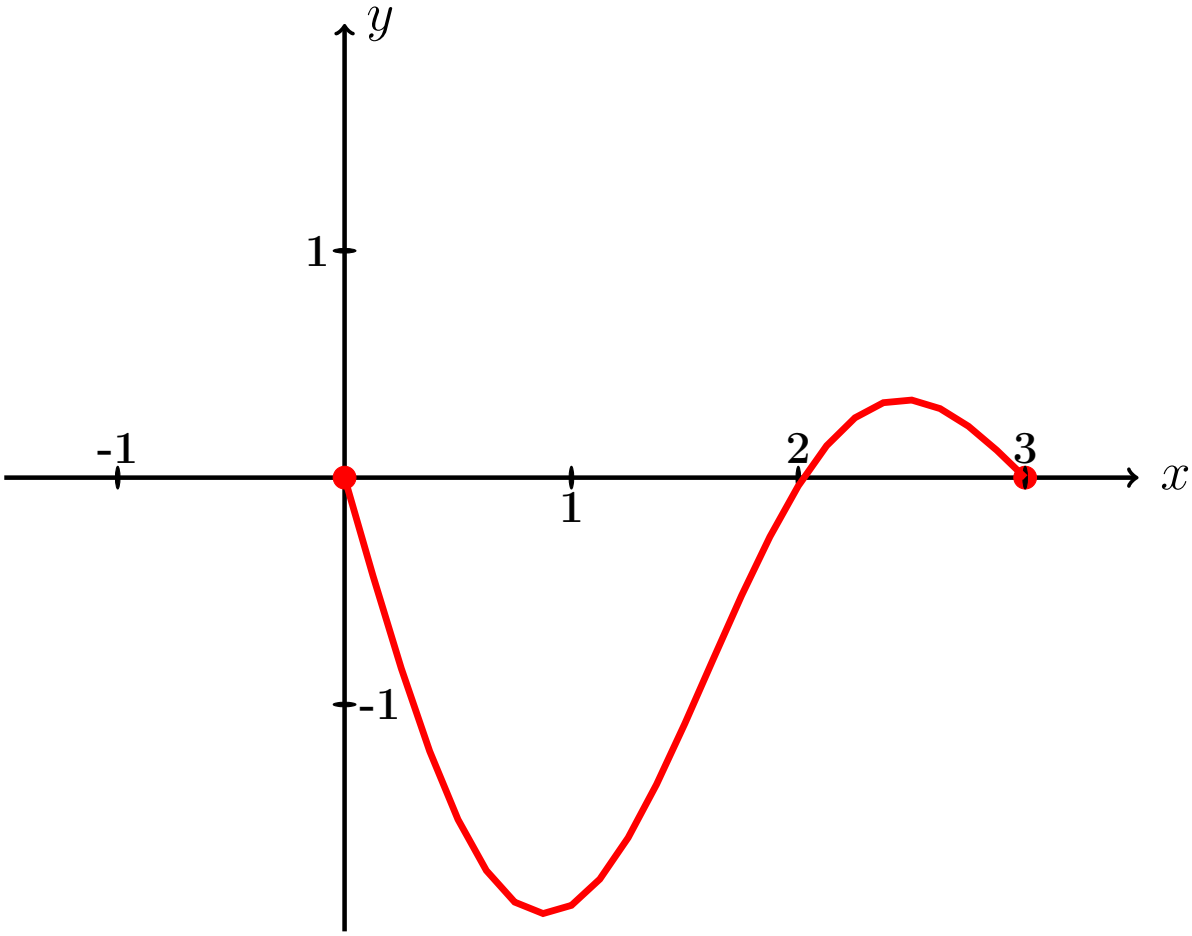


Рис.:

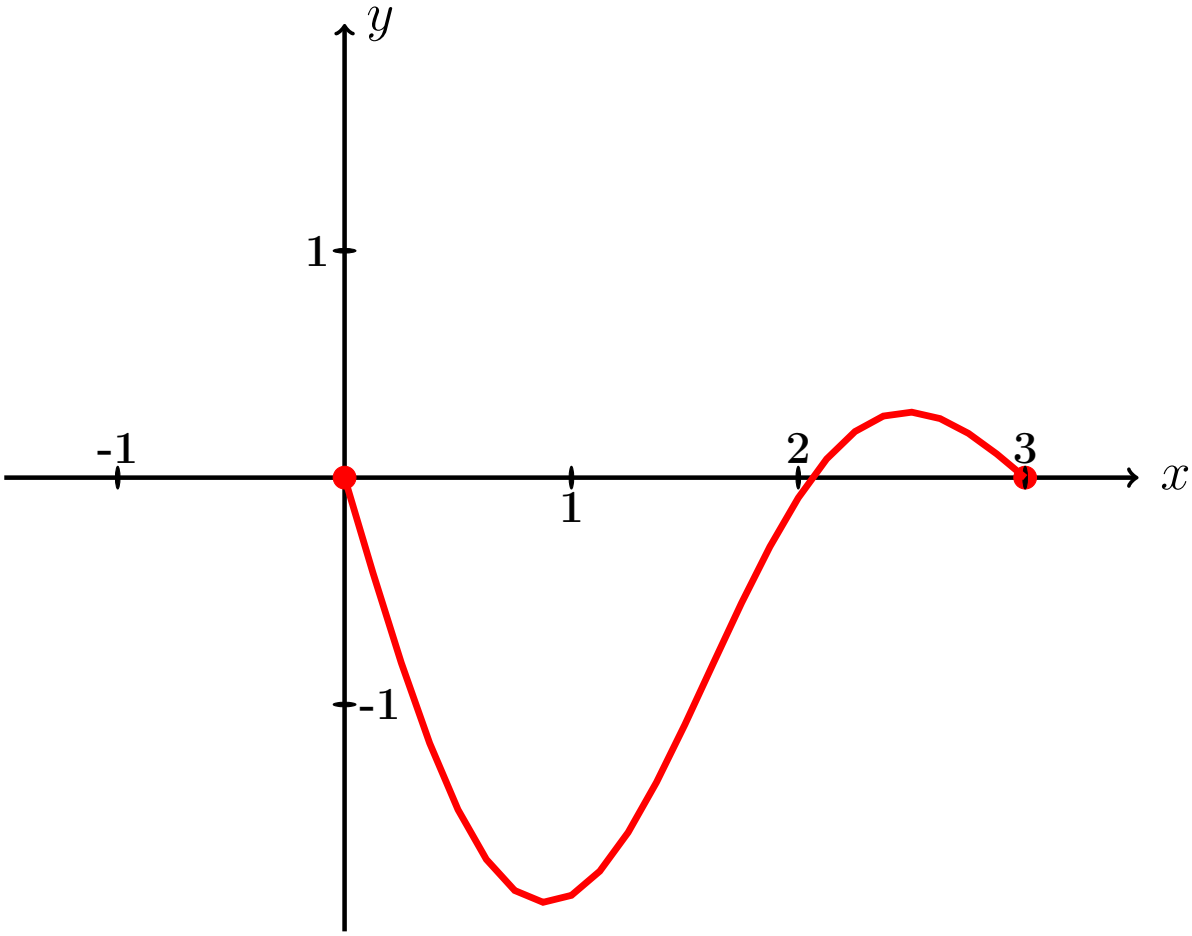


Рис.:

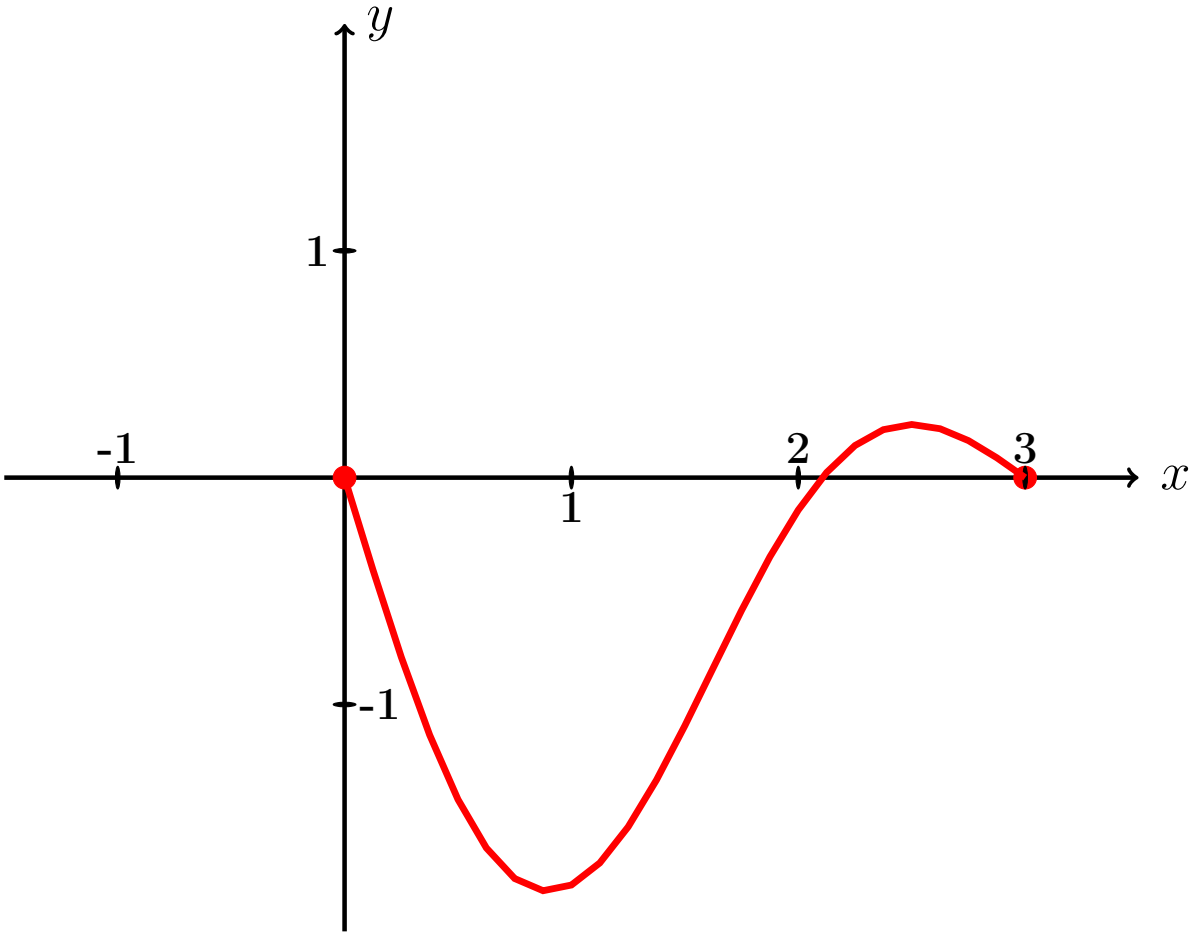


Рис.:

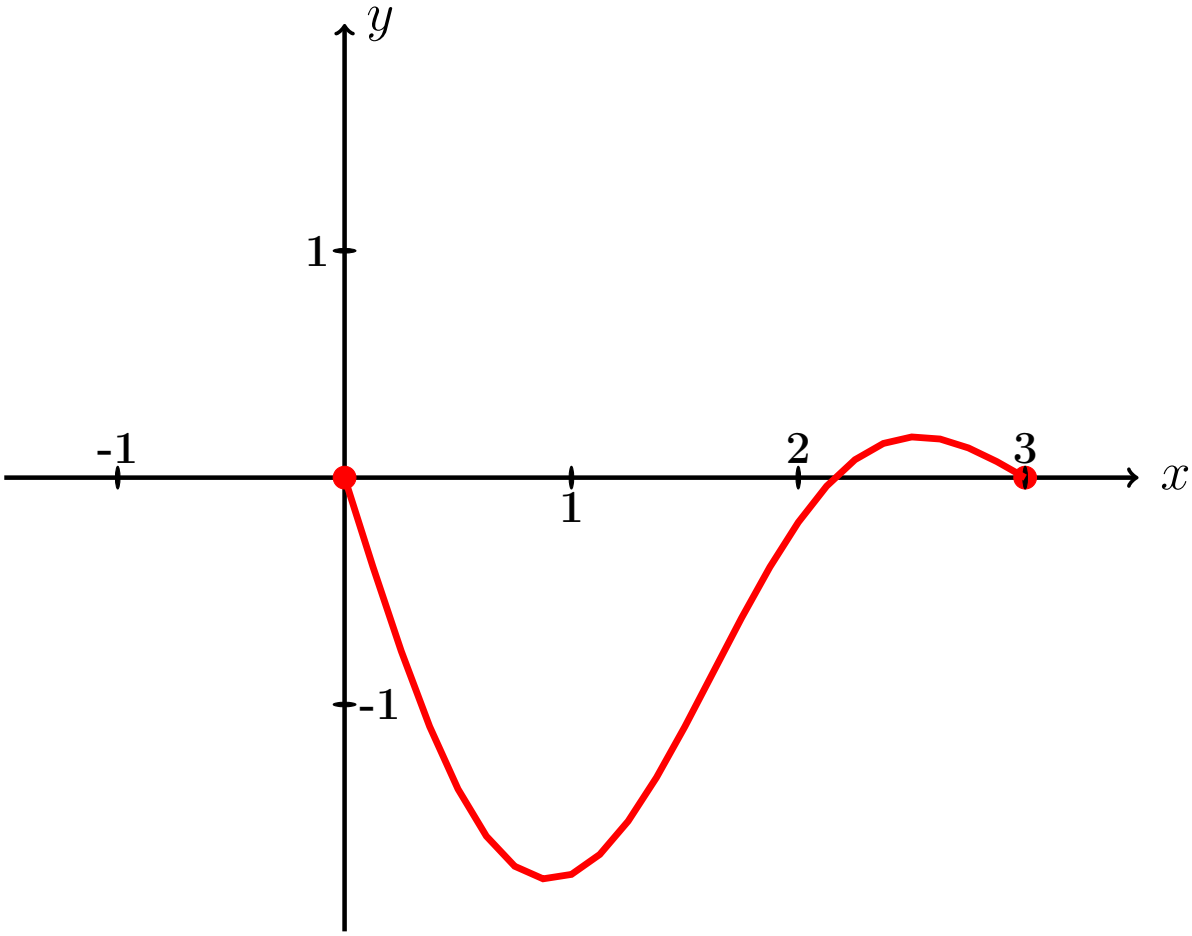


Рис.:

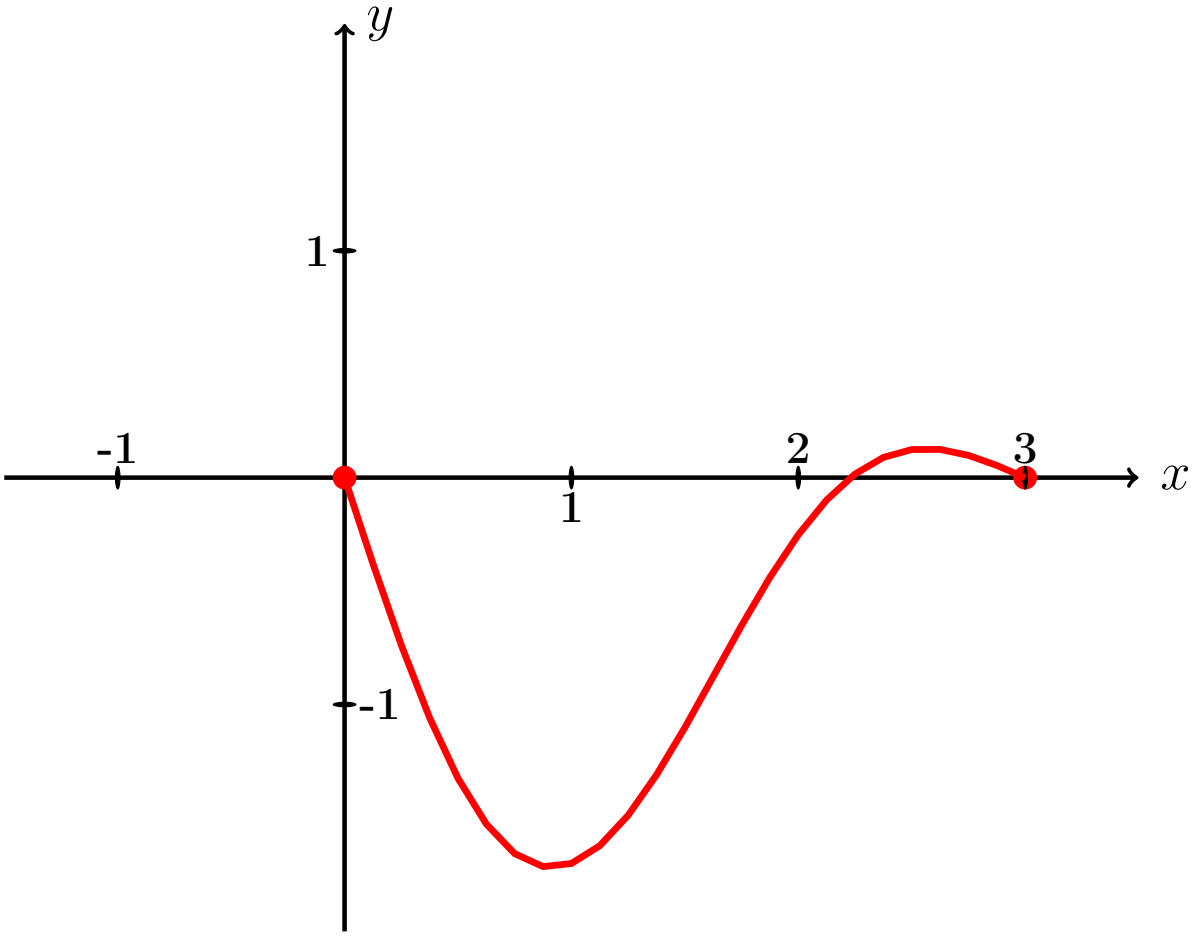


Рис.:

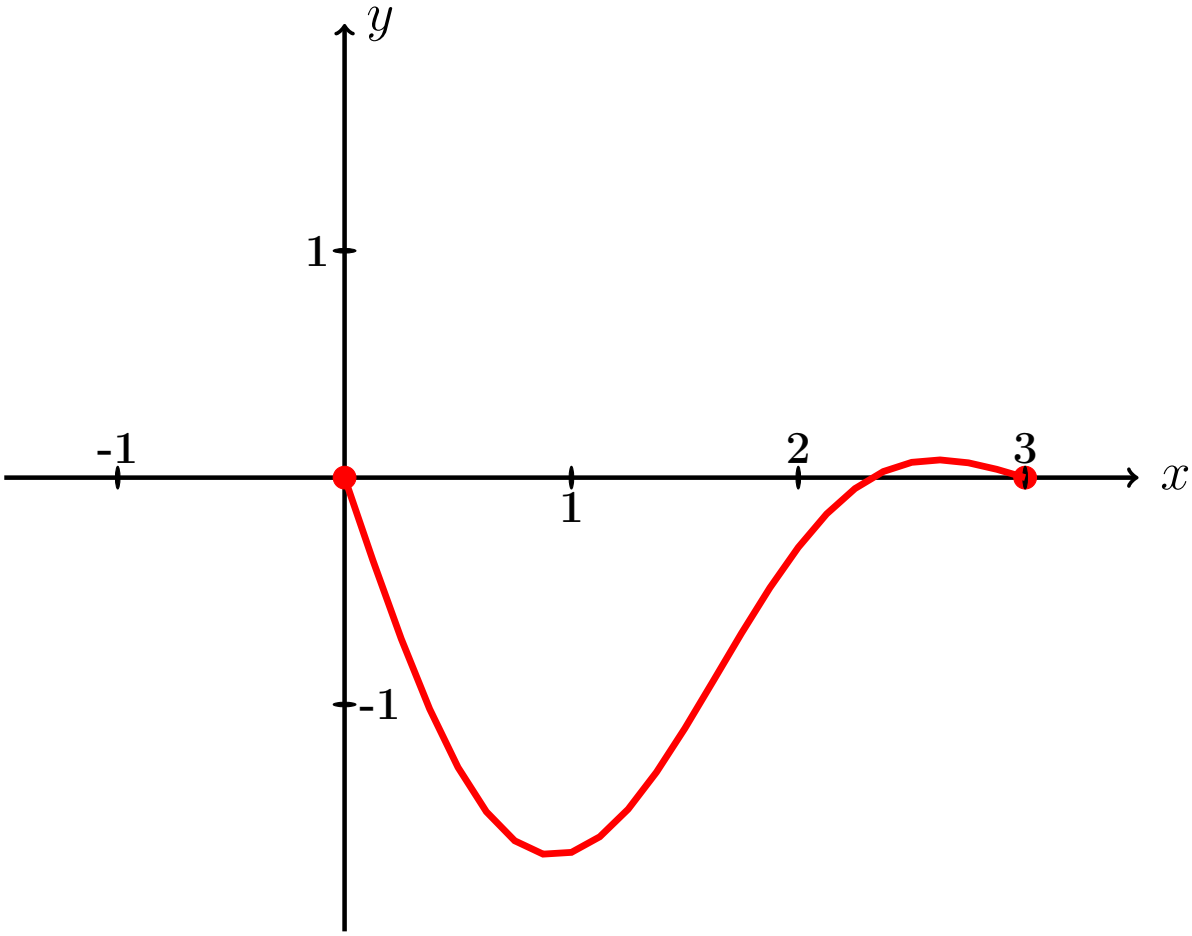


Рис.:

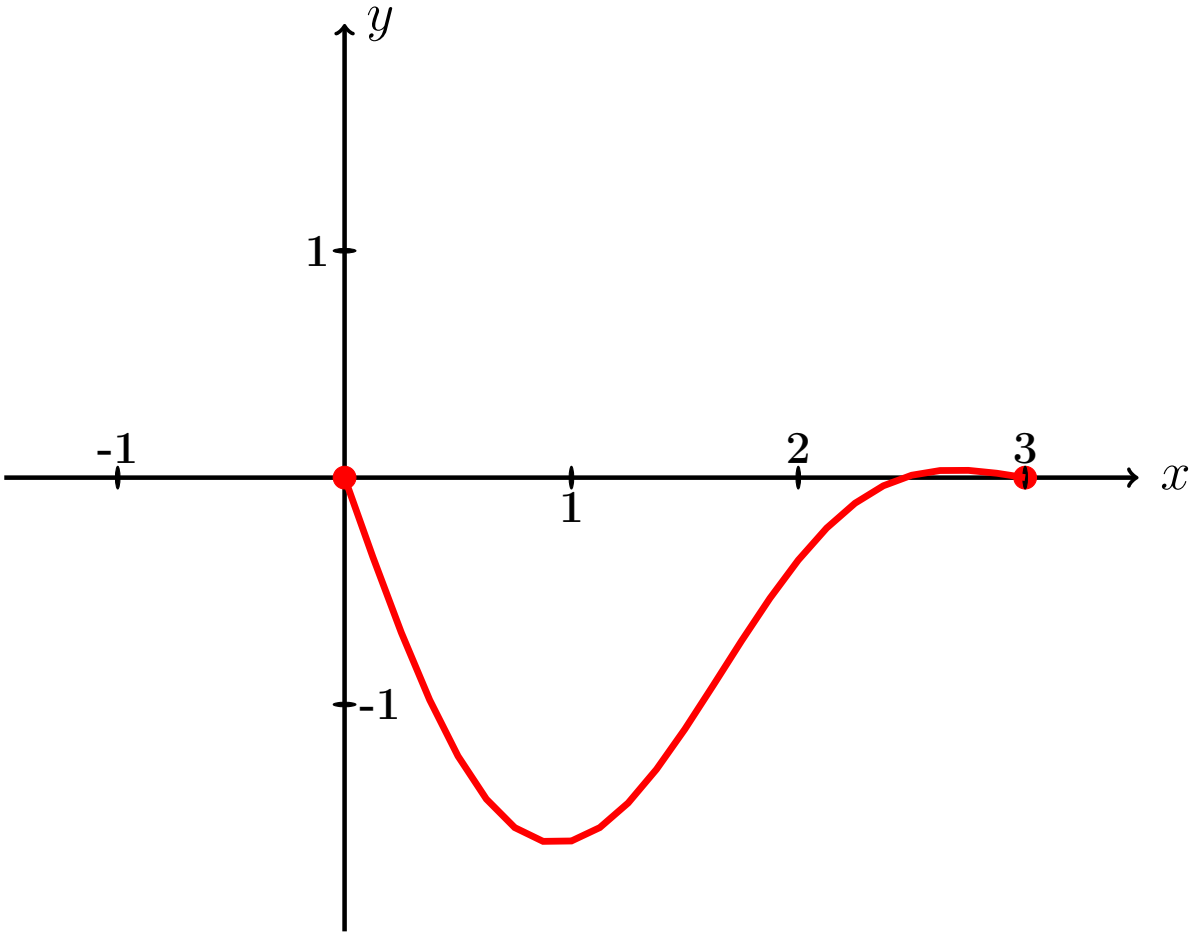


Рис.:

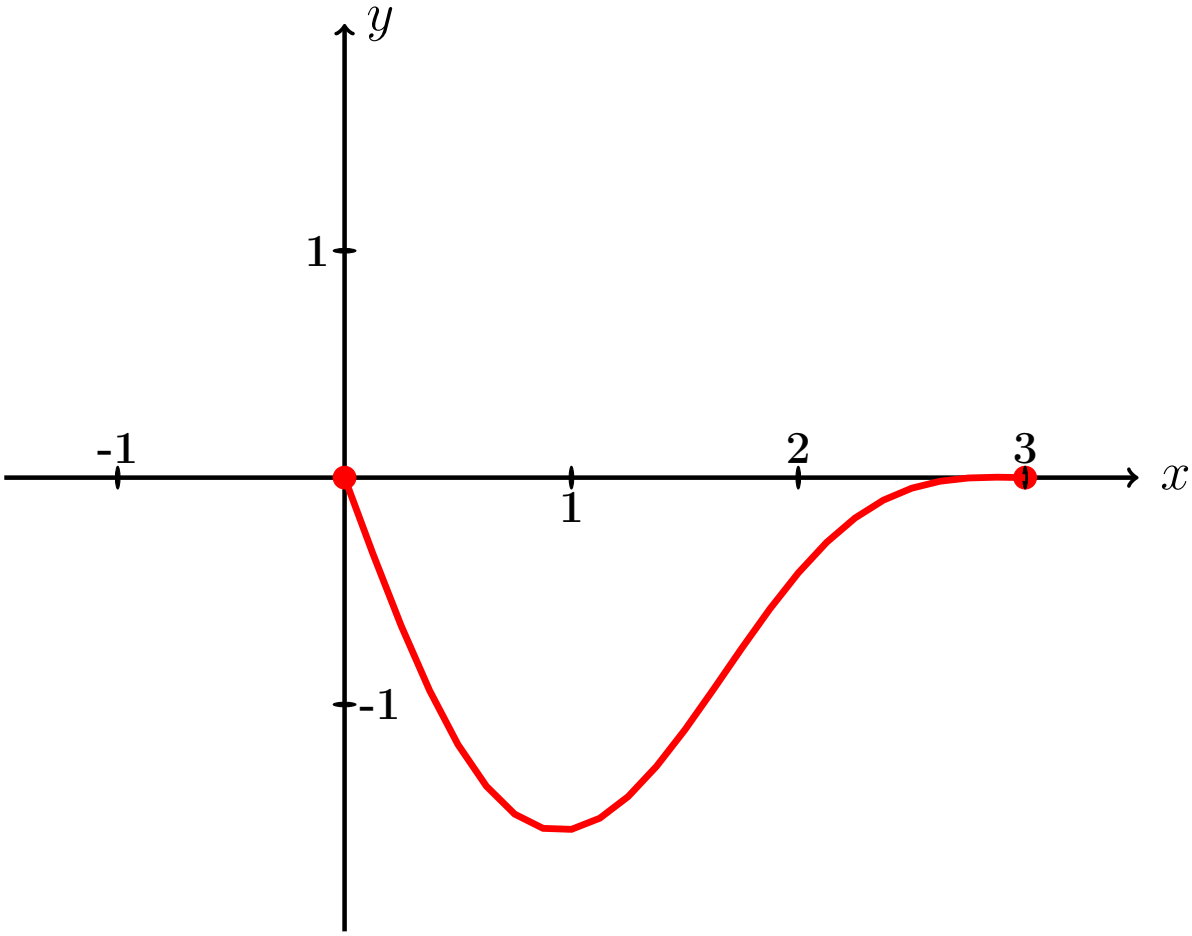


Рис.:

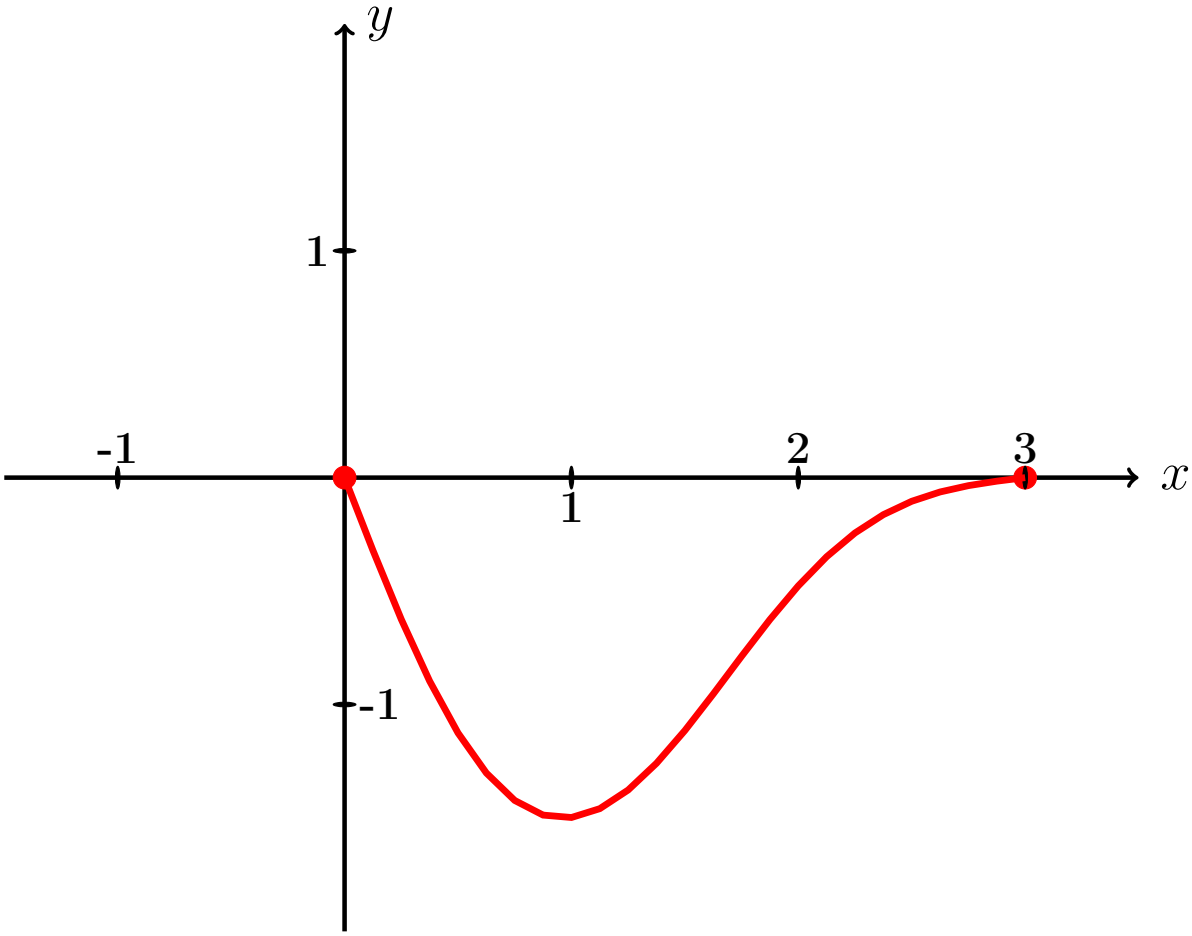


Рис.:

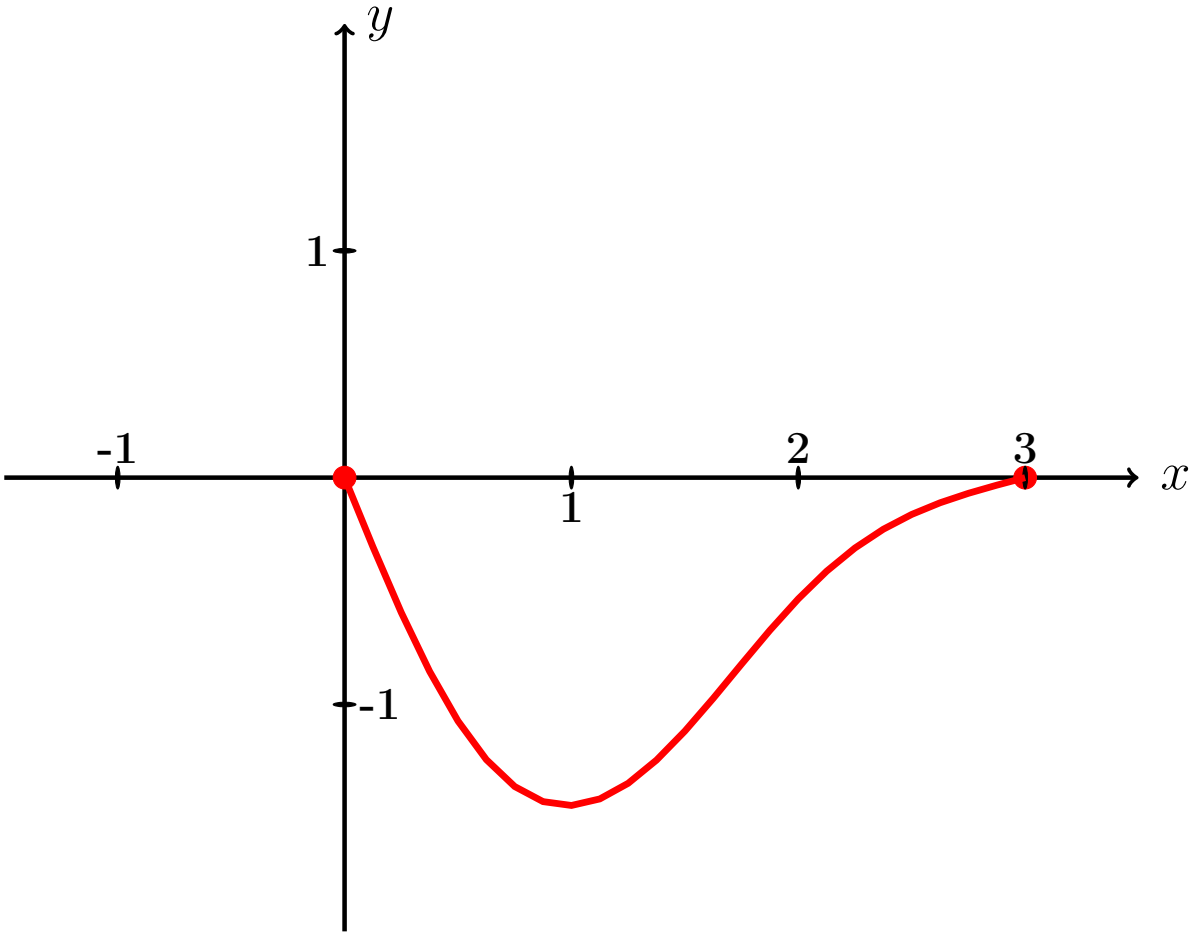


Рис.:

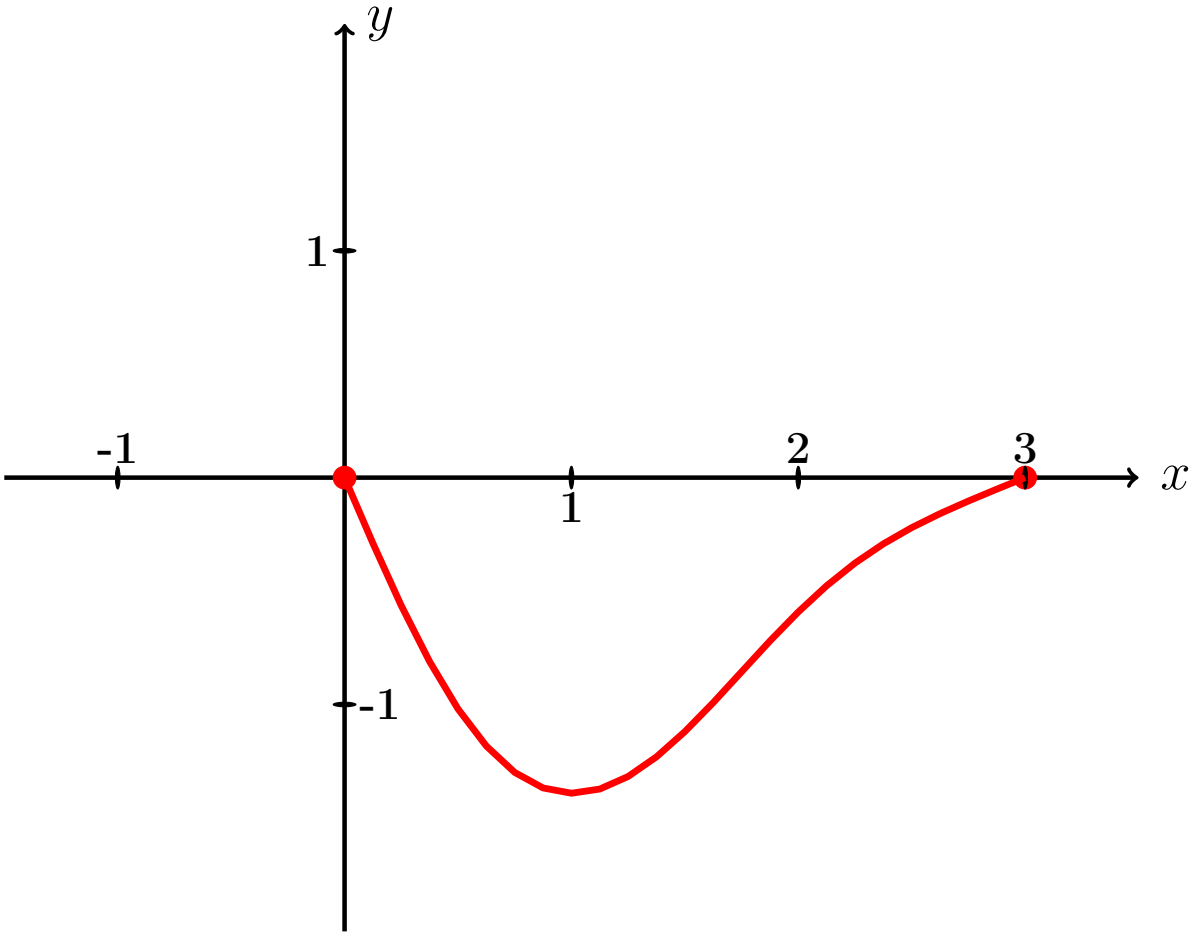


Рис.:

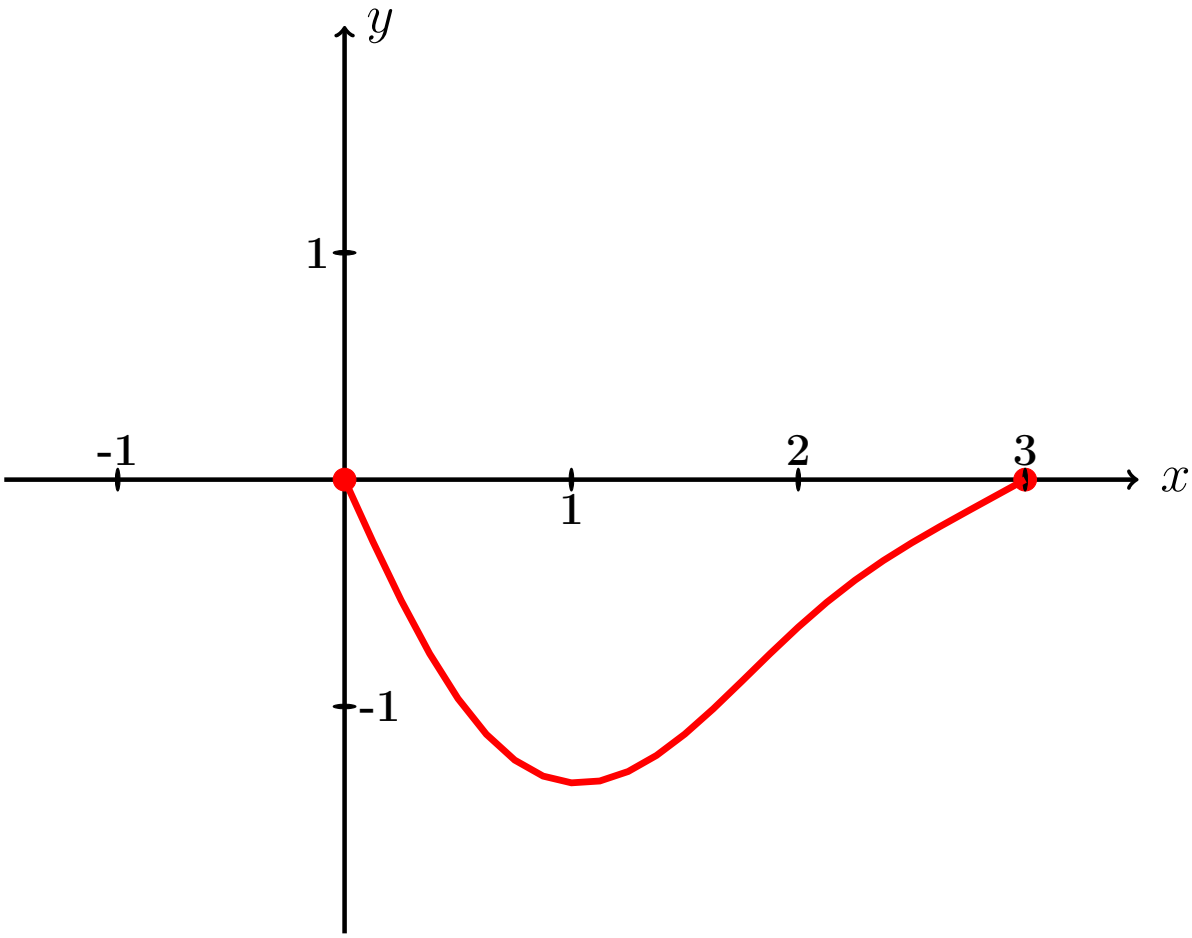


Рис.:

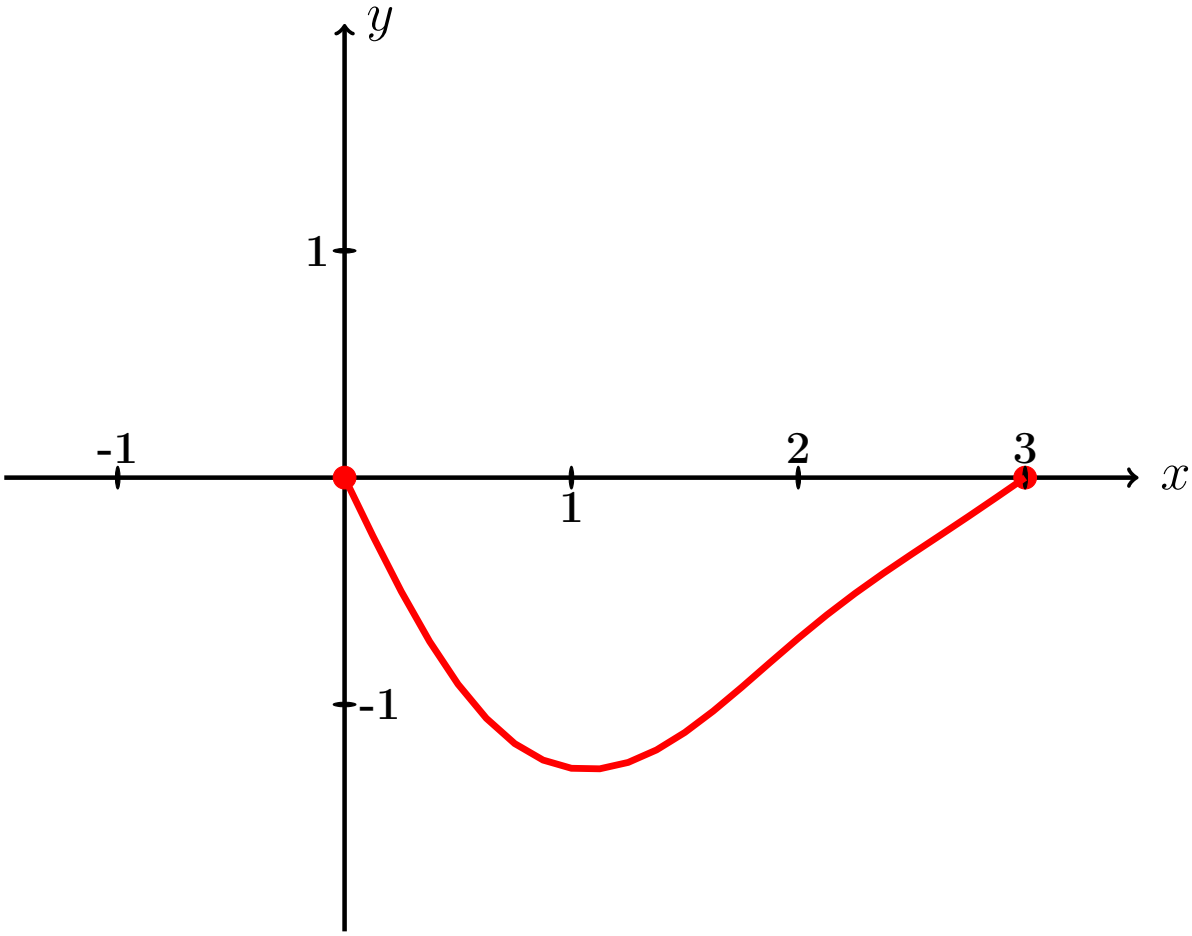


Рис.:

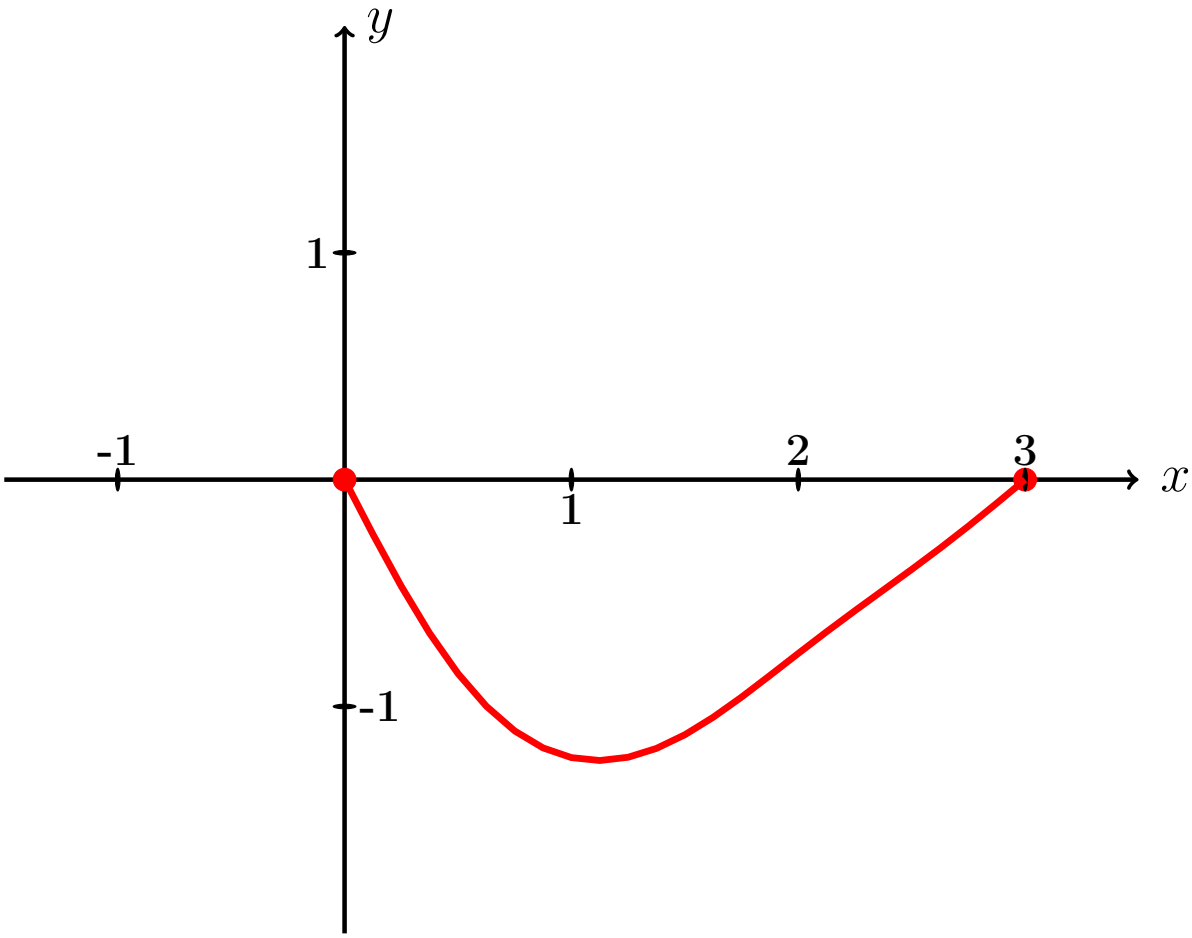


Рис.:

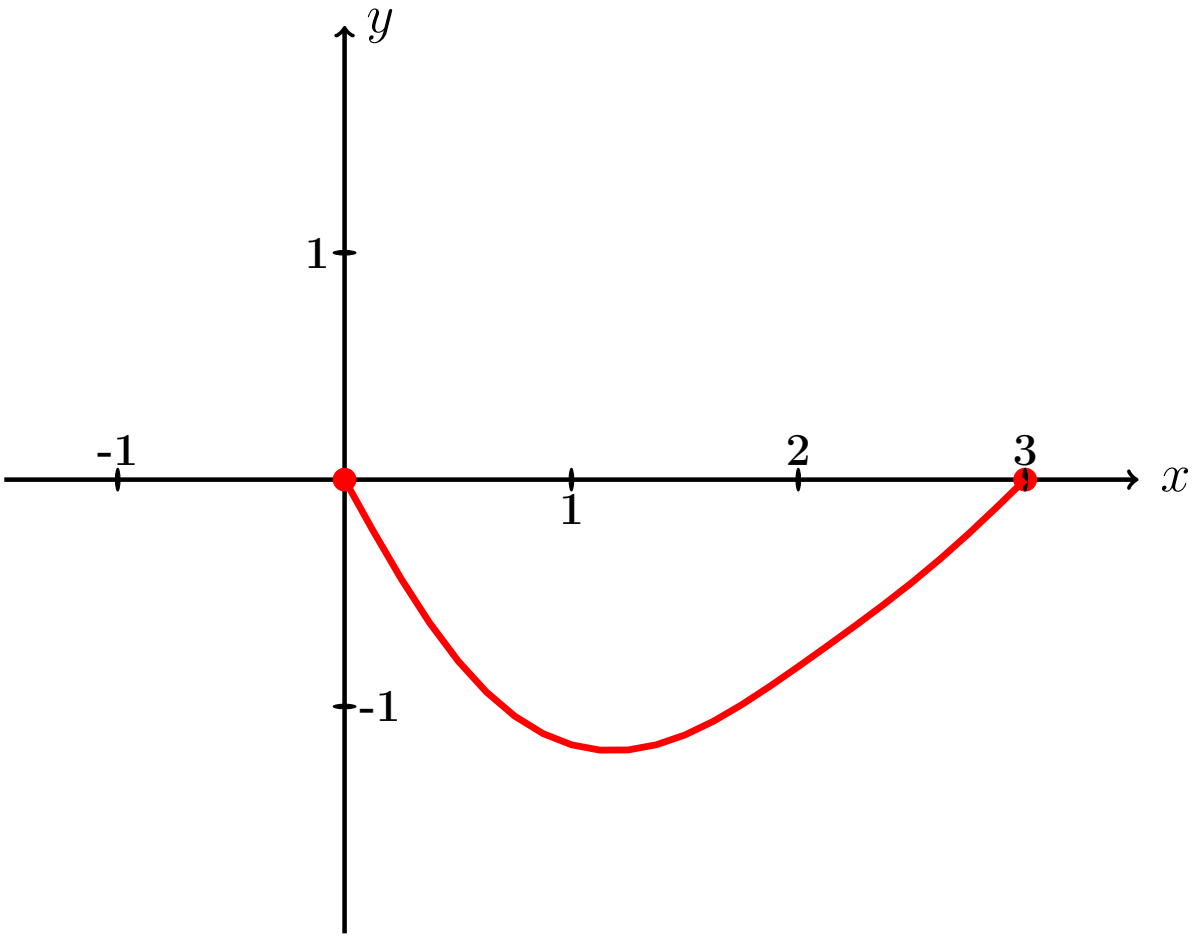


Рис.:

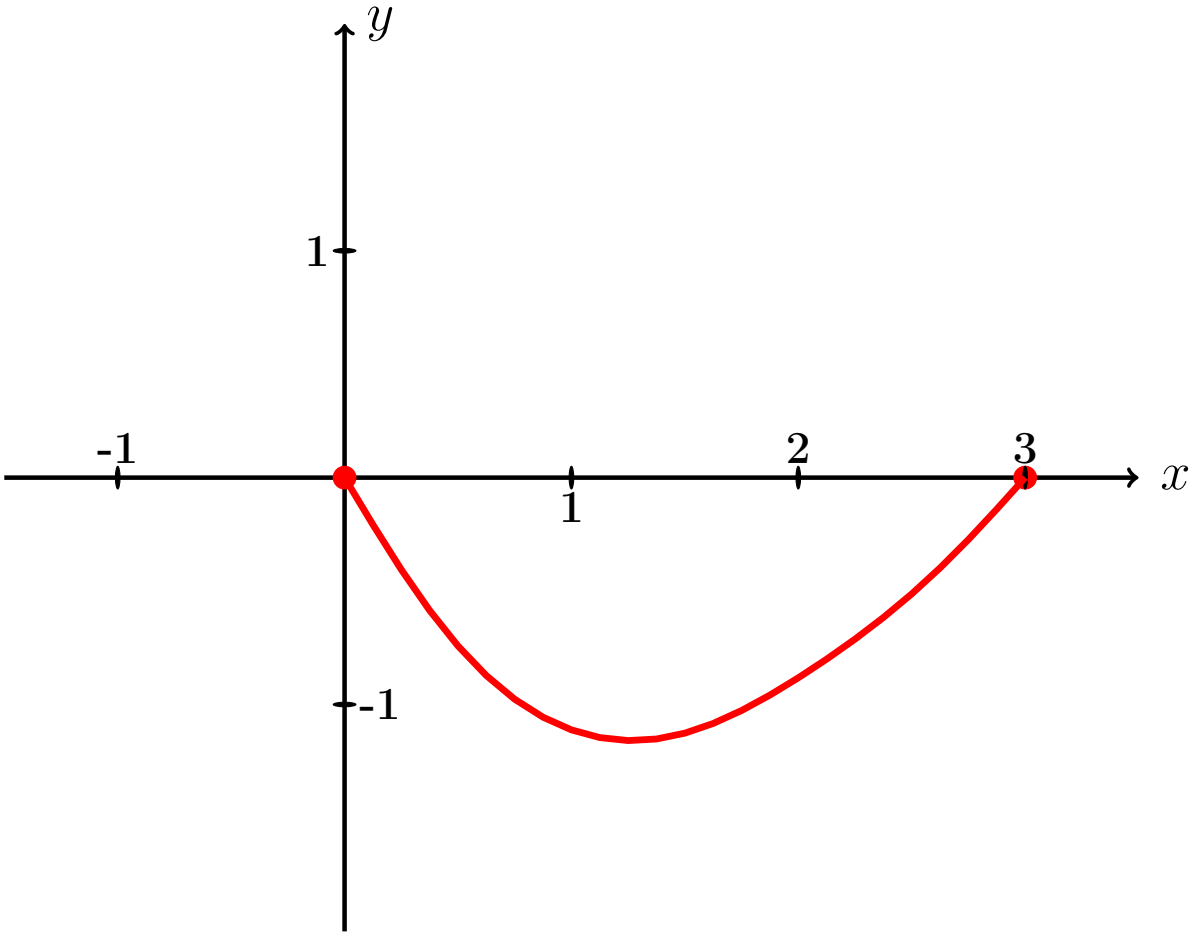


Рис.:

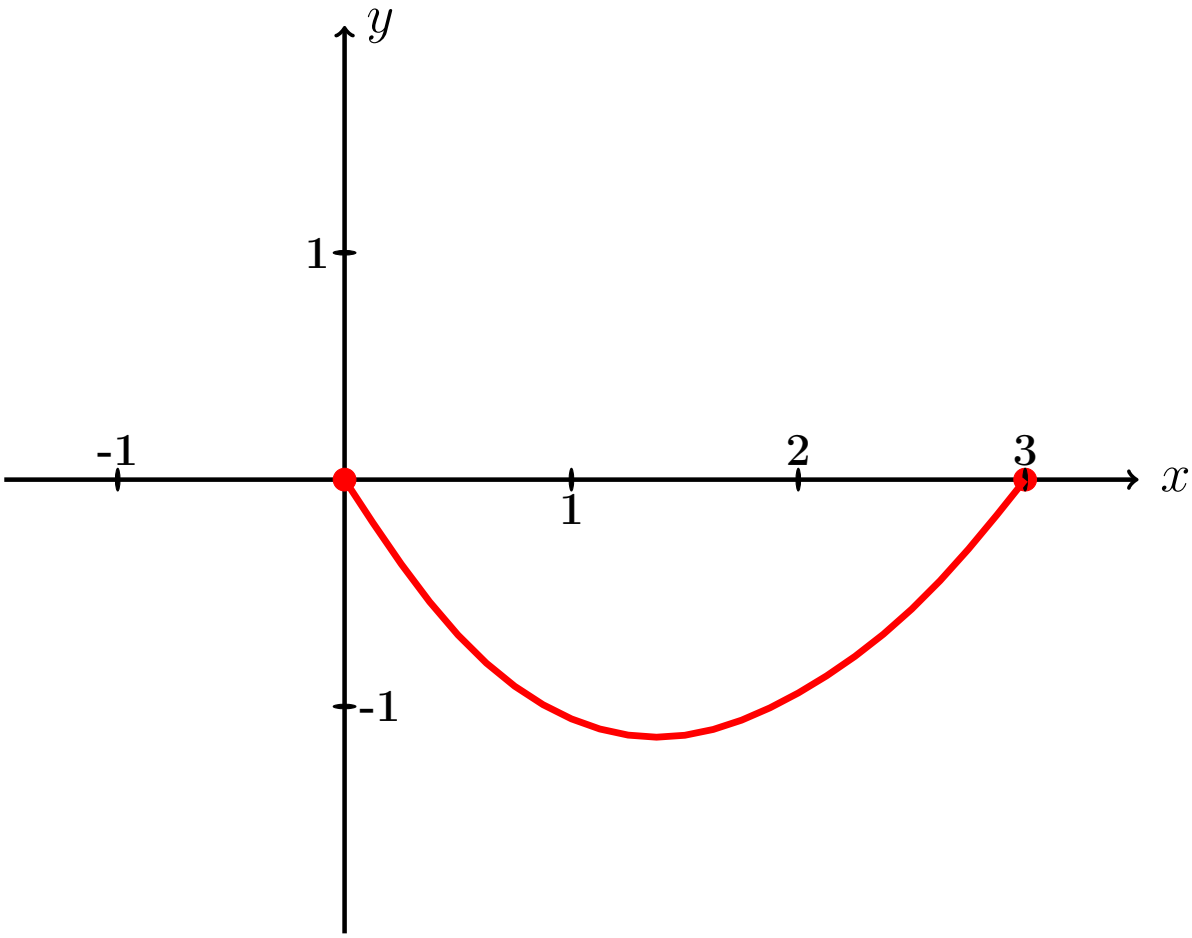


Рис.:

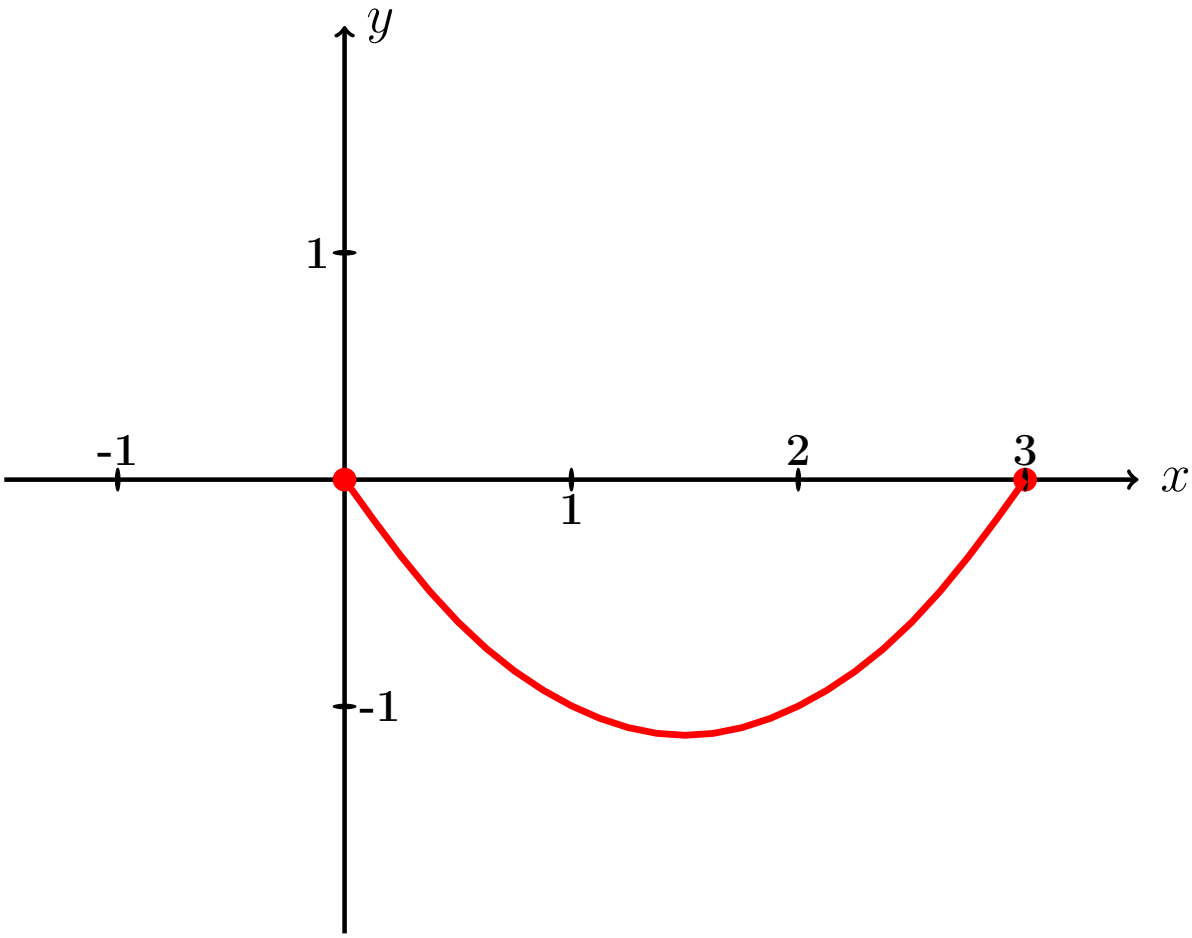


Рис.:

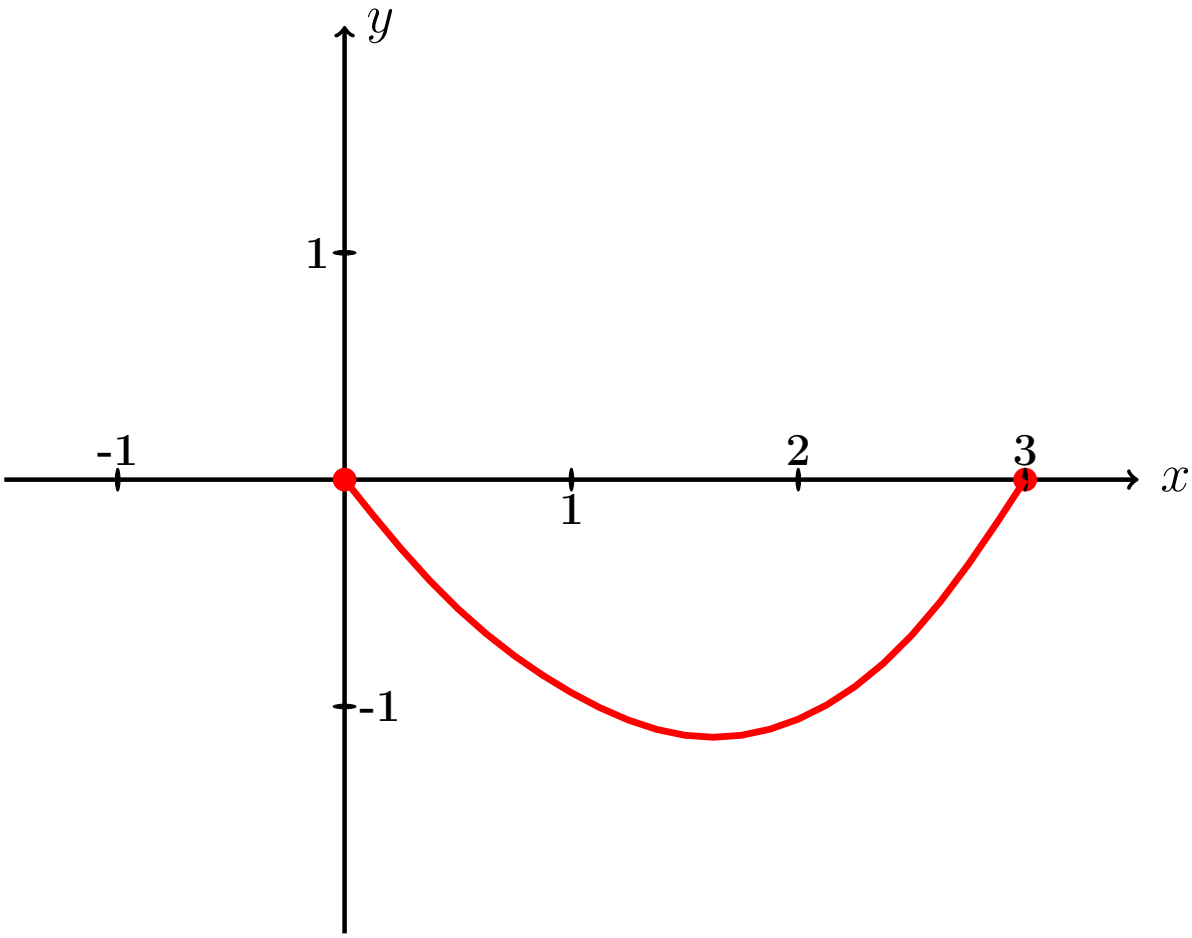


Рис.:

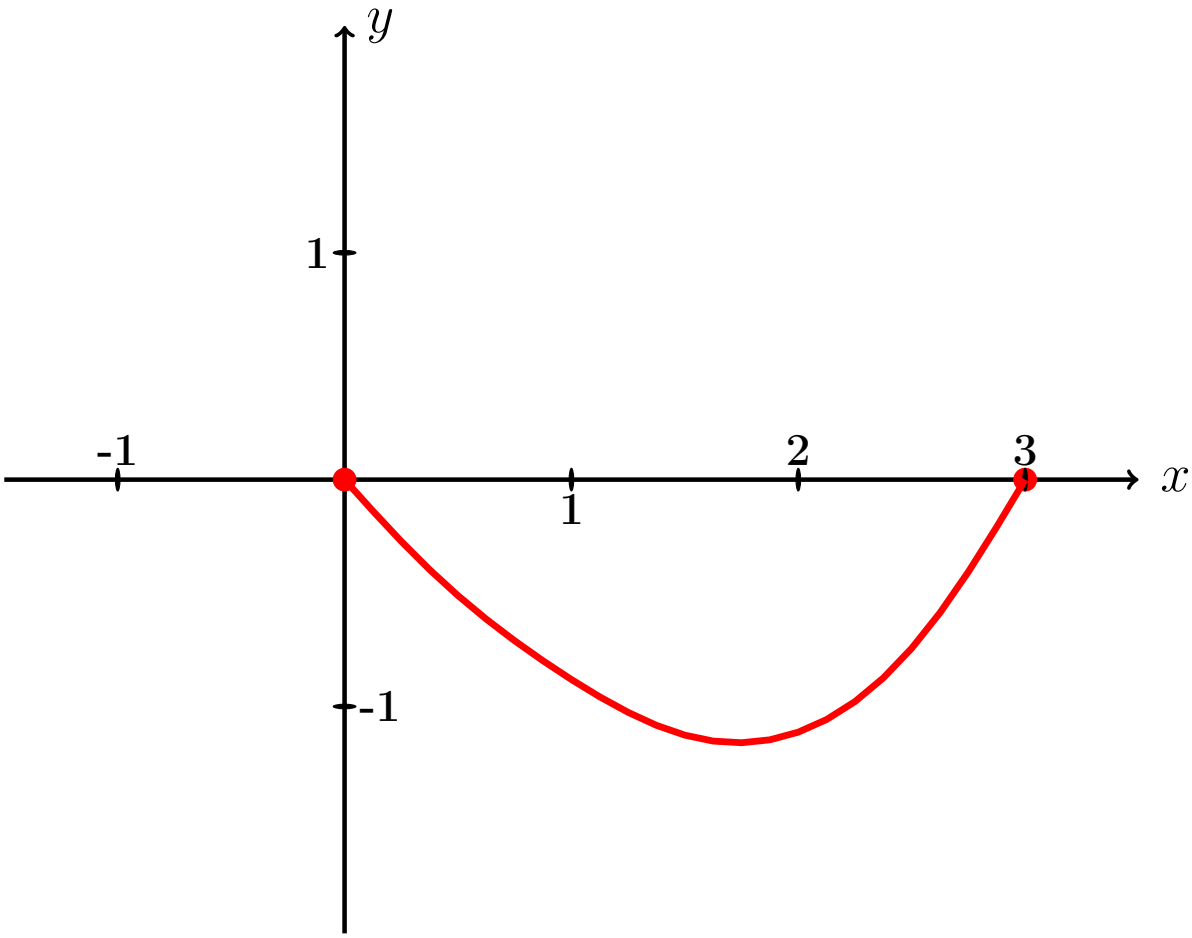


Рис.:

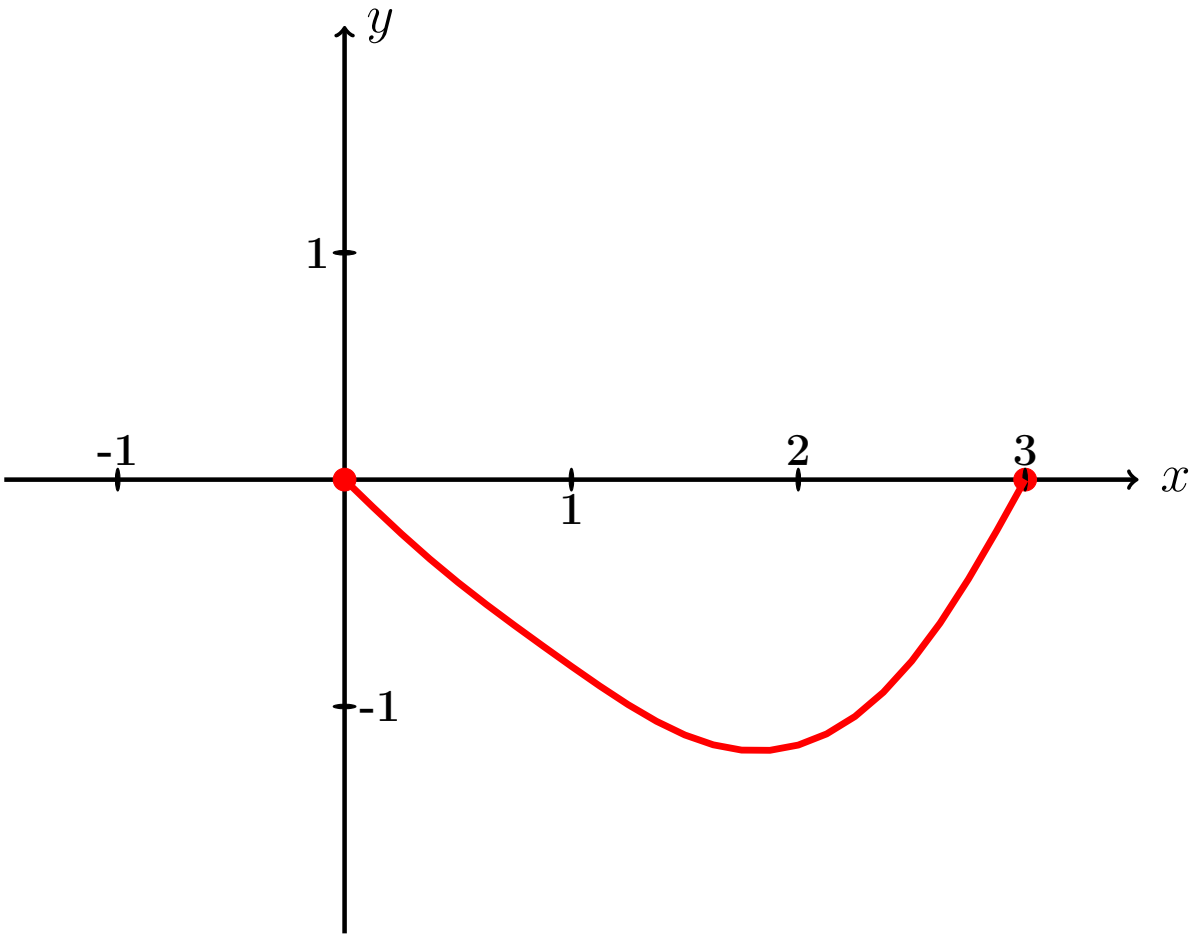


Рис.:

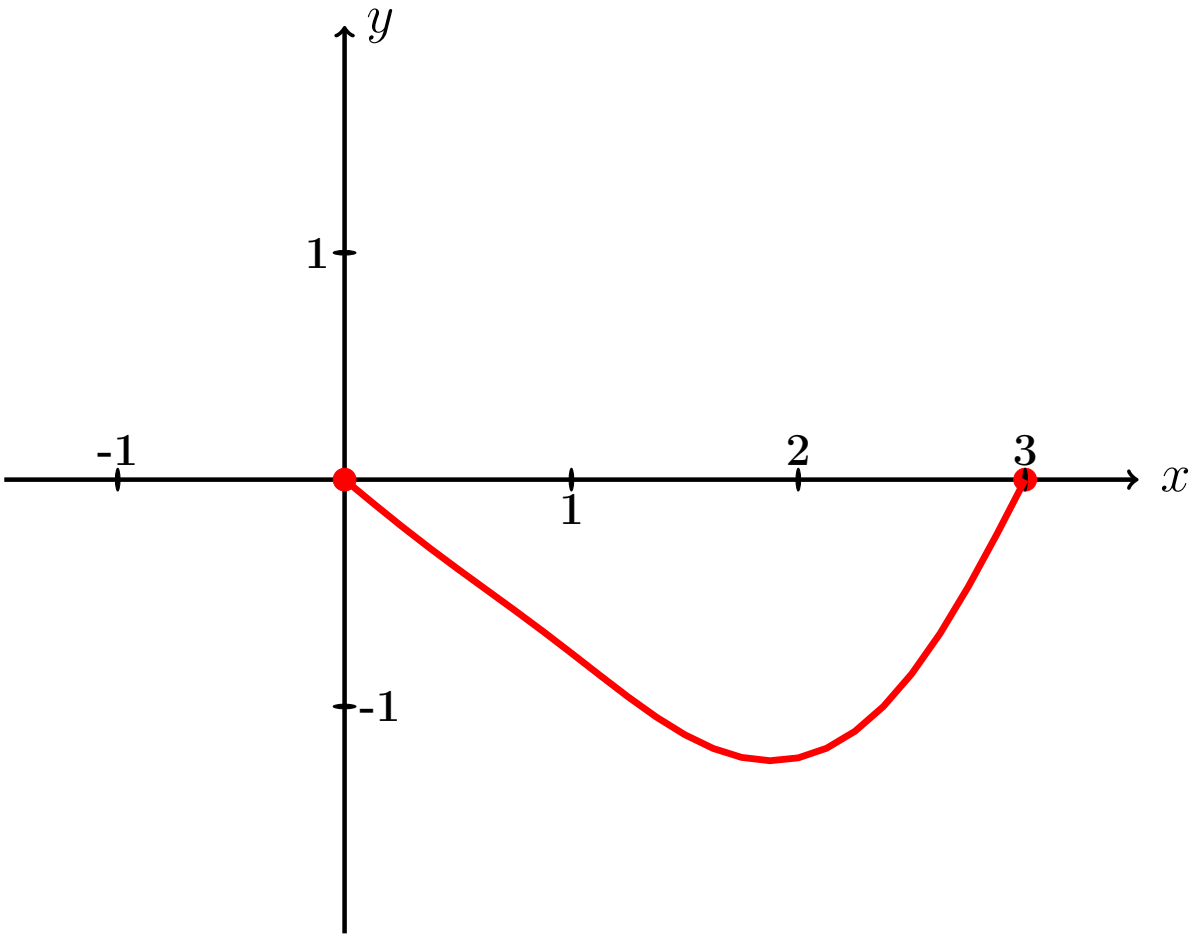


Рис.:

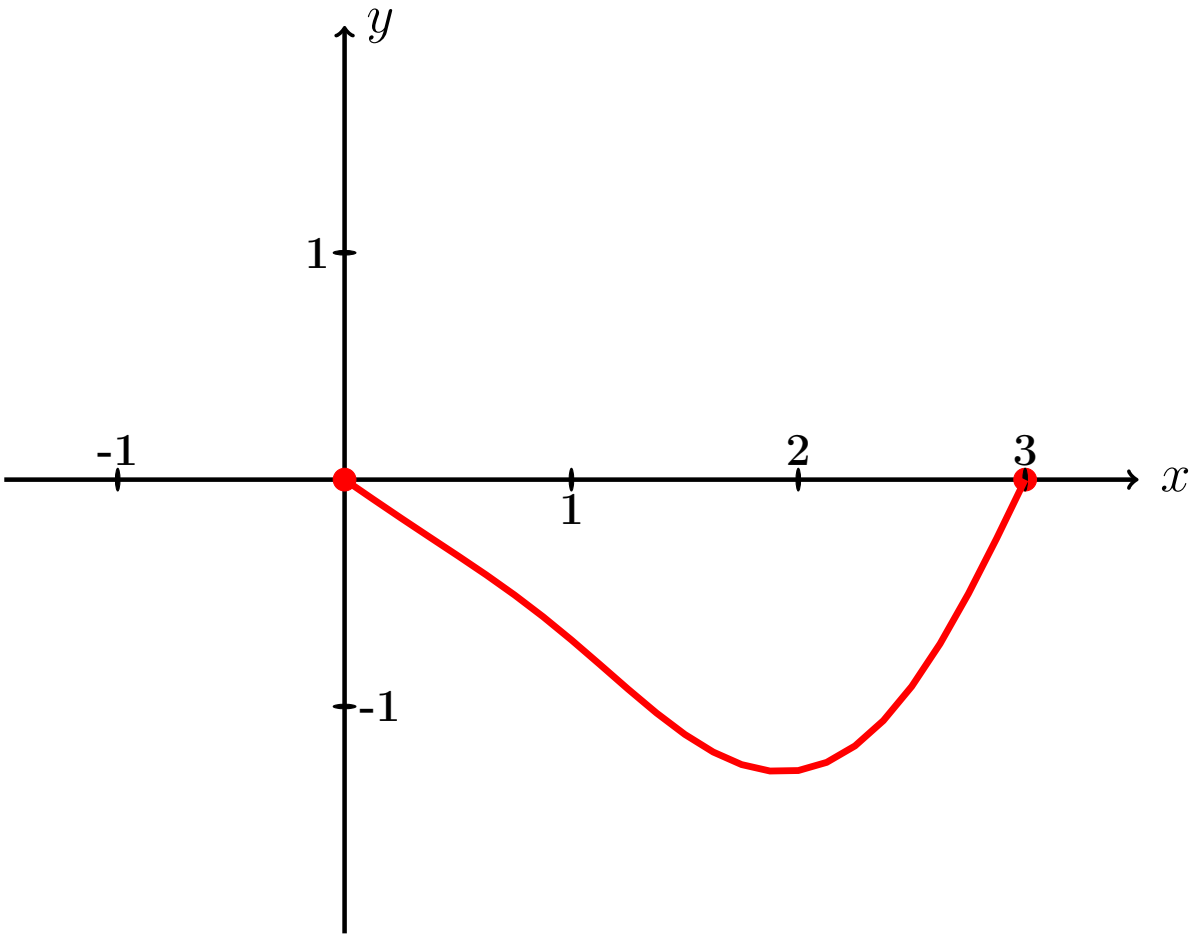


Рис.:

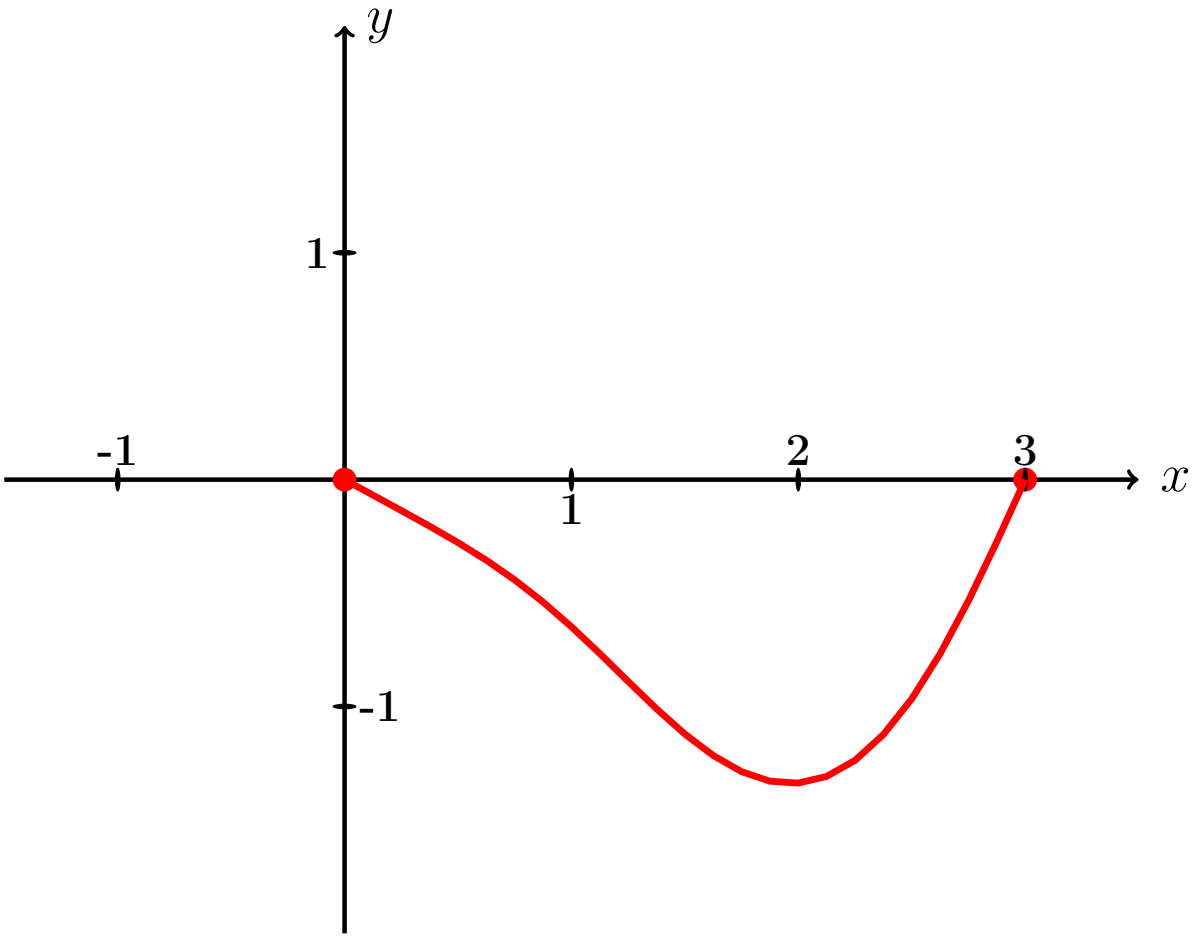


Рис.:

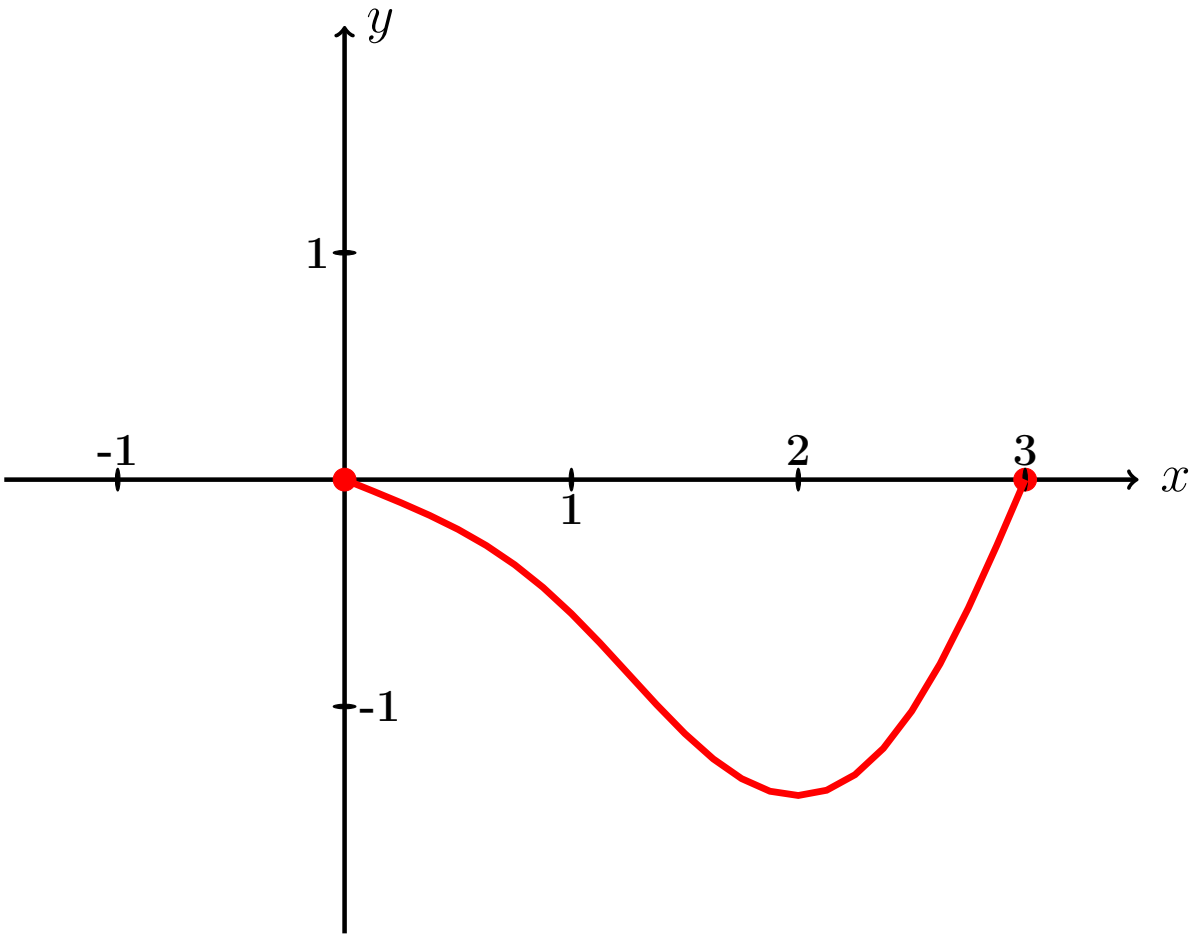


Рис.:

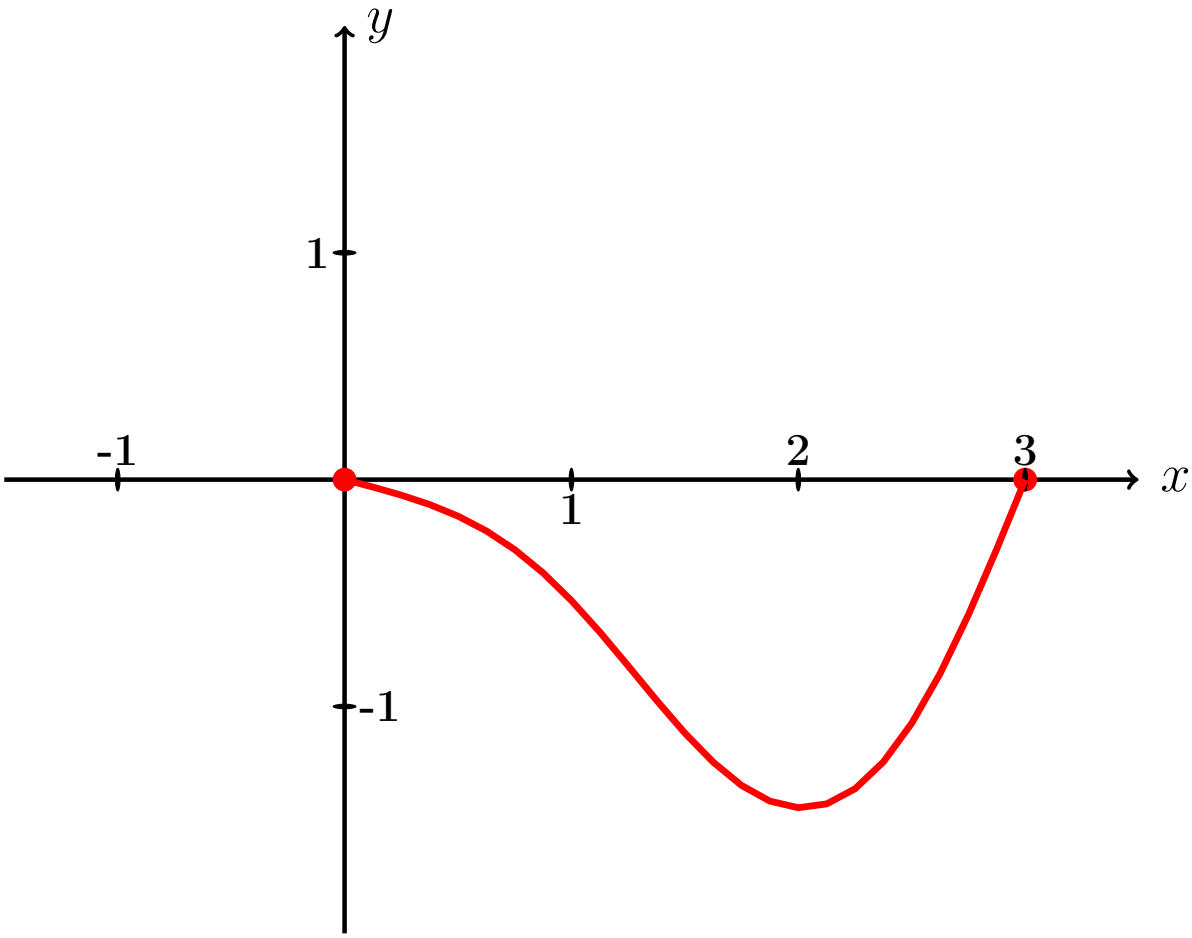


Рис.:

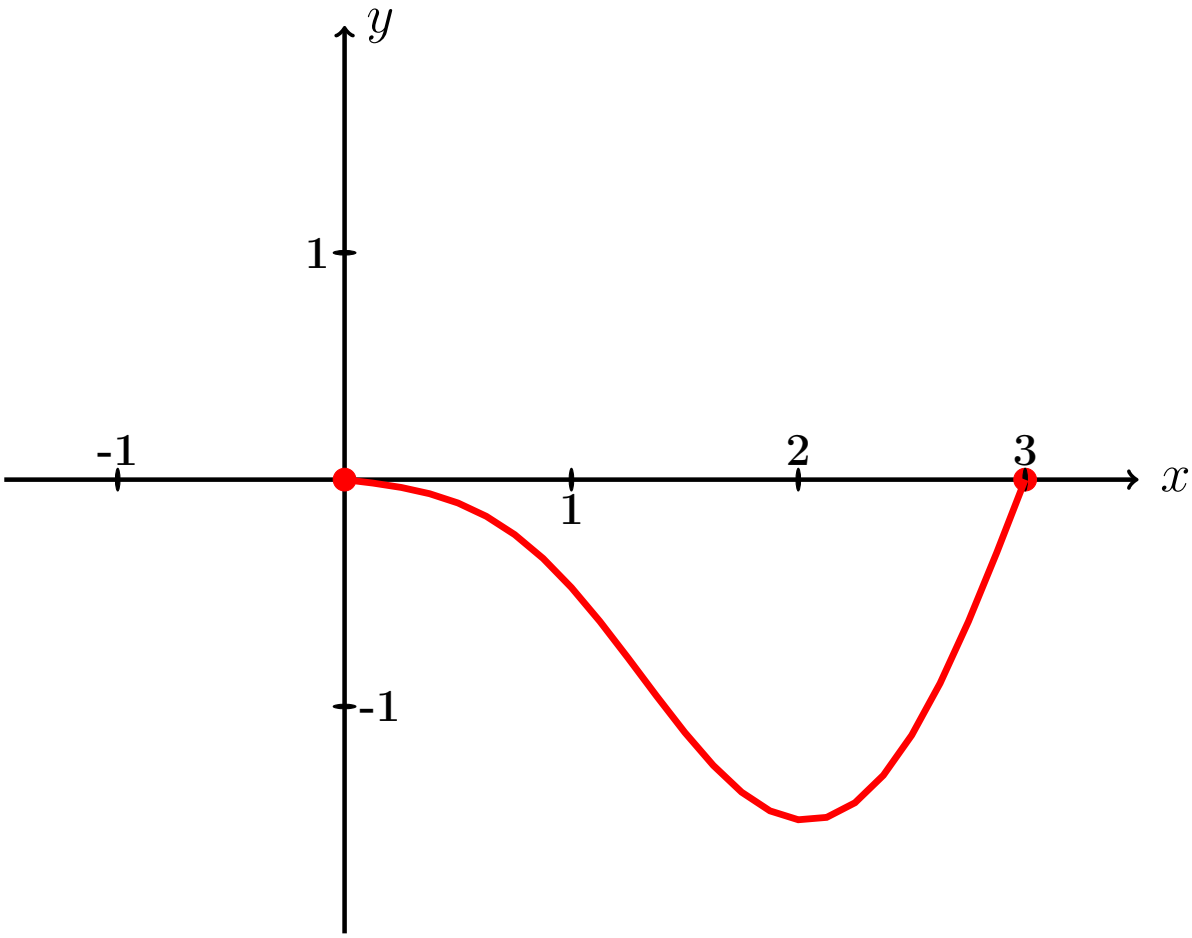


Рис.:

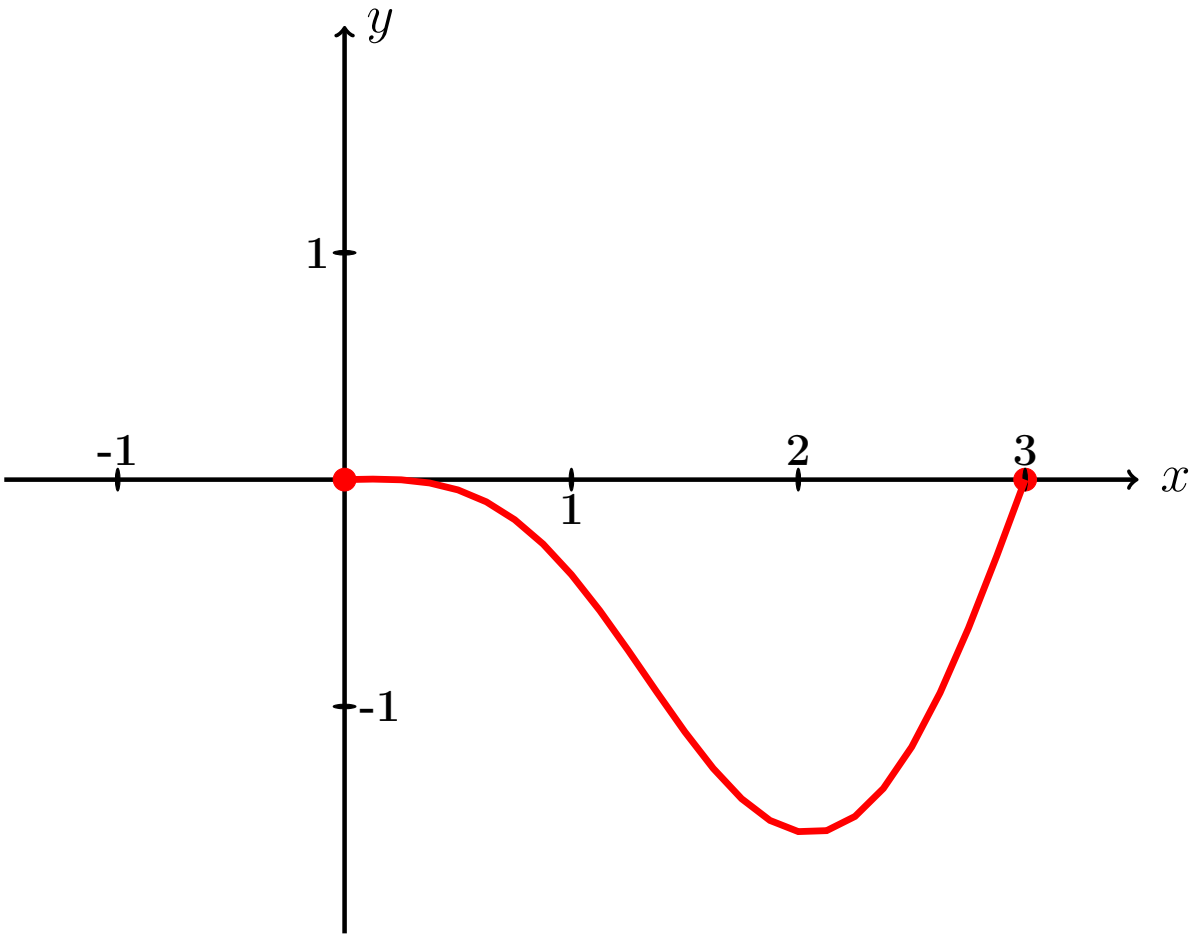


Рис.:

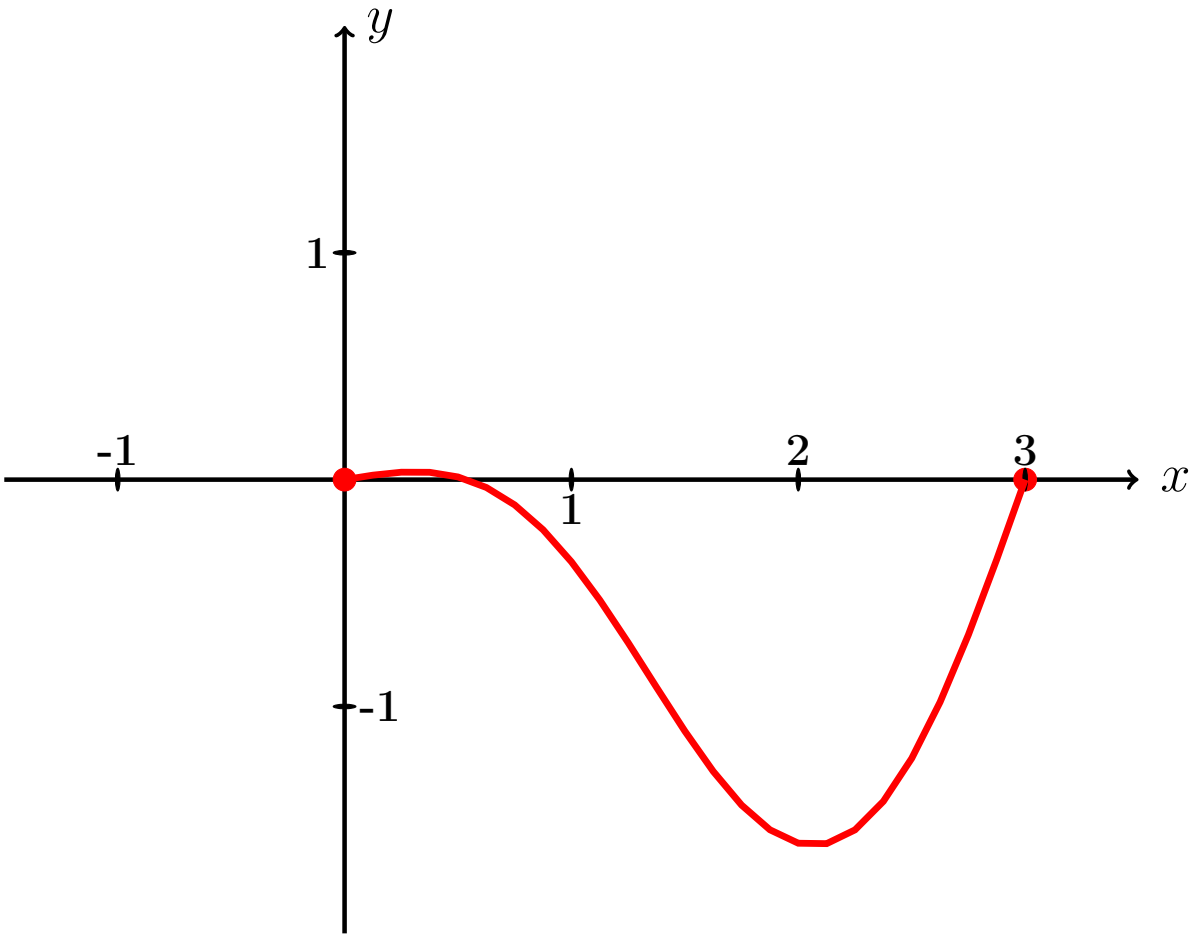


Рис.:

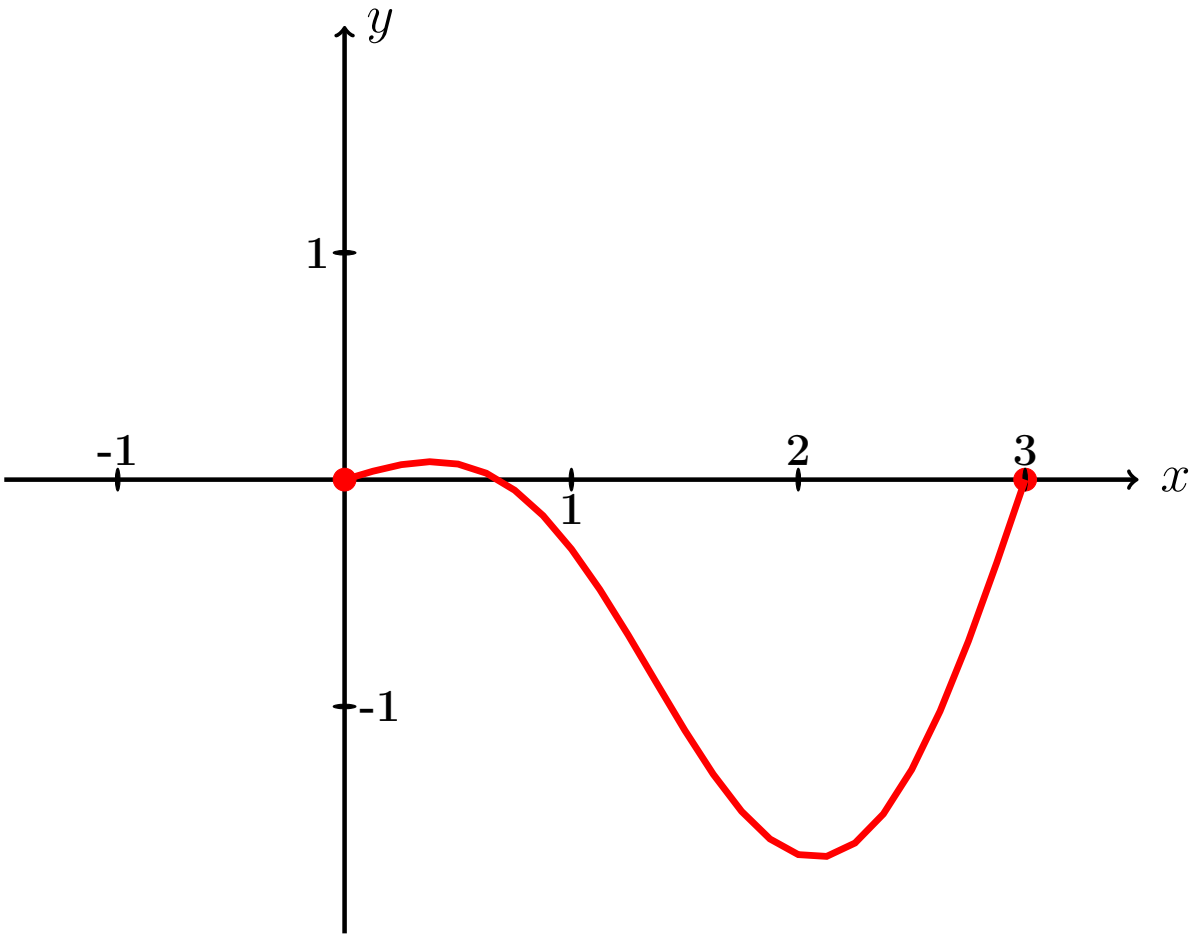


Рис.:

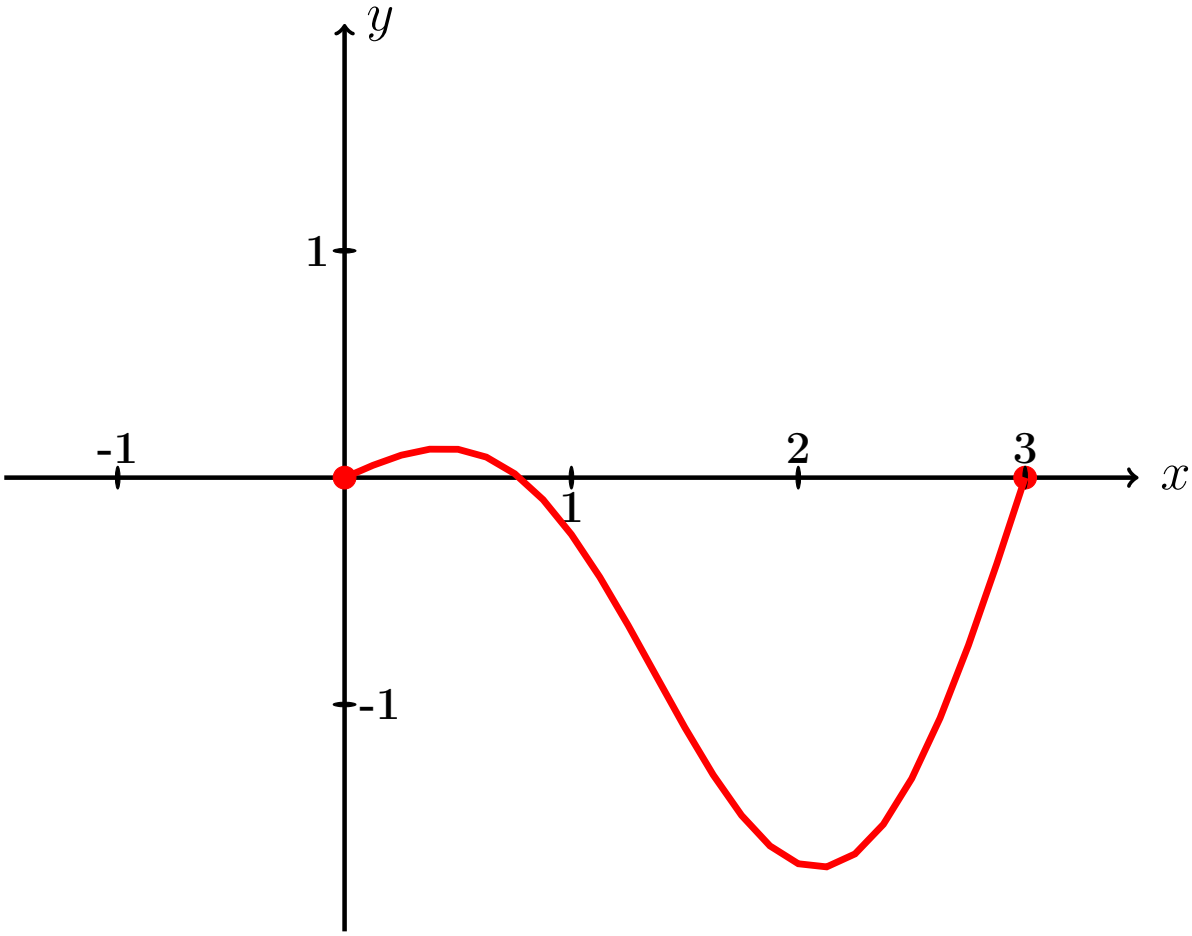


Рис.:

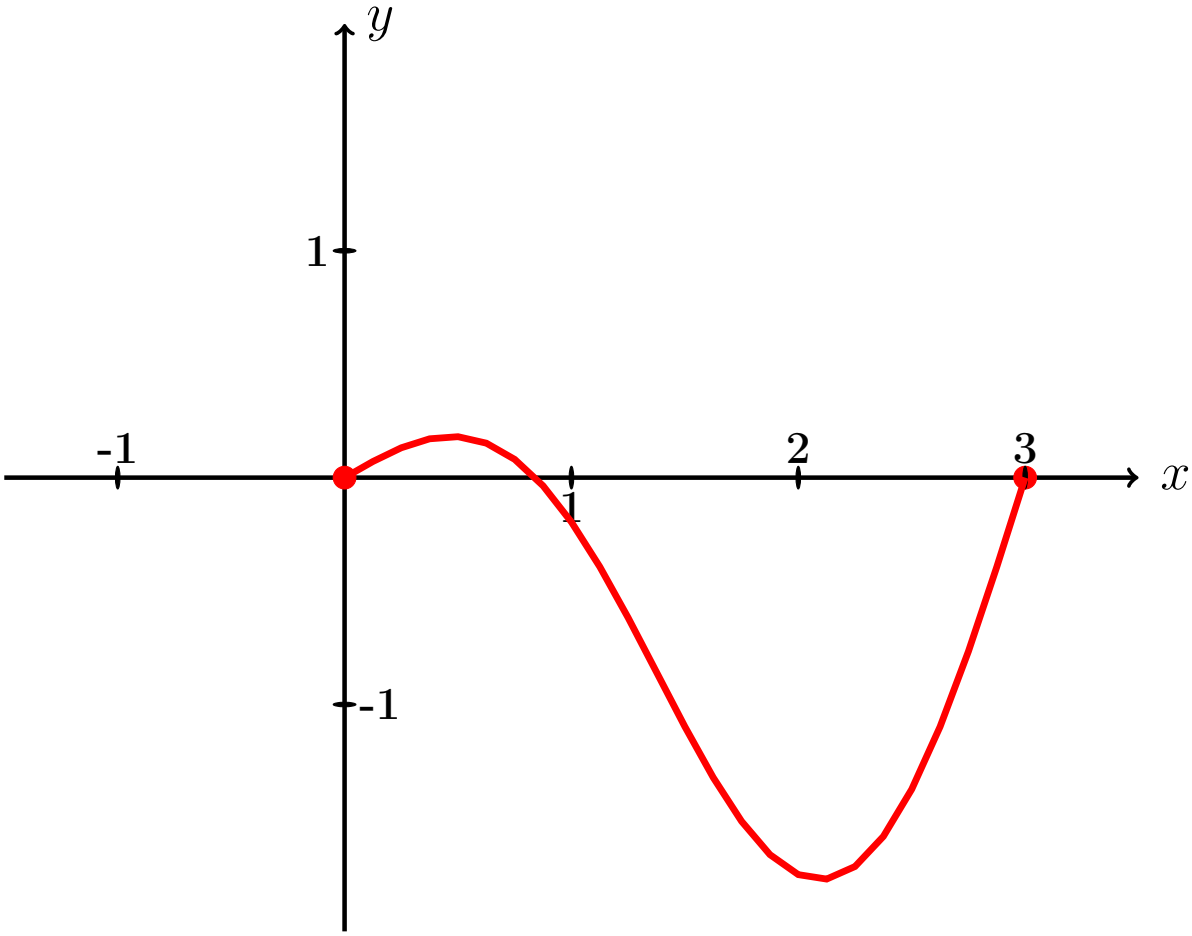


Рис.:

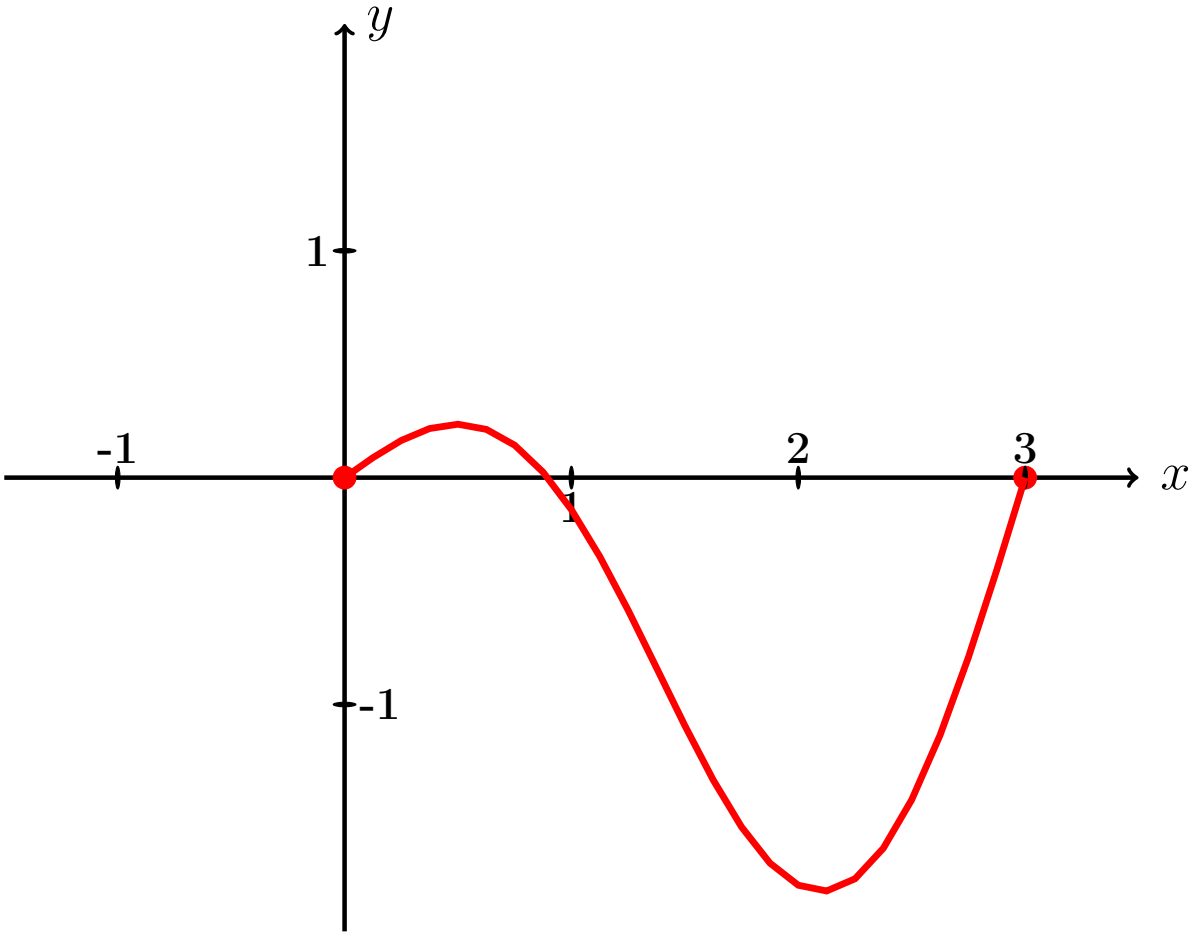


Рис.:

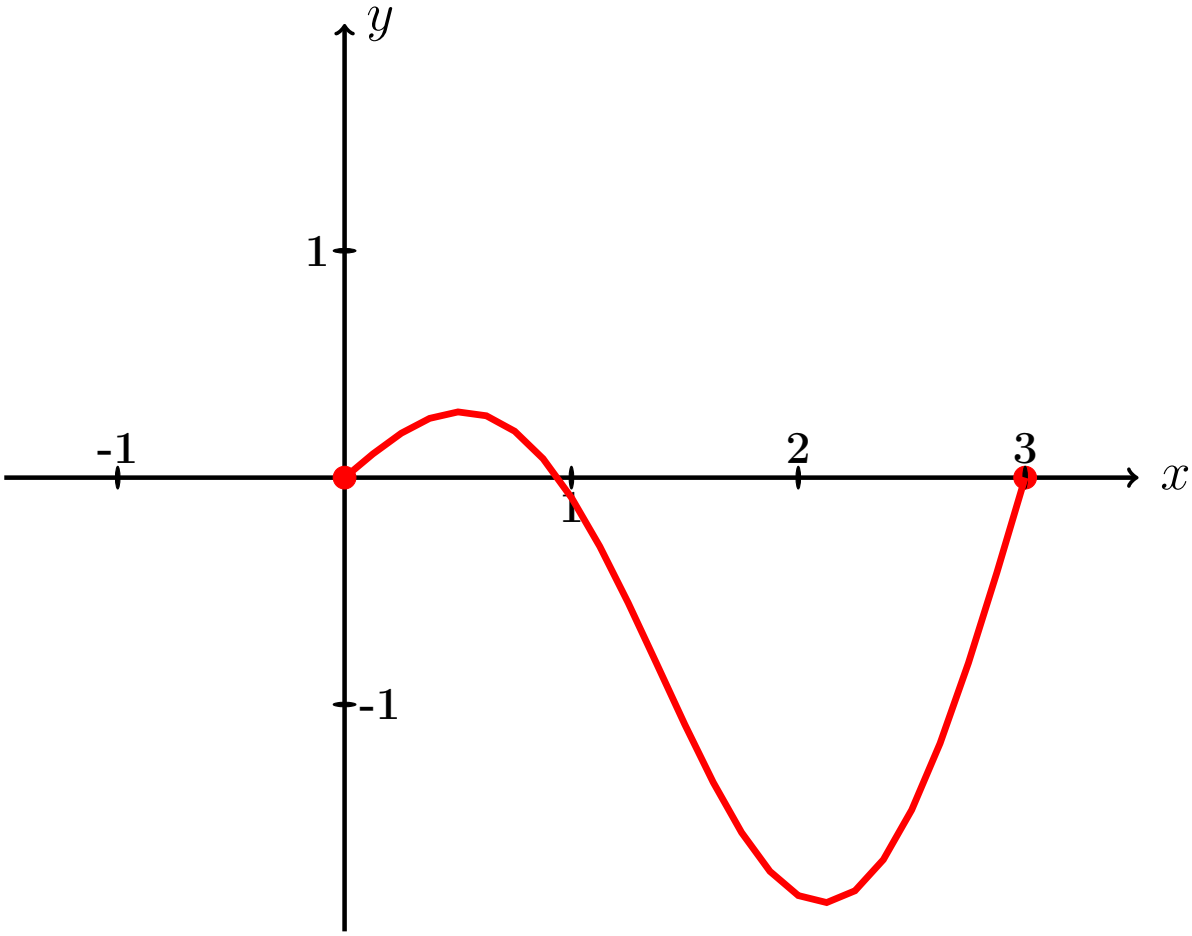


Рис.:

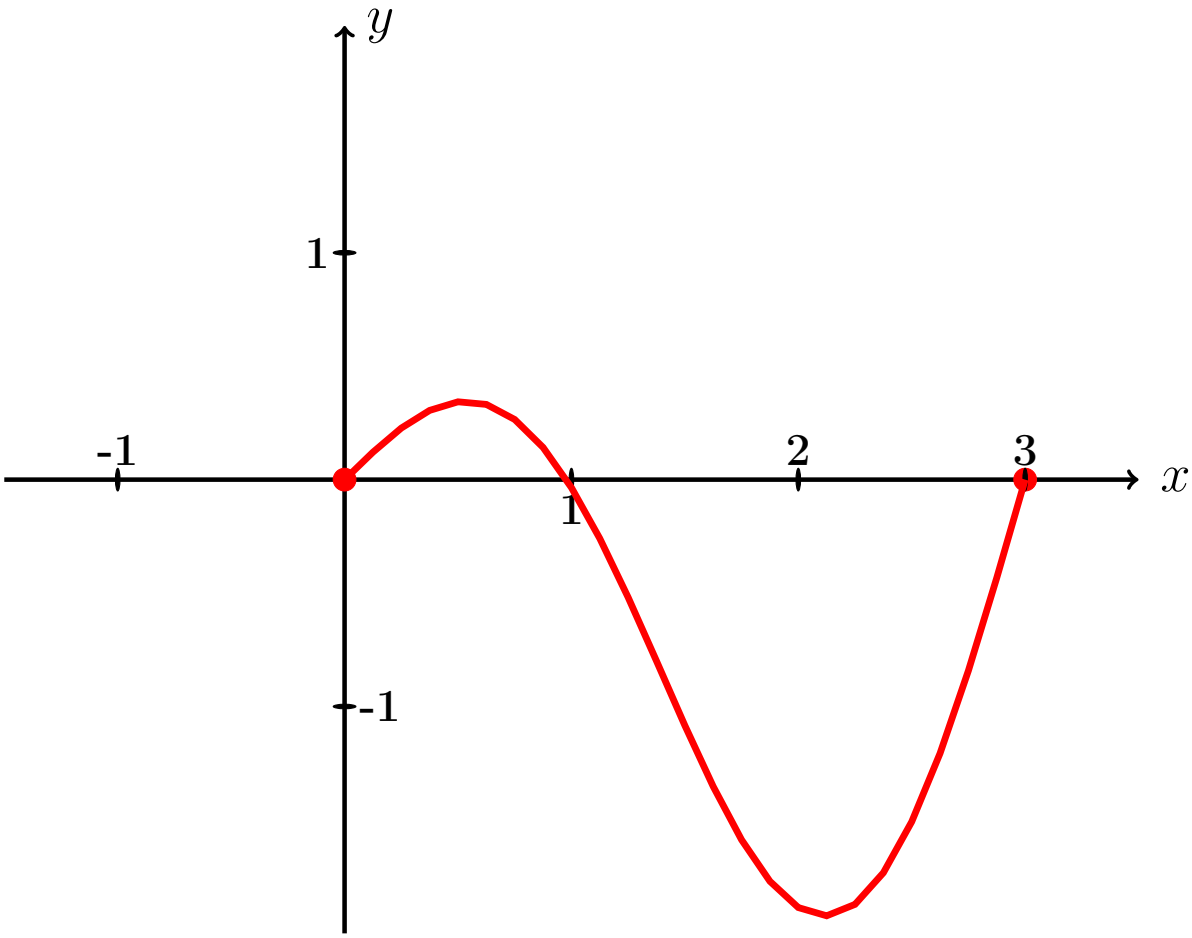


Рис.:

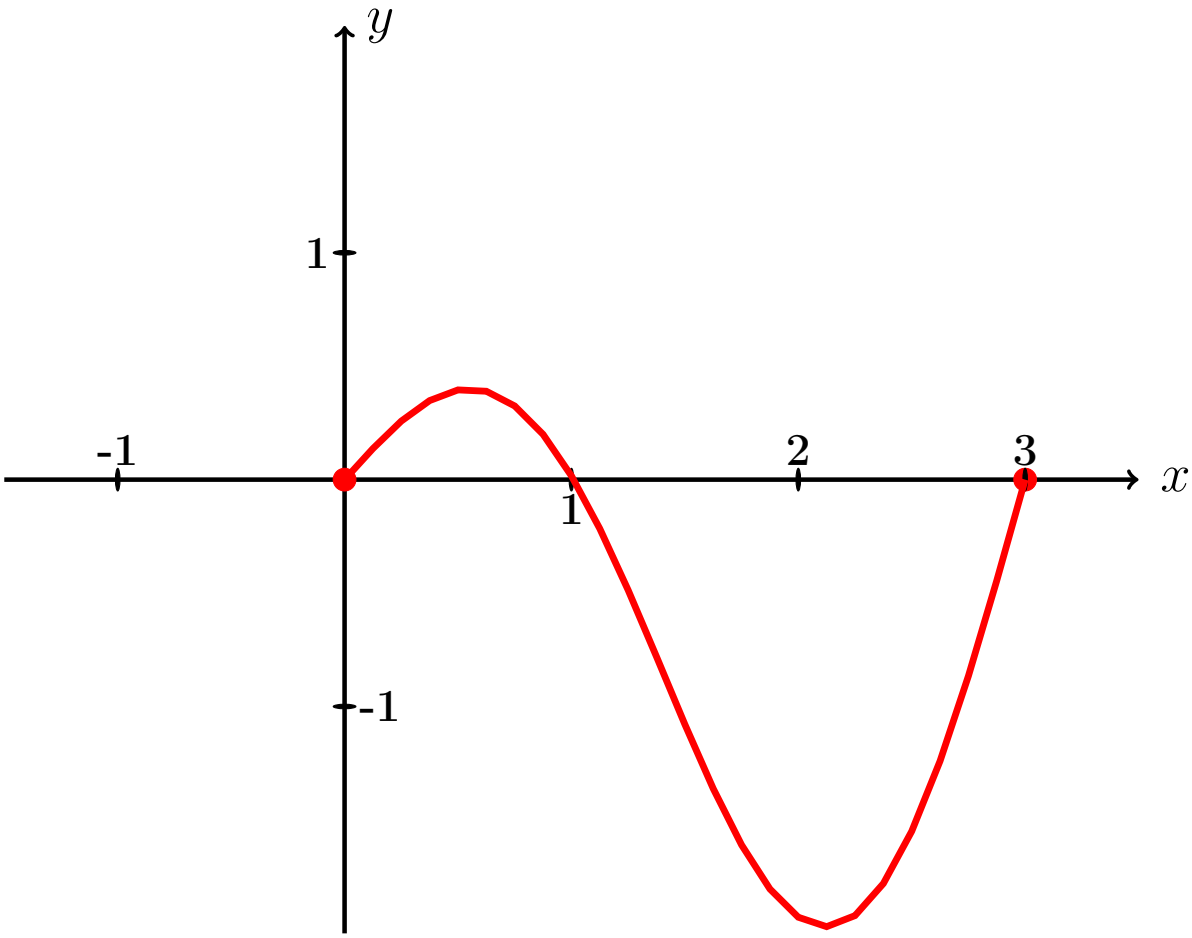


Рис.:

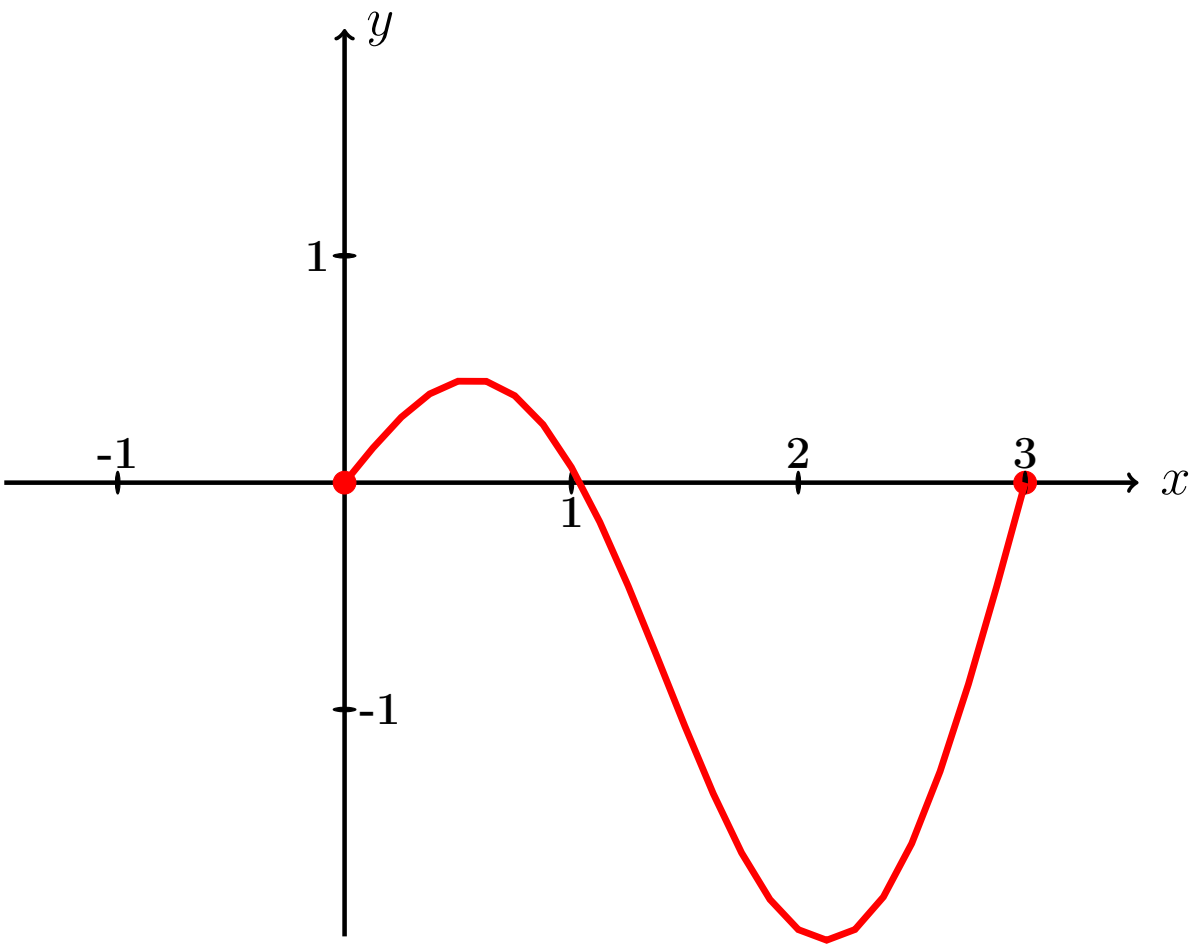


Рис.:

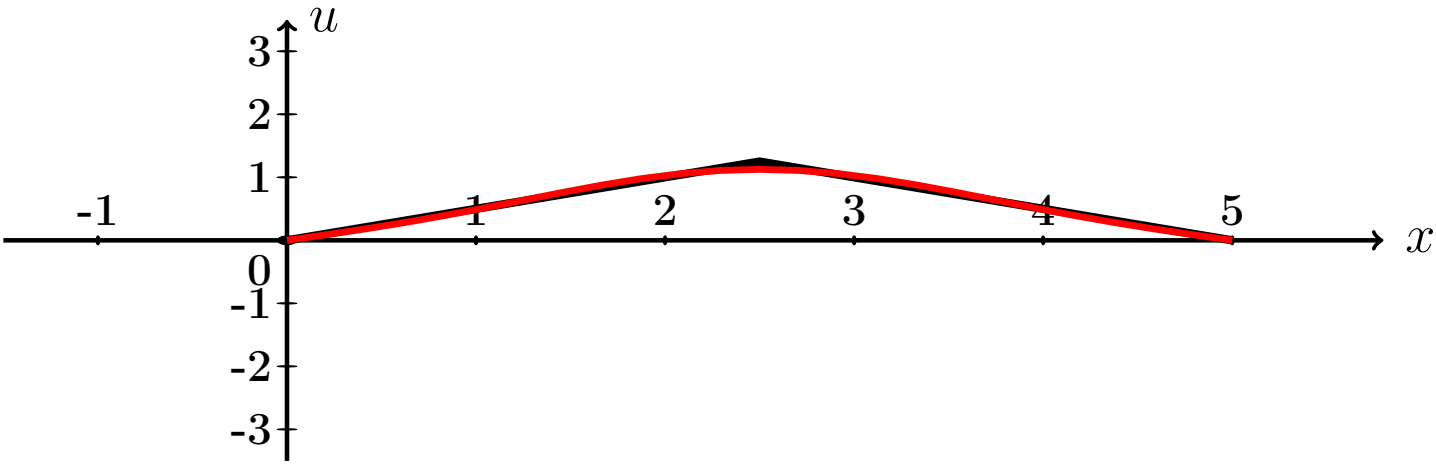


Рис.: Черным показано исходное положение струны по формуле $u(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при} \quad 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5-x), & \text{при} \quad 5/2 \le x \le 5 \end{cases}$, а красным – его расчетное приближение.

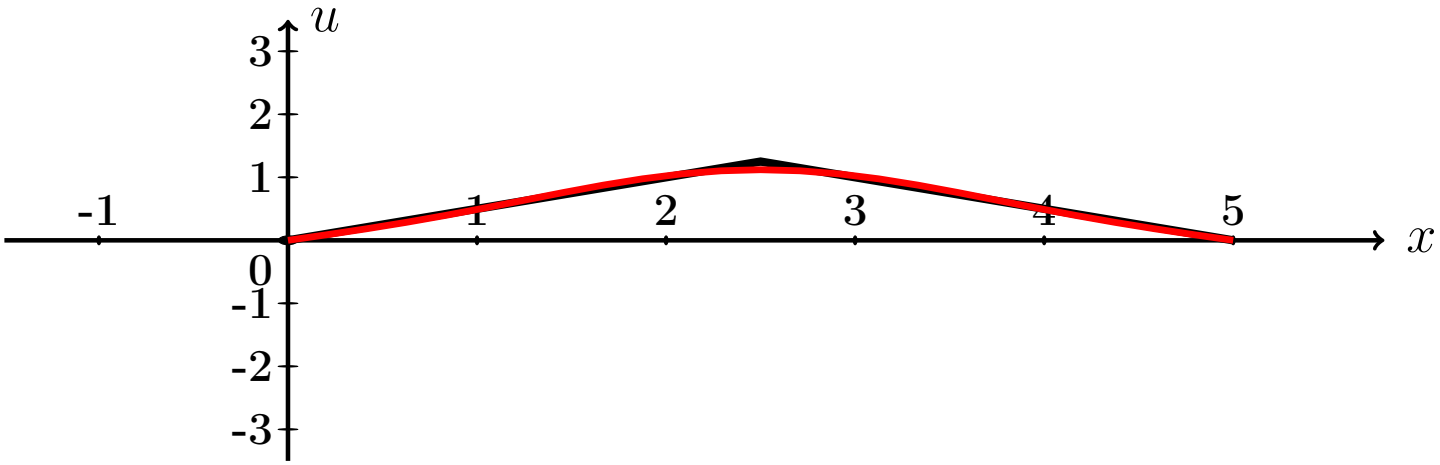


Рис.:

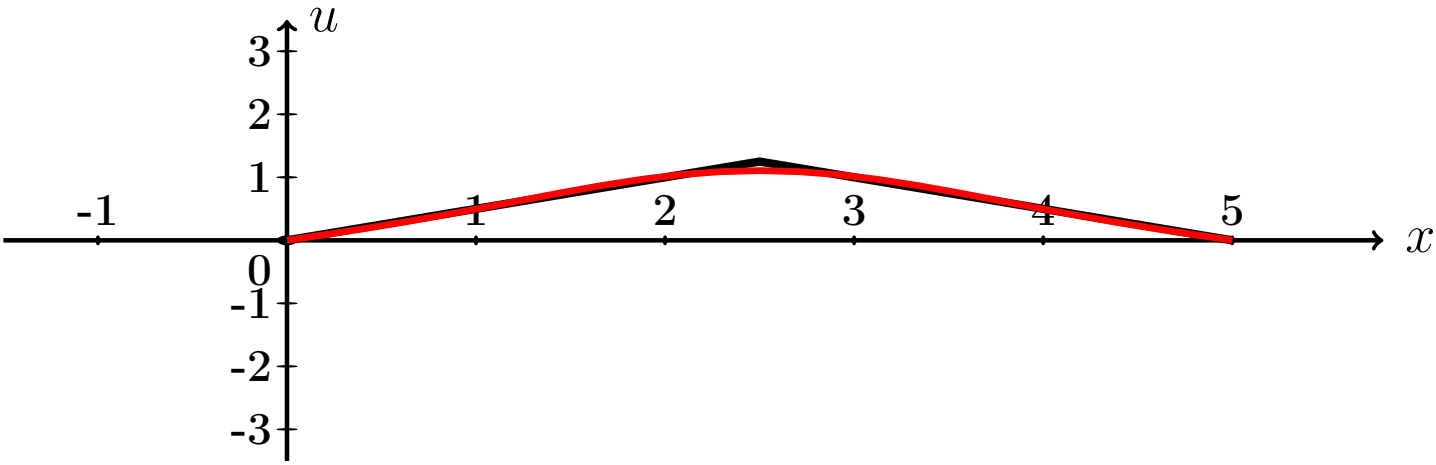


Рис.:

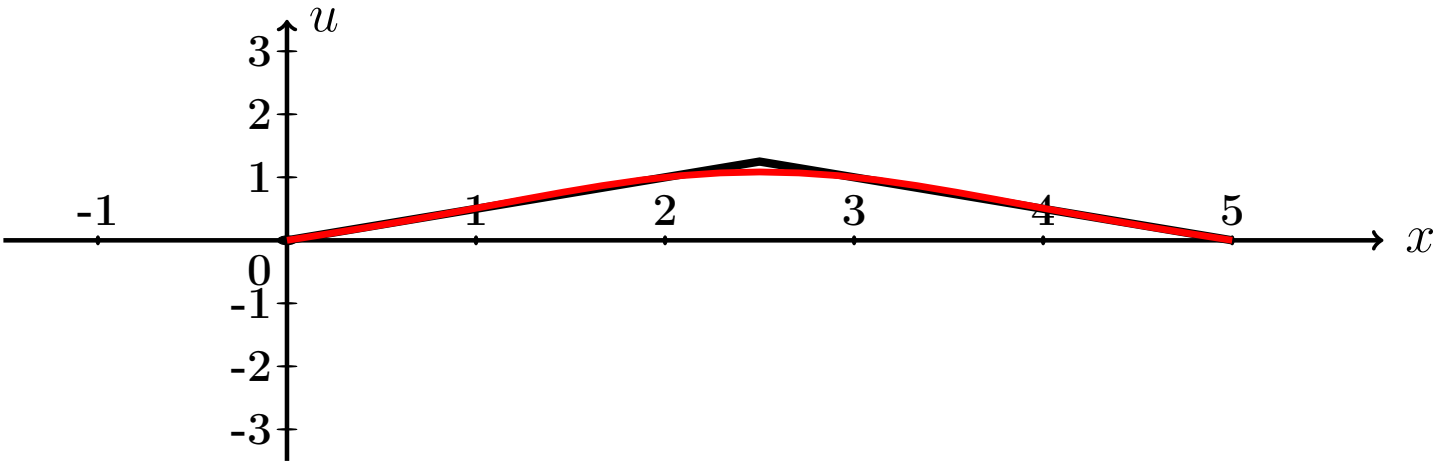


Рис.:

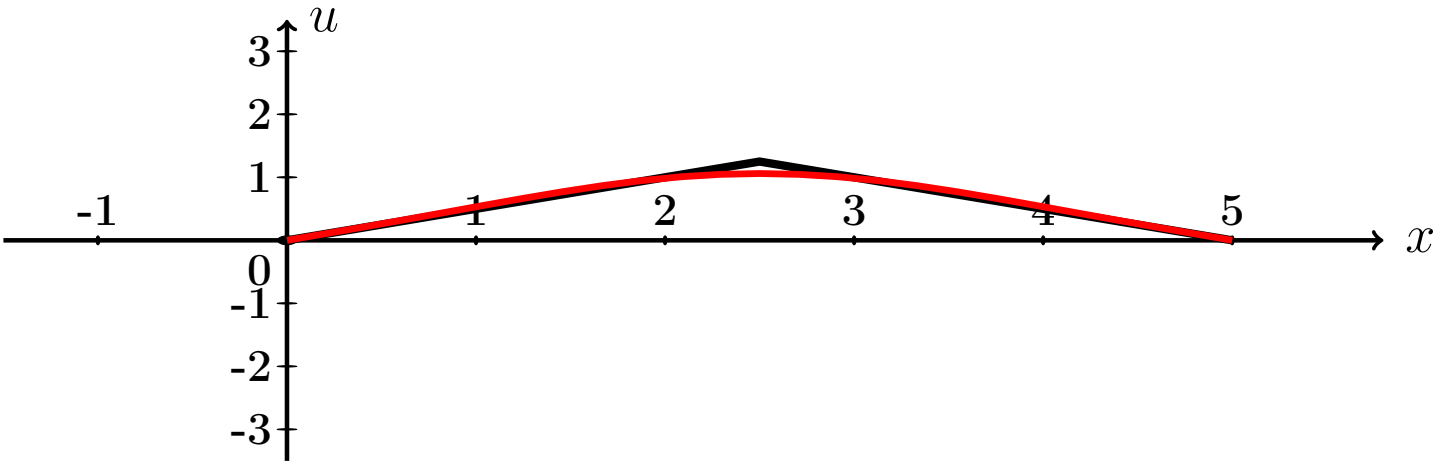


Рис.:

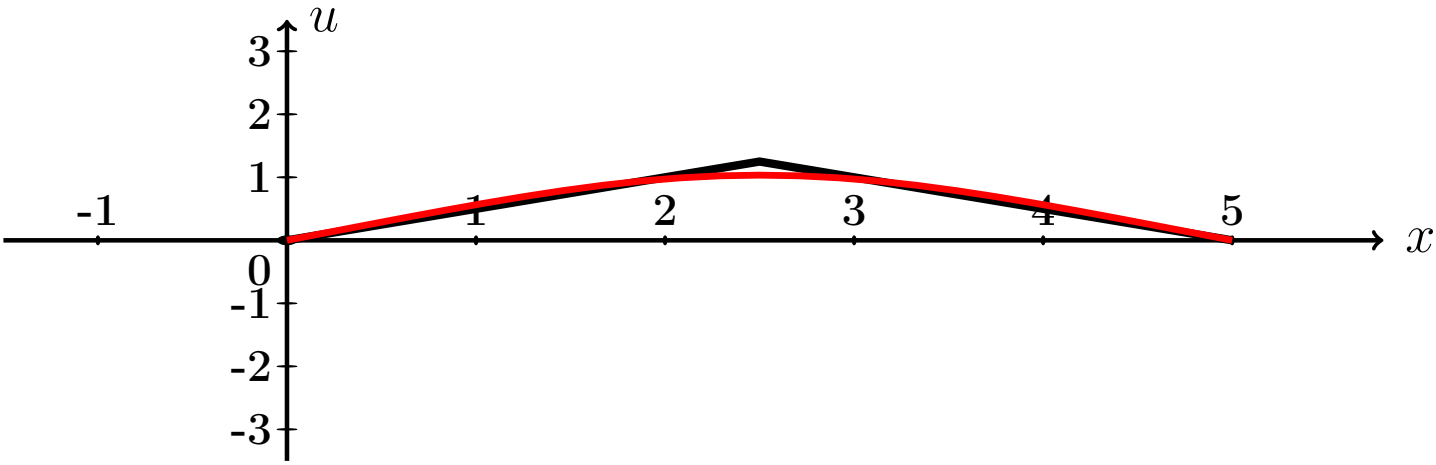


Рис.:

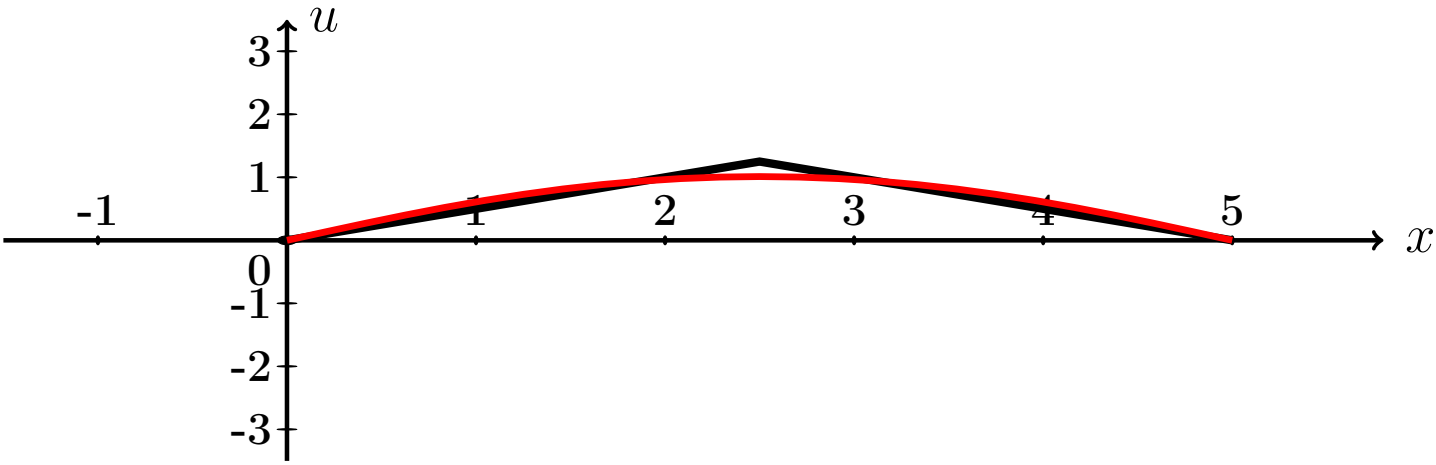


Рис.:

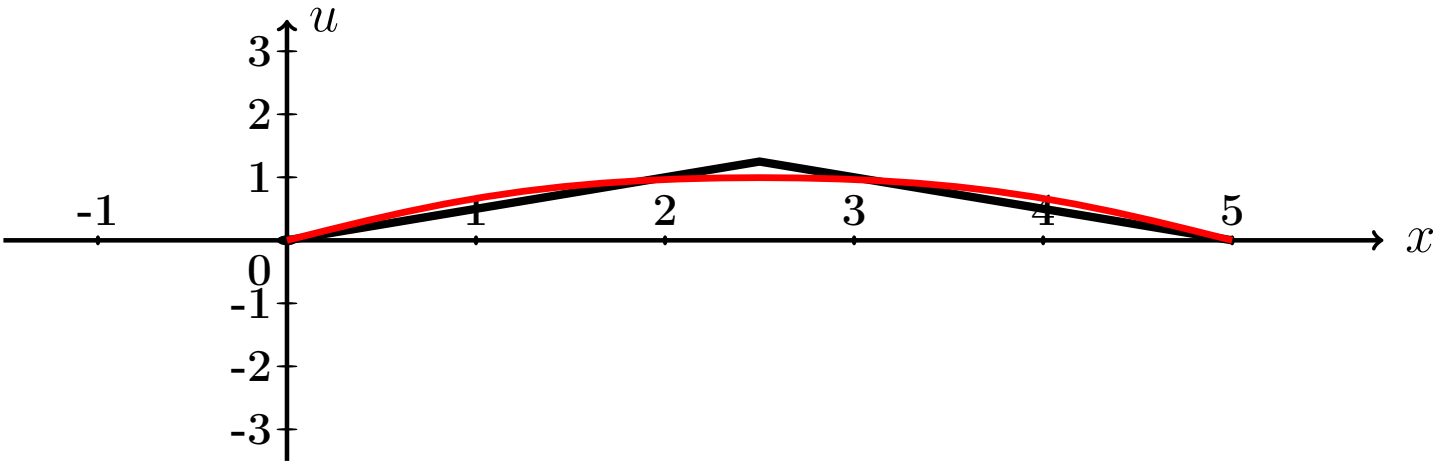


Рис.:

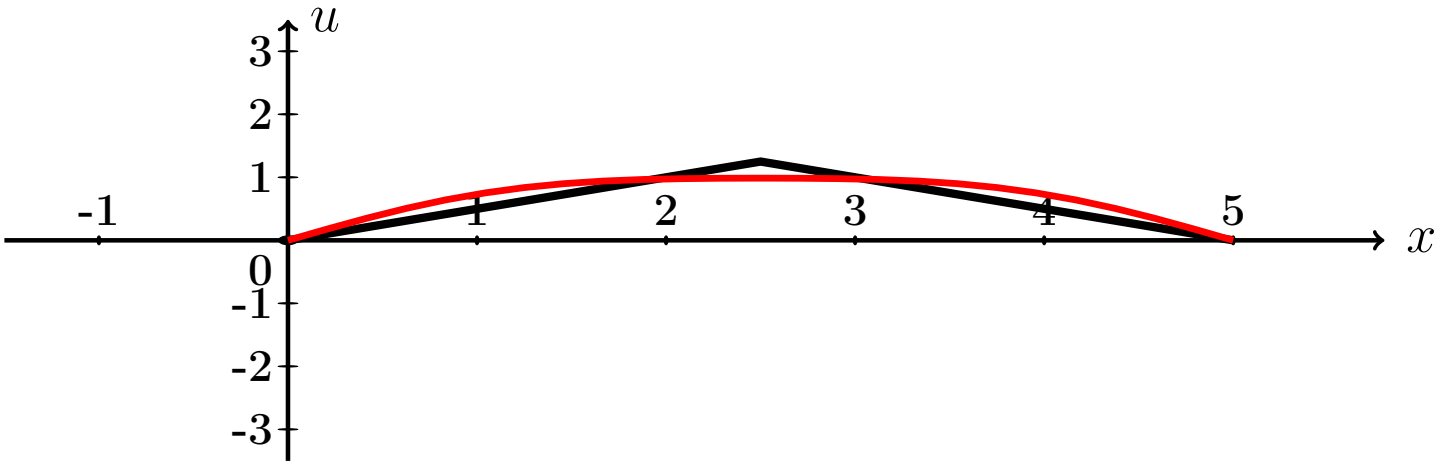


Рис.:

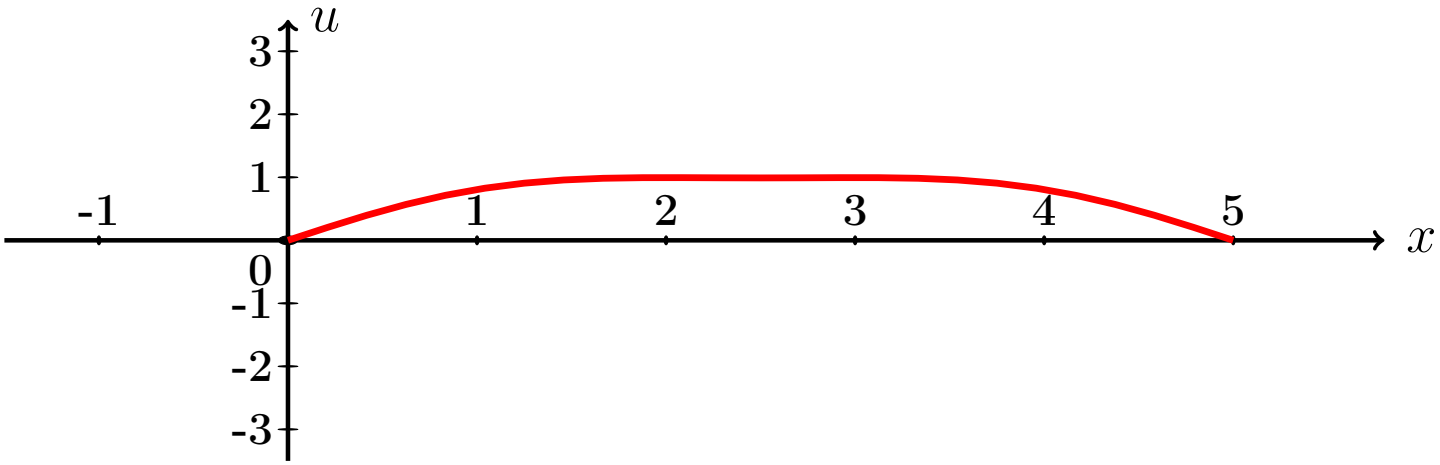


Рис.:

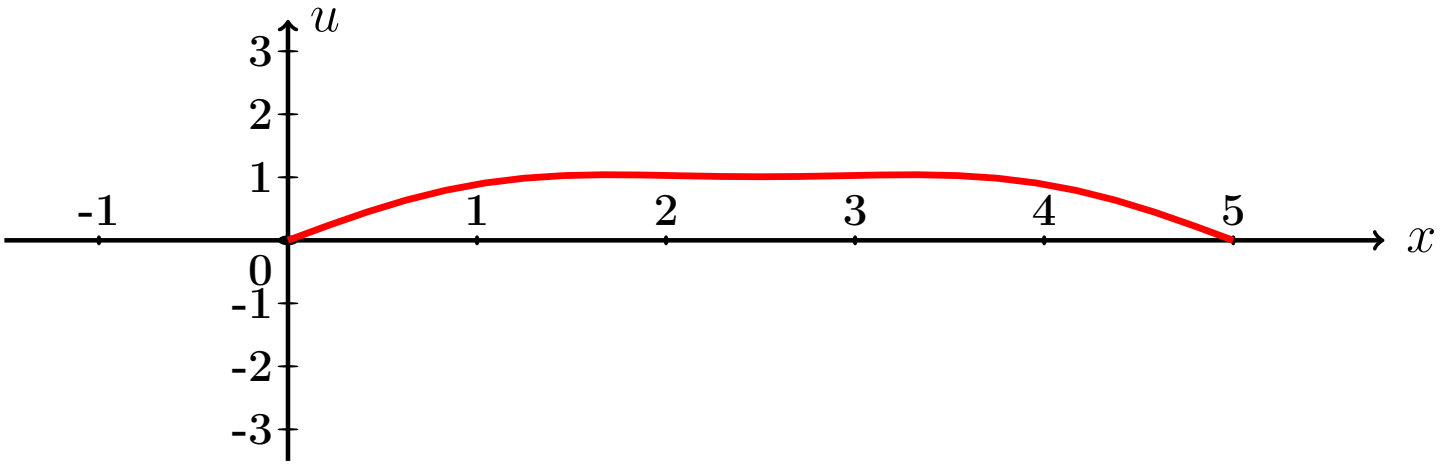


Рис.:

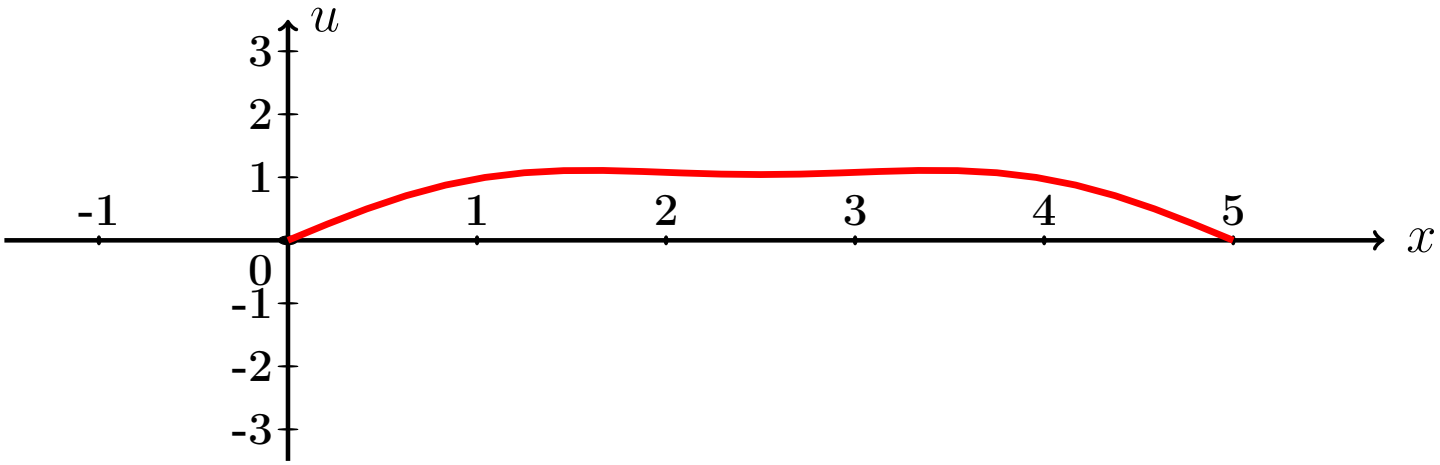


Рис.:

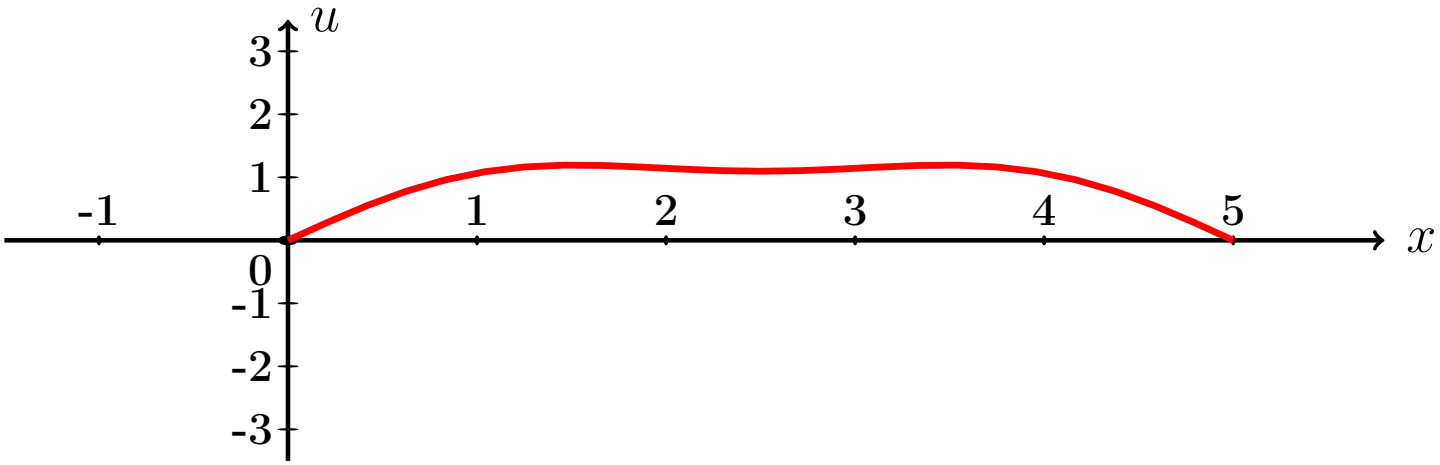


Рис.:

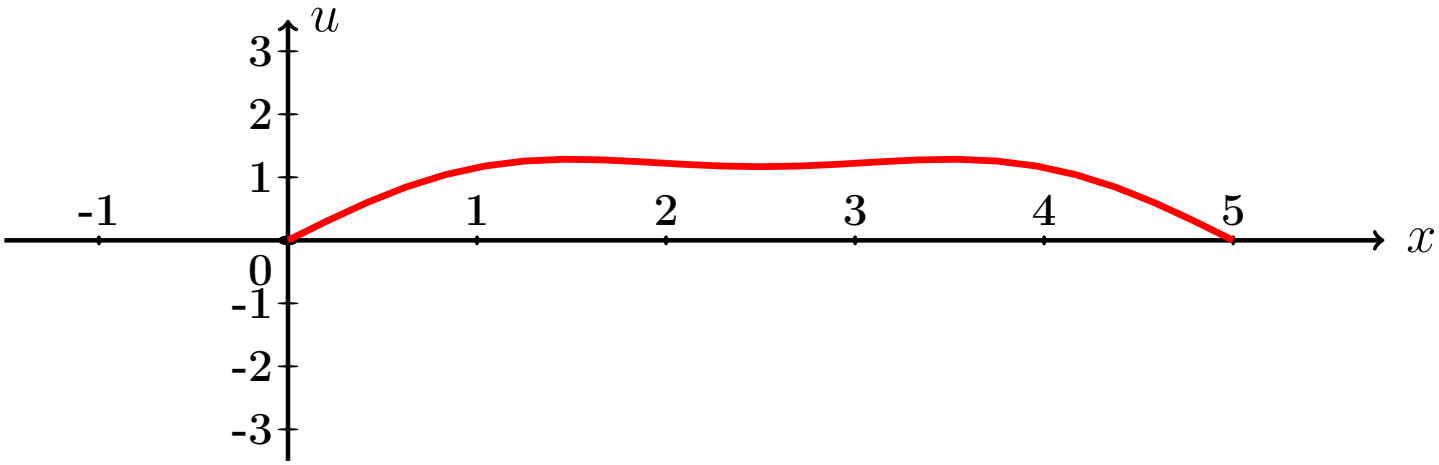


Рис.:

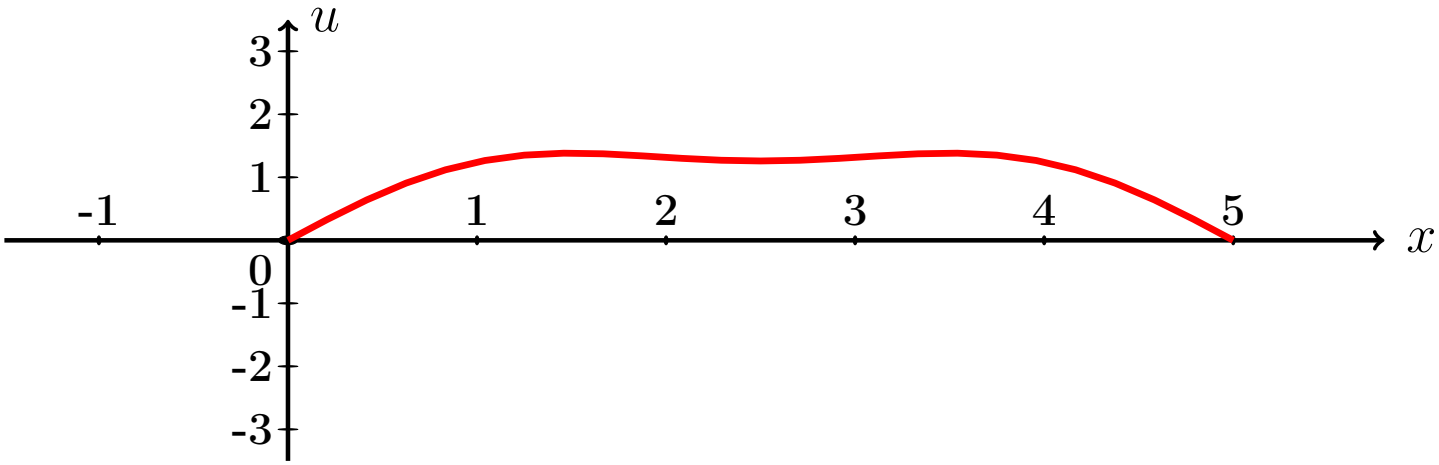


Рис.:

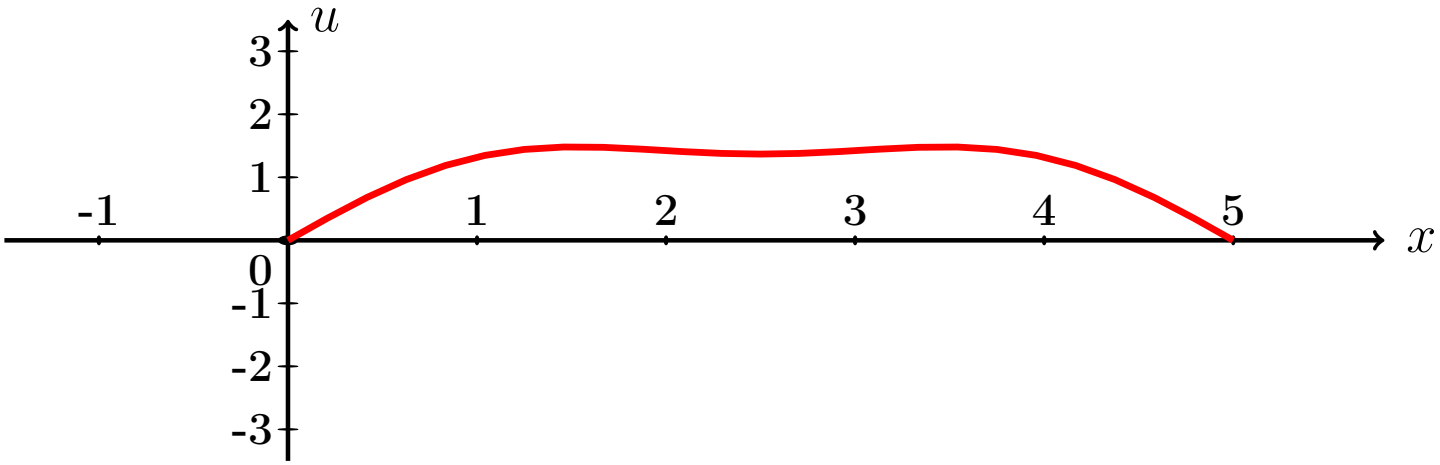


Рис.:

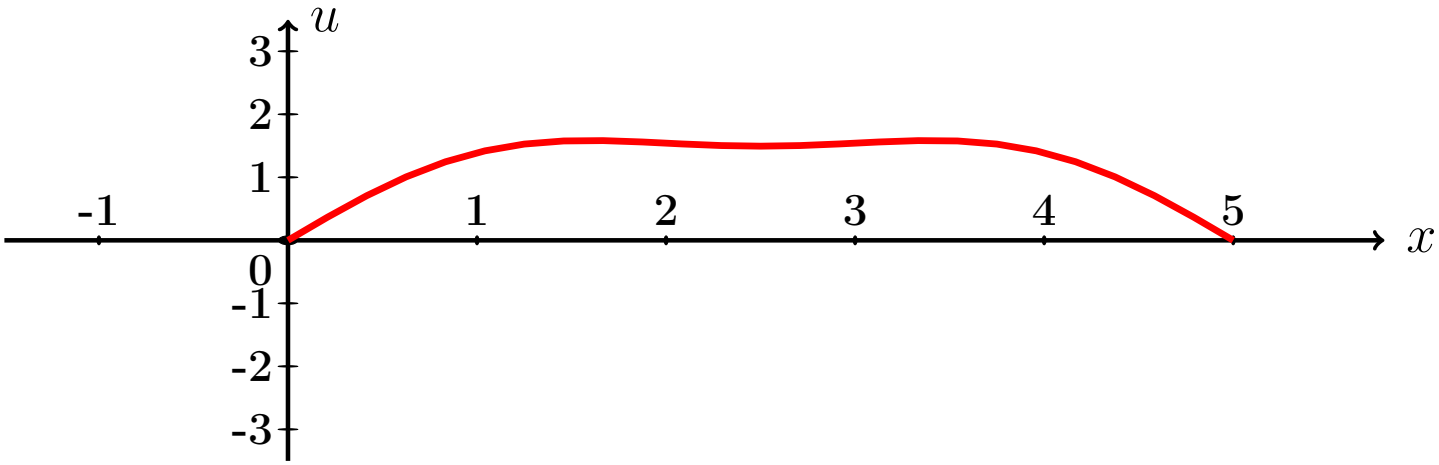


Рис.:

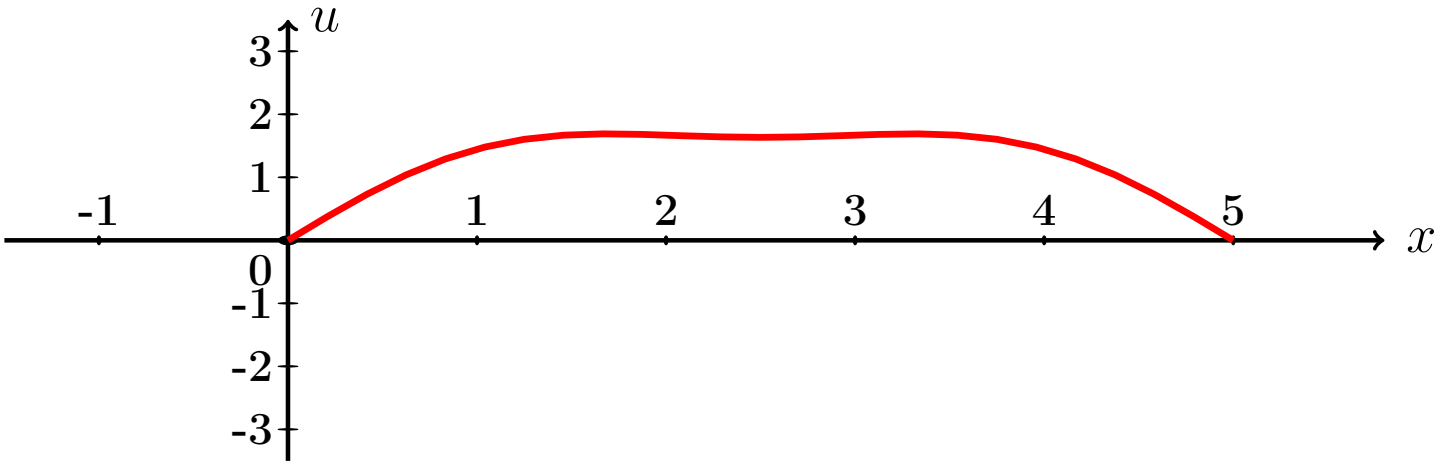


Рис.:

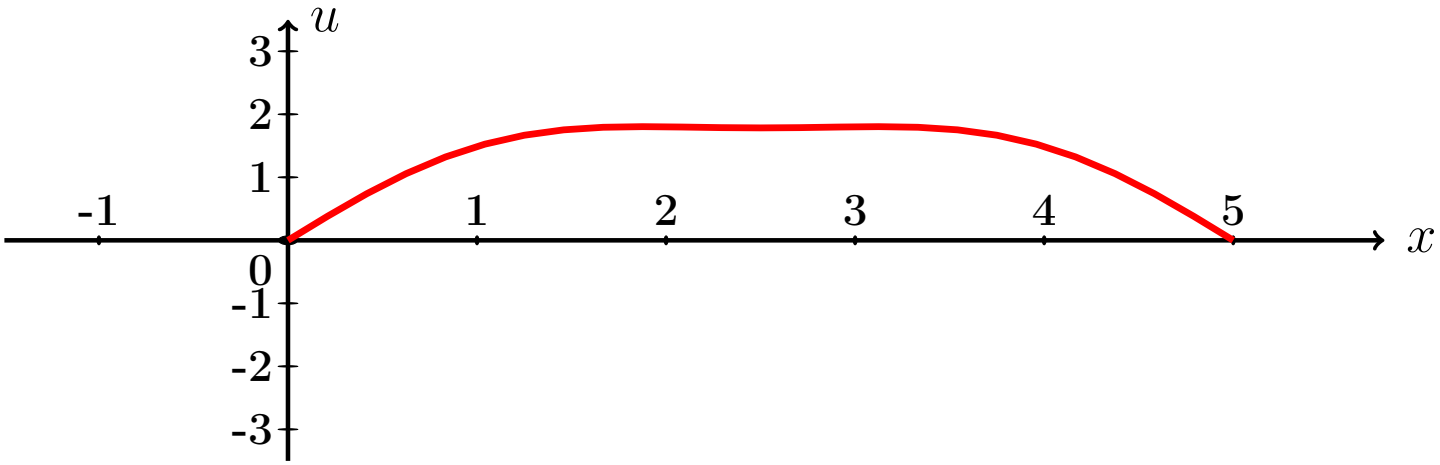


Рис.:

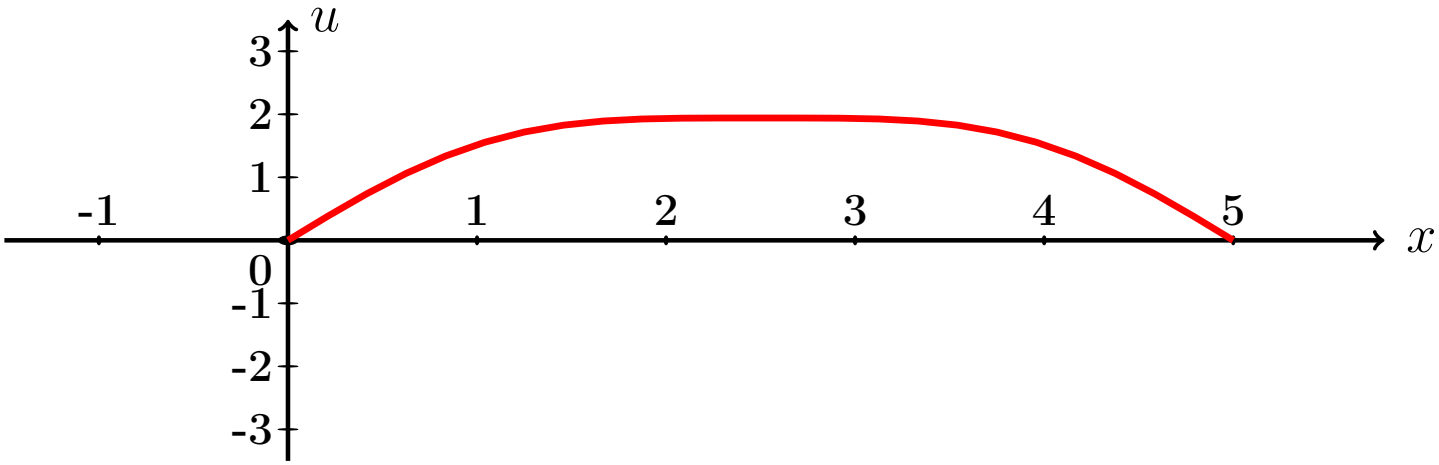


Рис.:

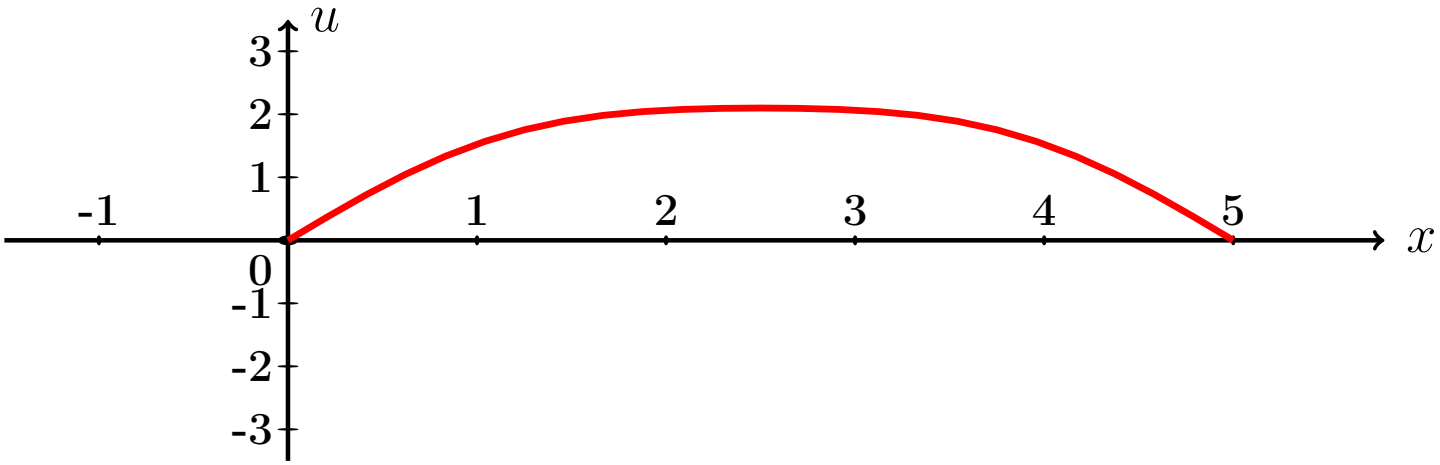


Рис.:

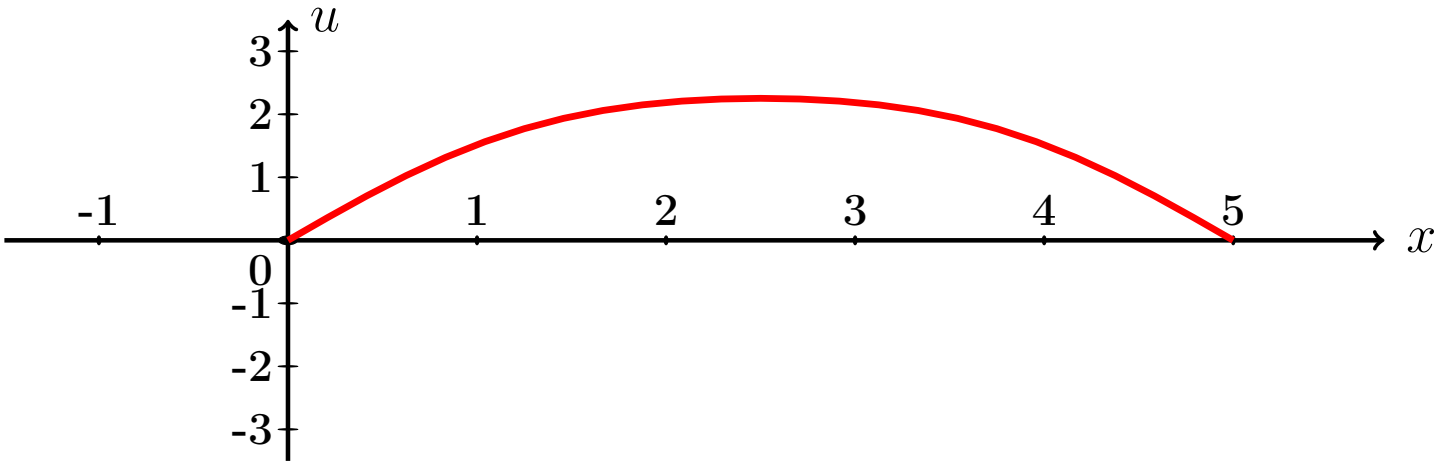


Рис.:

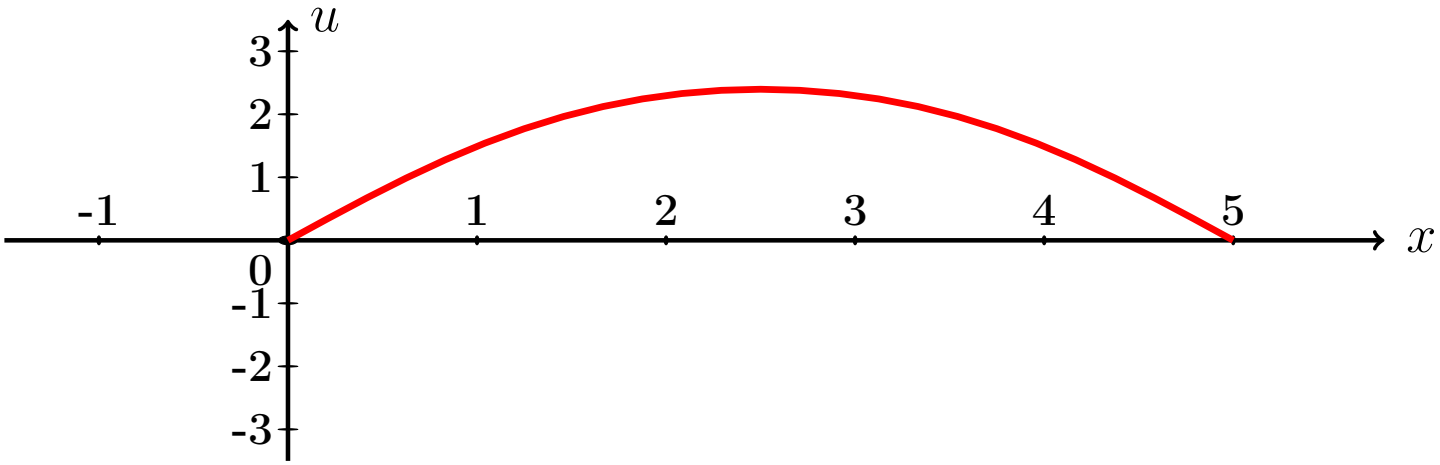


Рис.:

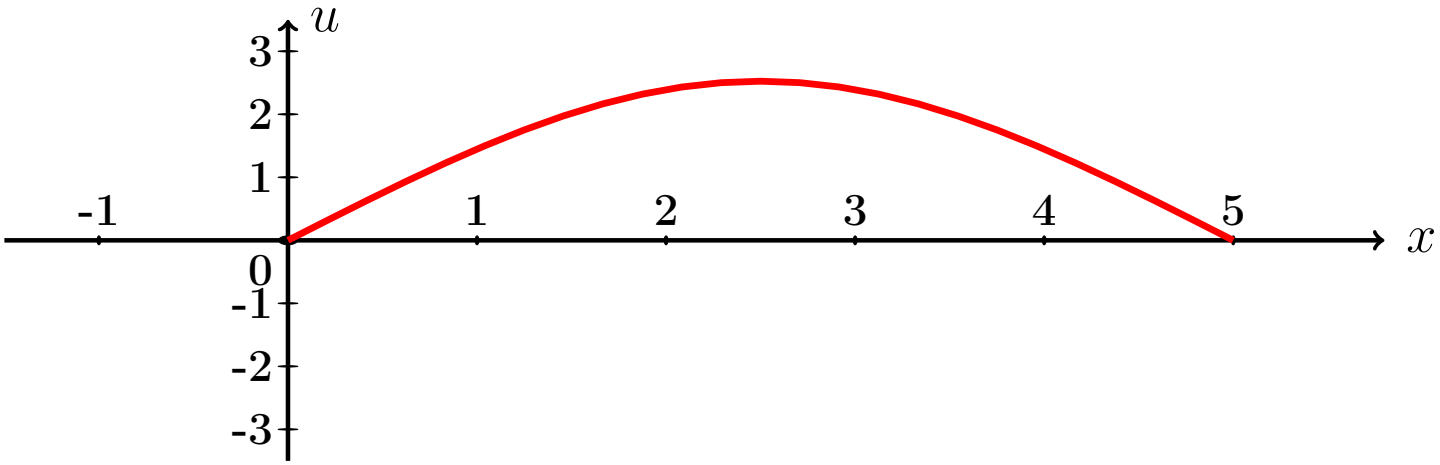


Рис.:

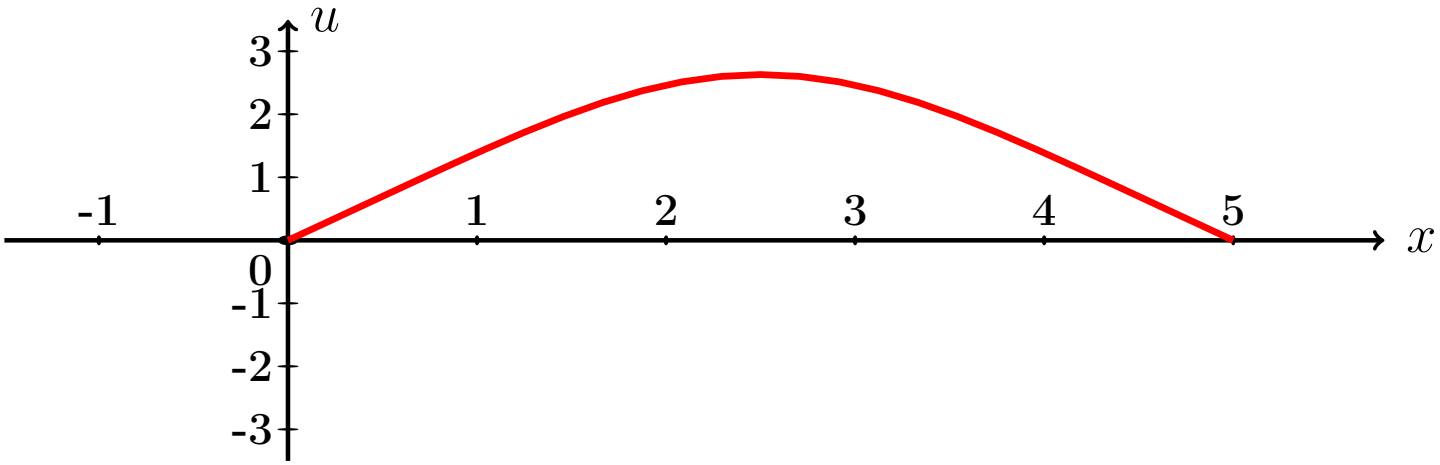


Рис.:

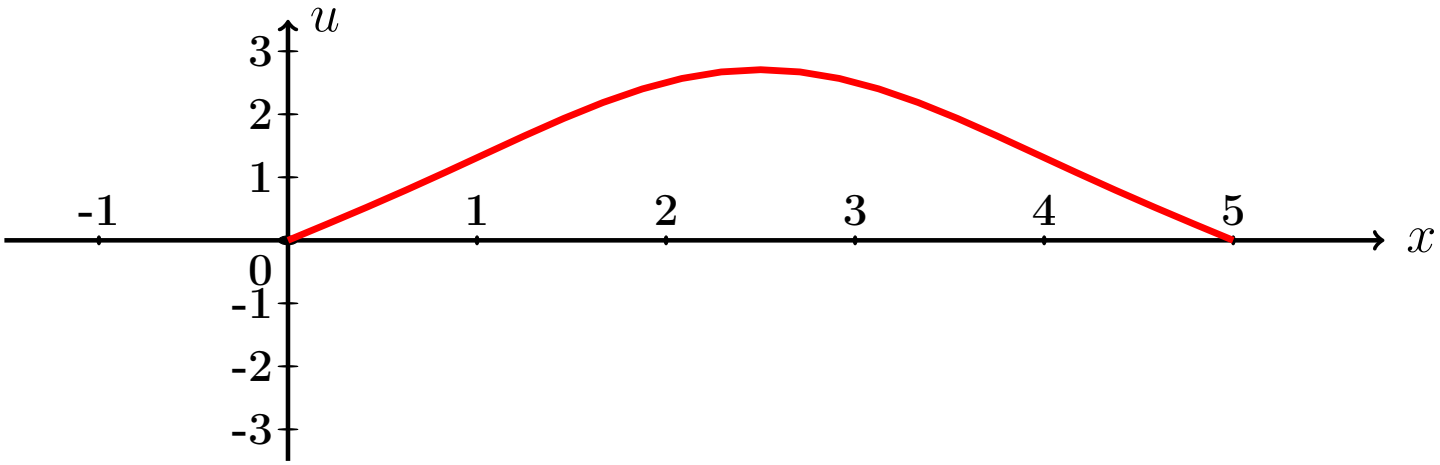


Рис.:

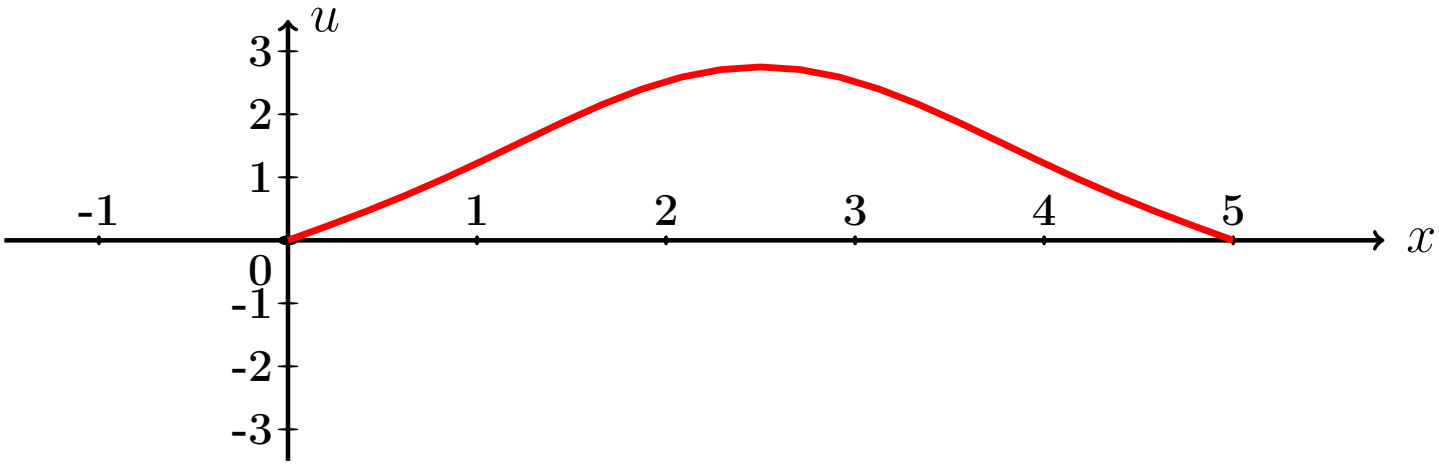


Рис.:

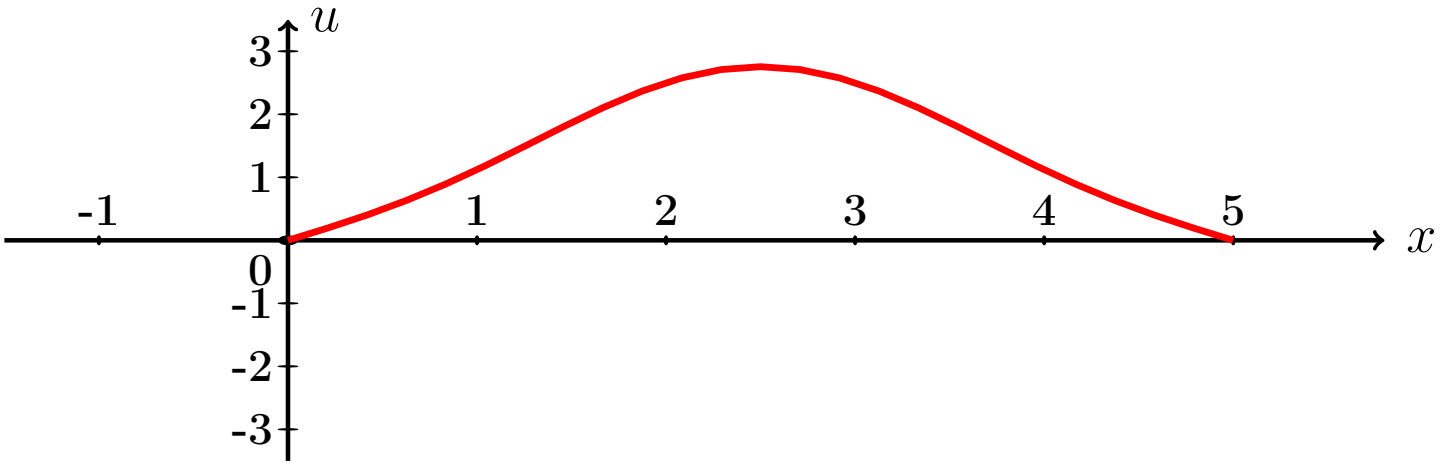


Рис.:

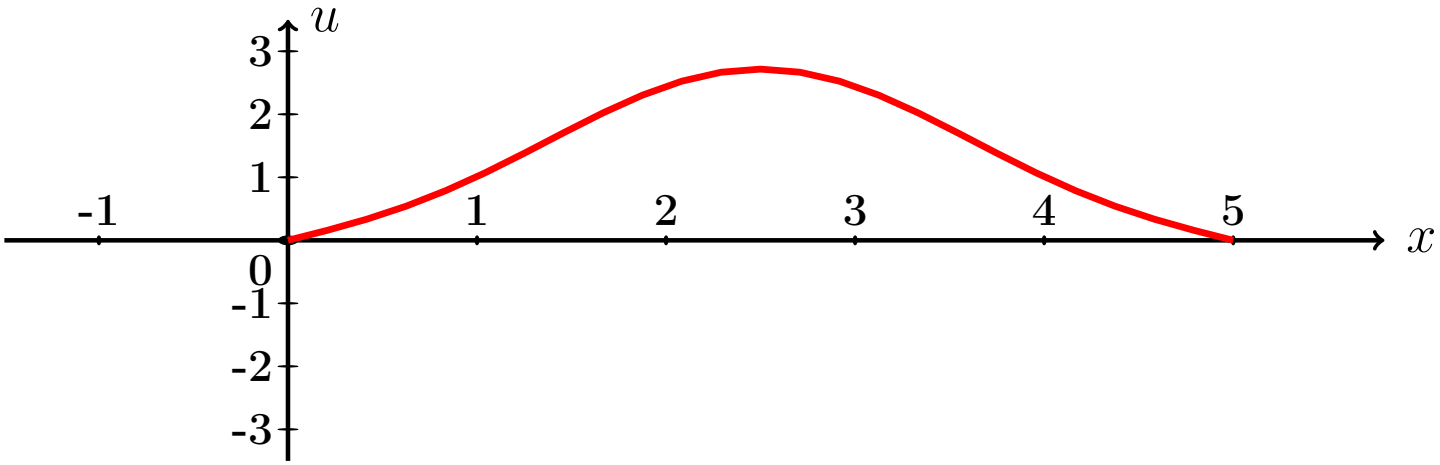


Рис.:

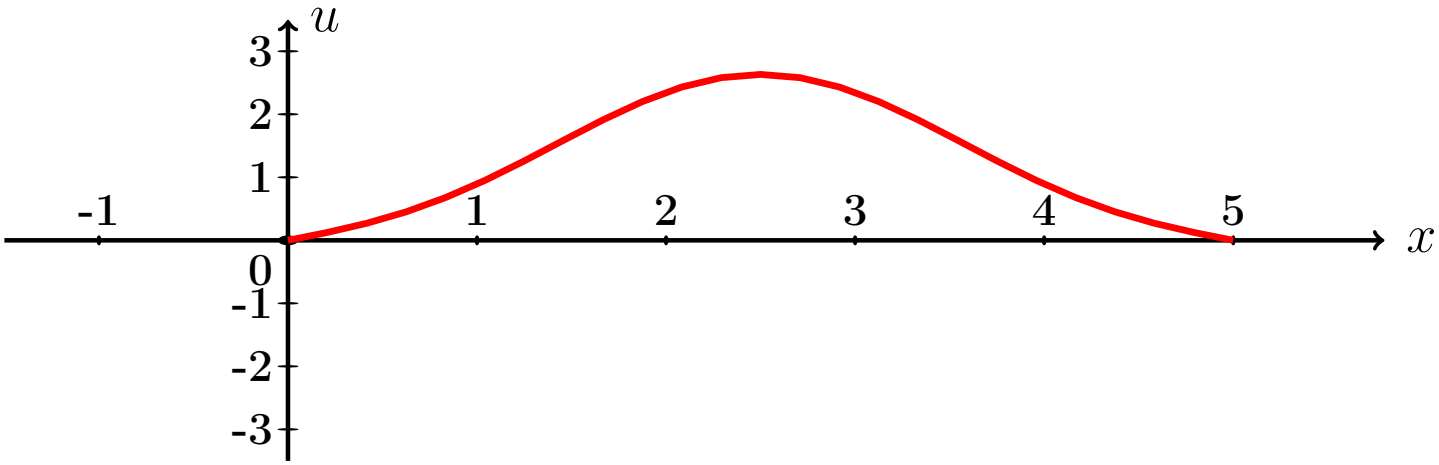


Рис.:

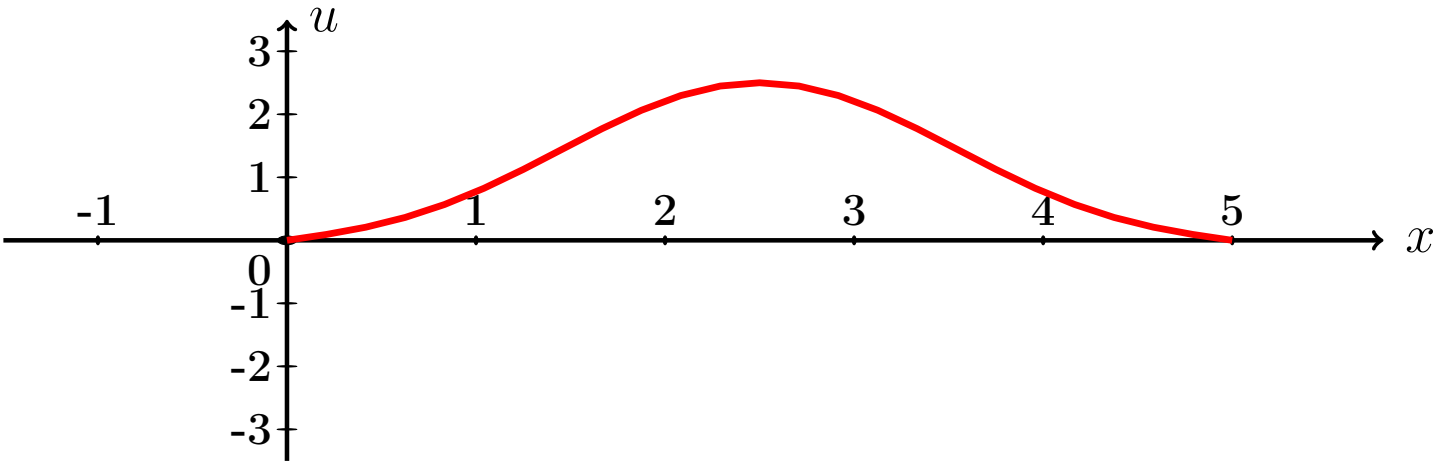


Рис.:

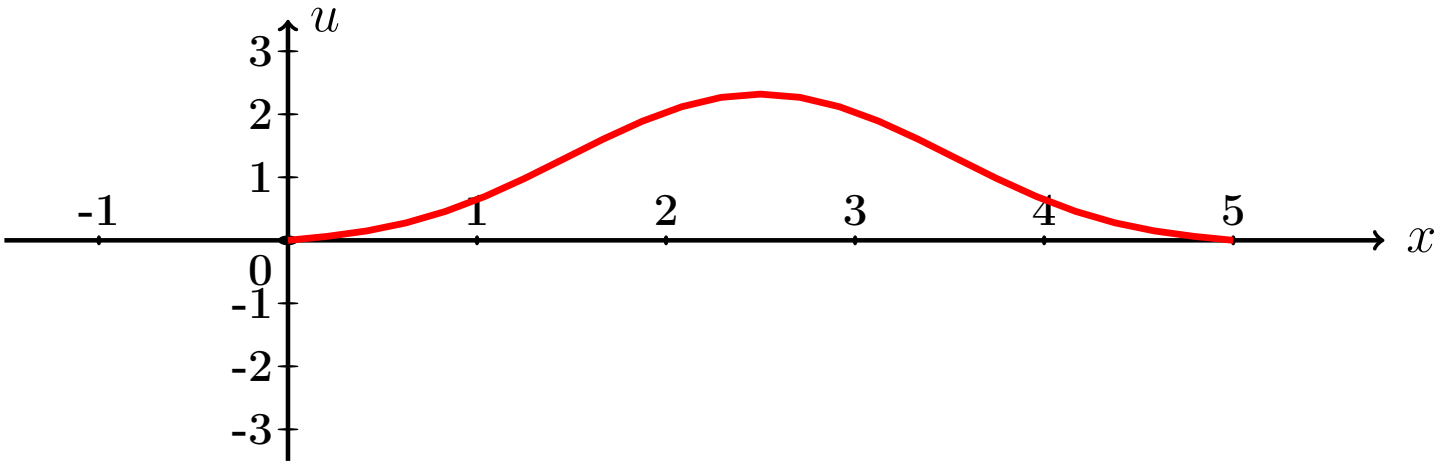


Рис.:

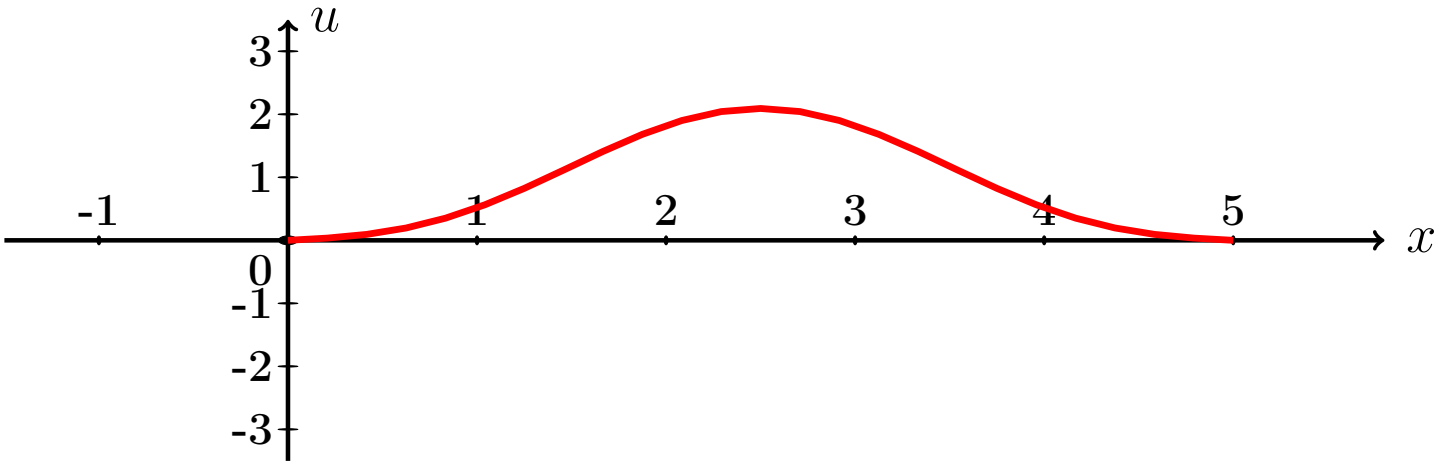


Рис.:

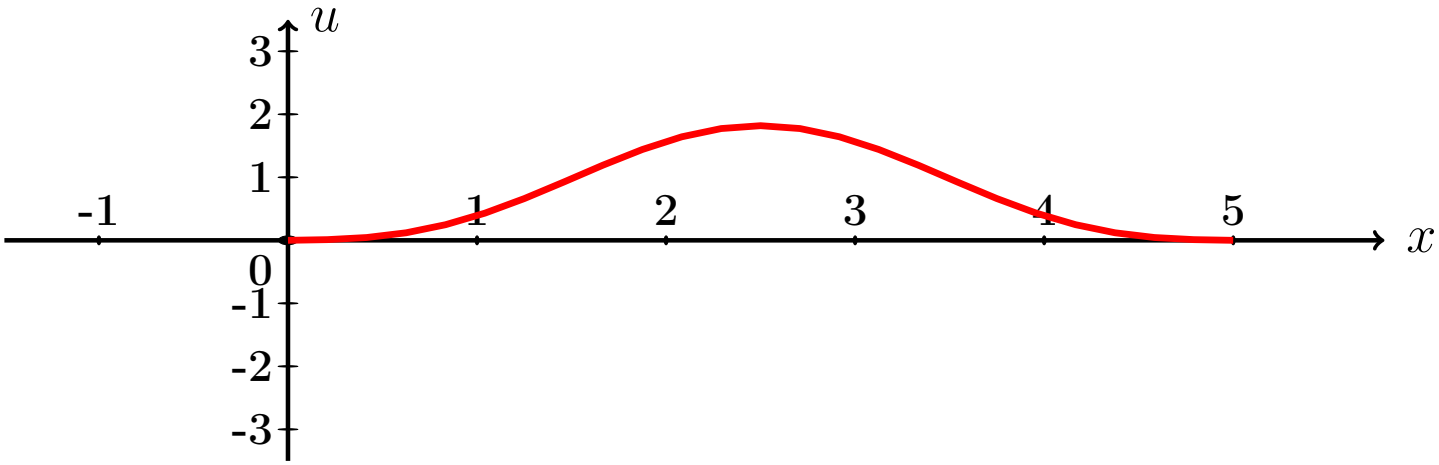


Рис.:

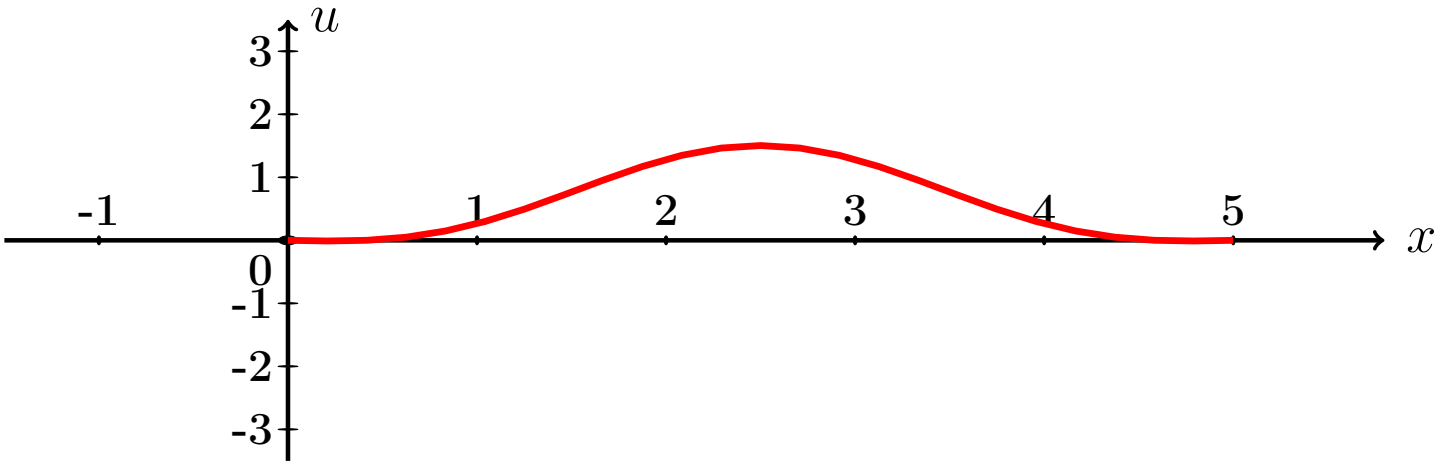


Рис.:

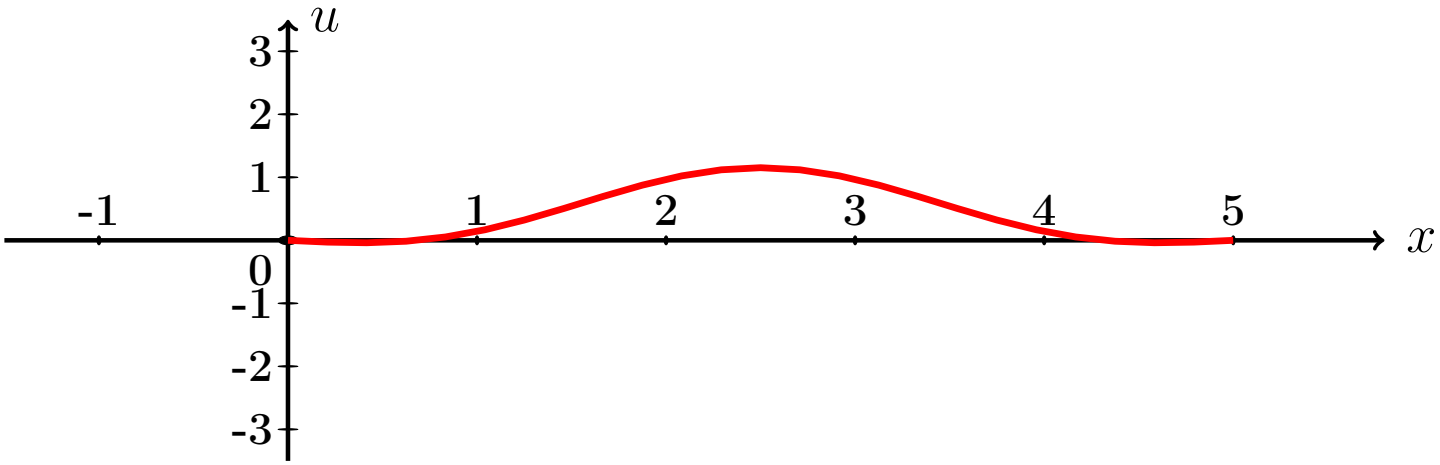


Рис.:

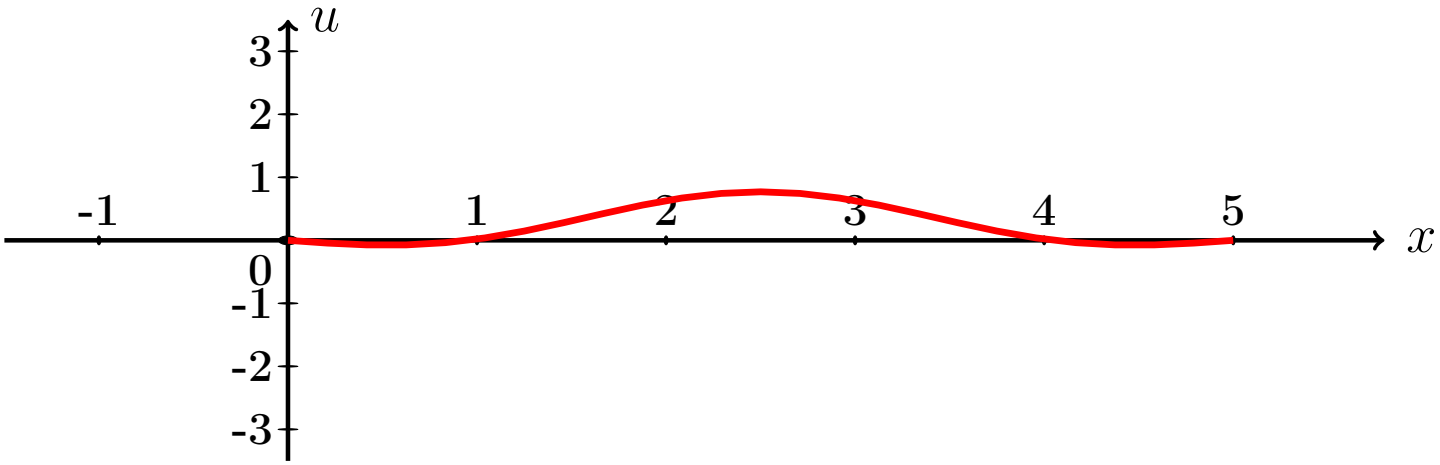


Рис.:

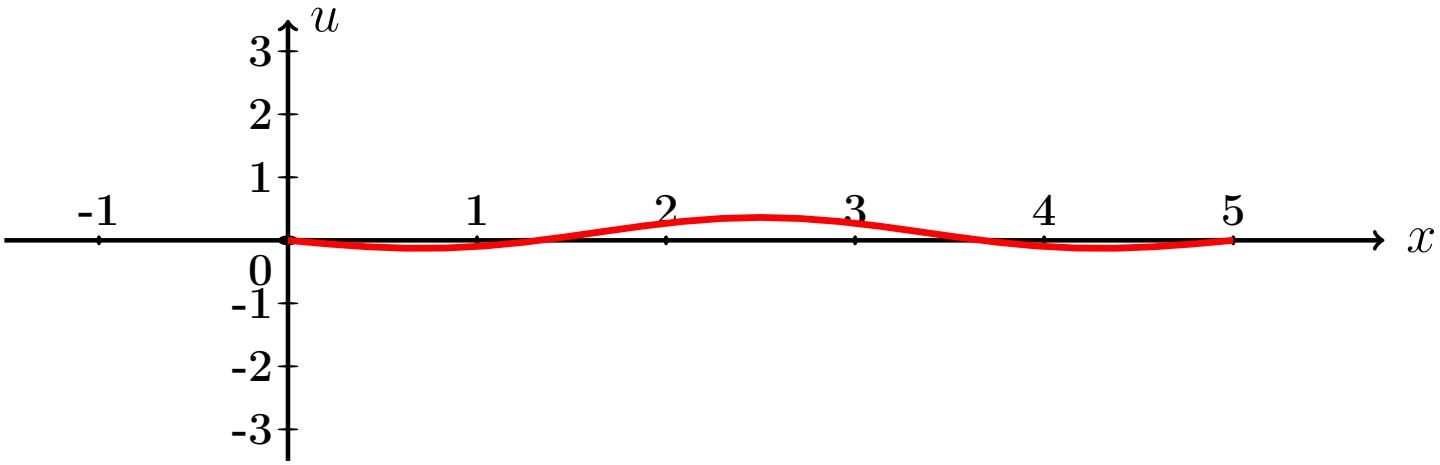


Рис.:

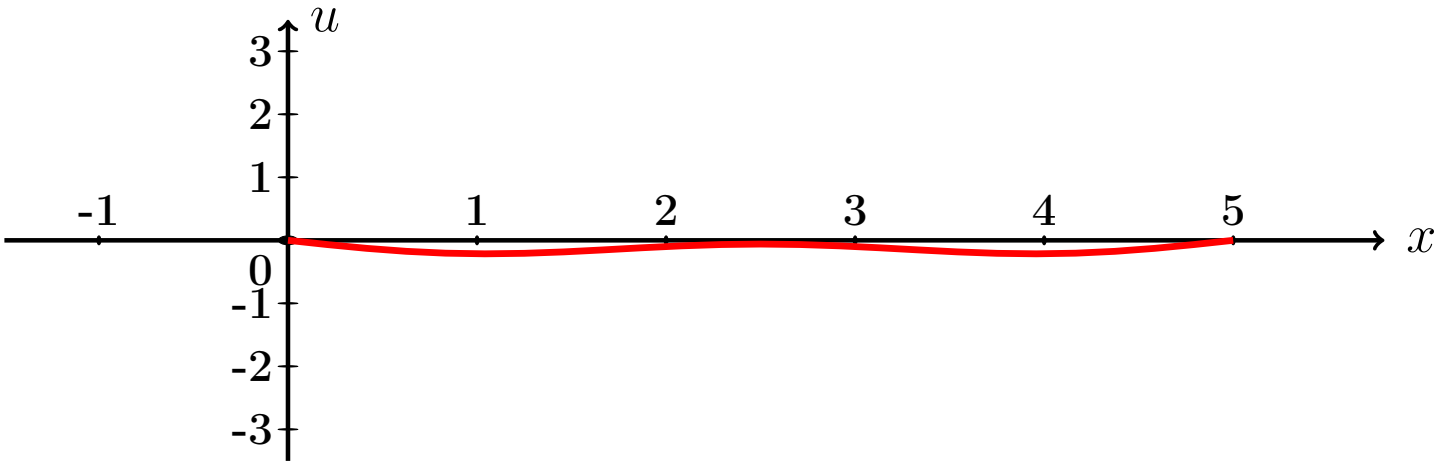


Рис.:

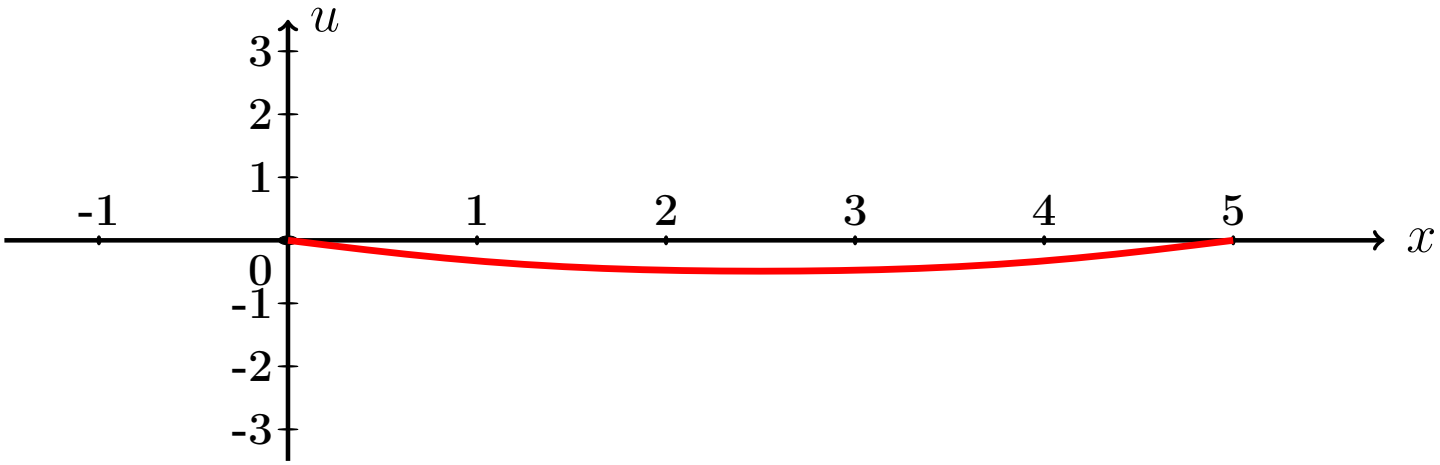


Рис.:

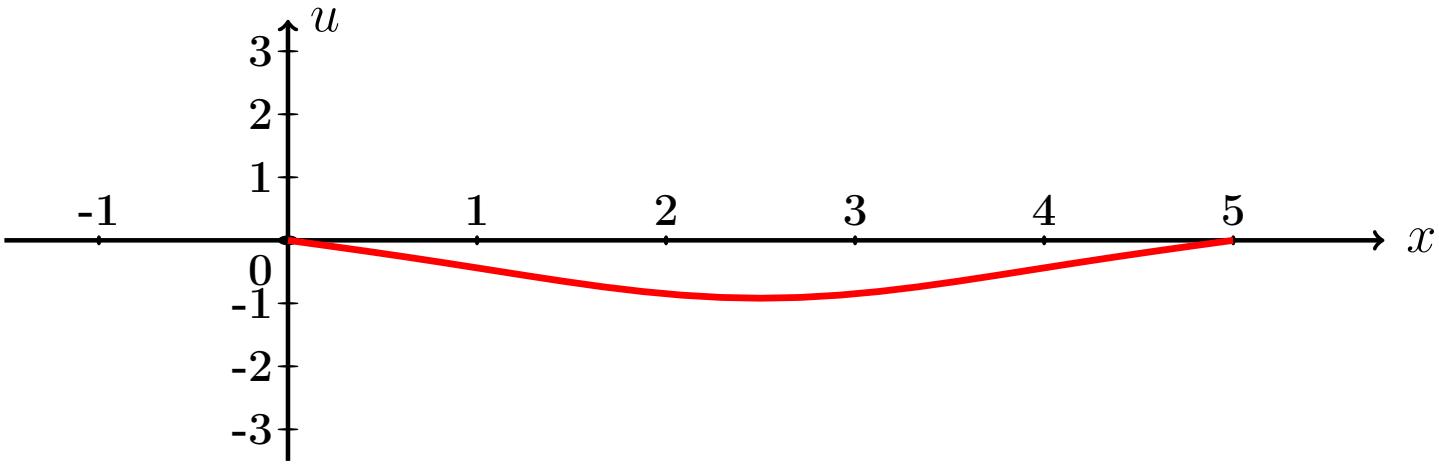


Рис.:

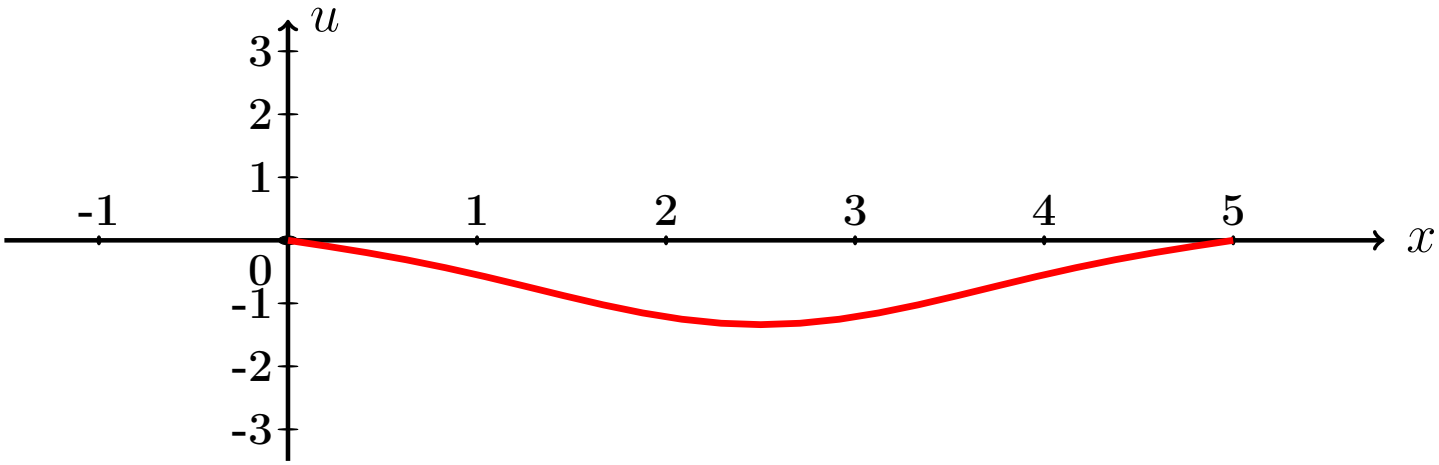


Рис.:

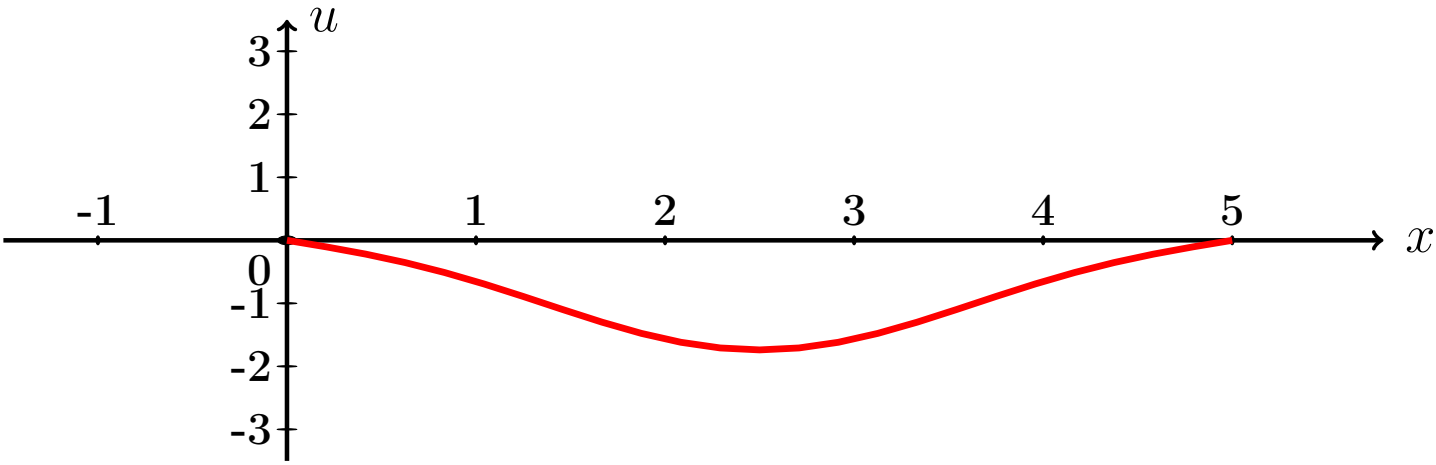


Рис.:

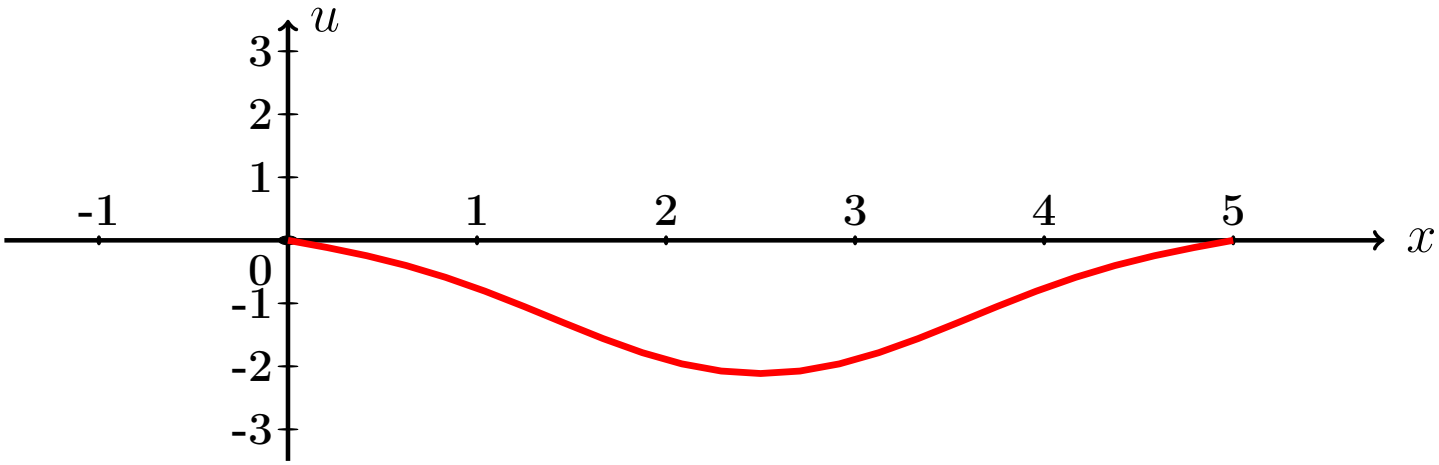


Рис.:

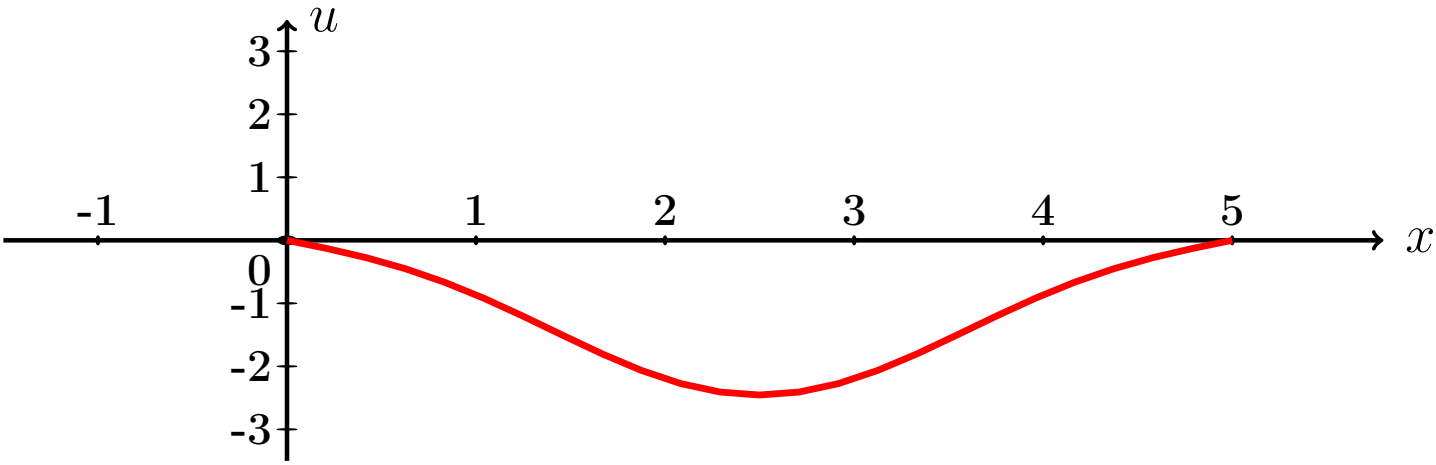


Рис.:

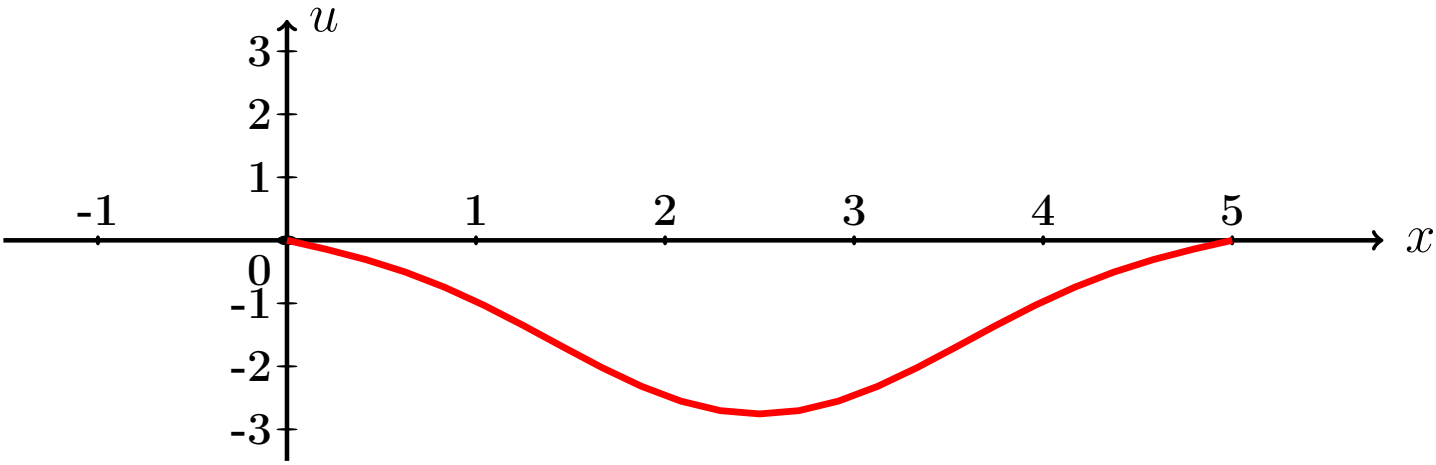


Рис.:

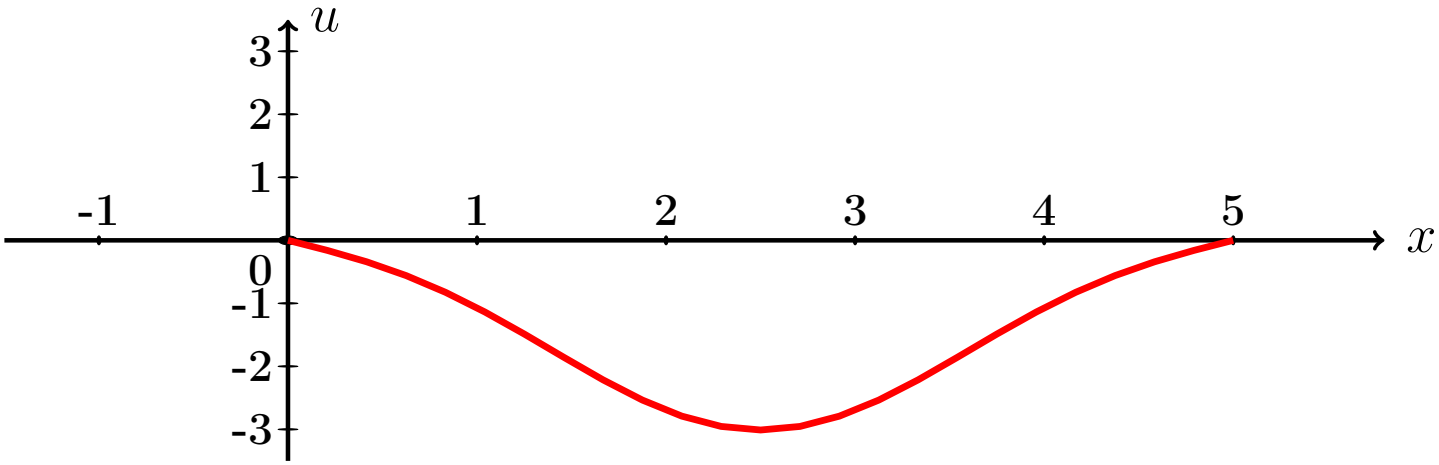


Рис.:

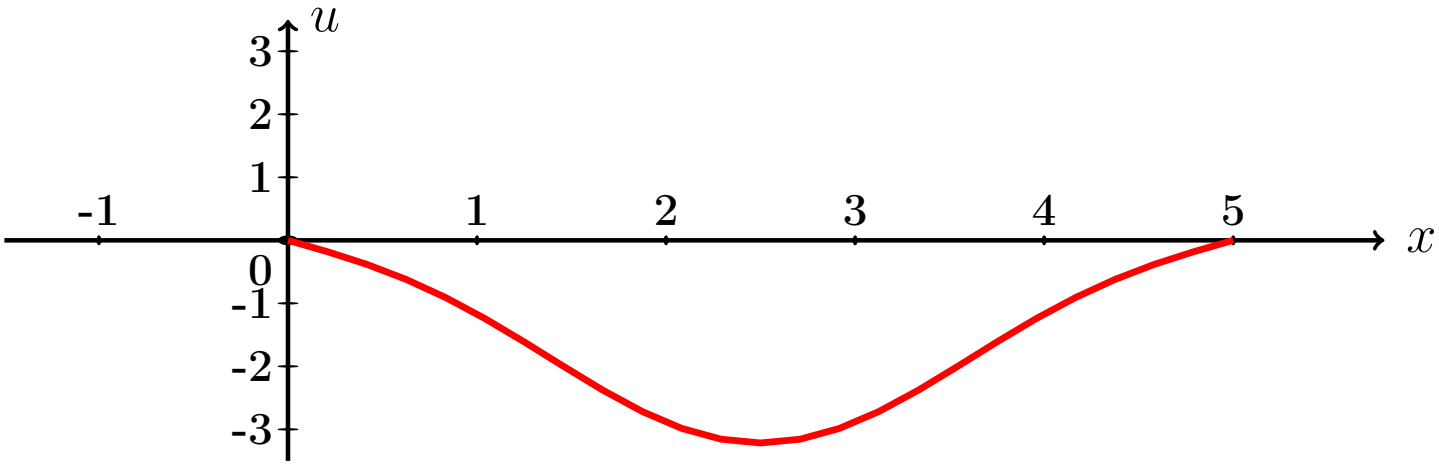


Рис.:

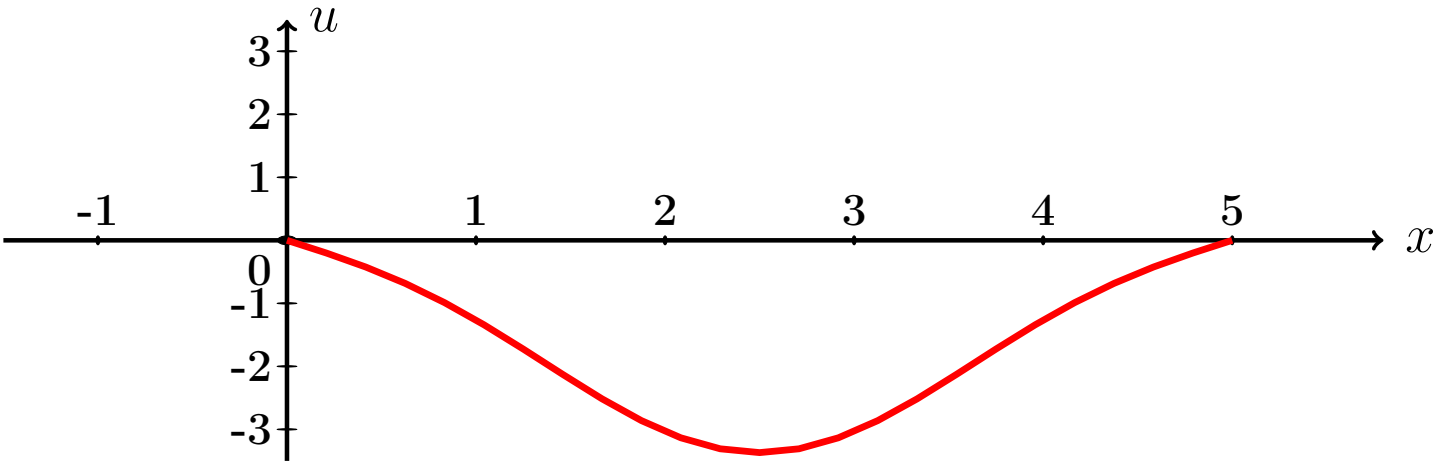


Рис.:

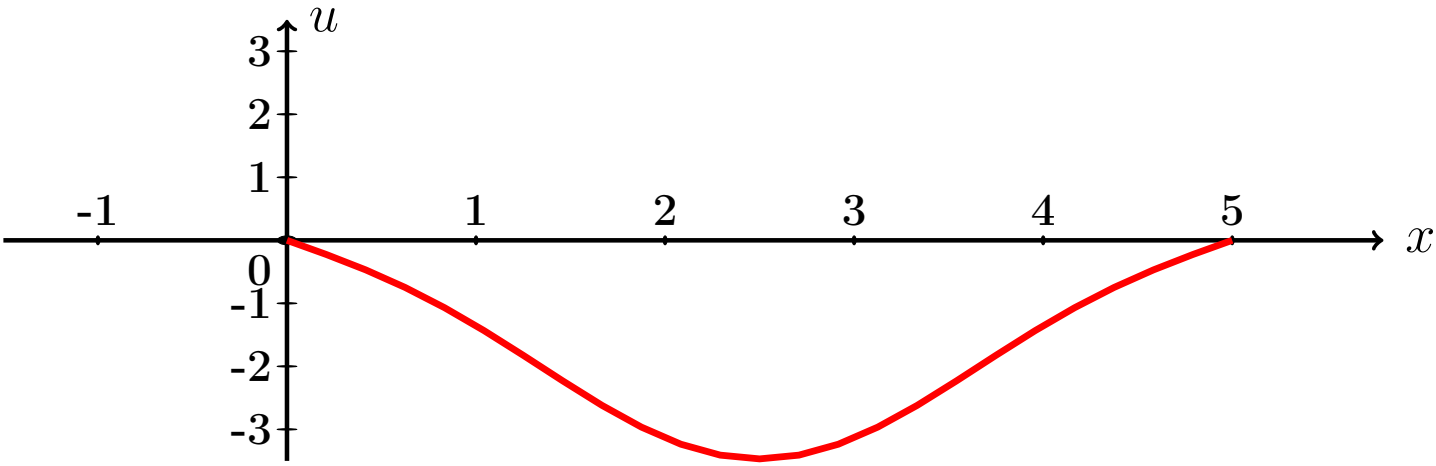


Рис.:

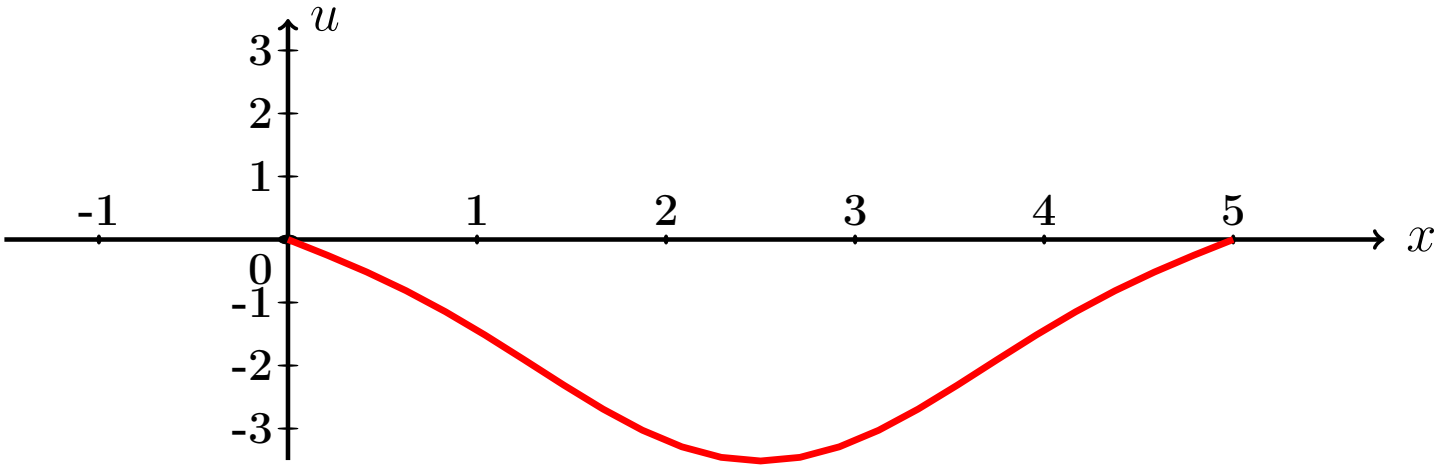


Рис.:

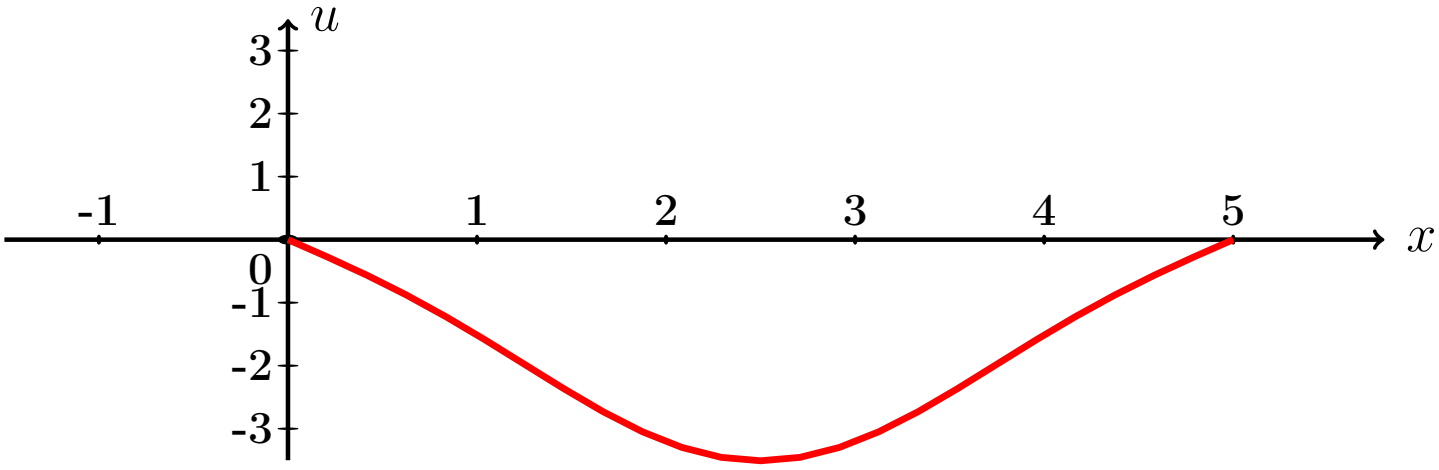


Рис.:

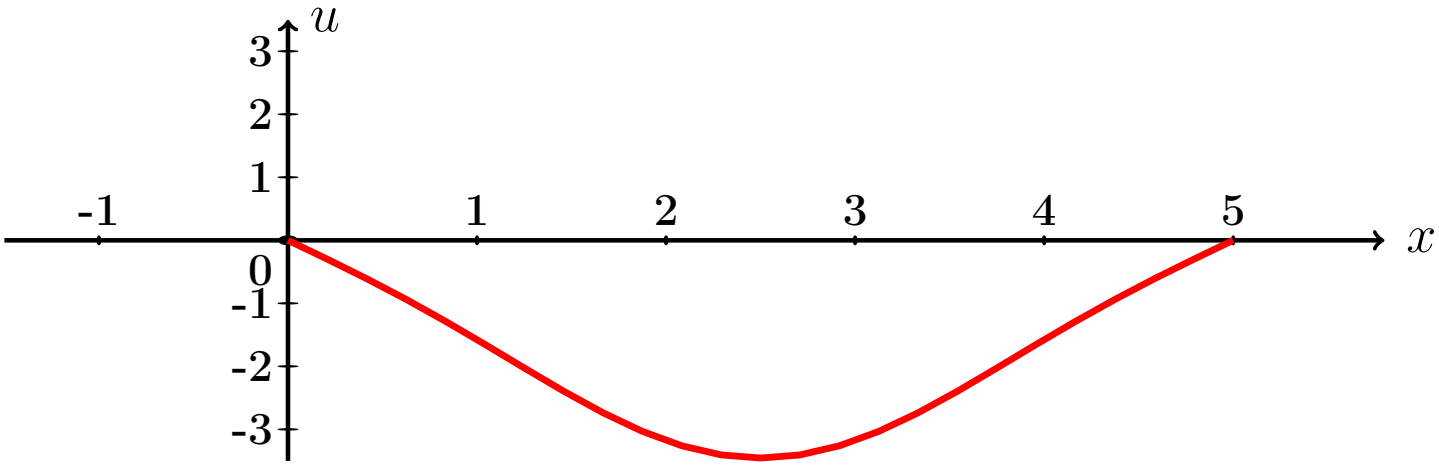


Рис.:

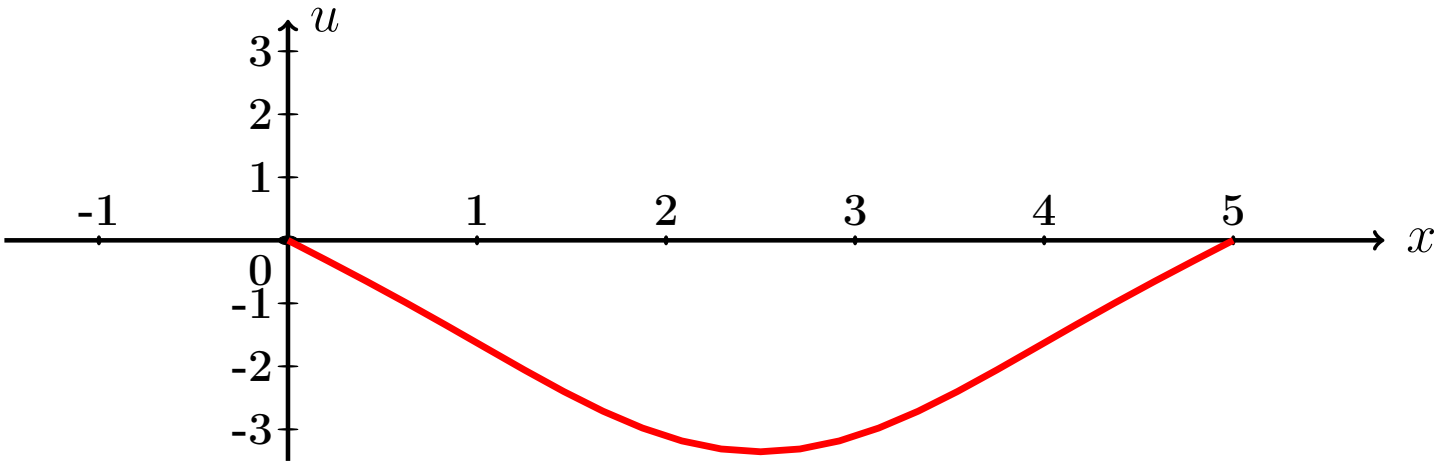


Рис.:

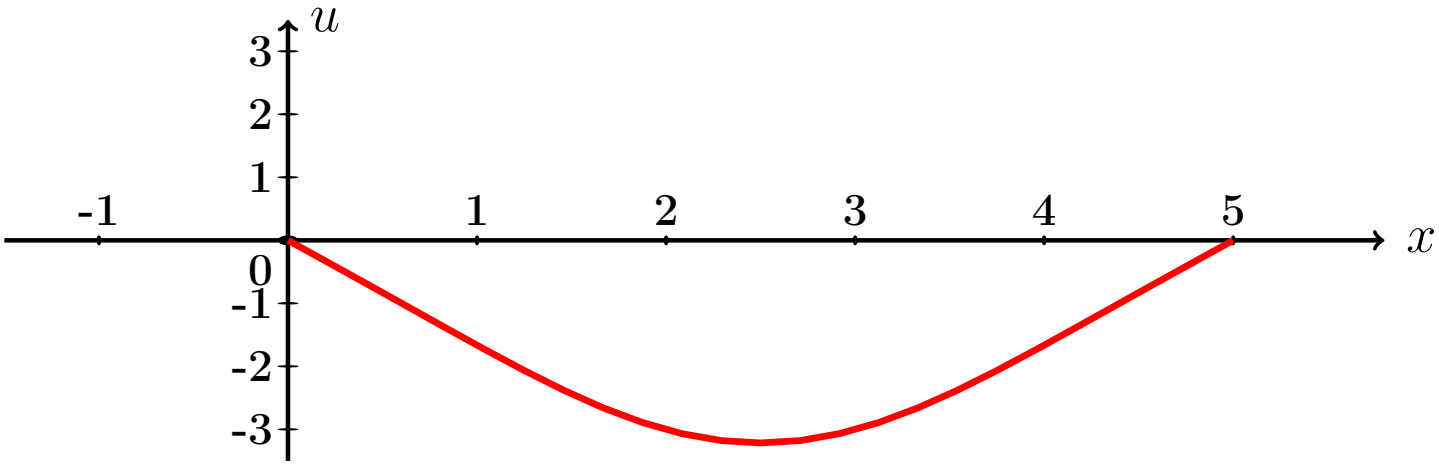


Рис.:

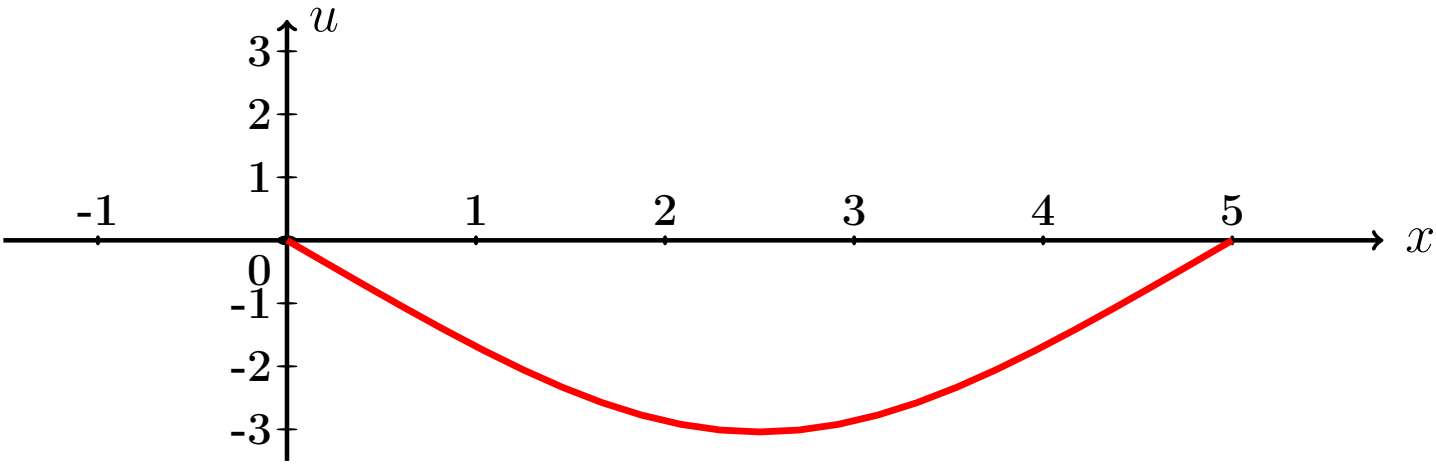


Рис.:

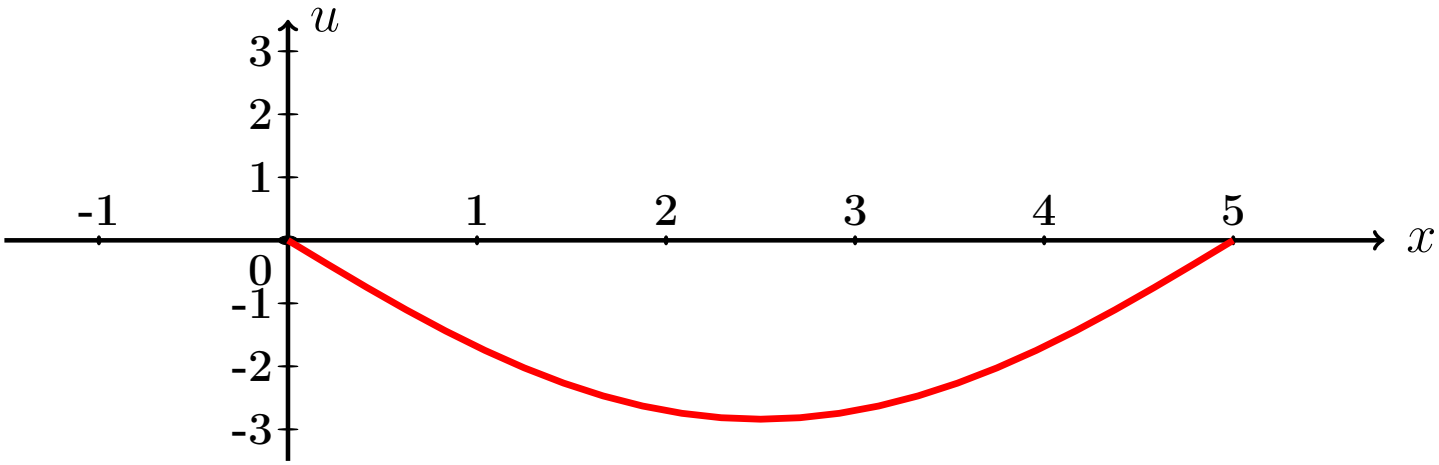


Рис.:

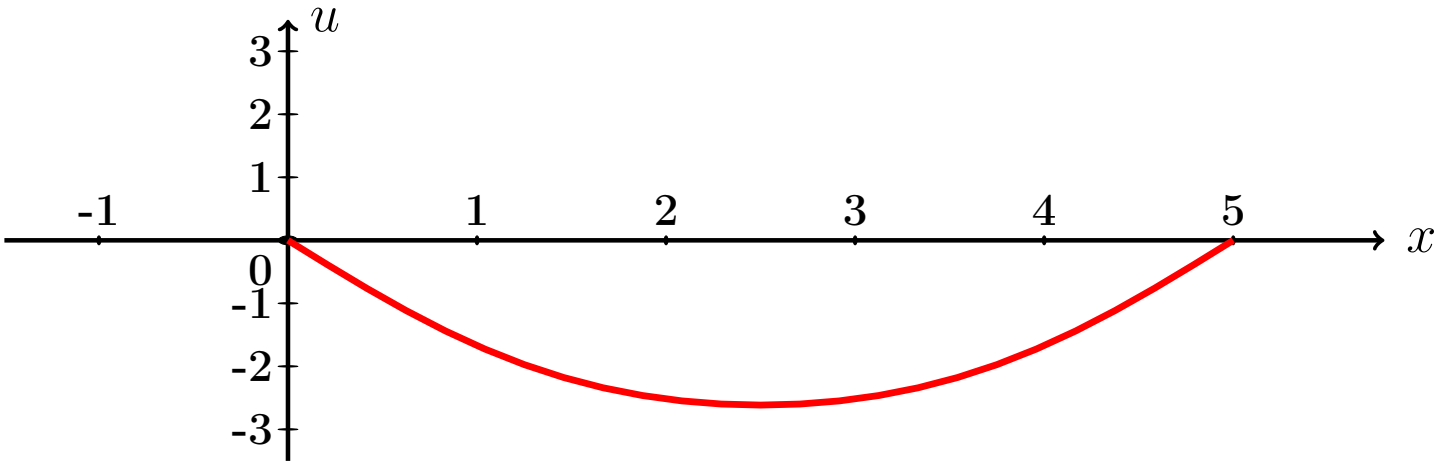


Рис.:

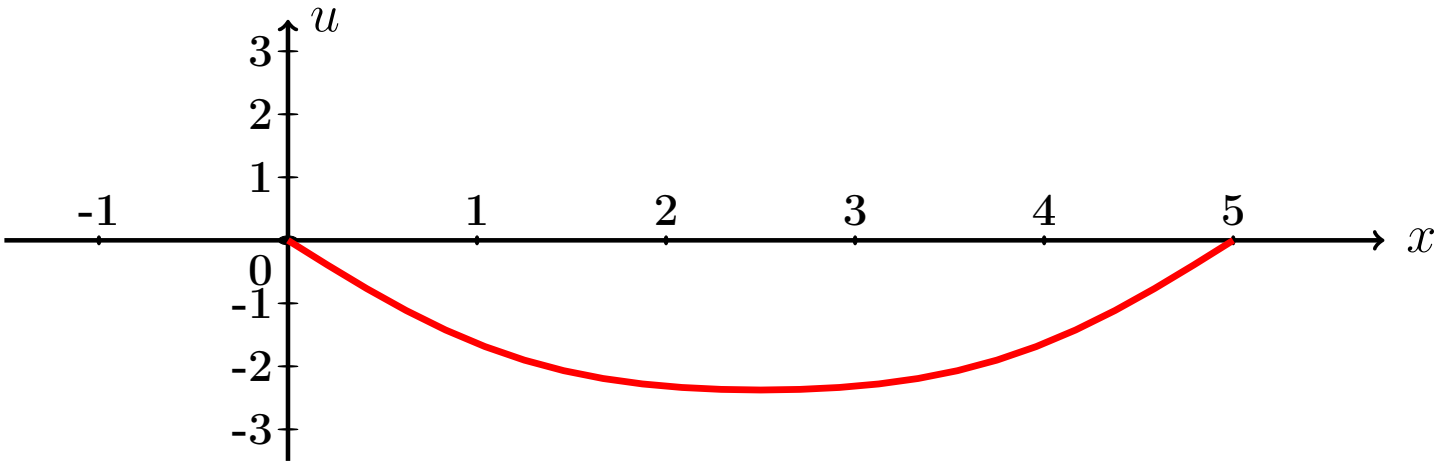


Рис.:

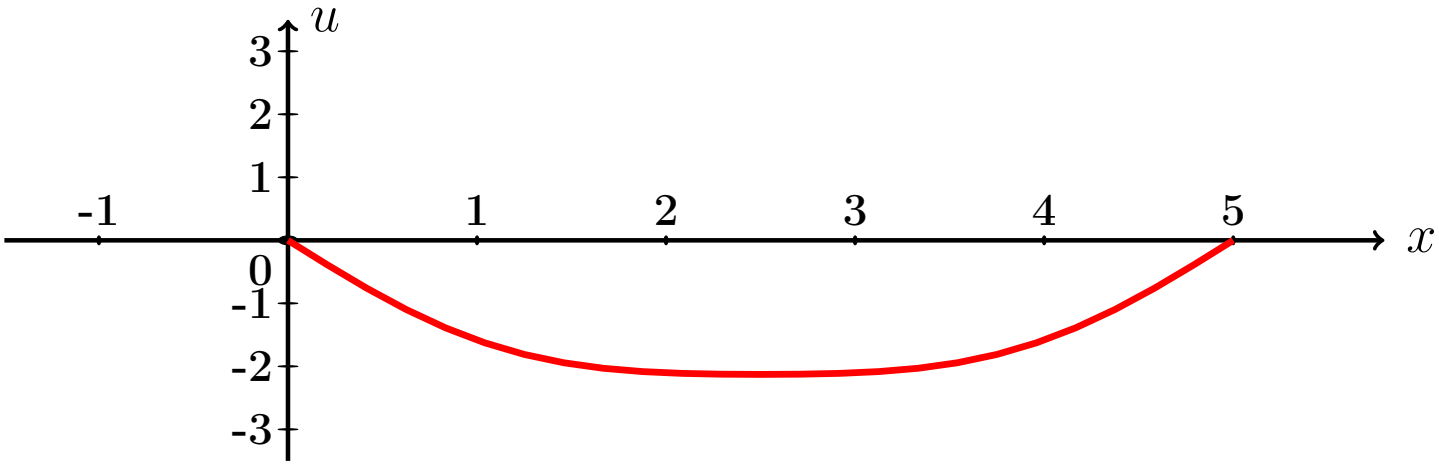


Рис.:

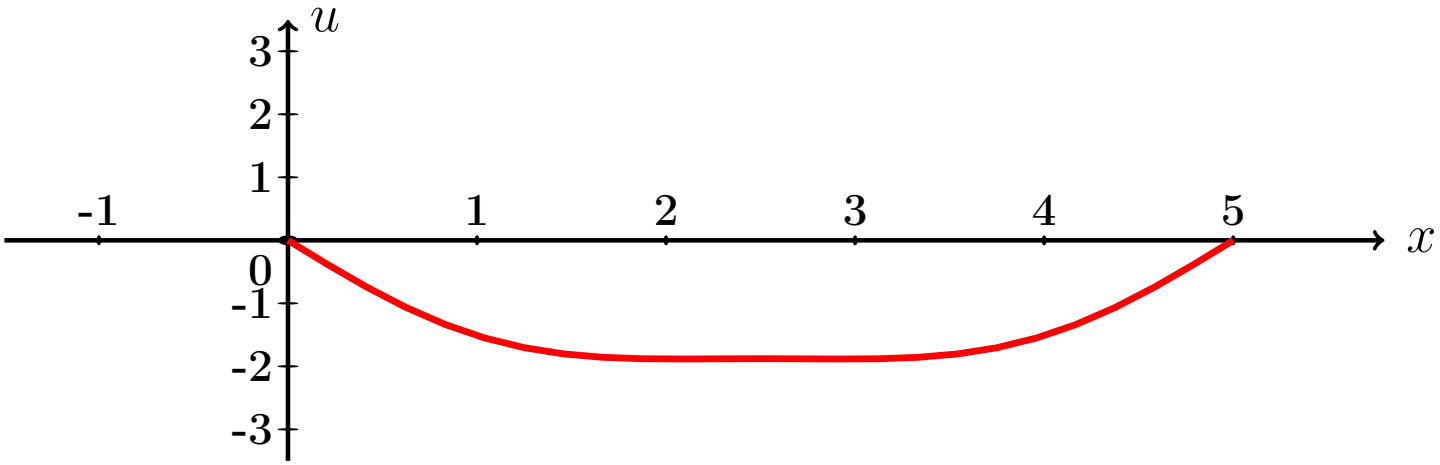


Рис.:

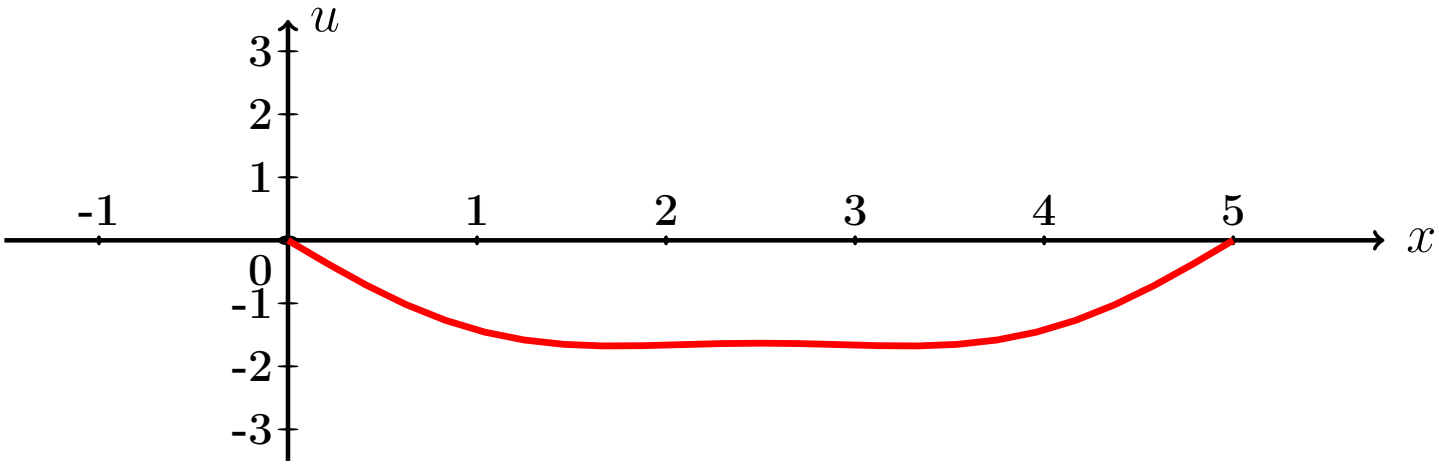


Рис.:

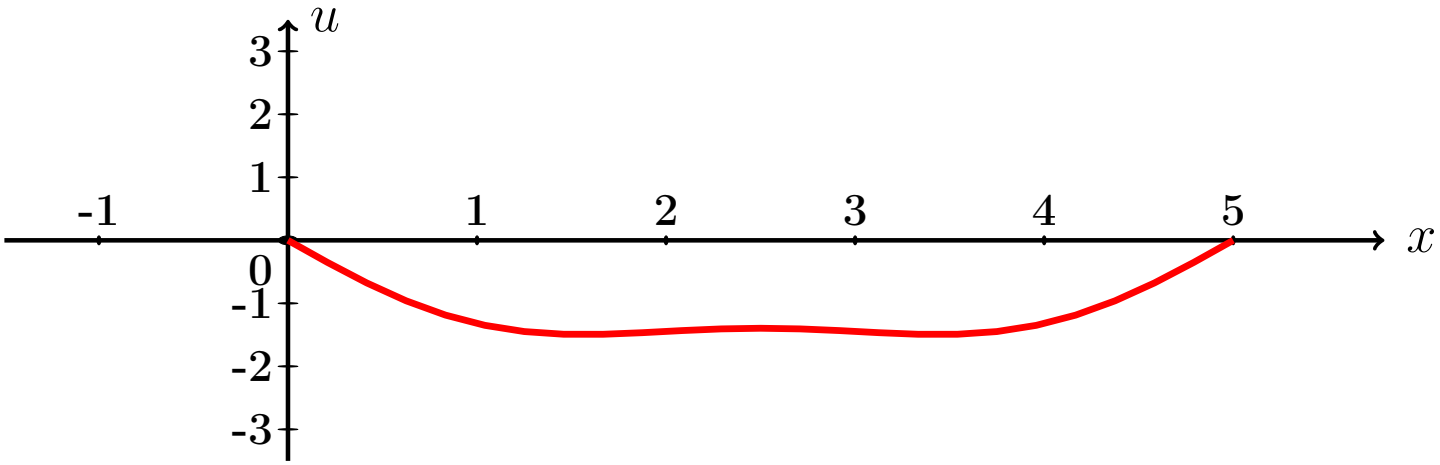


Рис.:

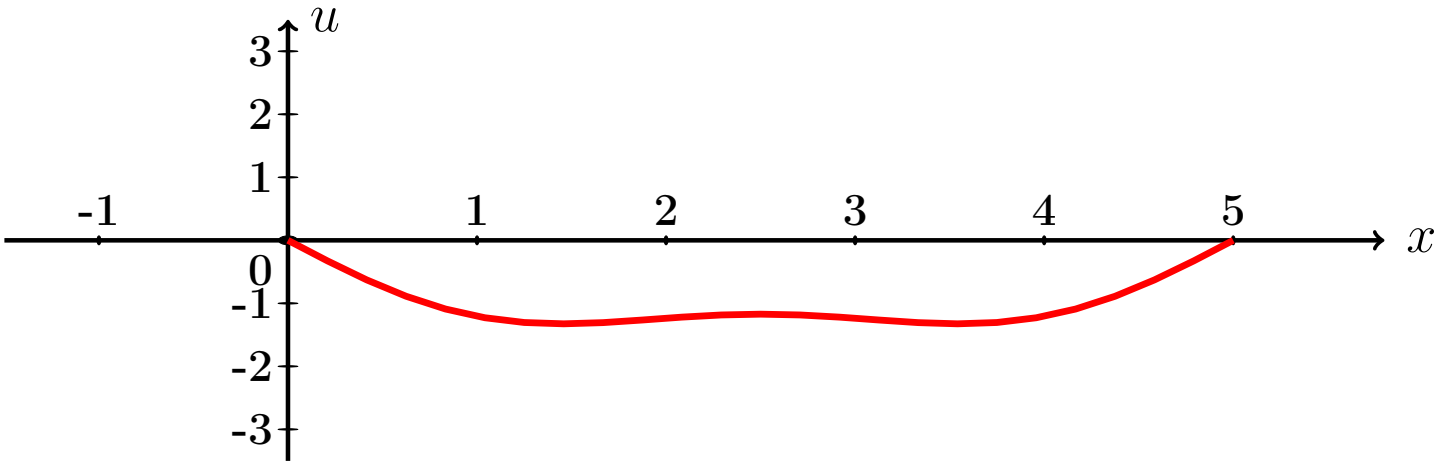


Рис.:

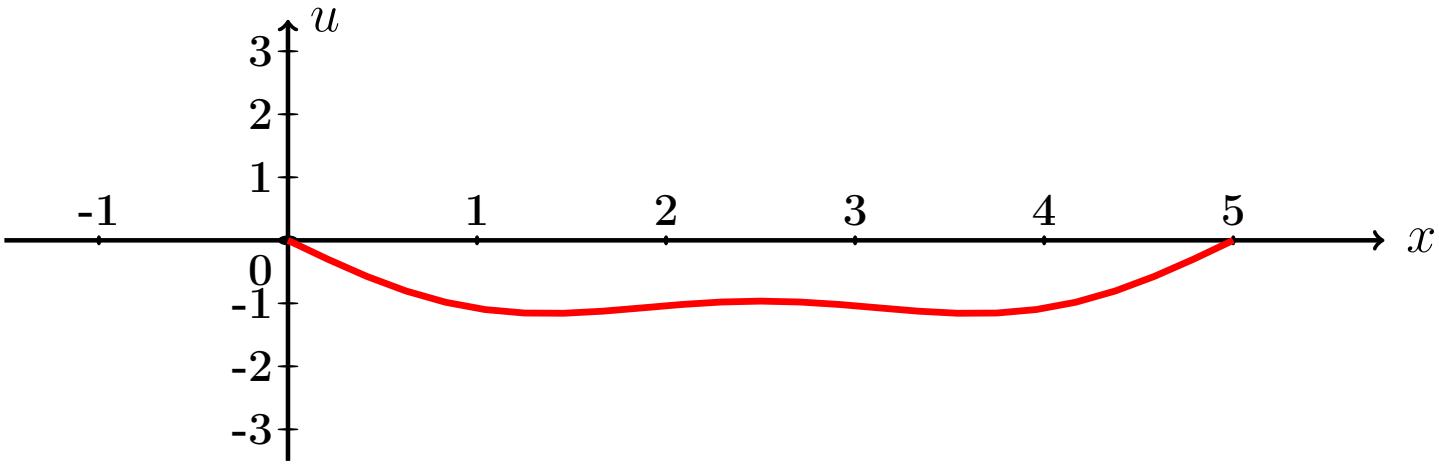


Рис.:

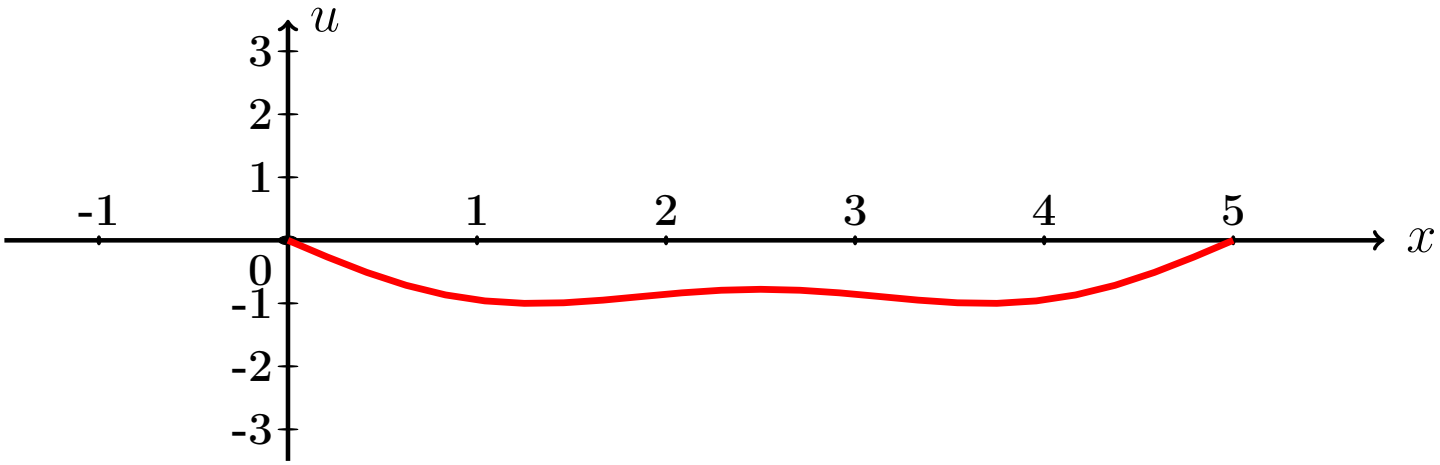


Рис.:

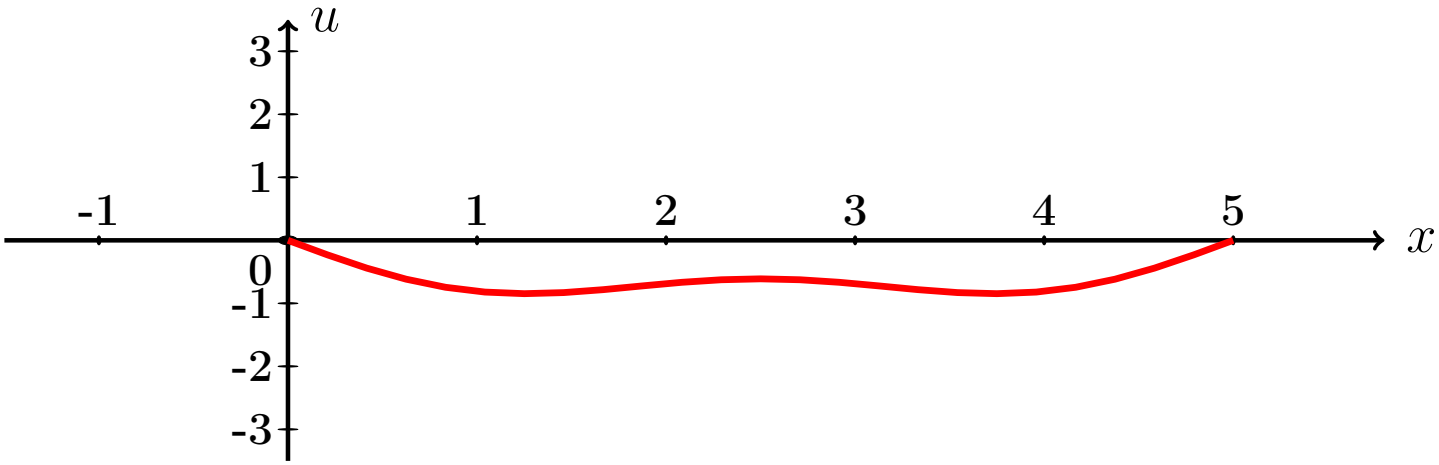


Рис.:

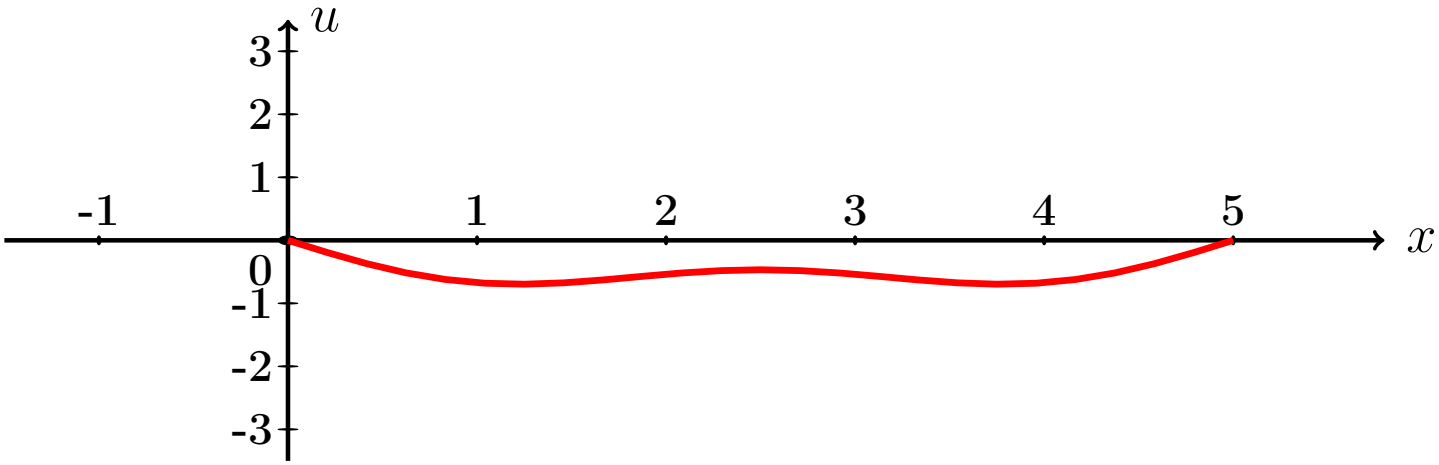


Рис.:

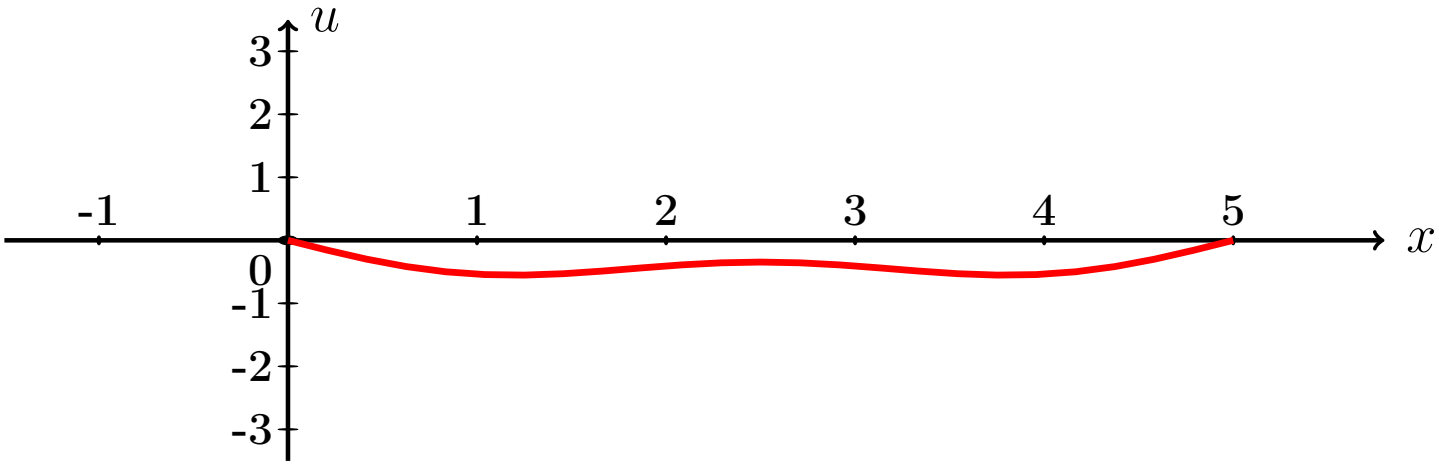


Рис.:

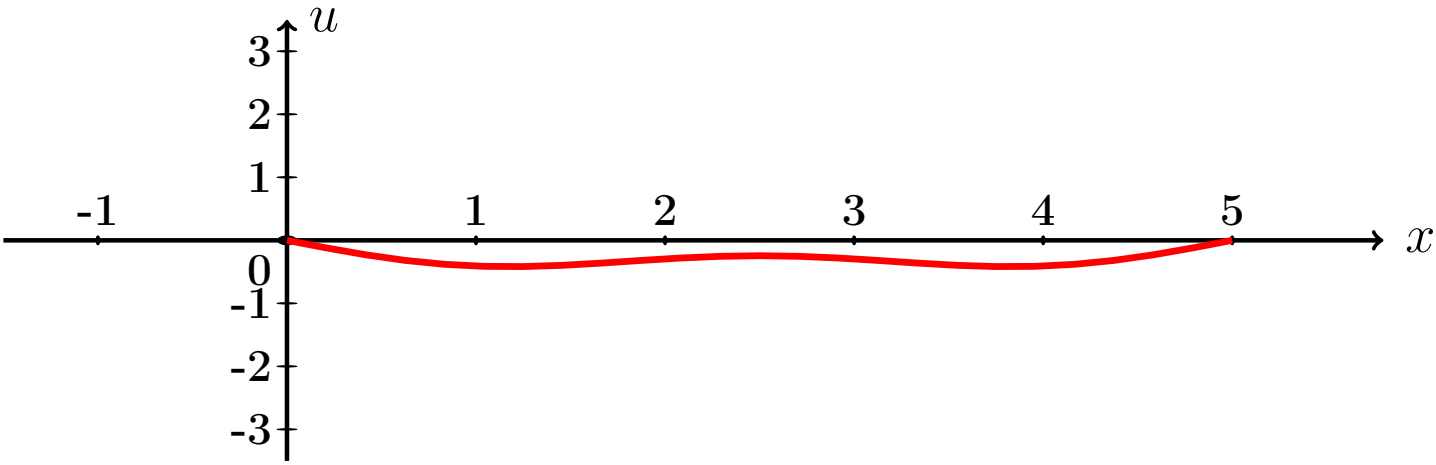


Рис.:

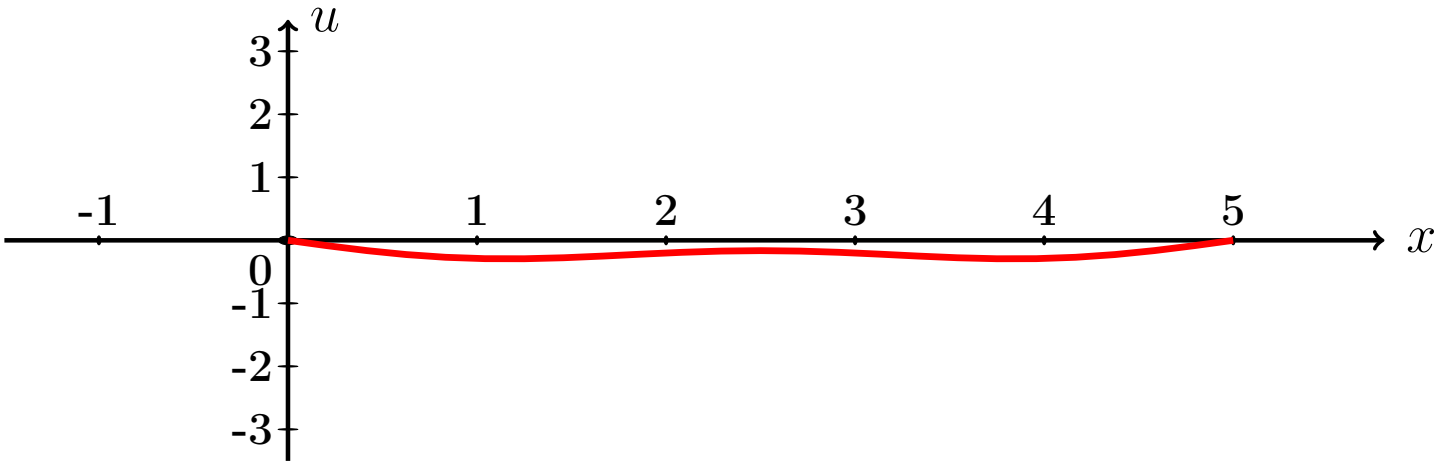


Рис.:

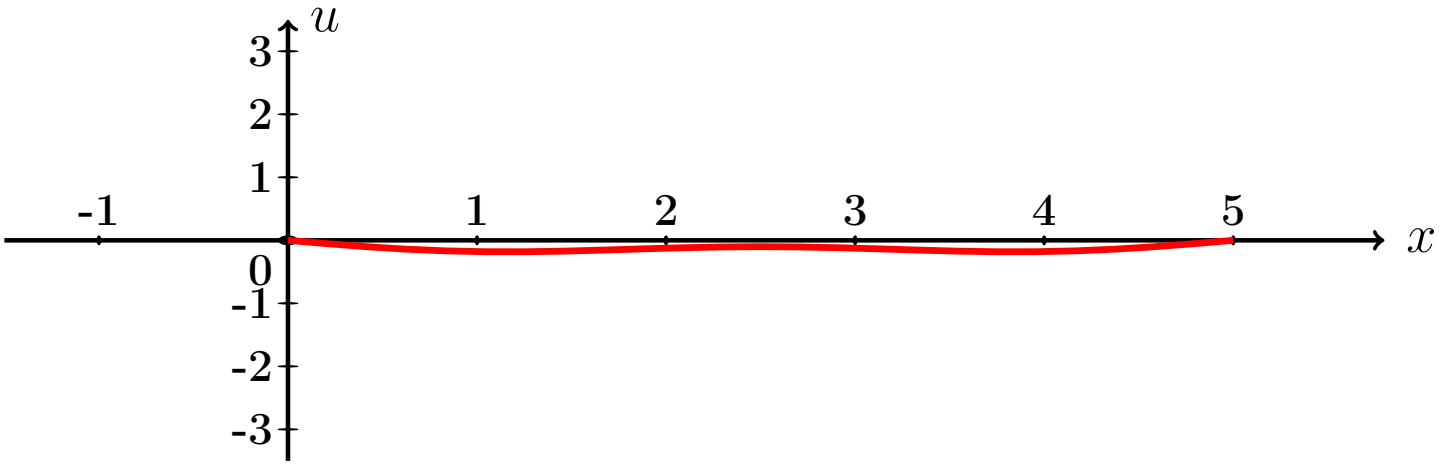


Рис.:

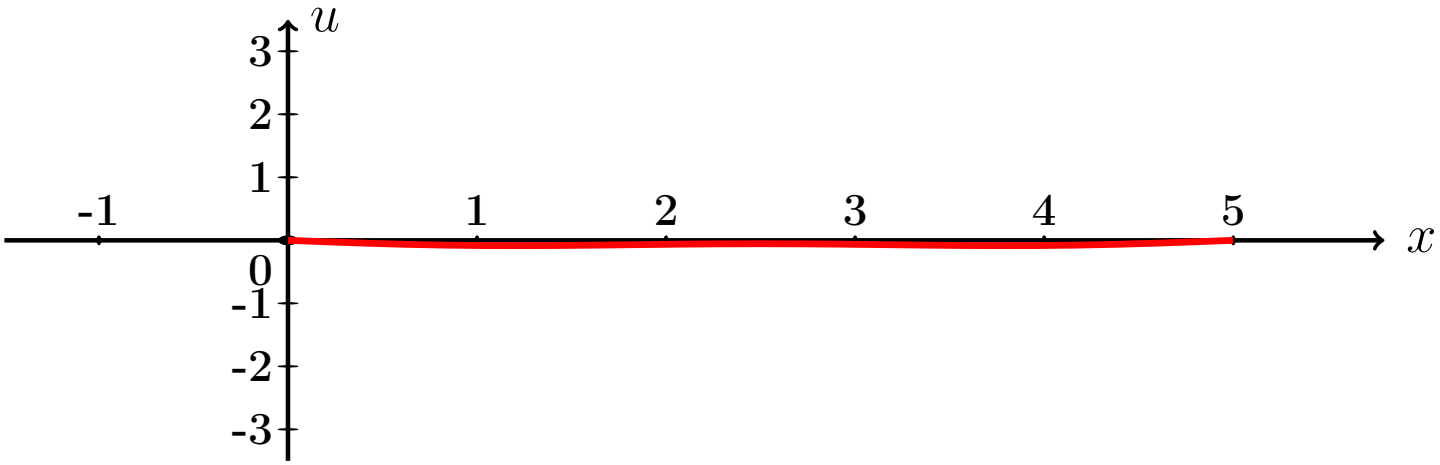


Рис.:

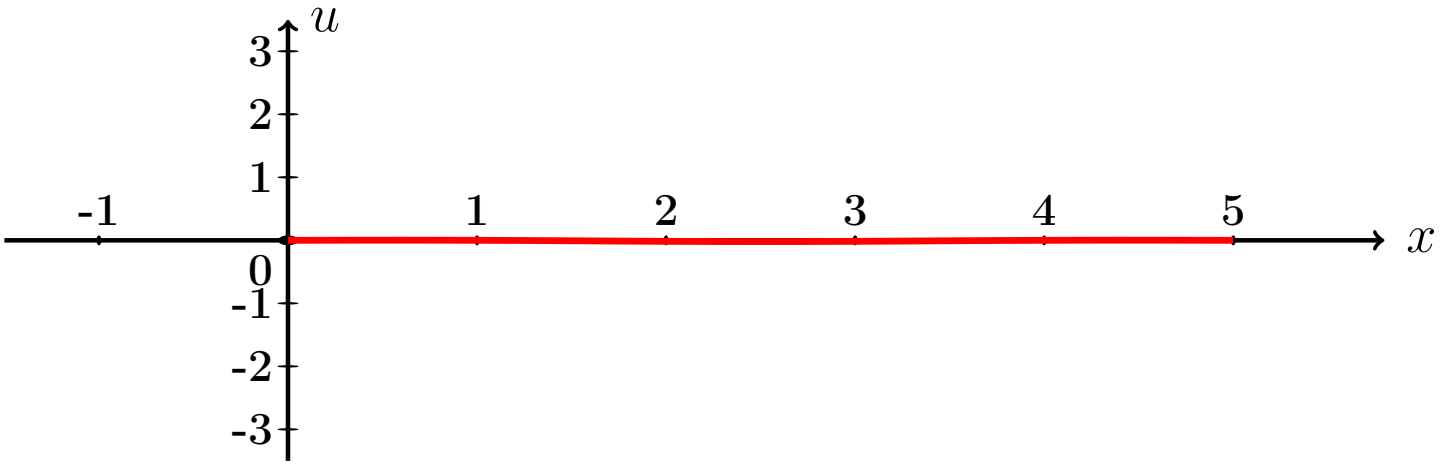


Рис.:

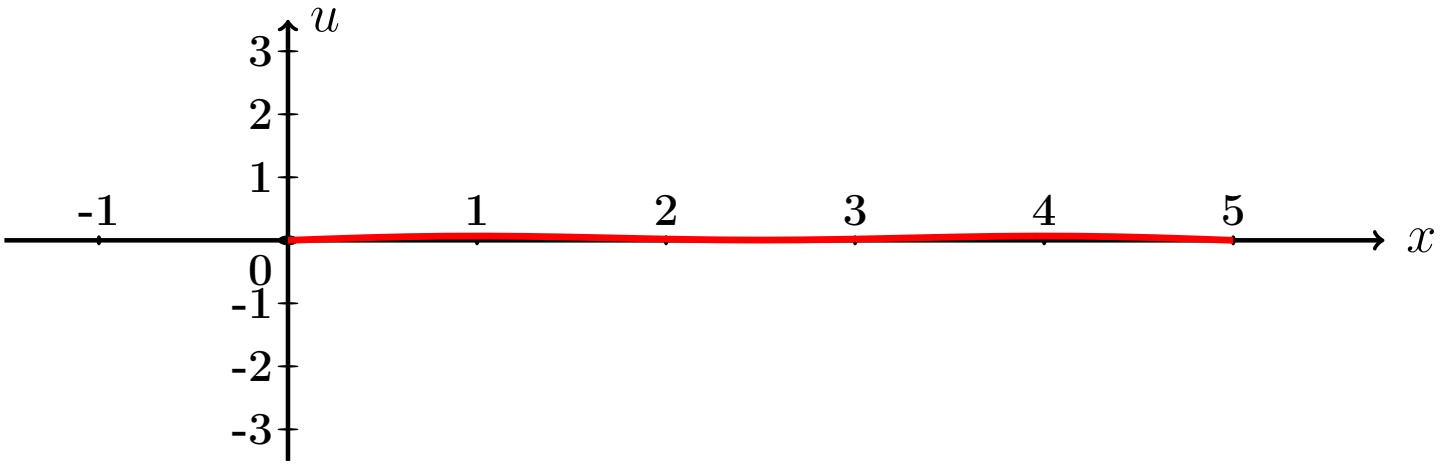


Рис.:

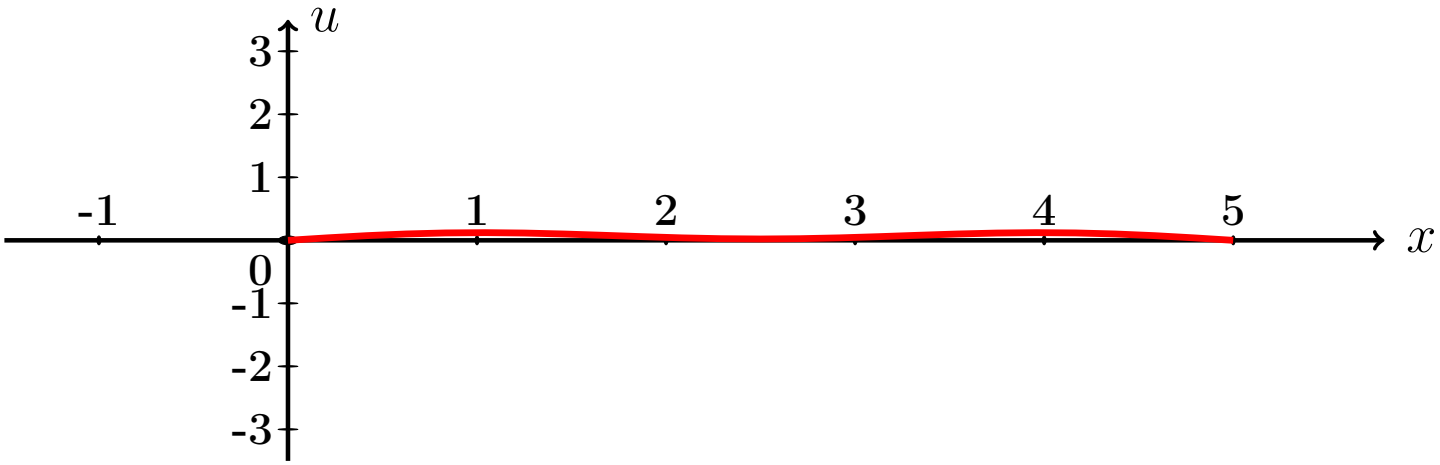


Рис.:

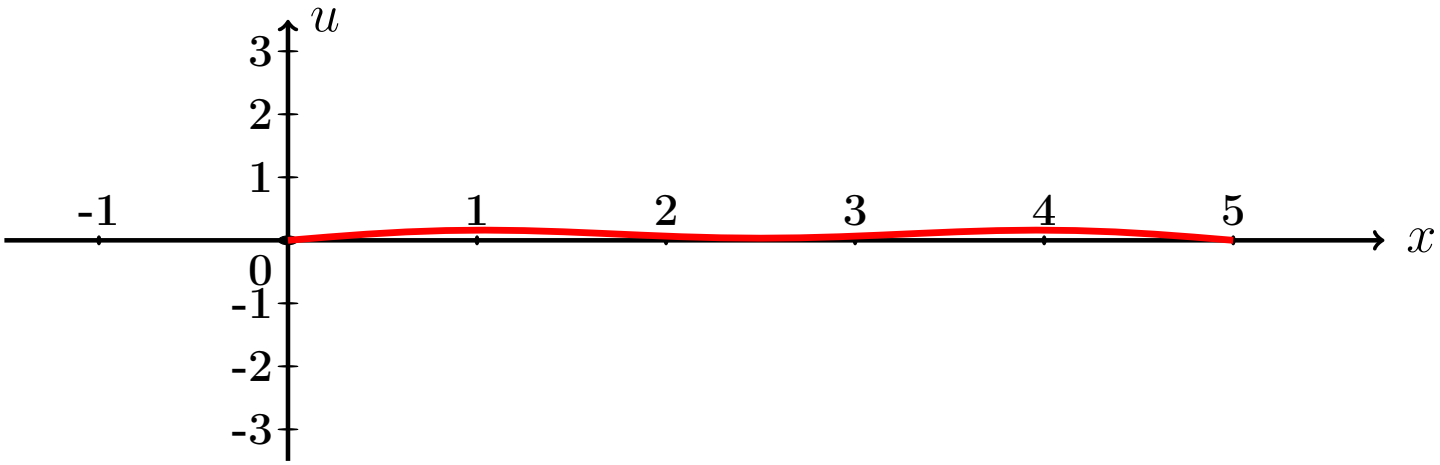


Рис.:

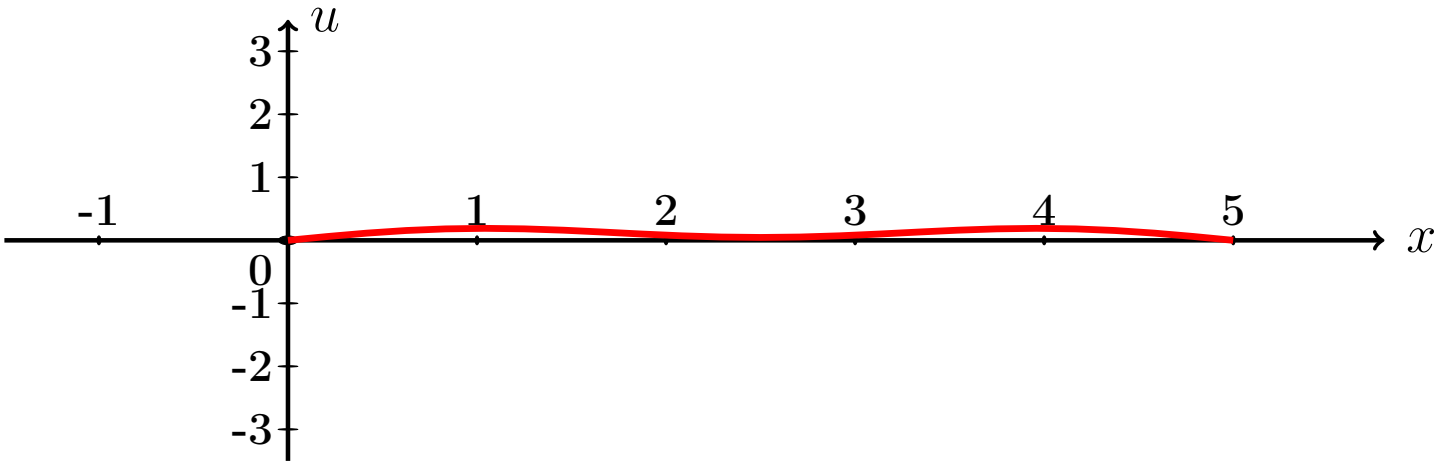


Рис.:

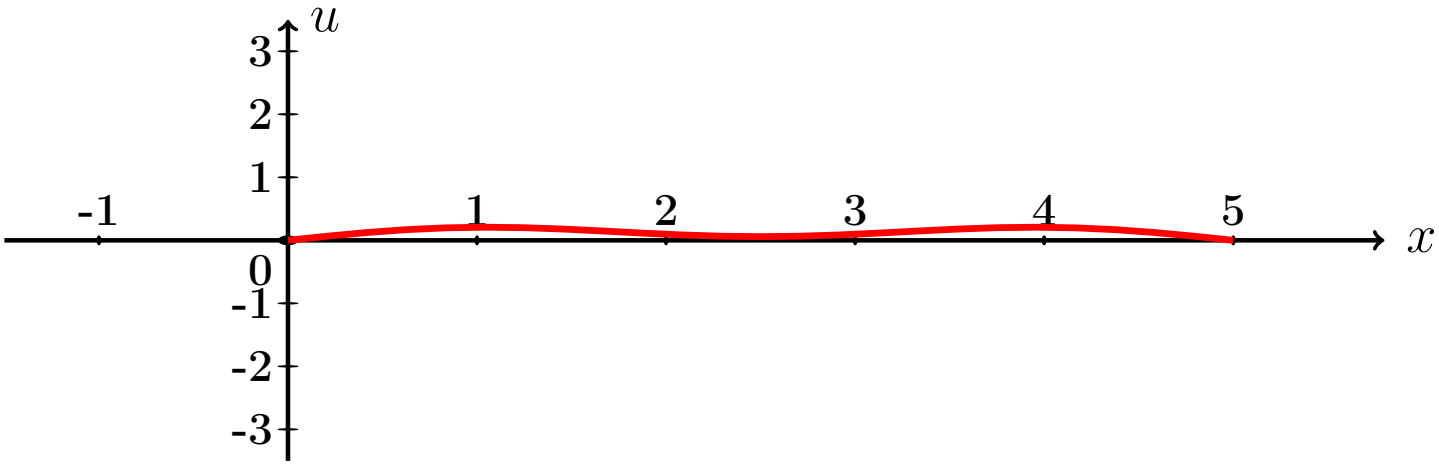


Рис.:

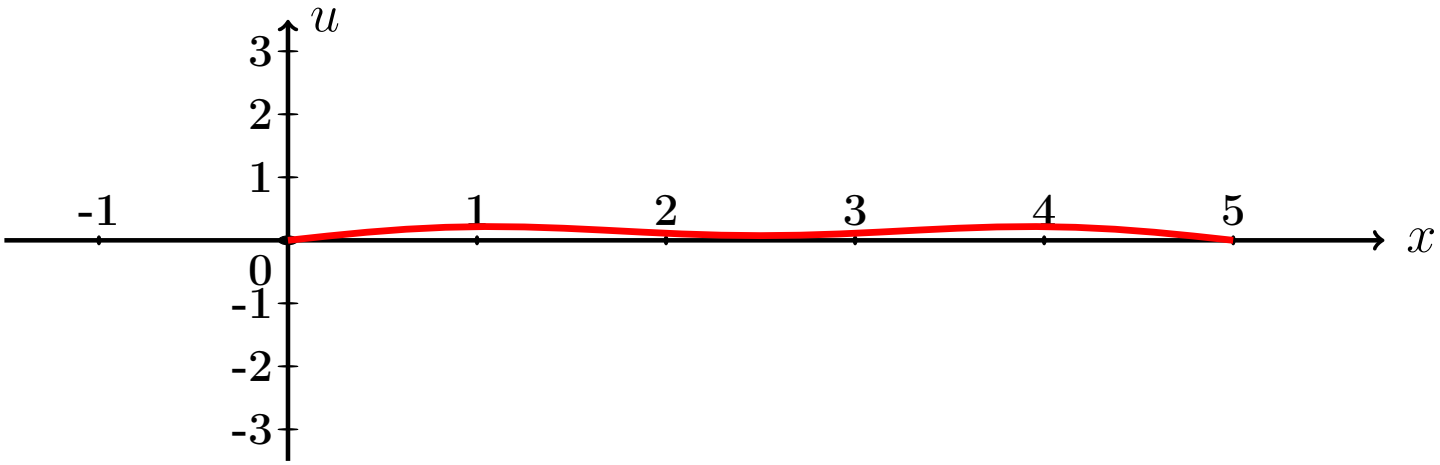


Рис.:

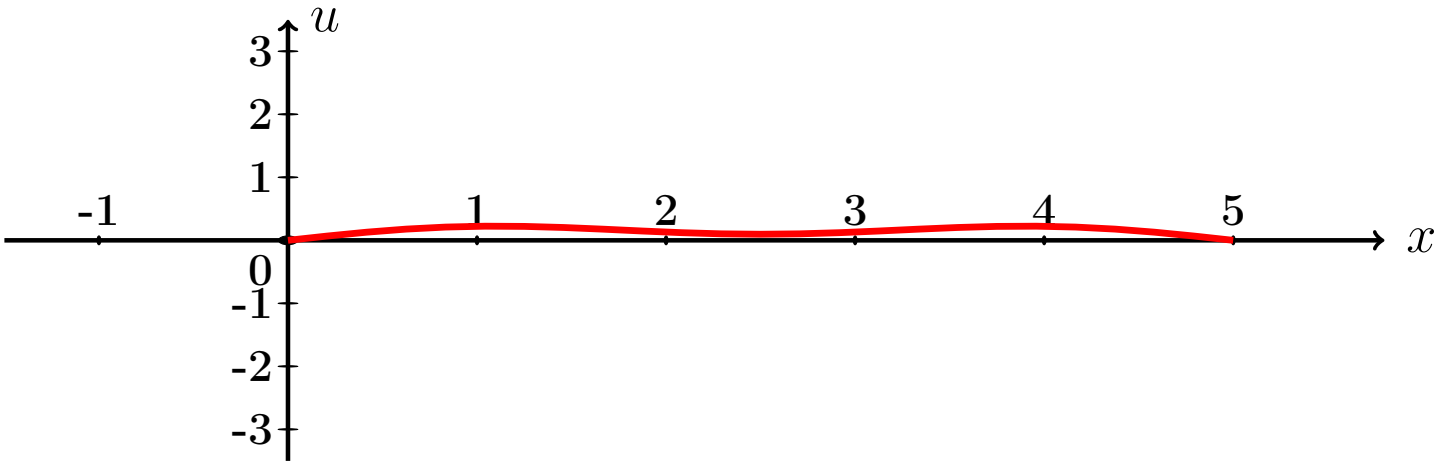


Рис.:

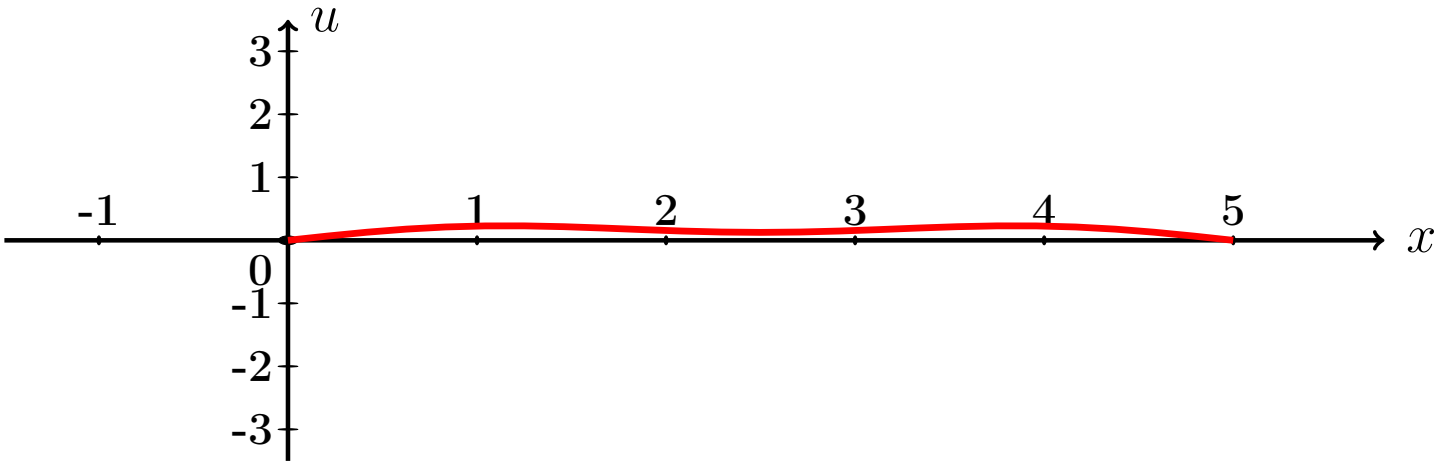


Рис.:

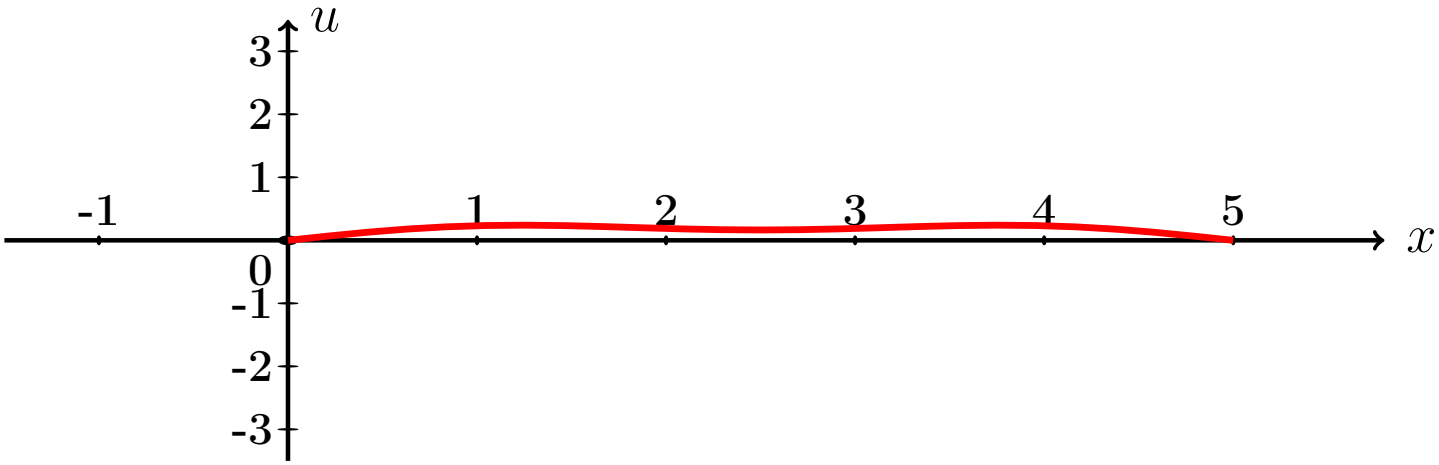


Рис.:

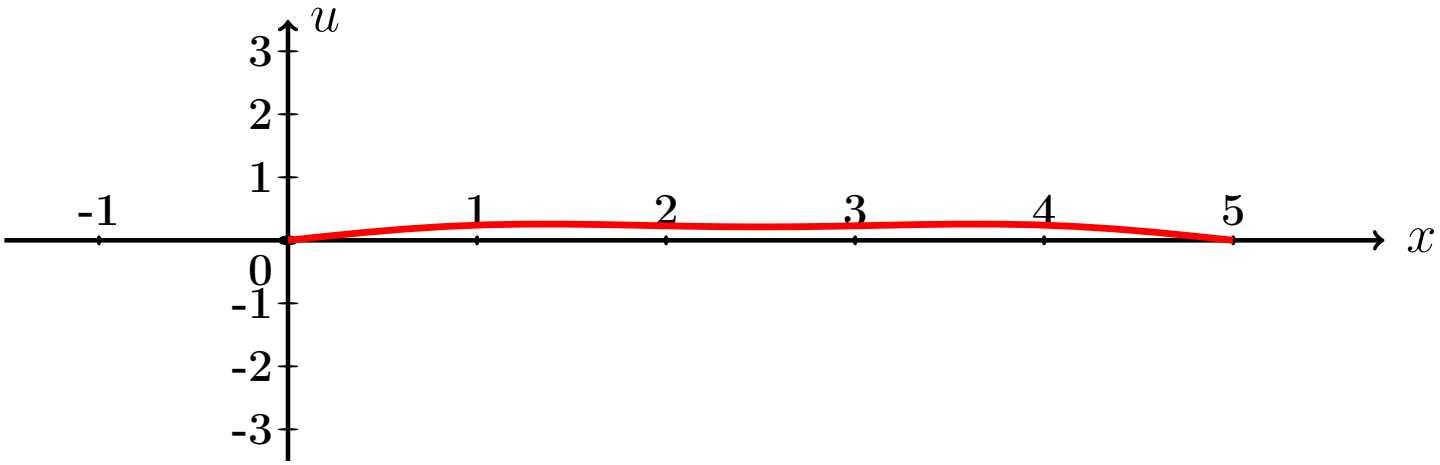


Рис.:

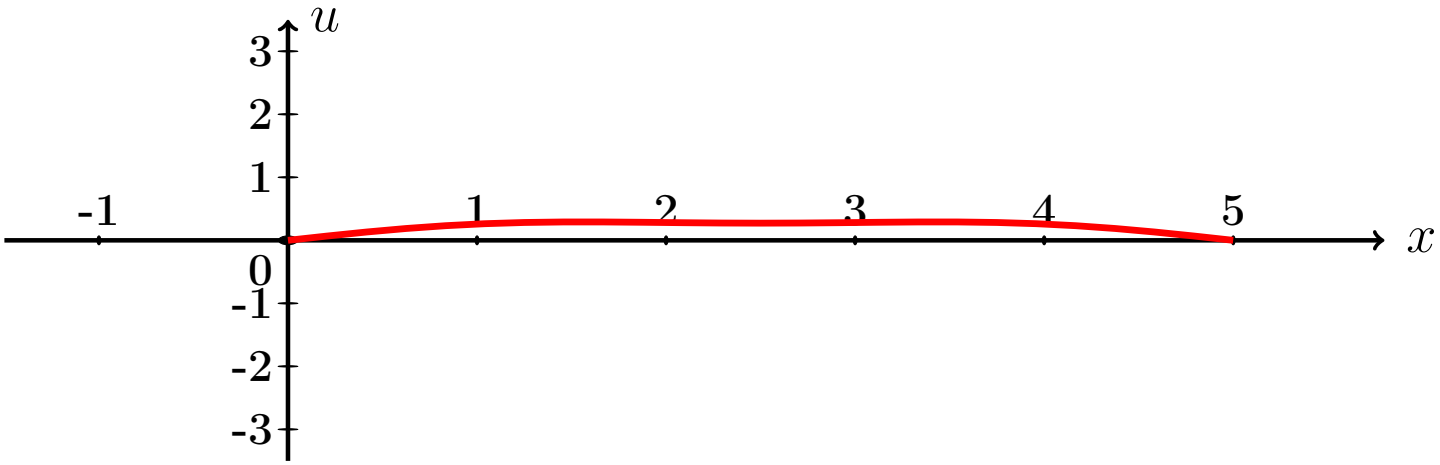


Рис.:

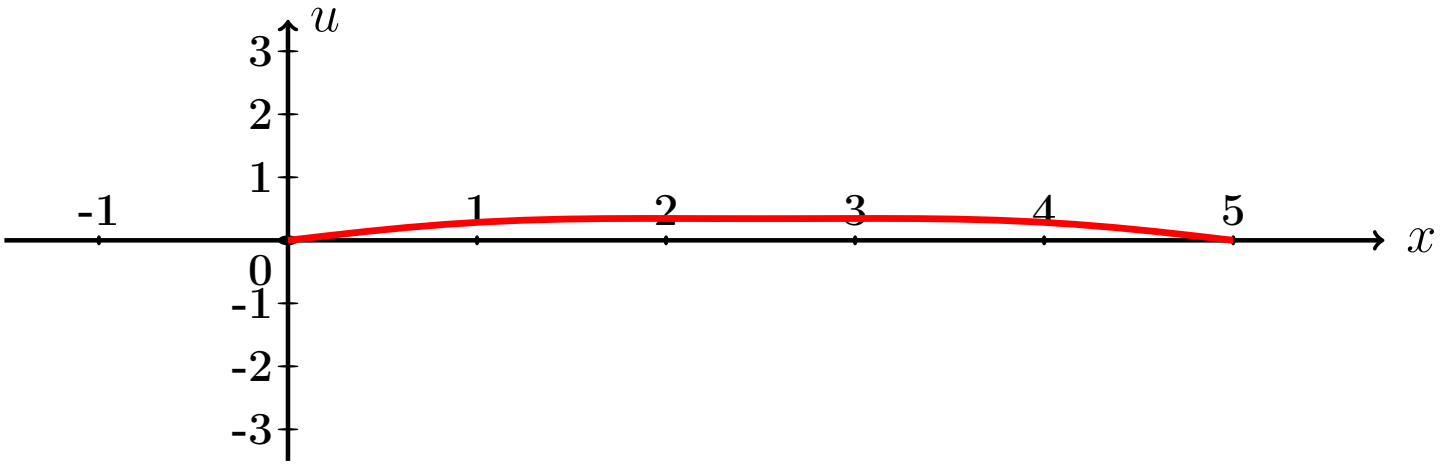


Рис.:

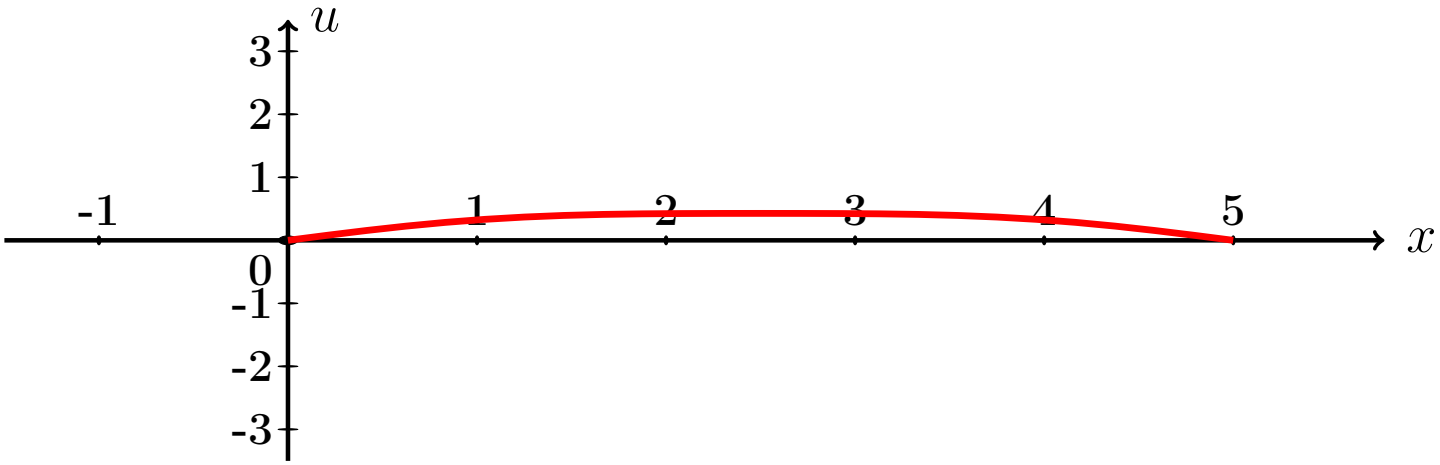


Рис.:

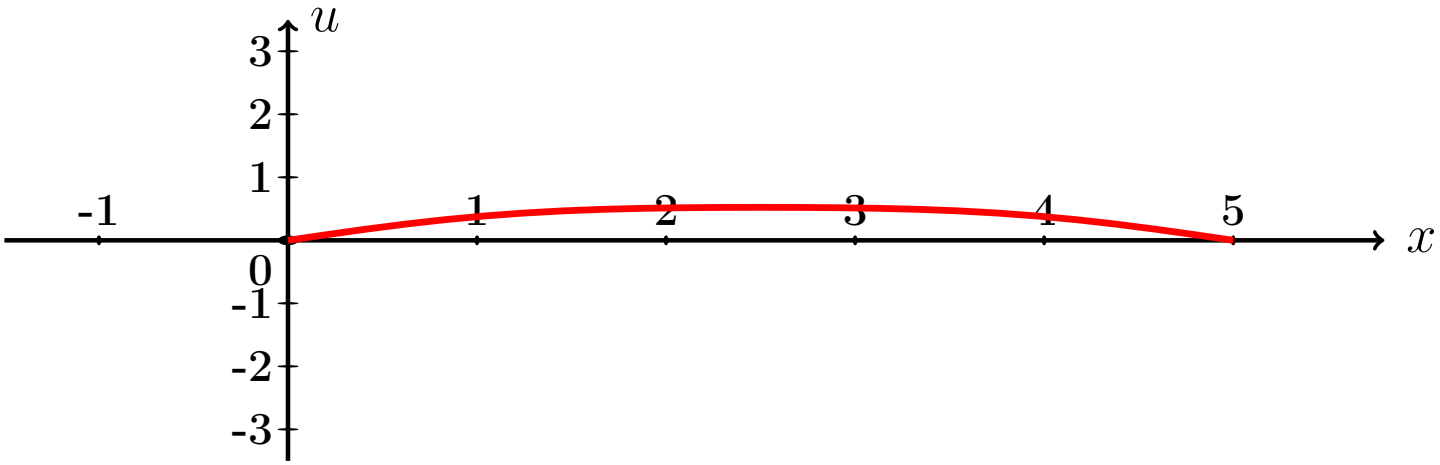


Рис.:

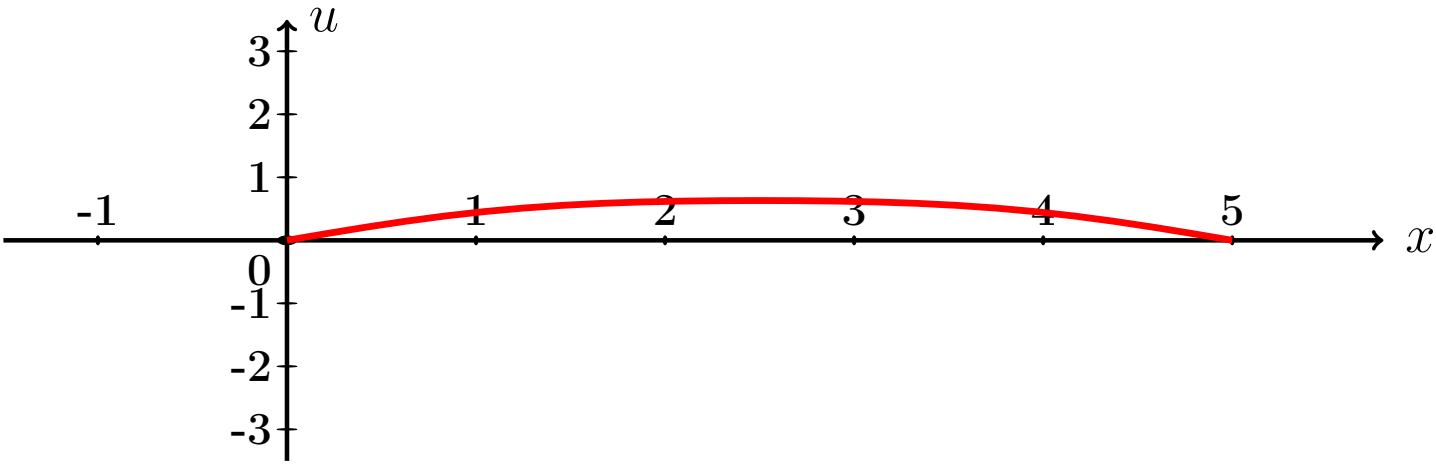


Рис.:

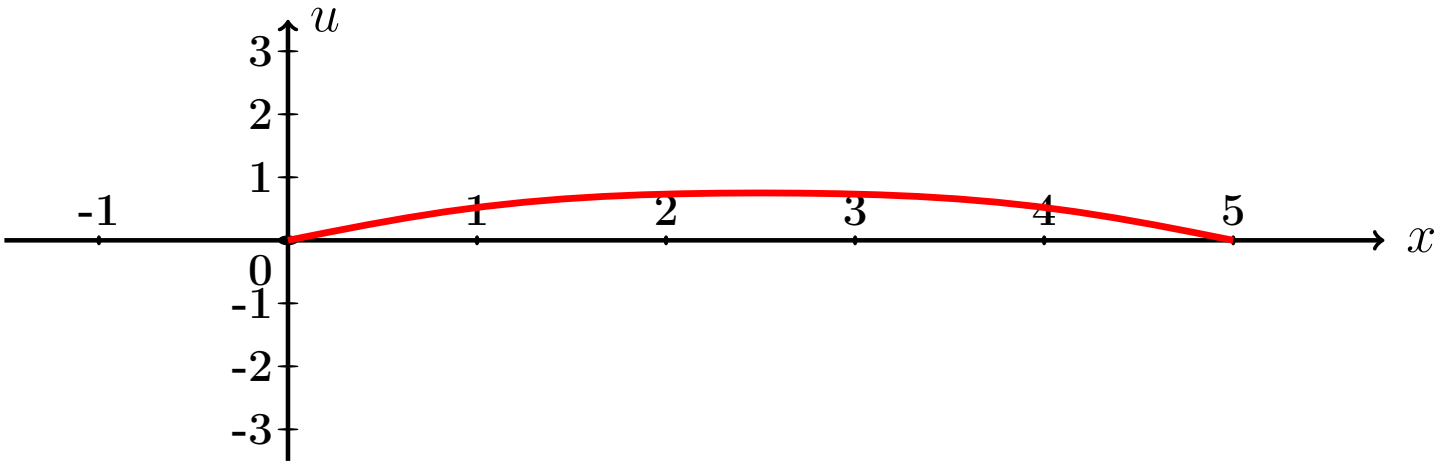


Рис.:

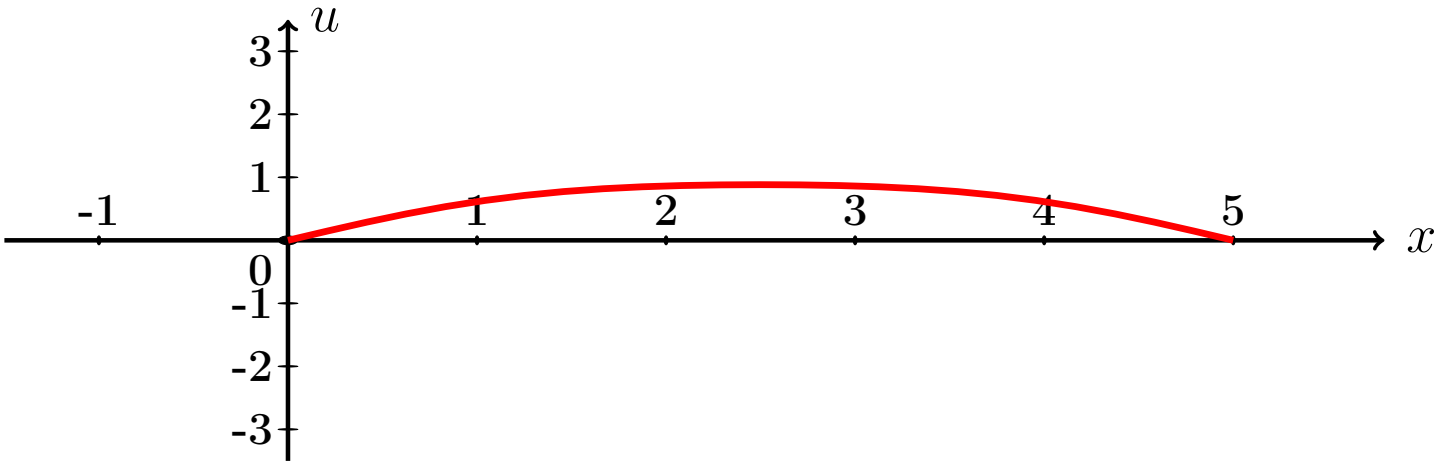


Рис.:

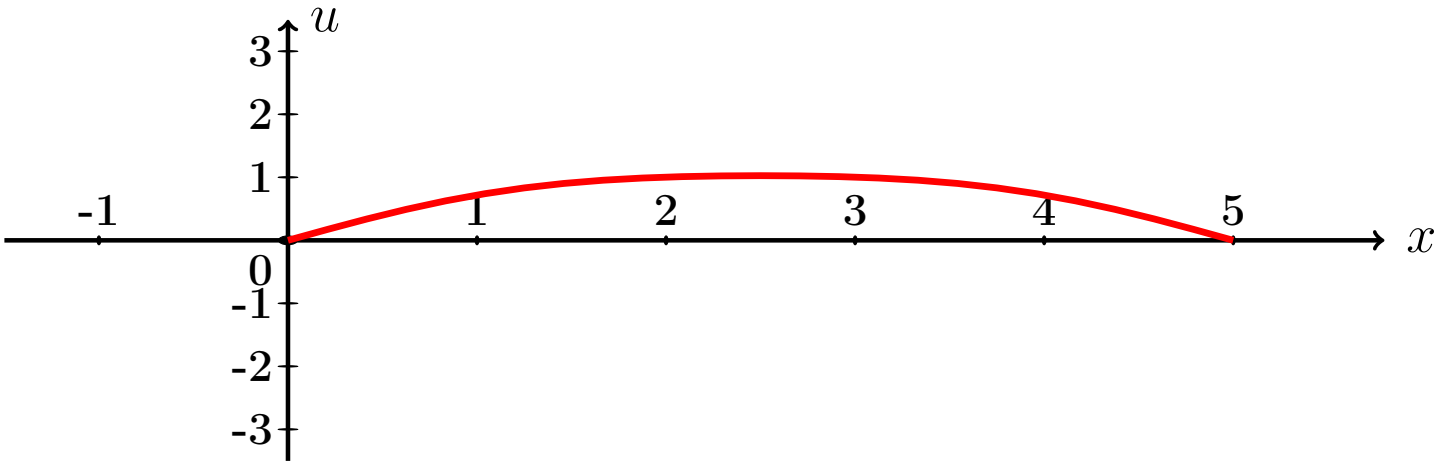


Рис.:

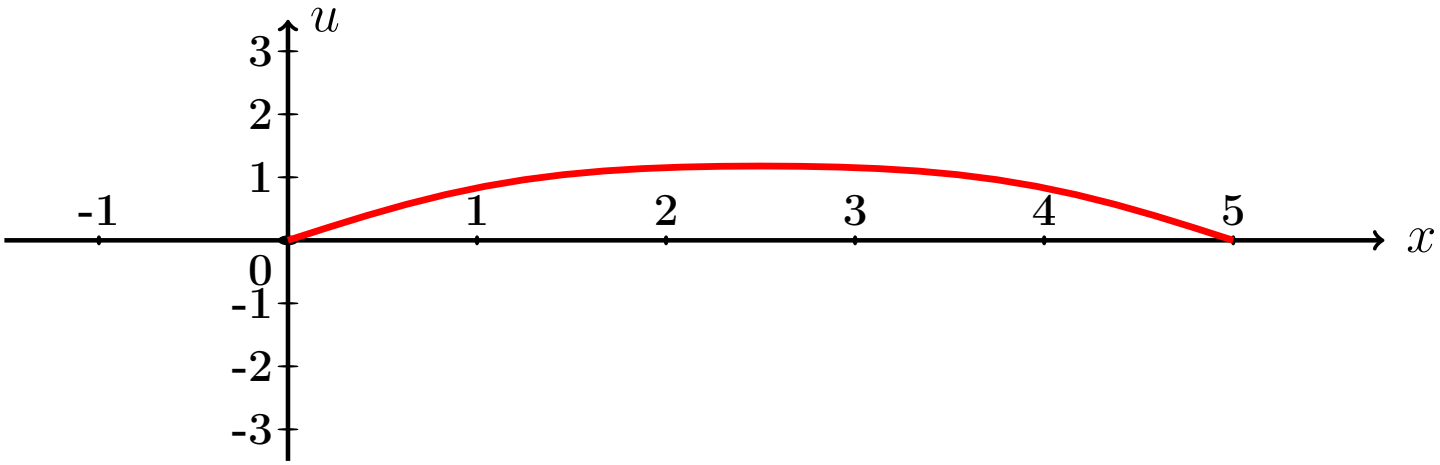


Рис.:

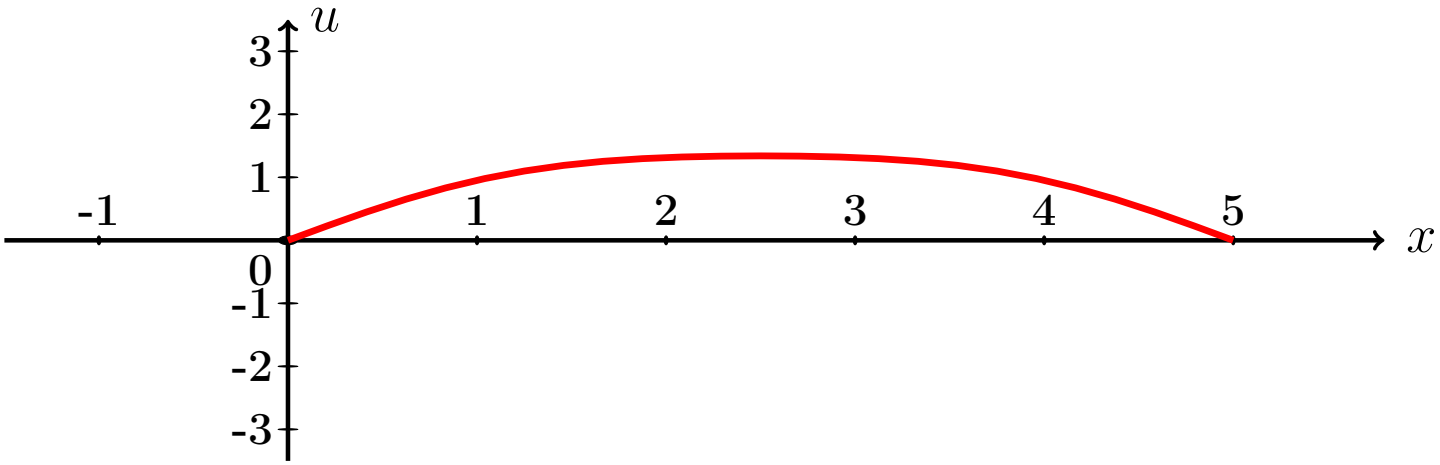


Рис.:

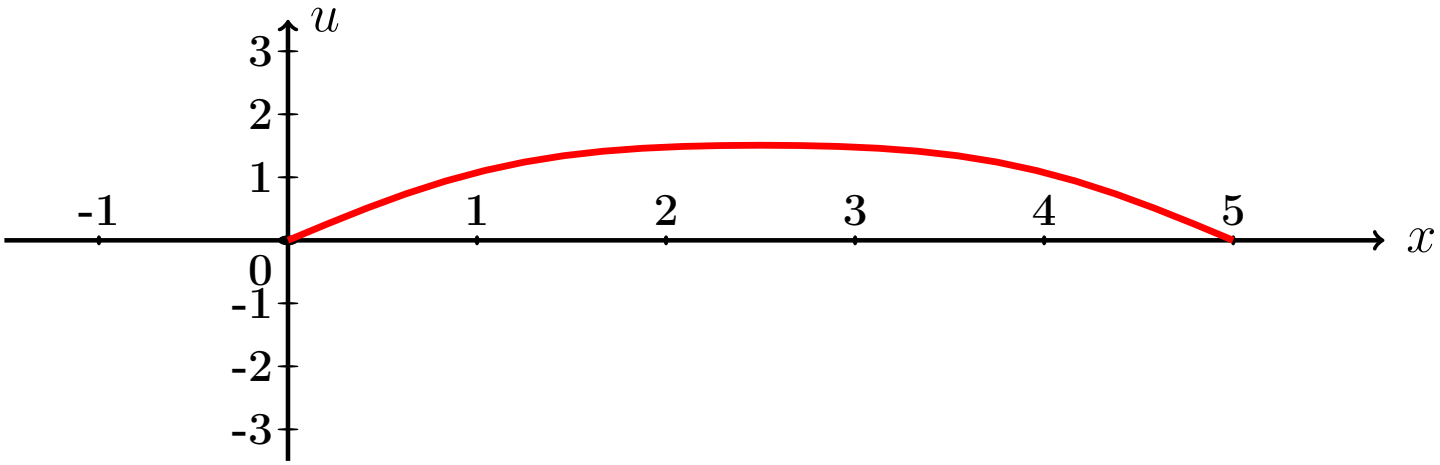


Рис.:

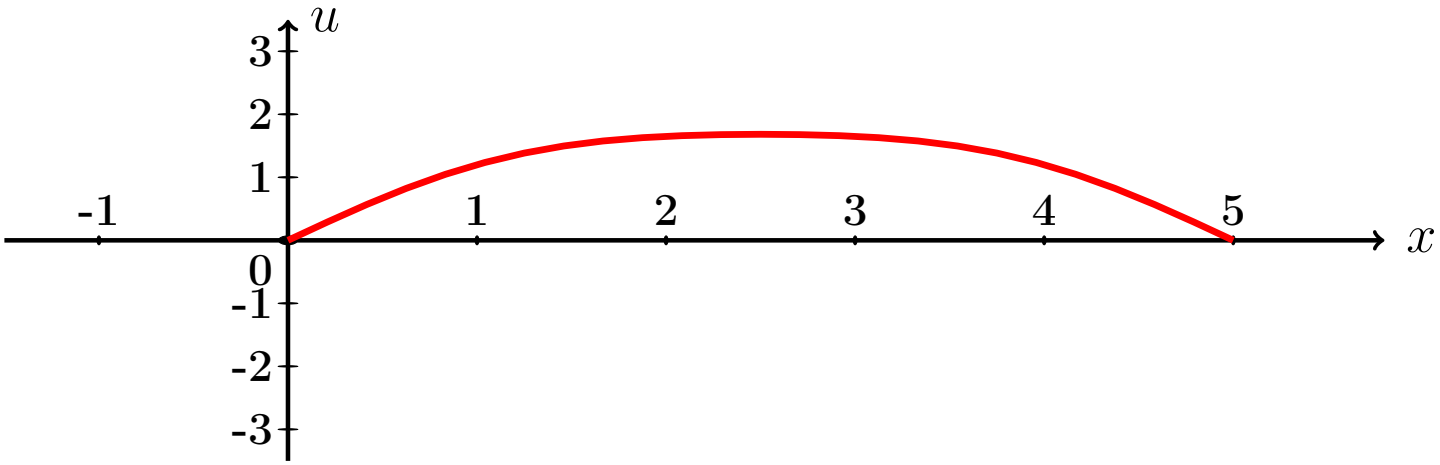


Рис.:

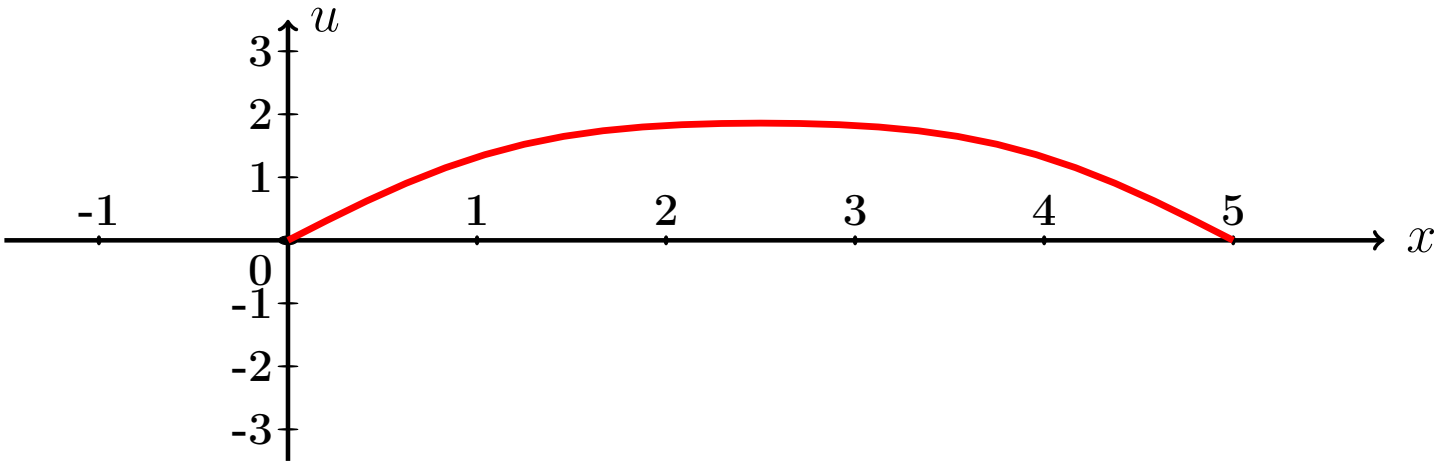


Рис.:

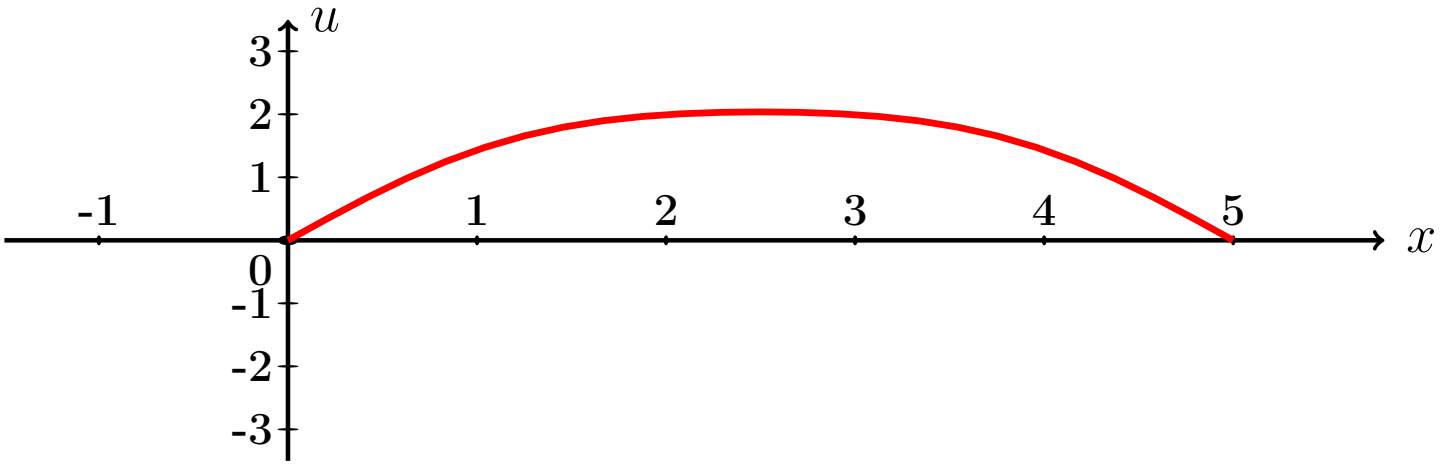


Рис.:

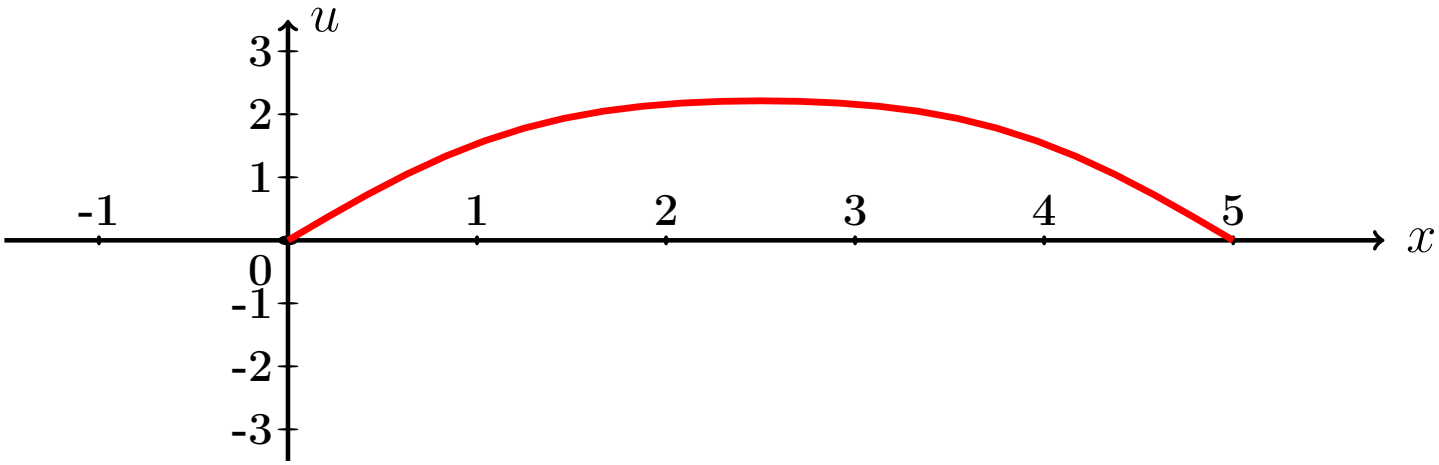


Рис.:

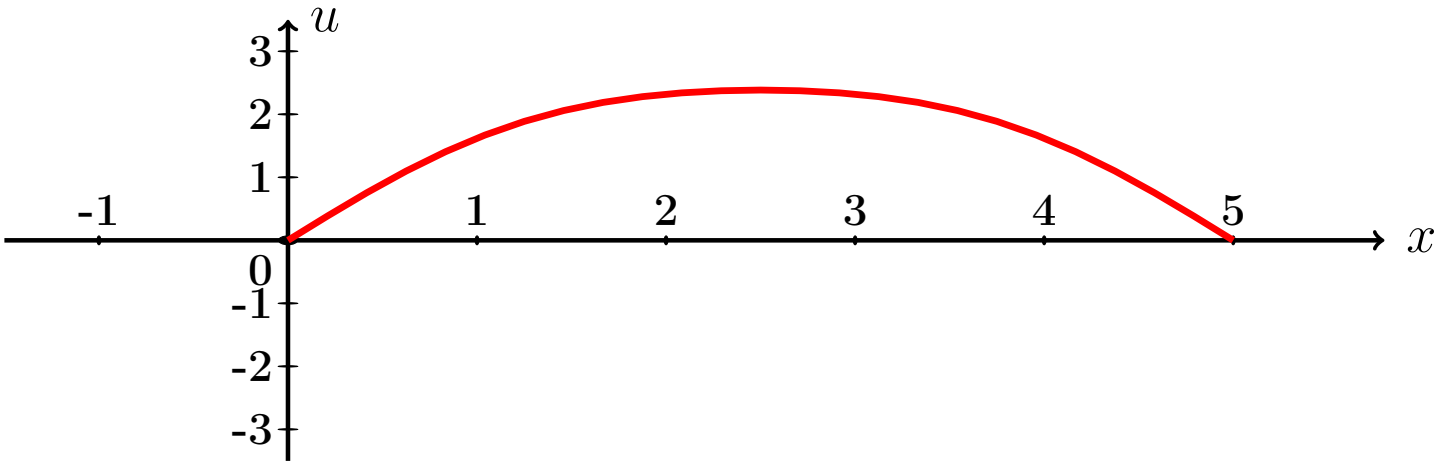


Рис.:

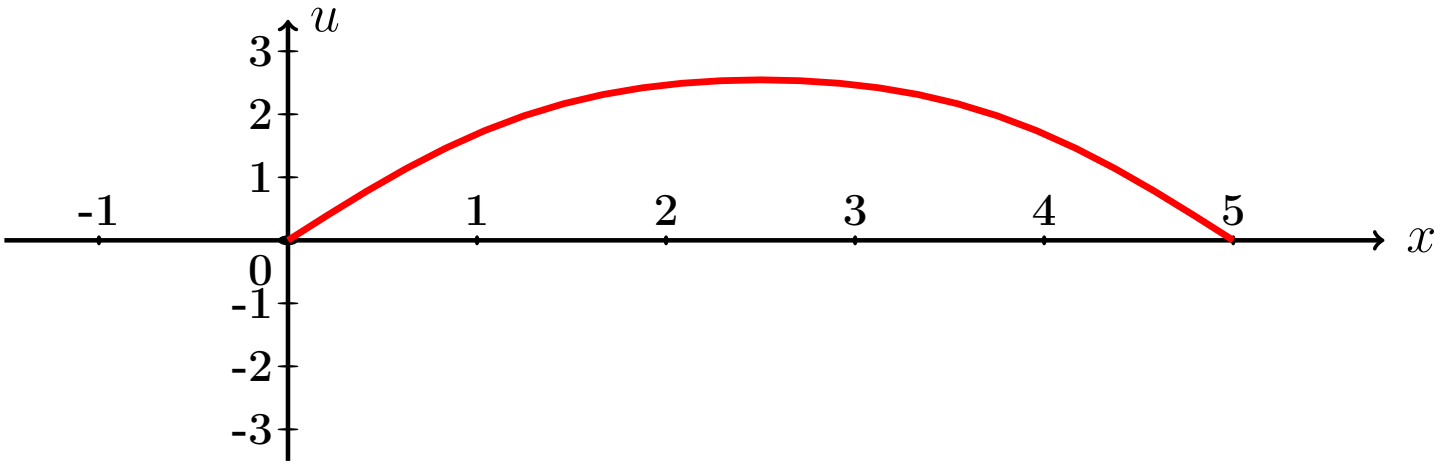


Рис.:

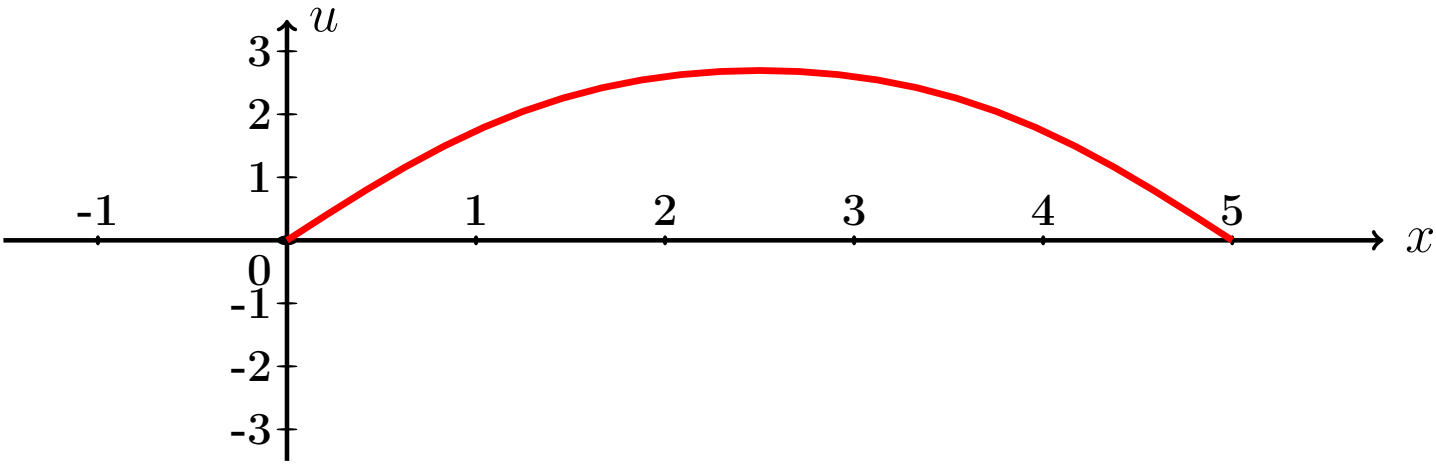


Рис.:

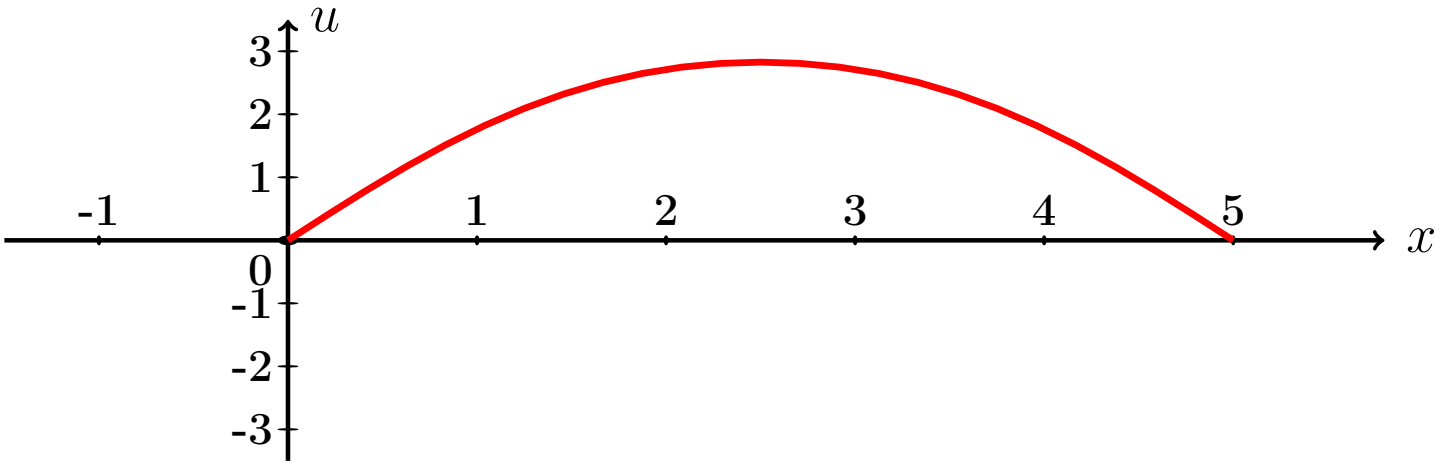


Рис.:

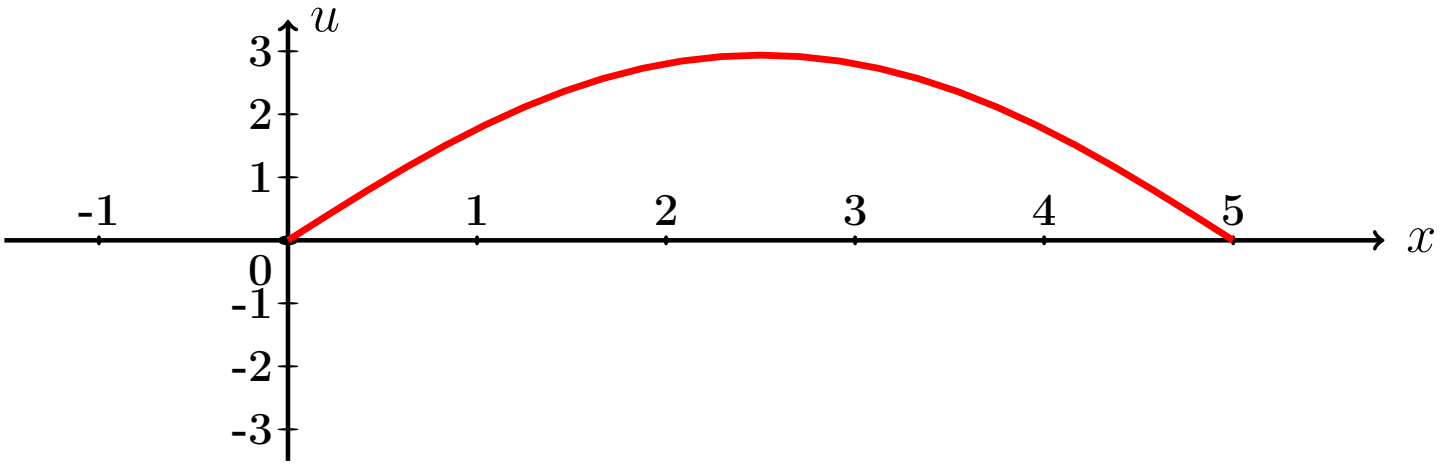


Рис.:

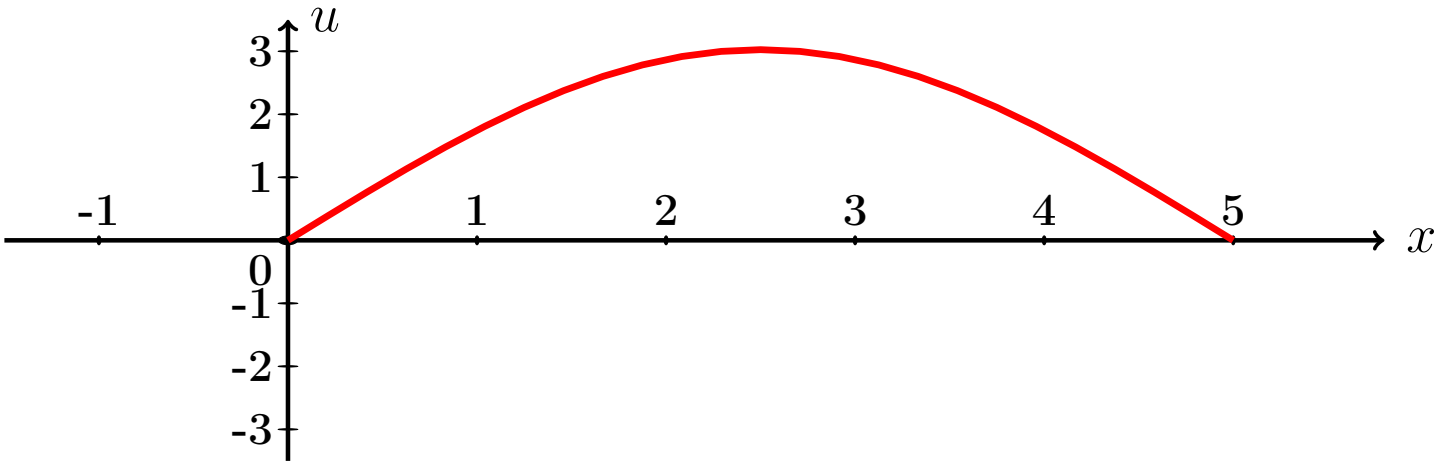


Рис.:

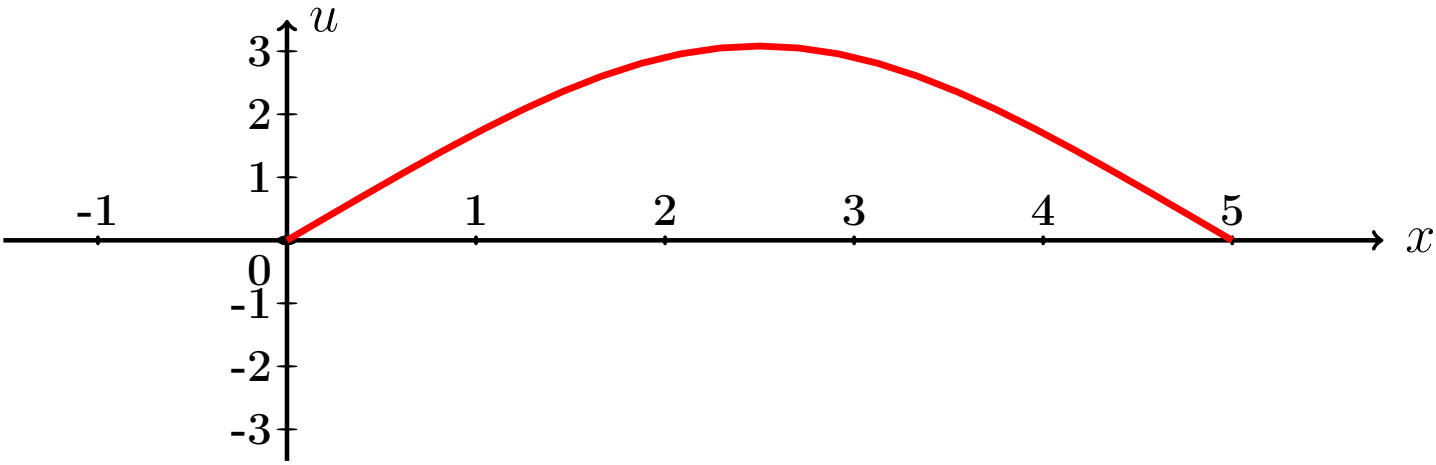


Рис.:

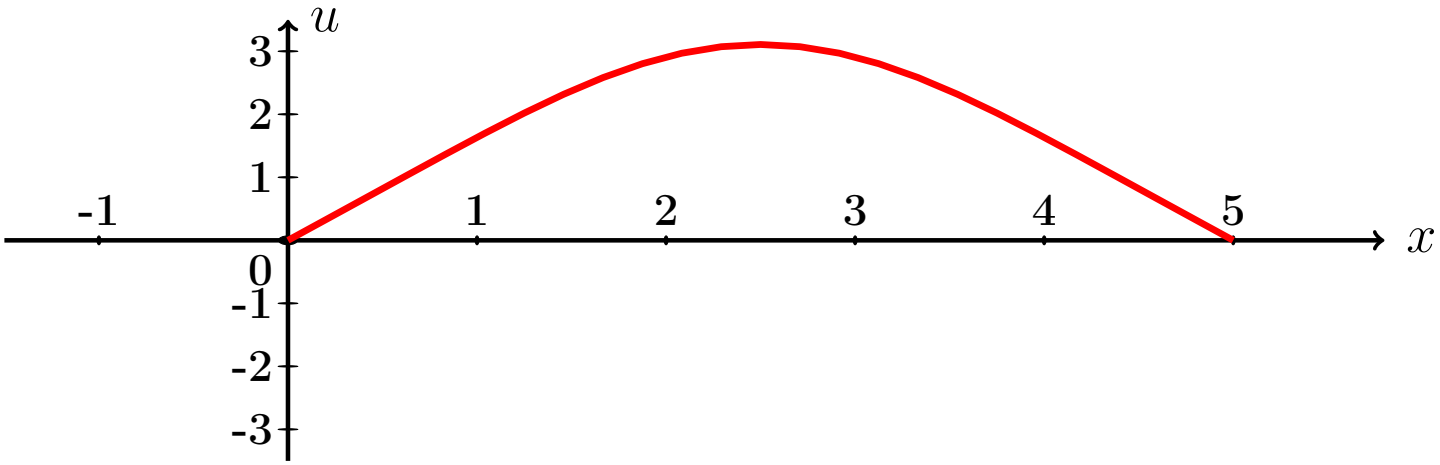


Рис.:

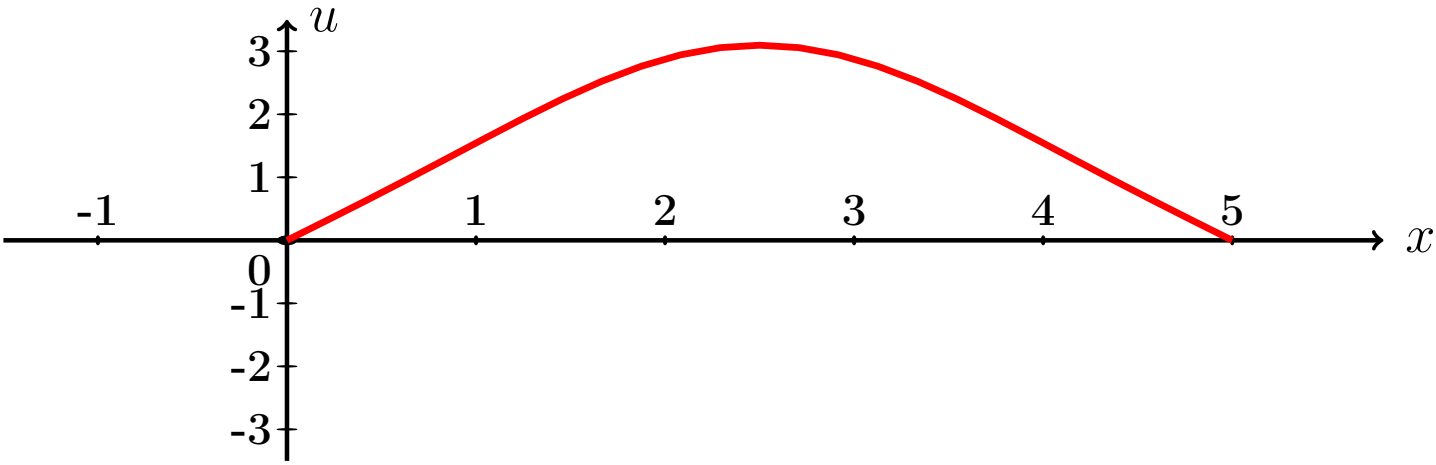


Рис.:

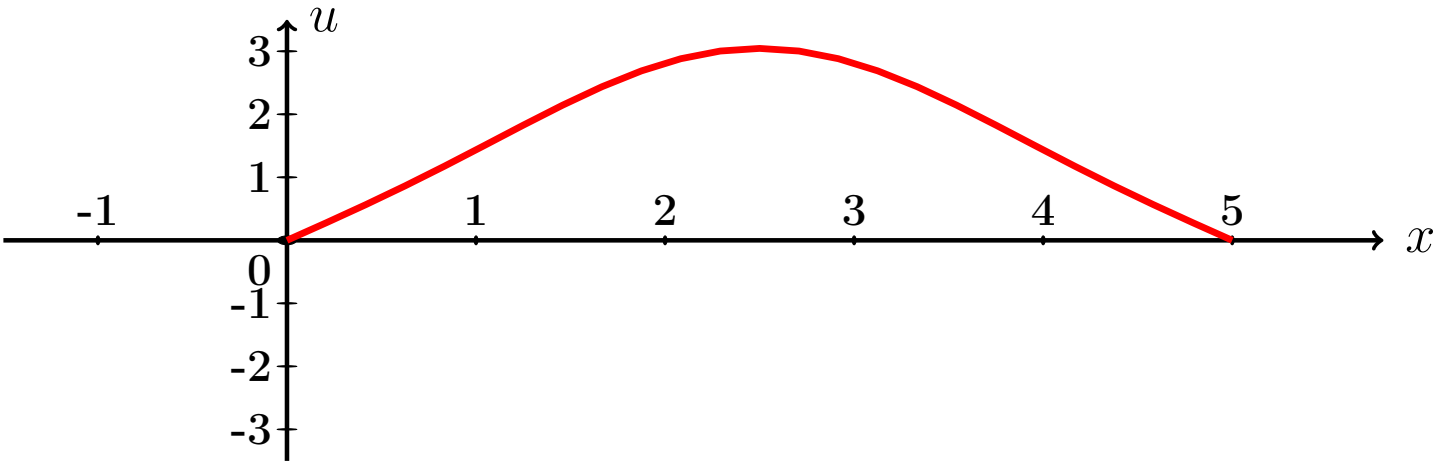


Рис.:

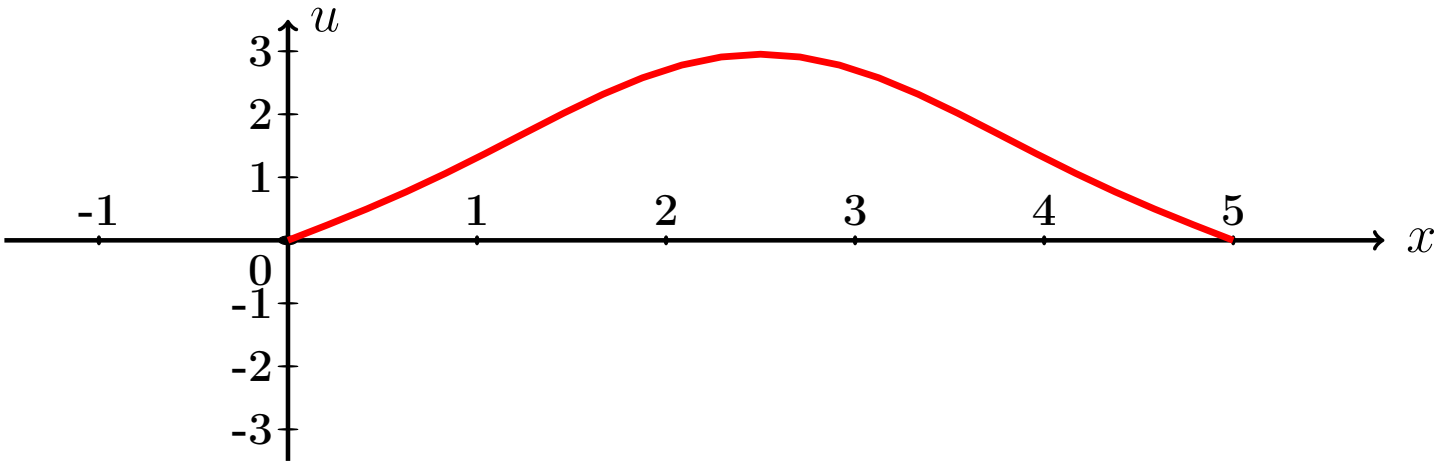


Рис.:

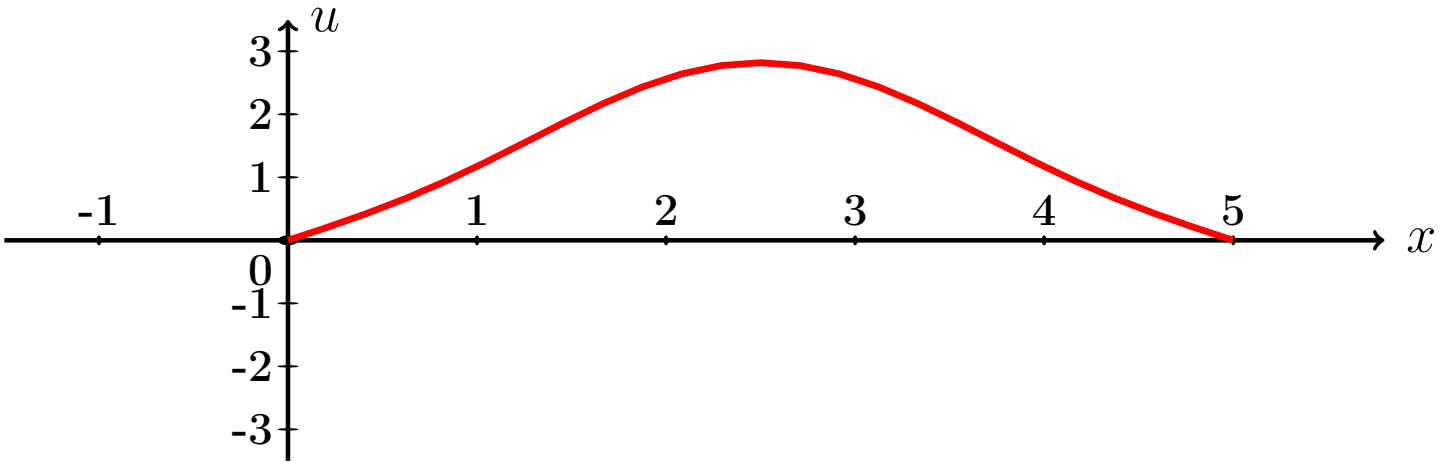


Рис.:

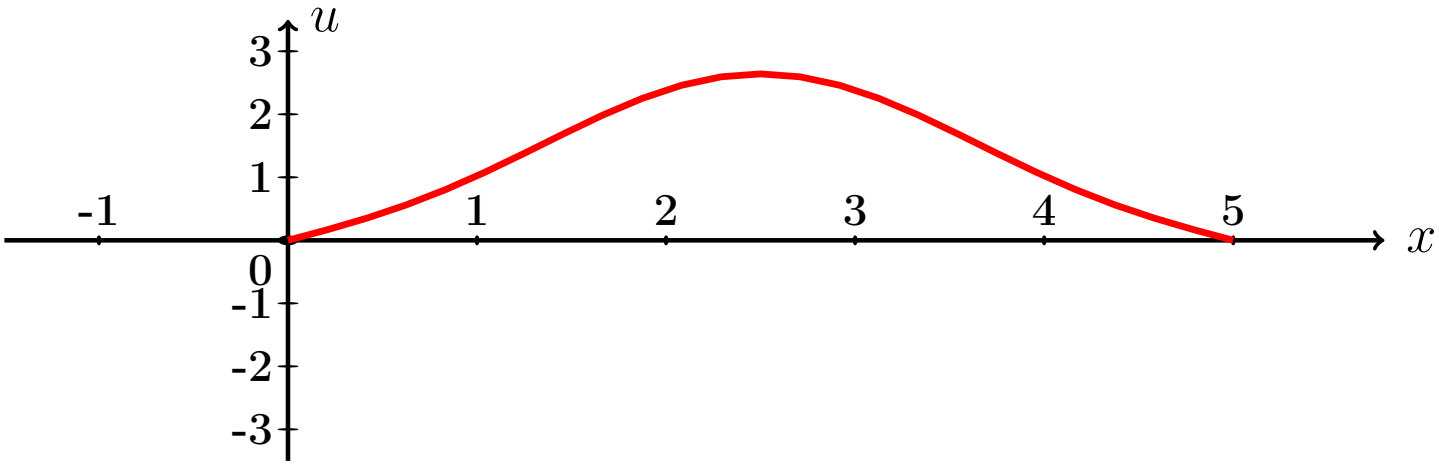


Рис.:

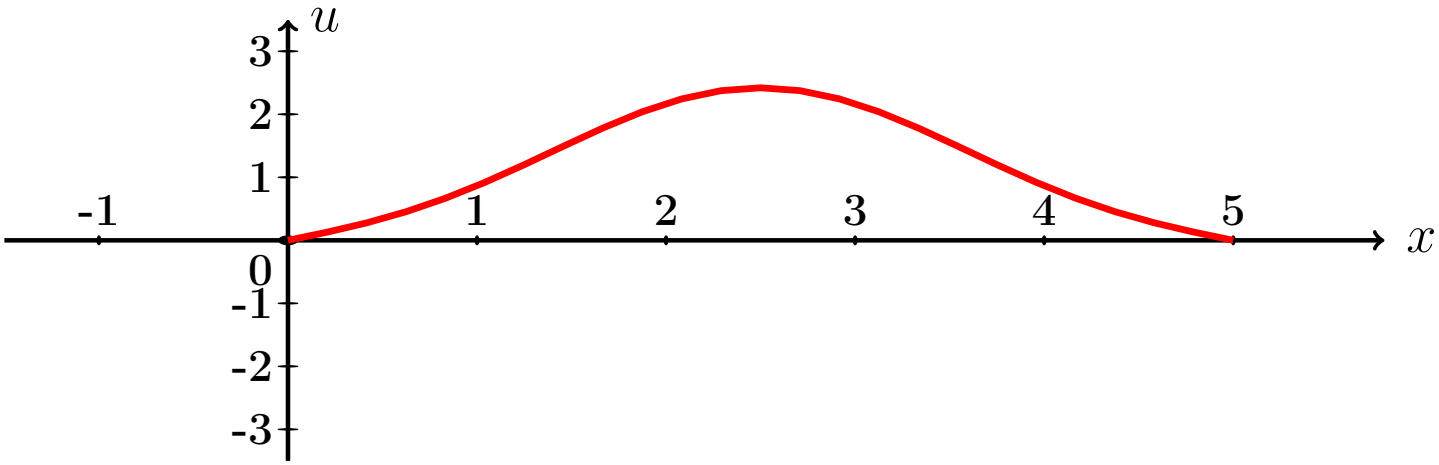


Рис.:

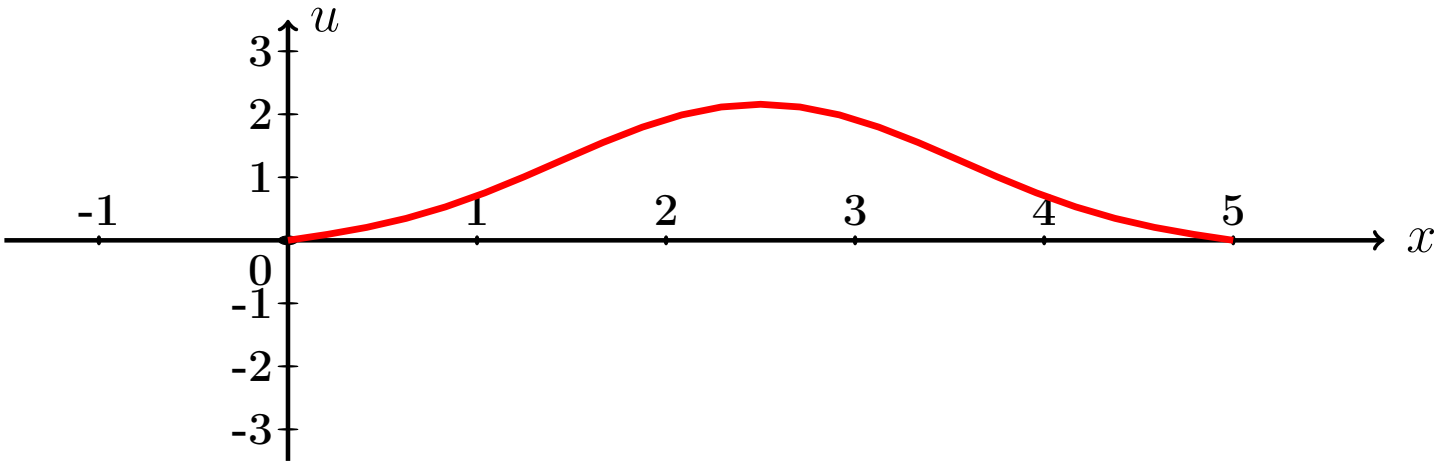


Рис.:

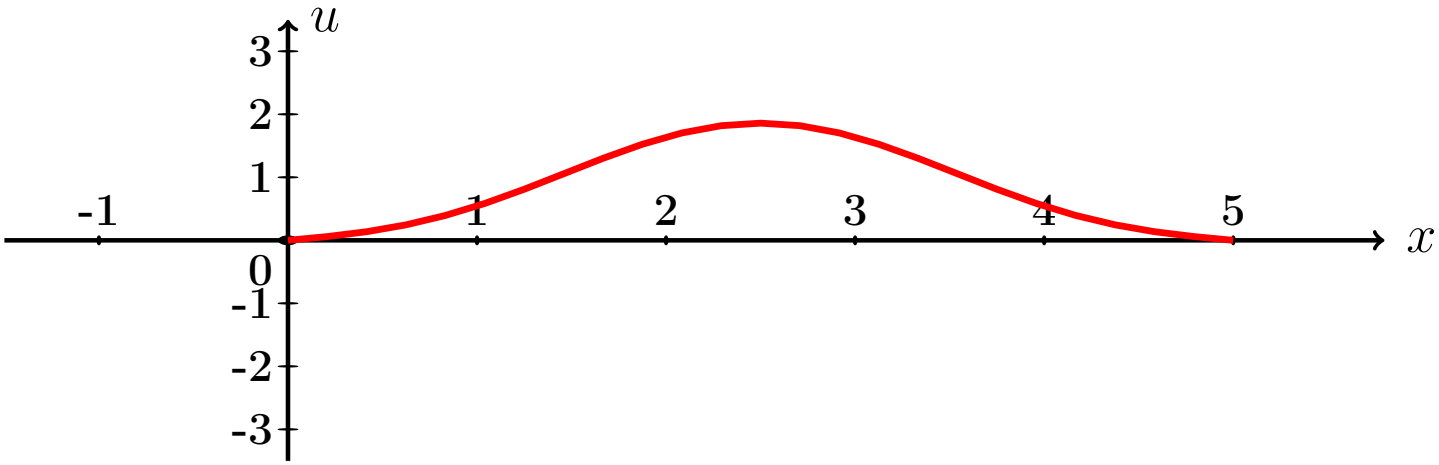


Рис.:

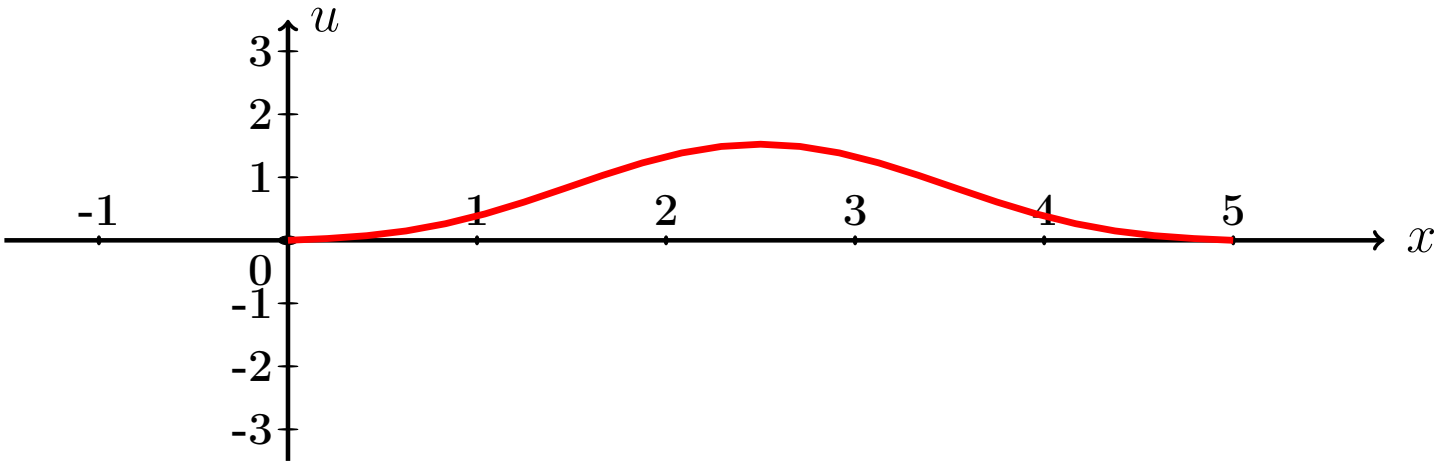


Рис.:

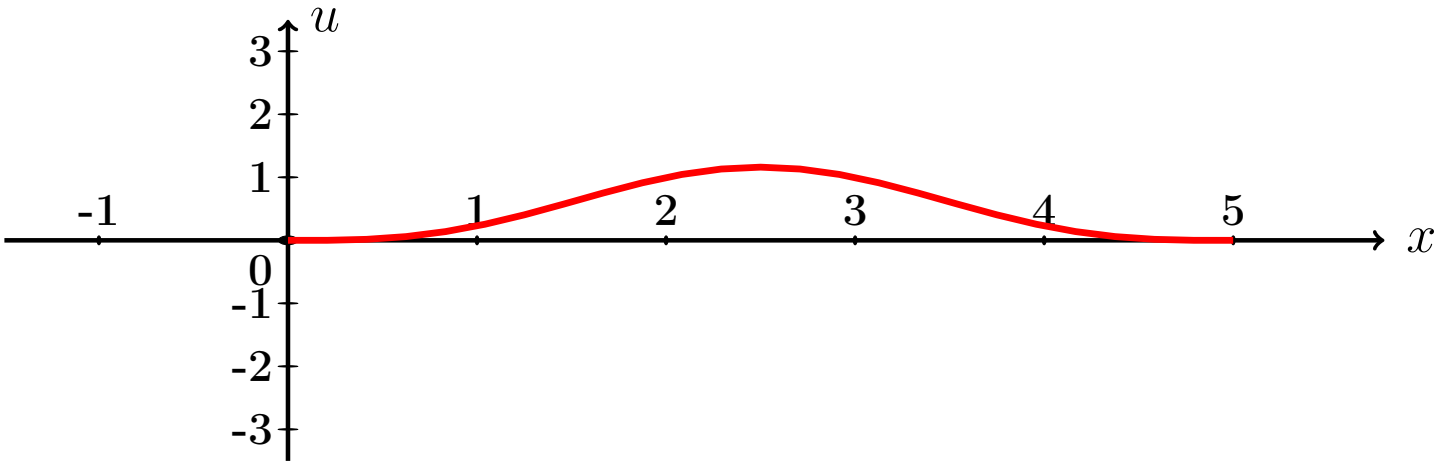


Рис.:

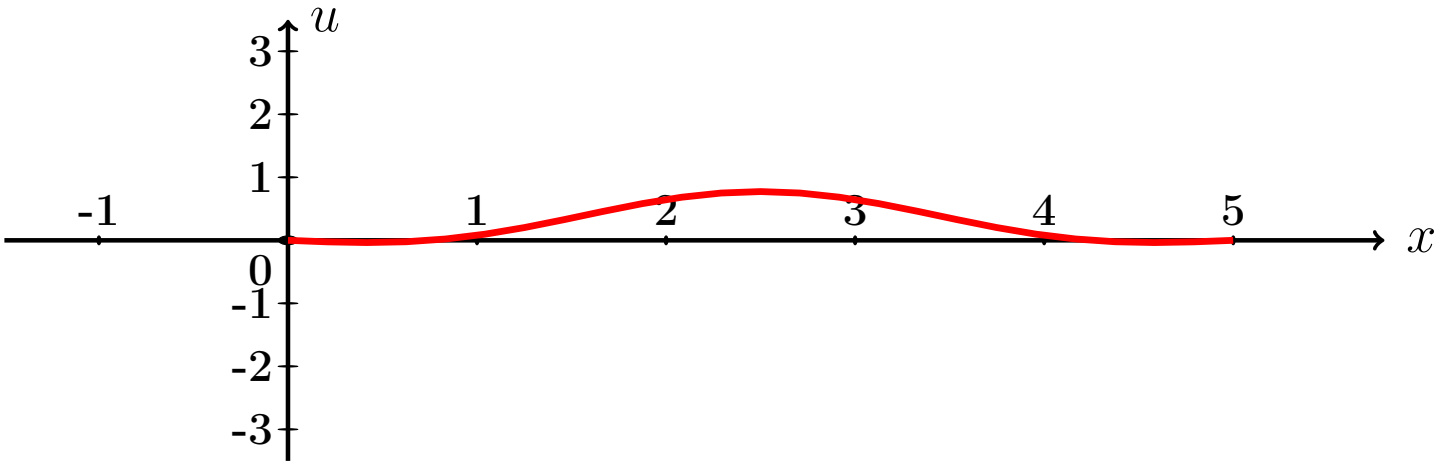


Рис.:

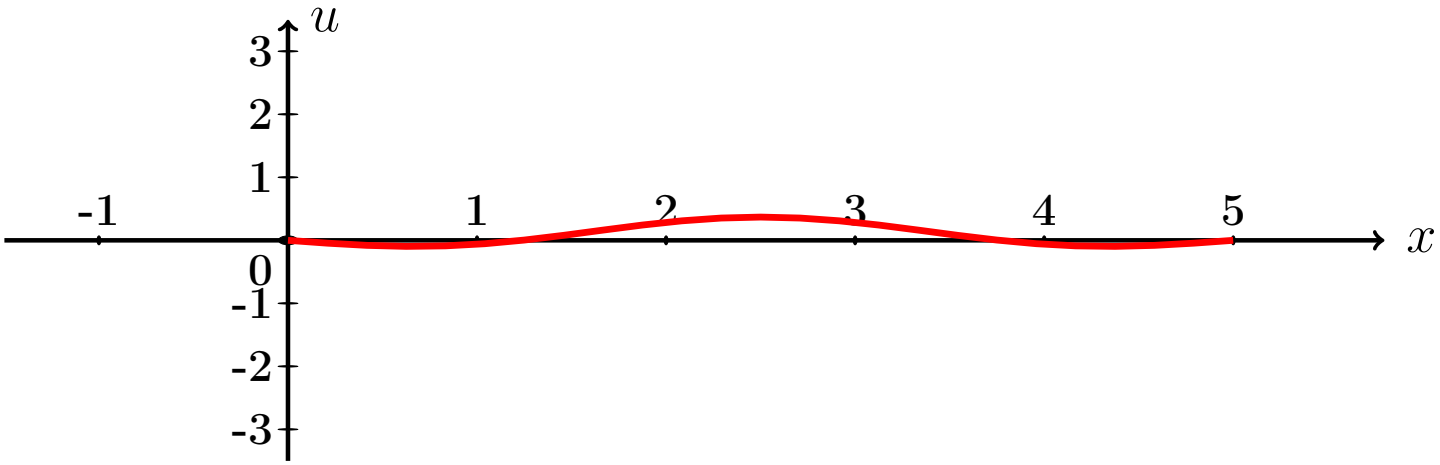


Рис.:

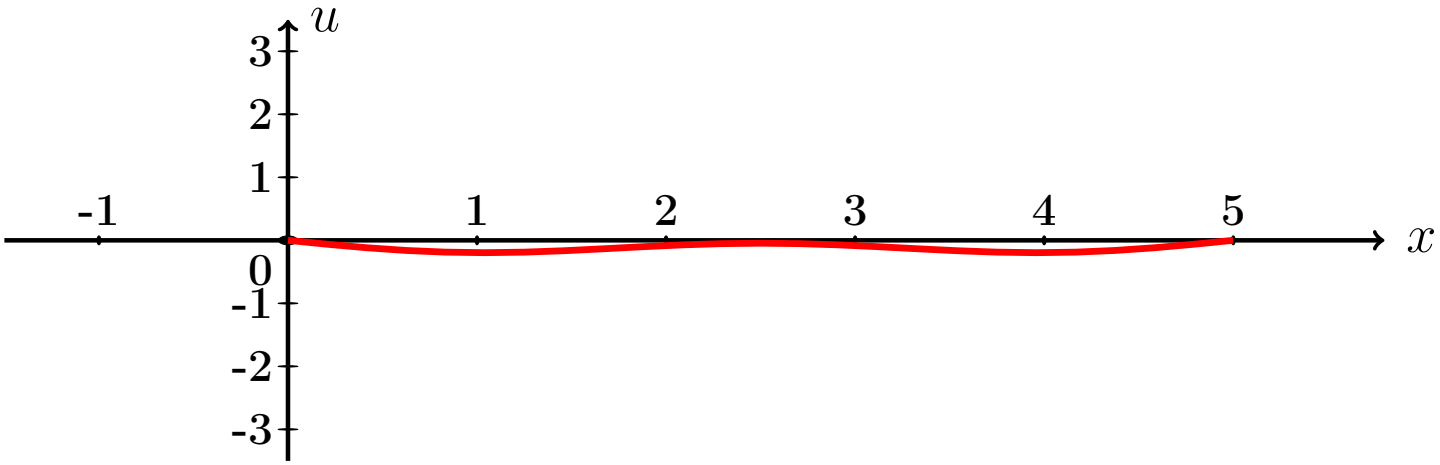


Рис.:

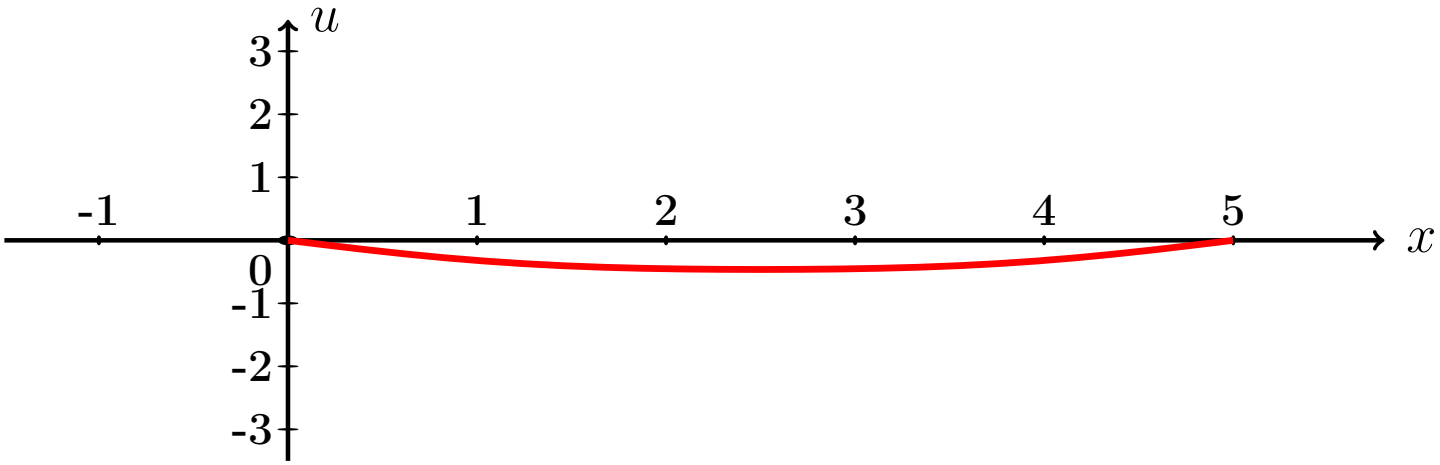


Рис.:

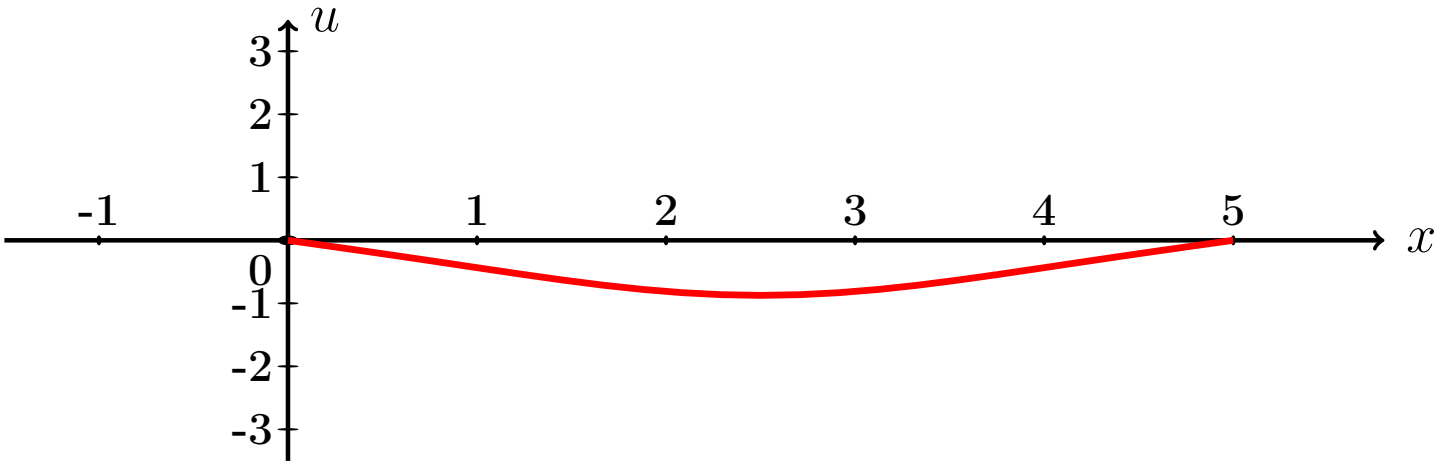


Рис.:

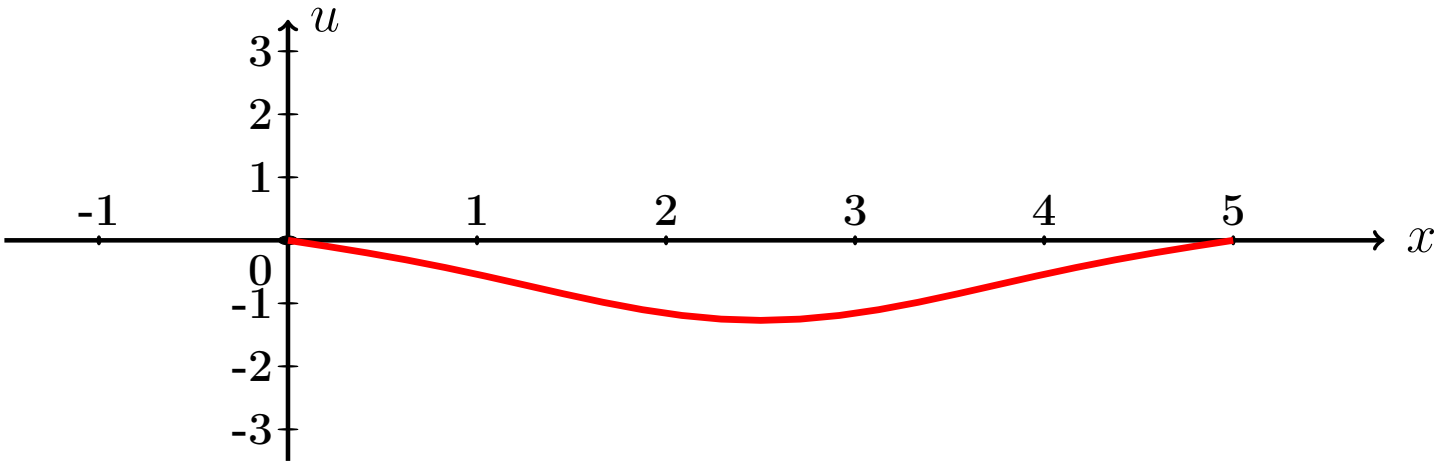


Рис.:

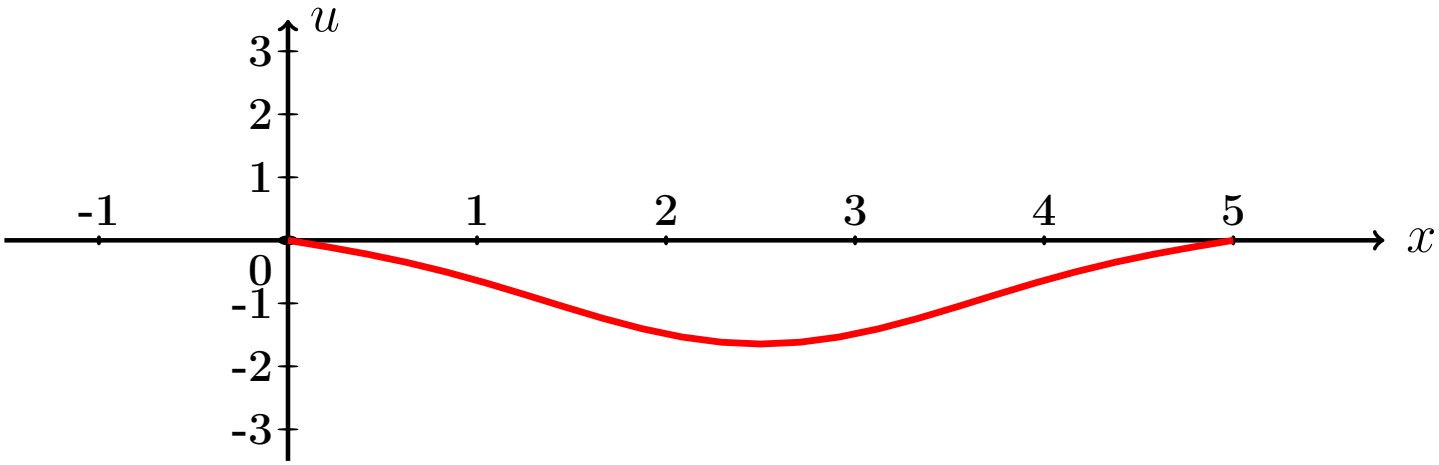


Рис.:

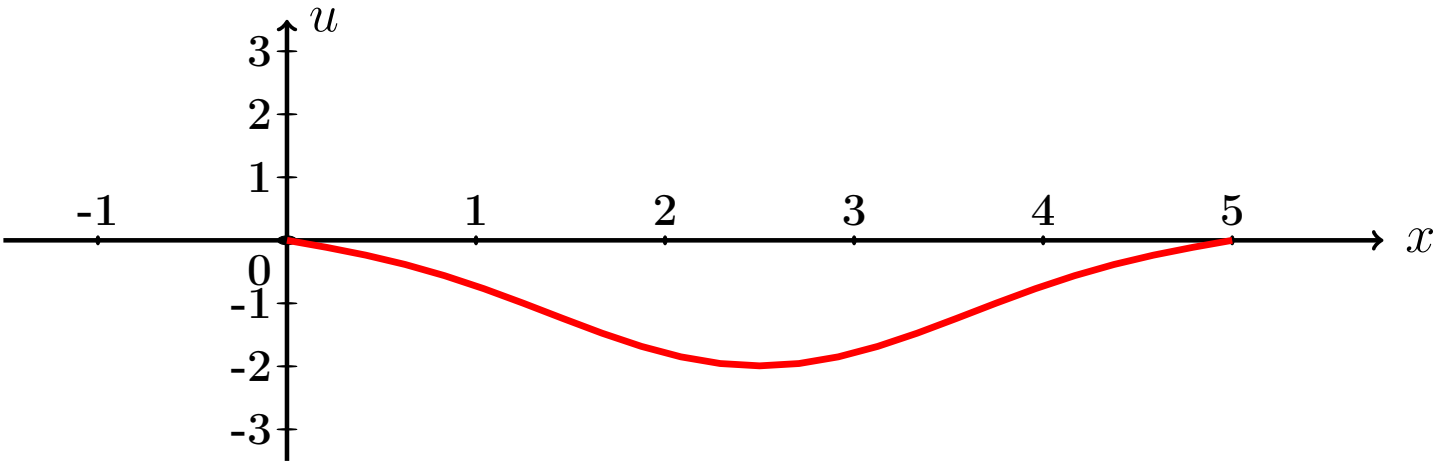


Рис.:

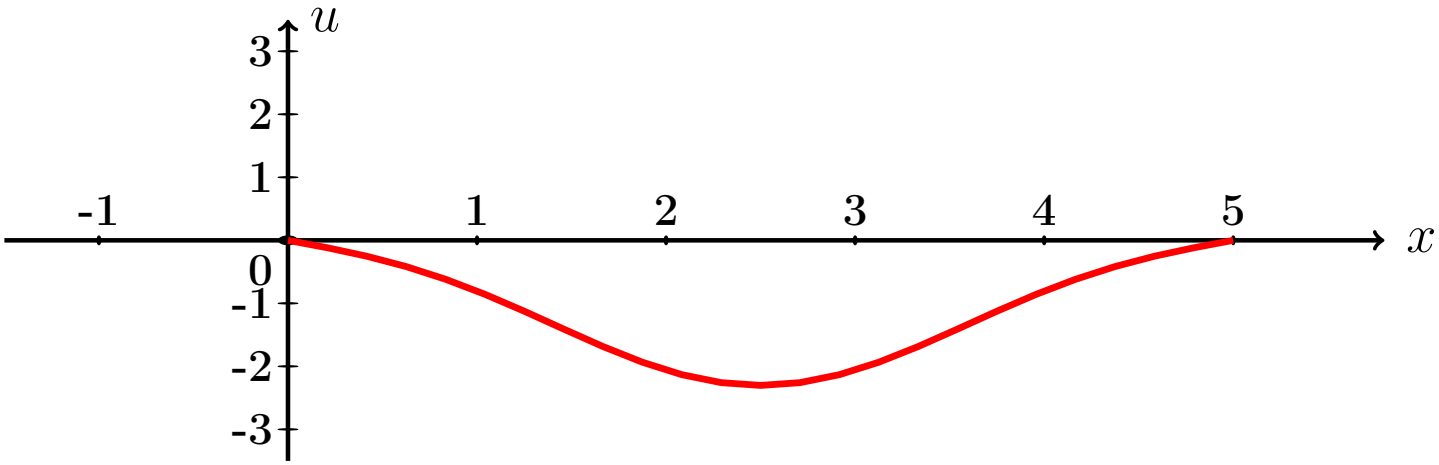


Рис.:

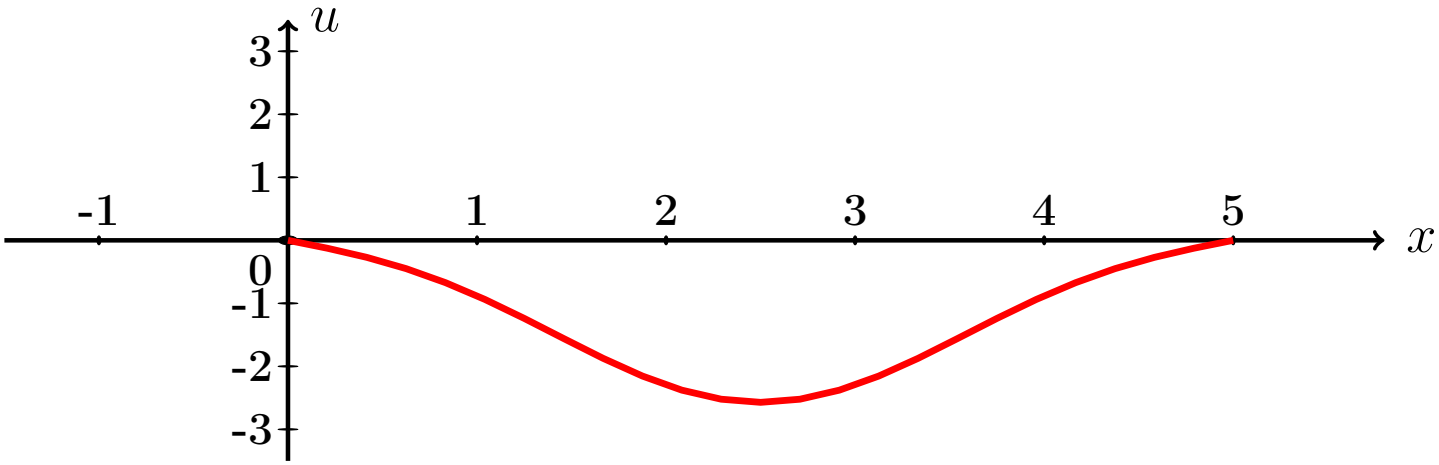


Рис.:

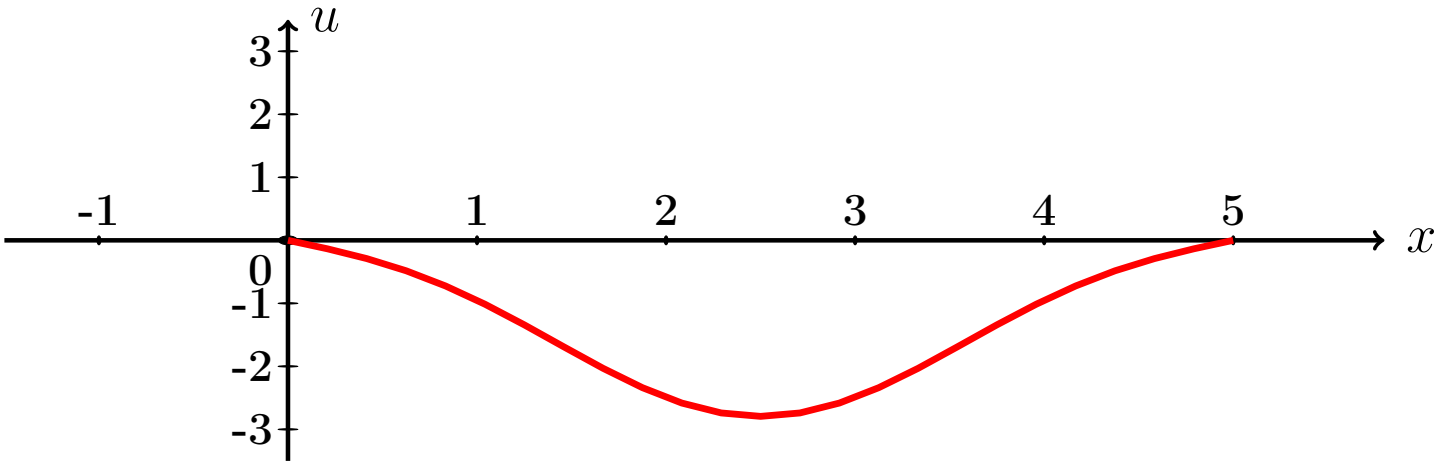


Рис.:

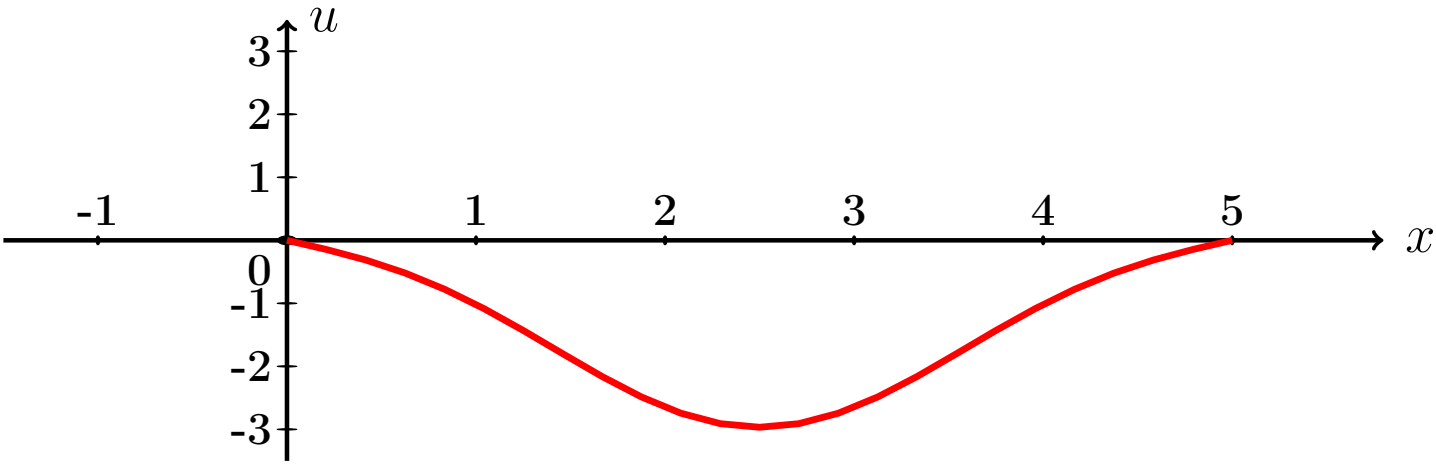


Рис.:

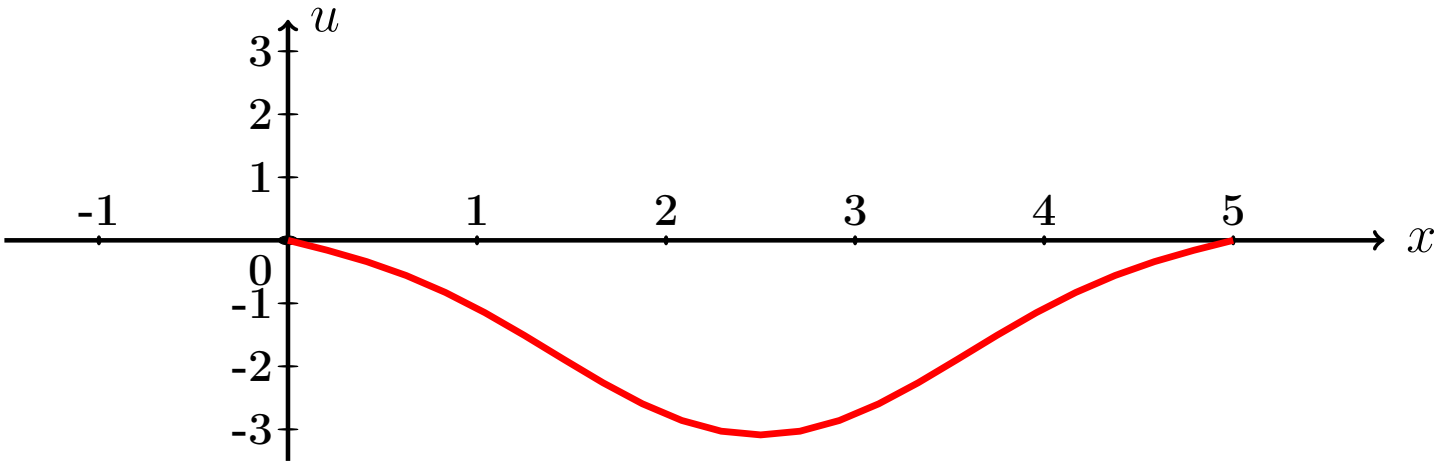


Рис.:

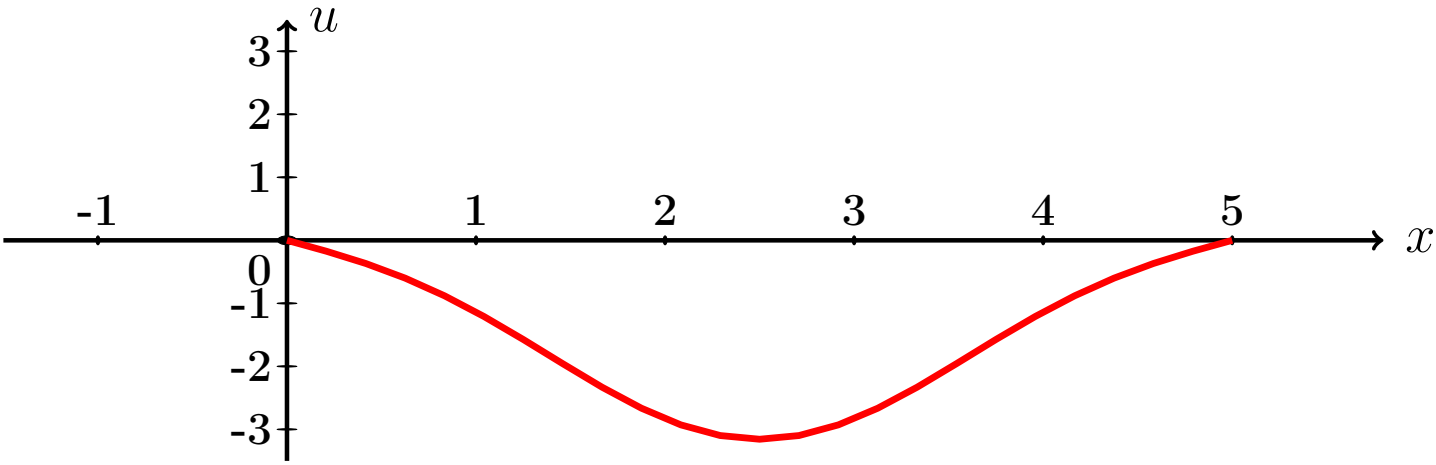


Рис.:

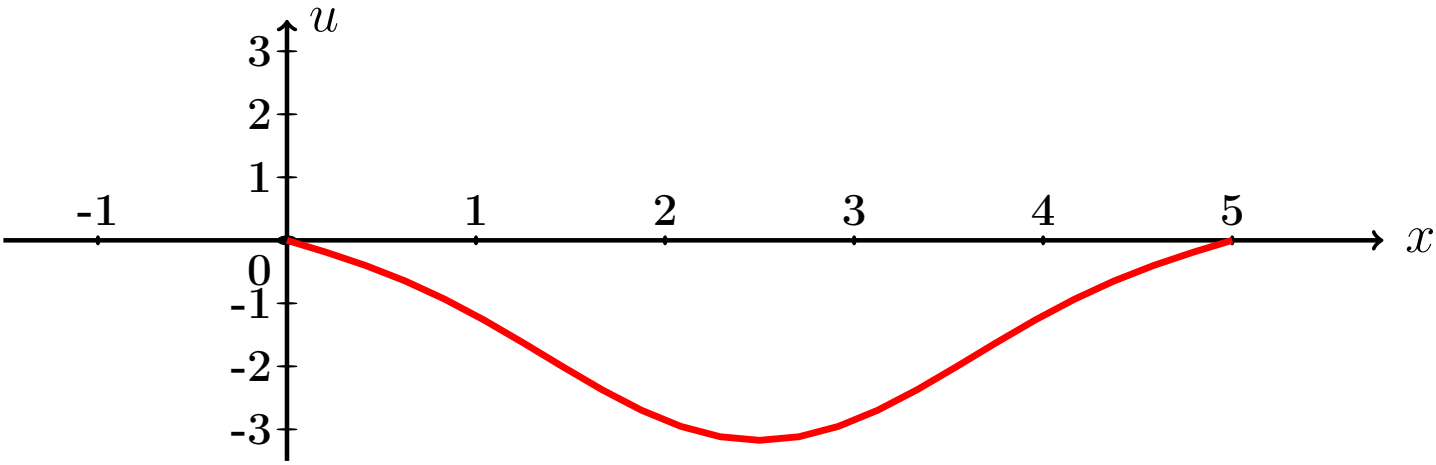


Рис.:

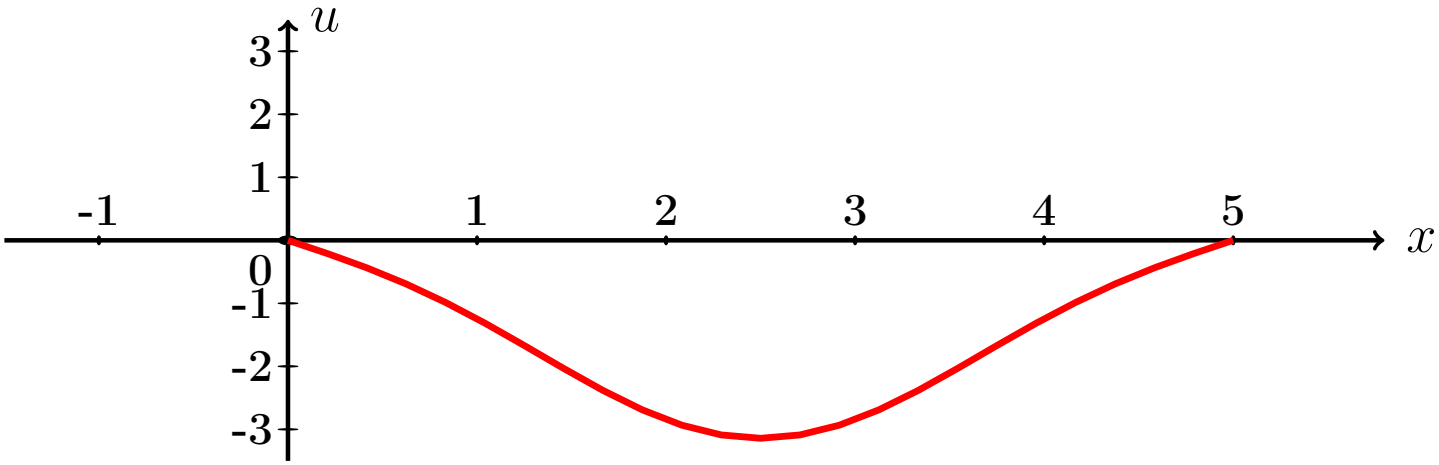


Рис.:

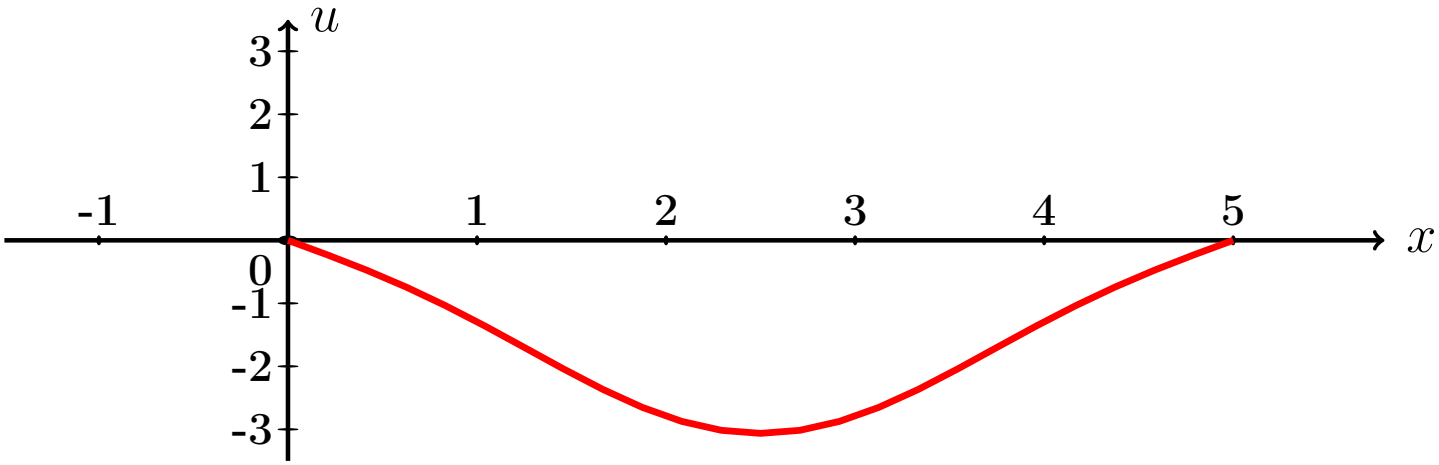


Рис.:

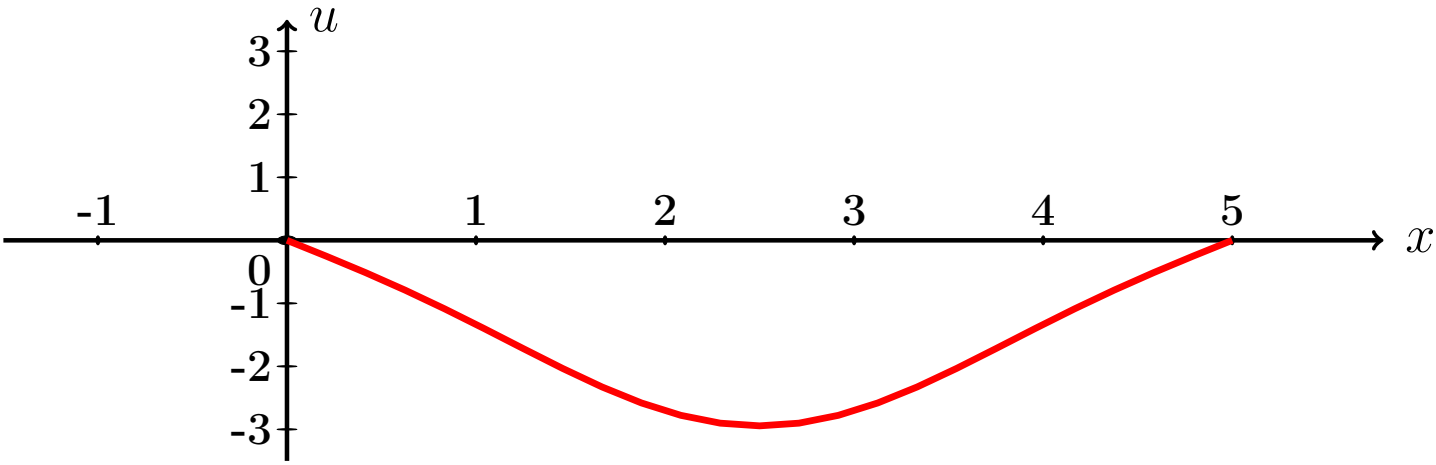


Рис.:

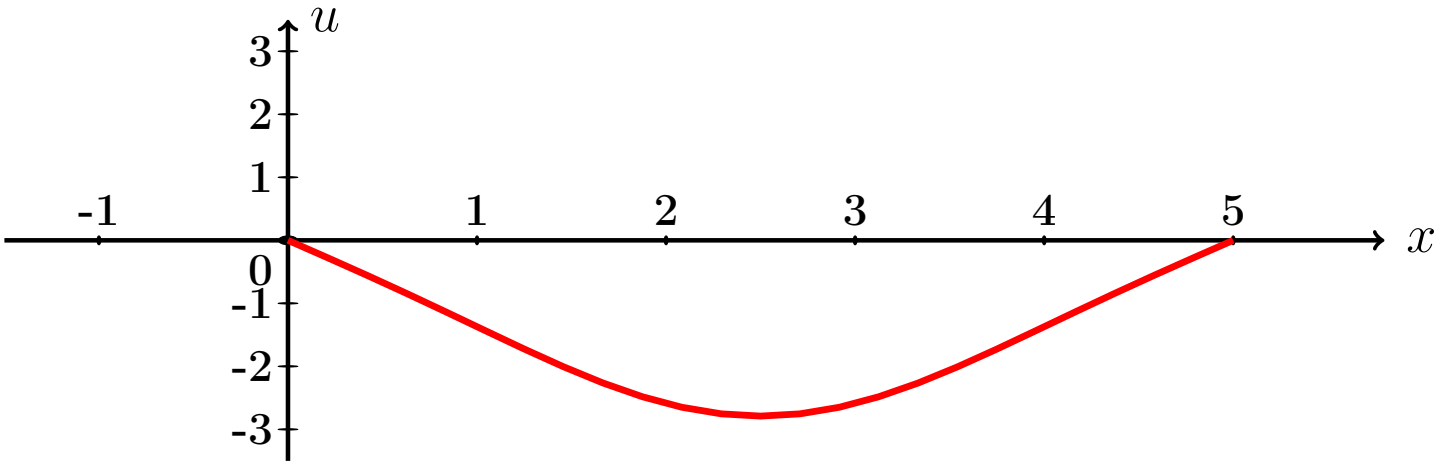


Рис.:

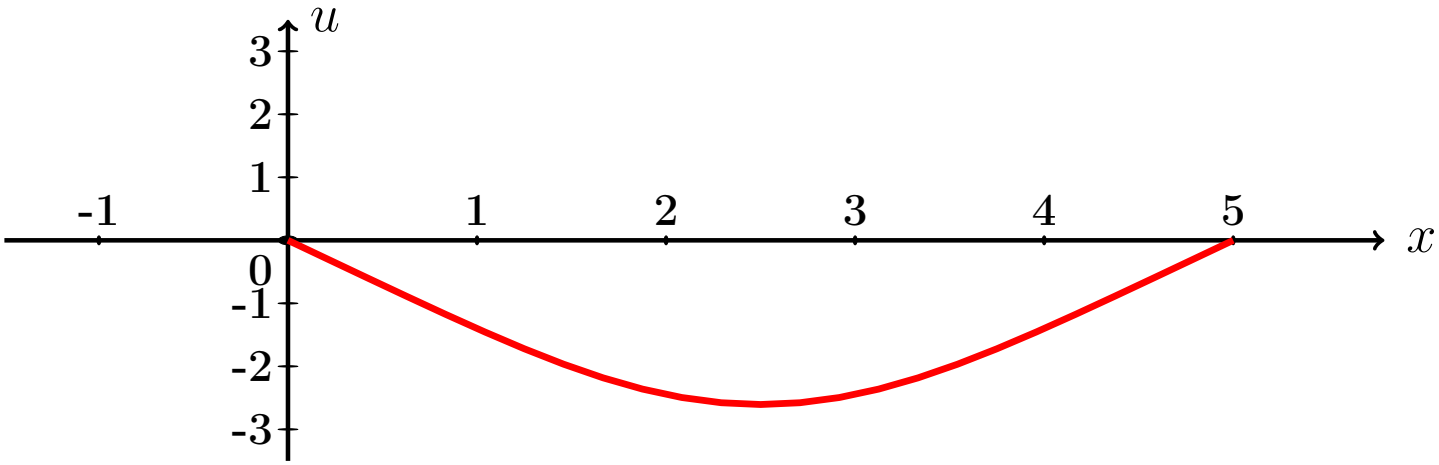


Рис.:

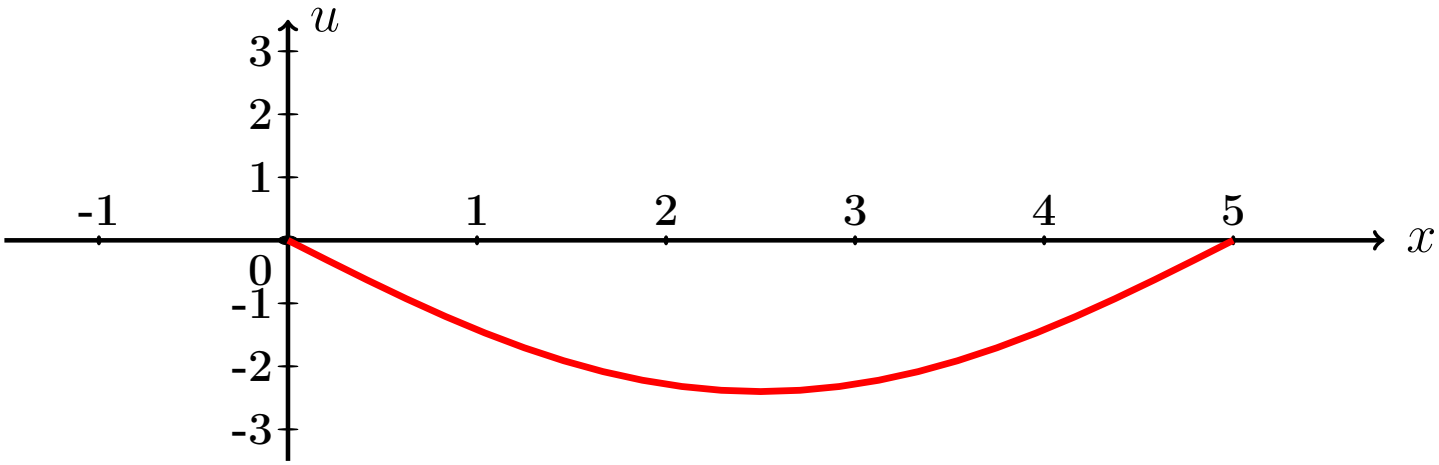


Рис.:

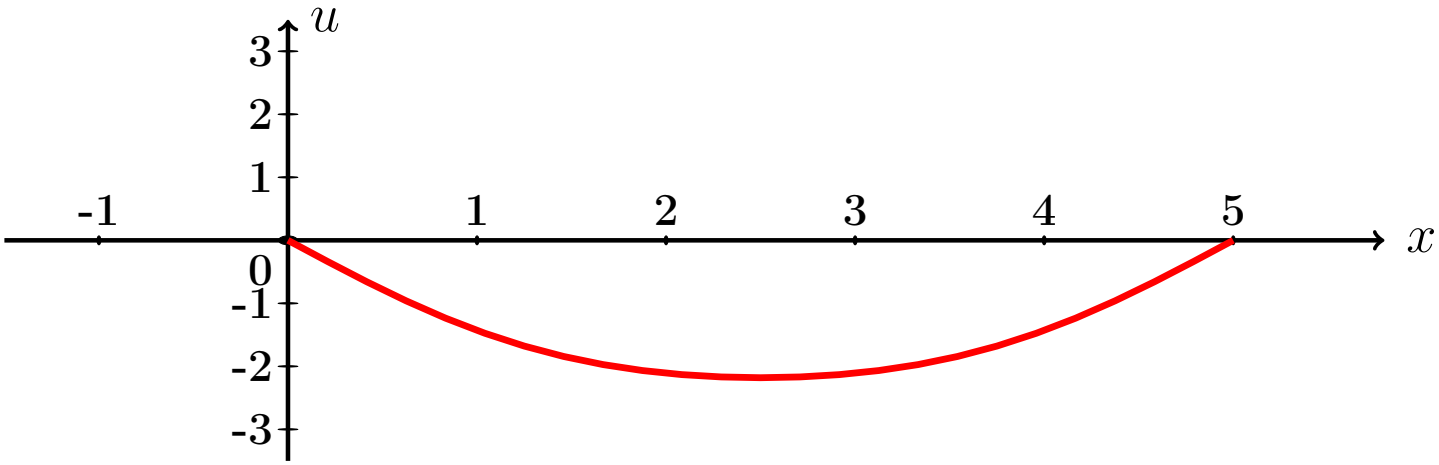


Рис.:

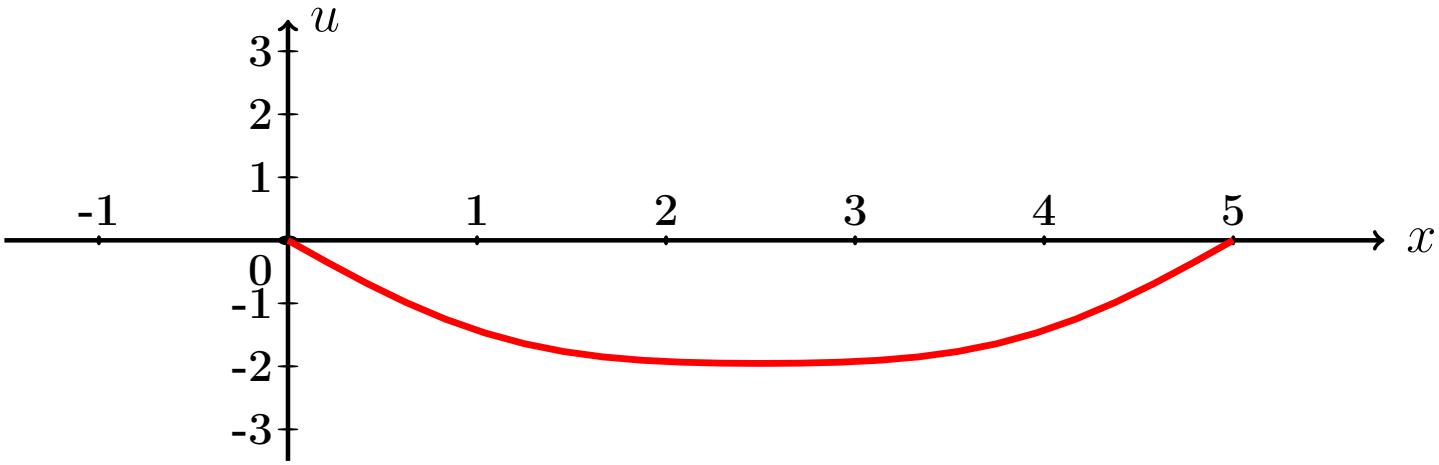


Рис.:

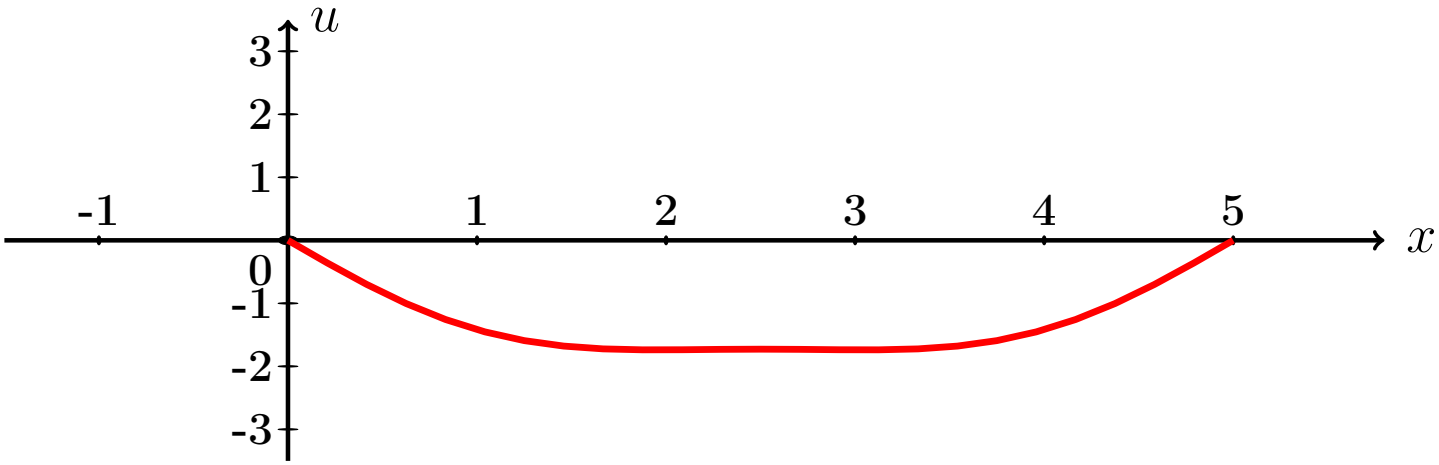


Рис.:

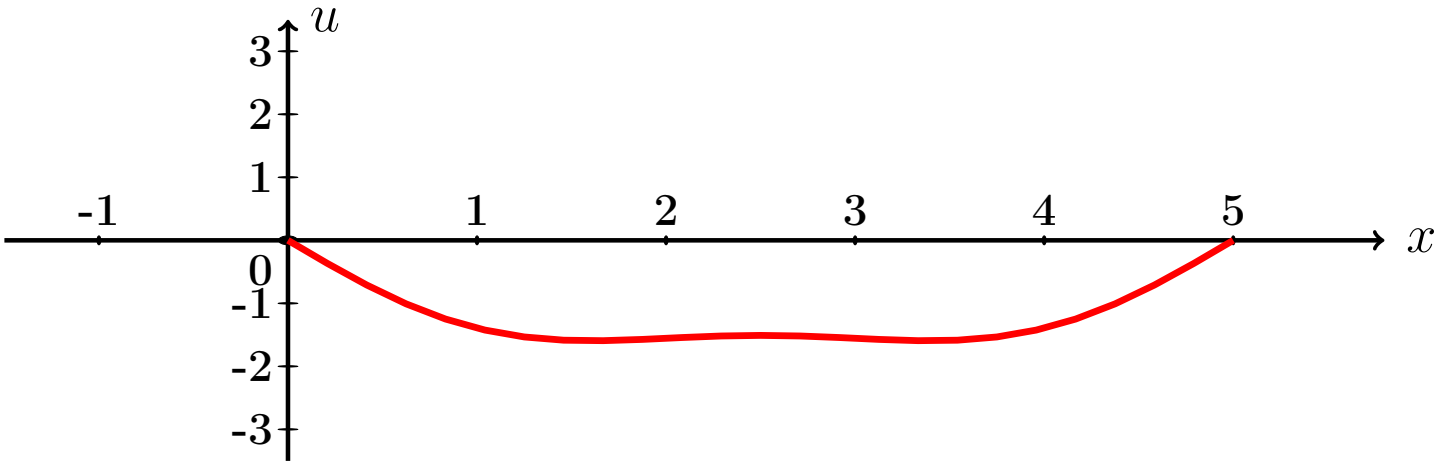


Рис.:

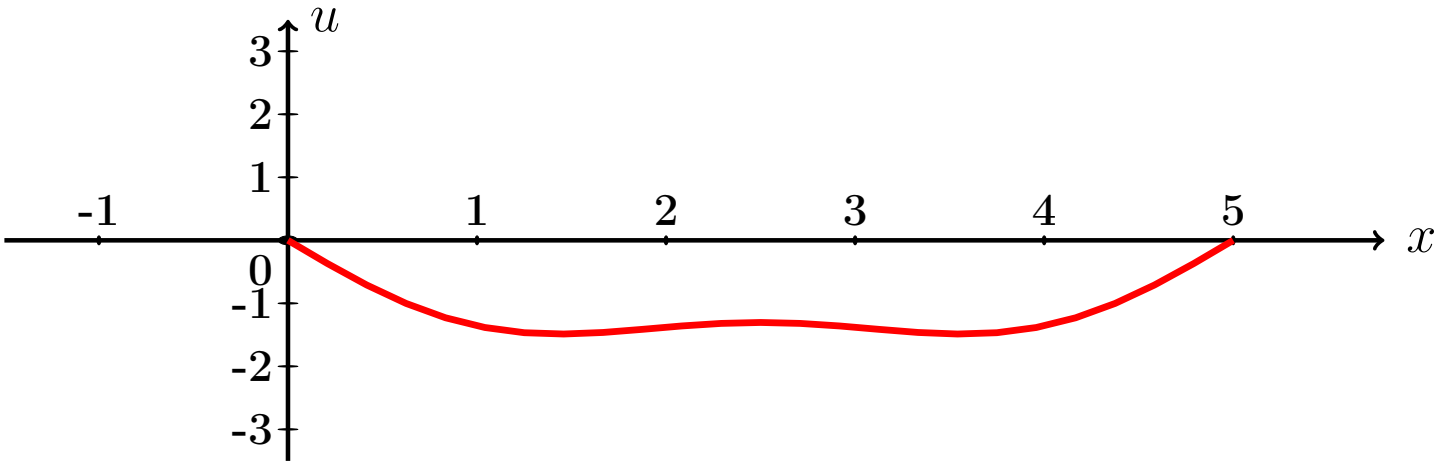


Рис.:

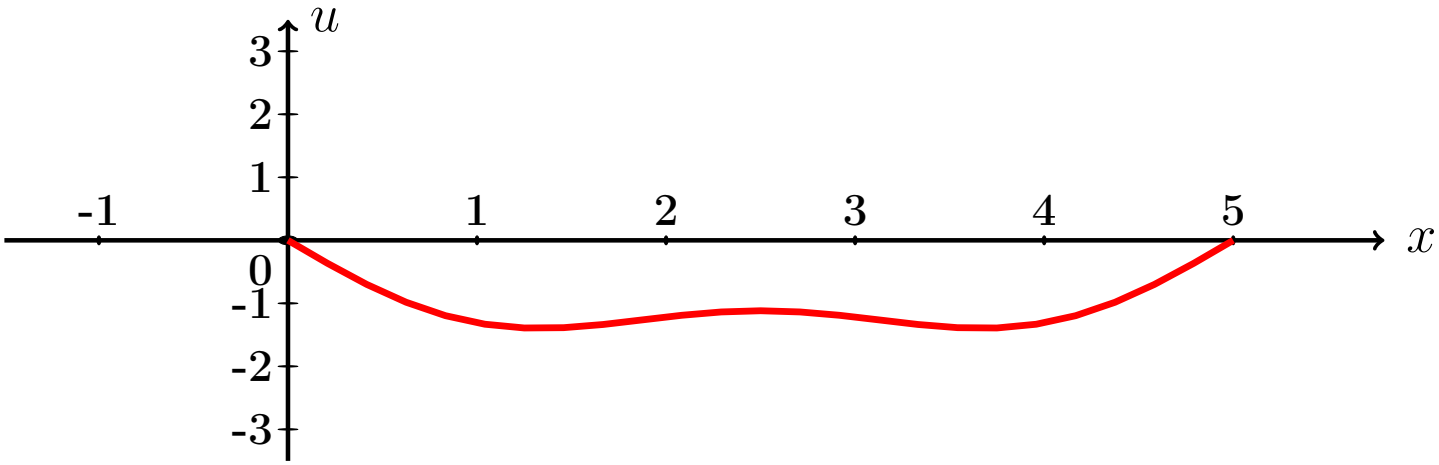


Рис.:

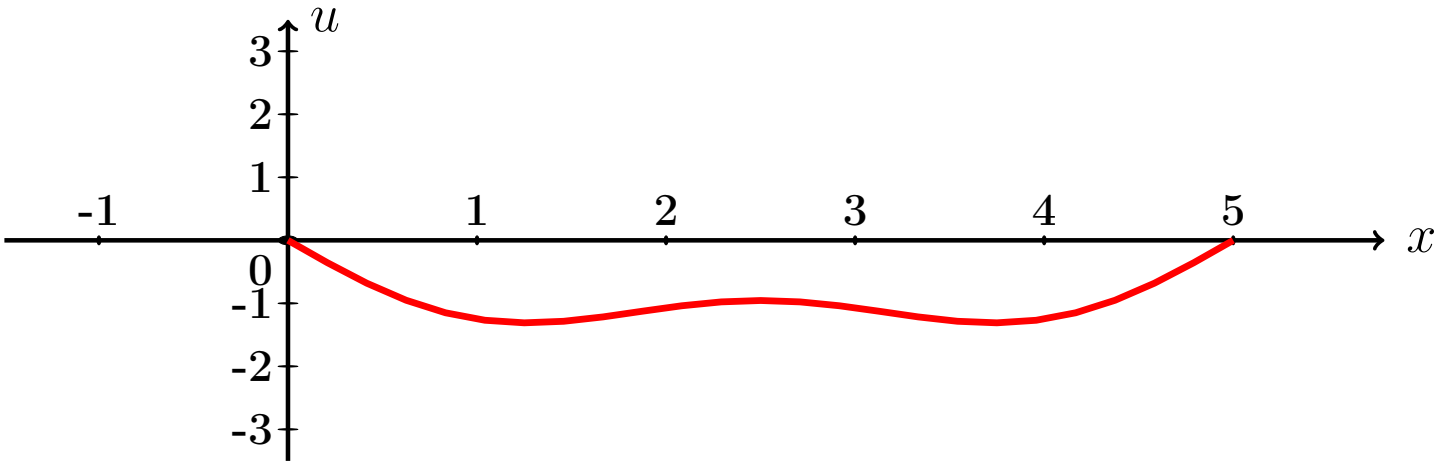


Рис.:

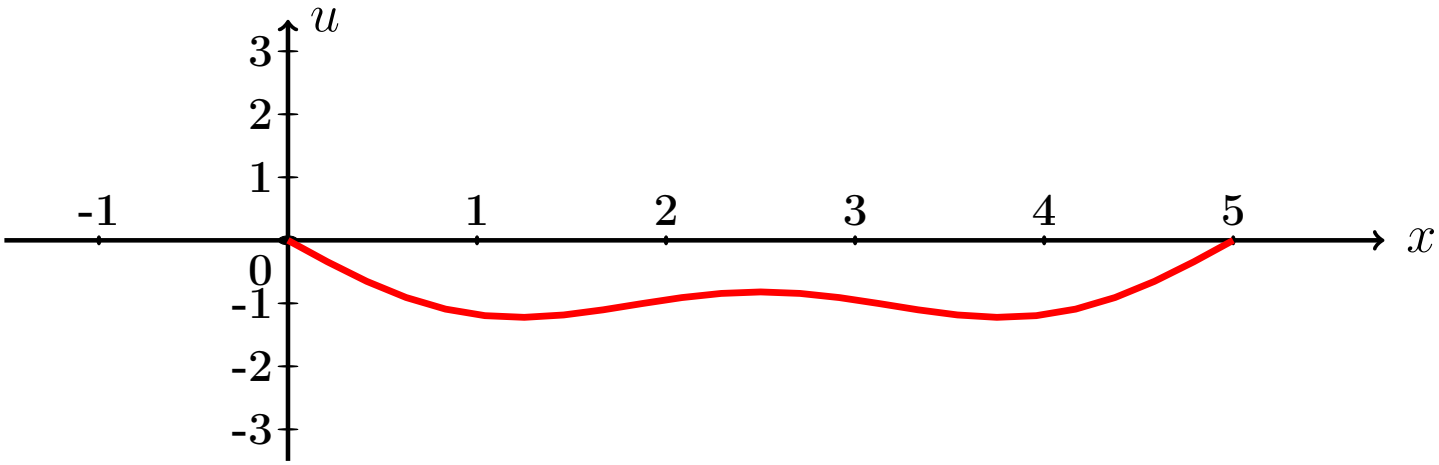


Рис.:

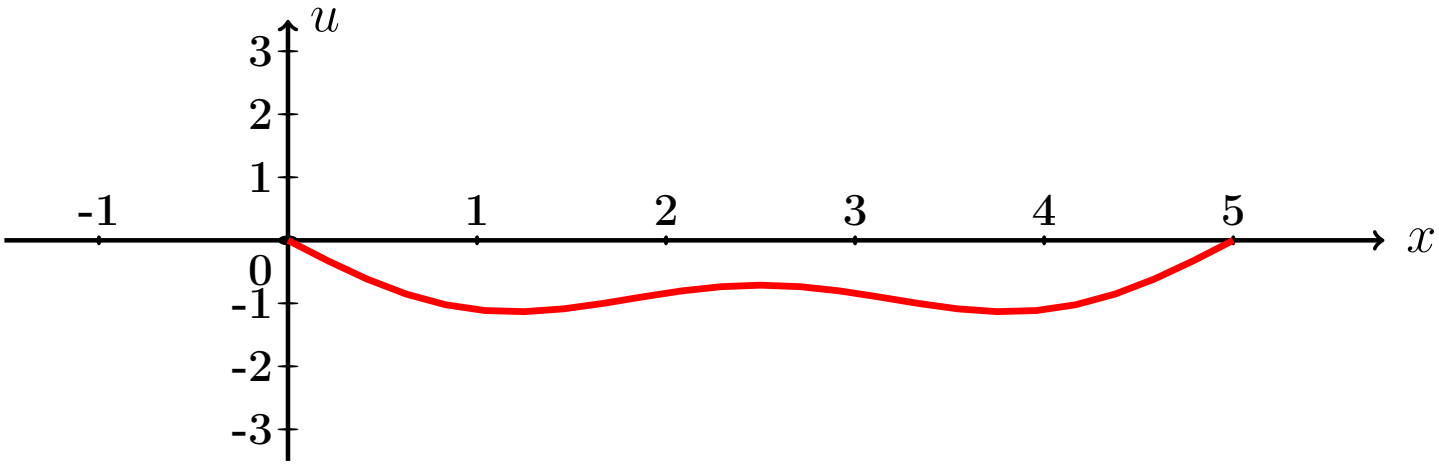


Рис.:

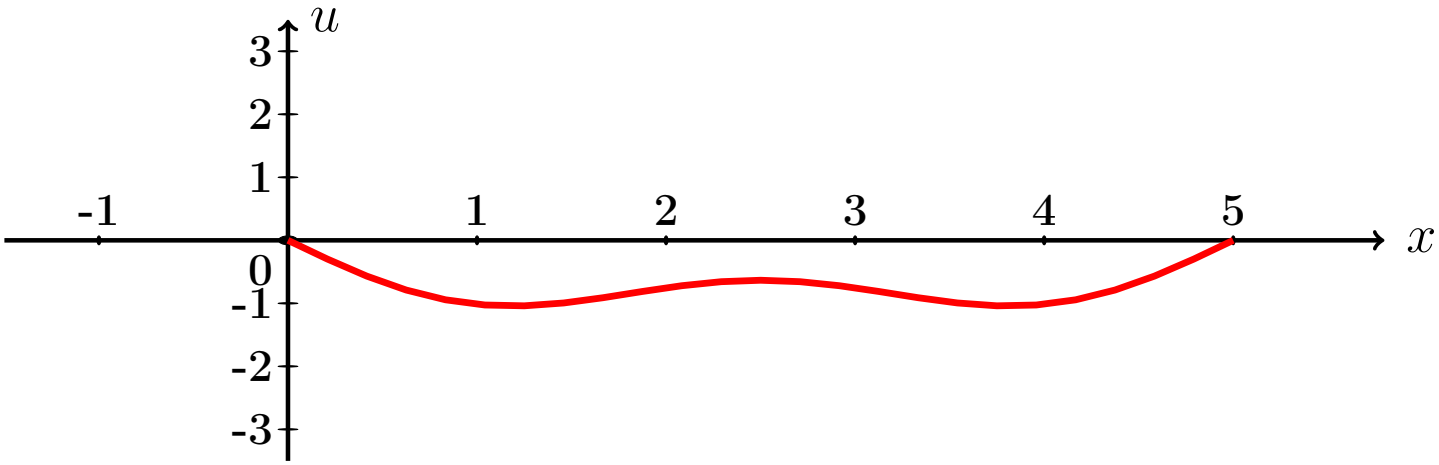


Рис.:

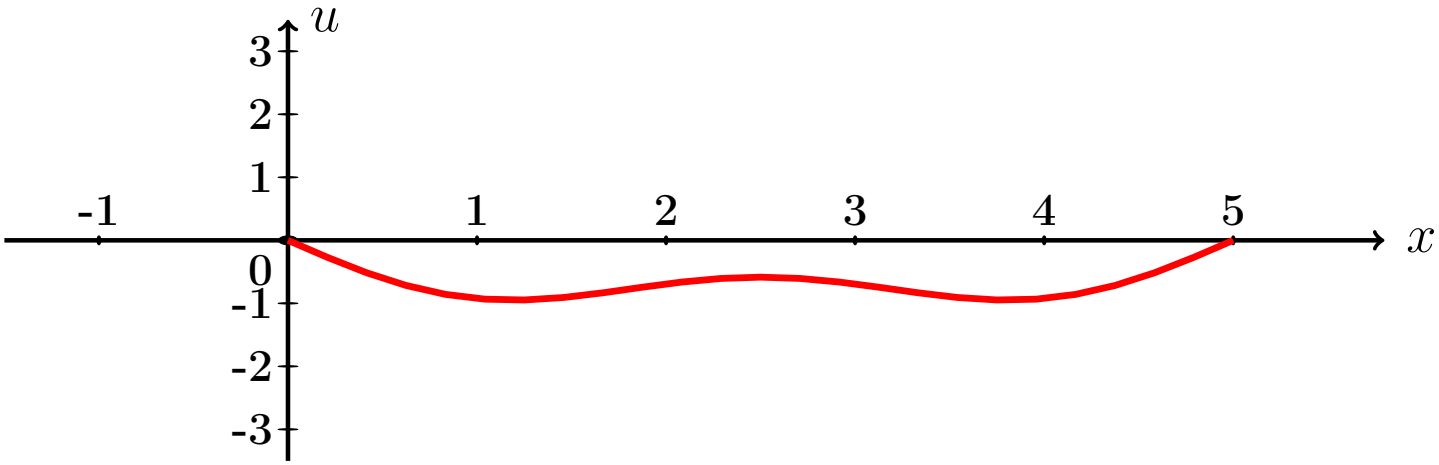


Рис.:

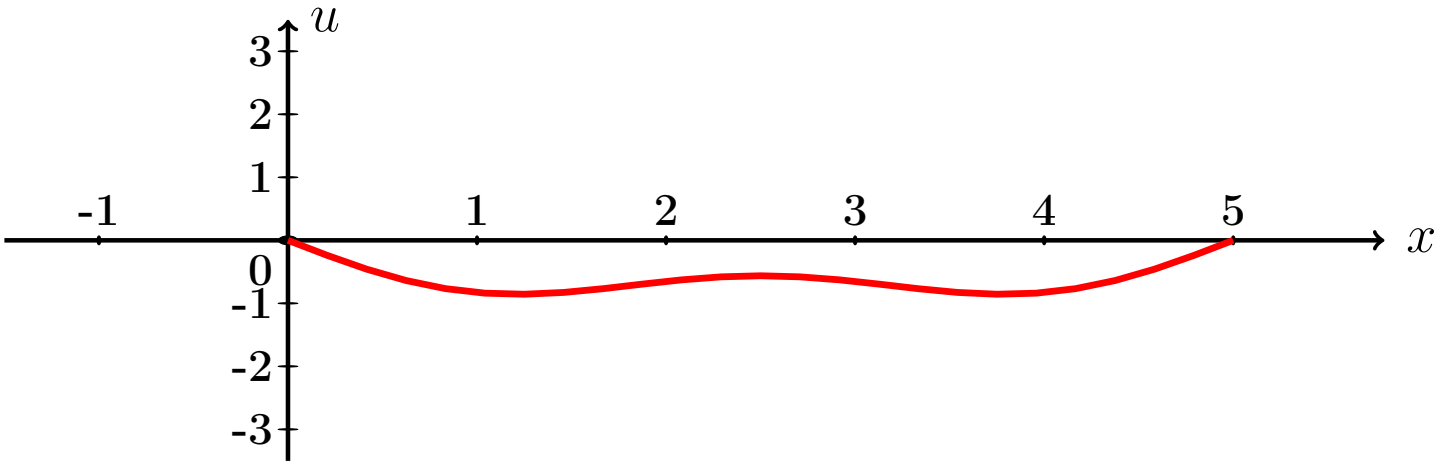


Рис.:

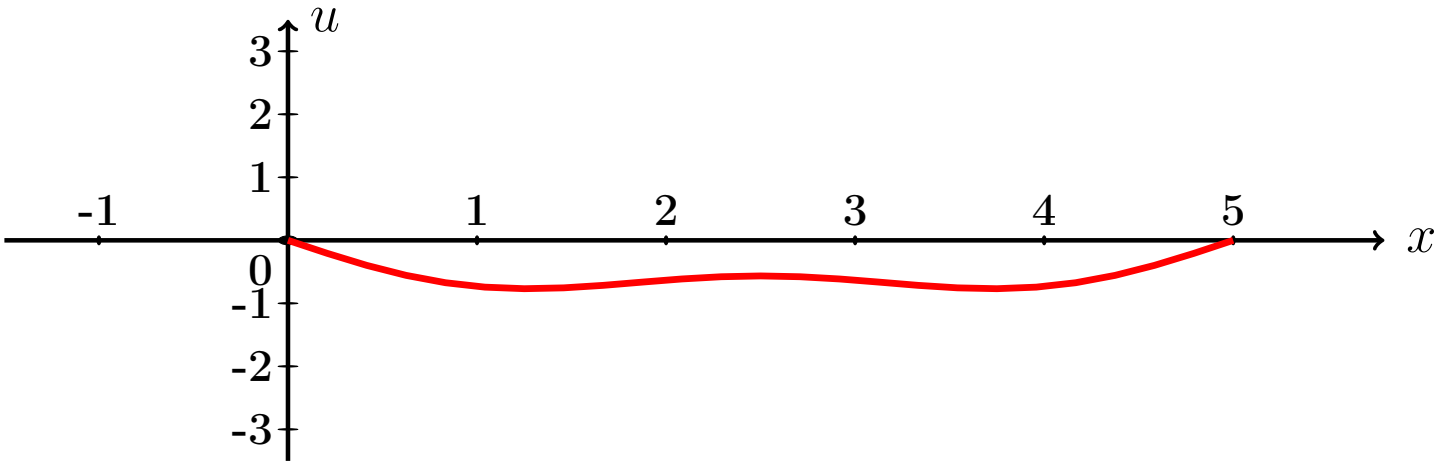


Рис.:

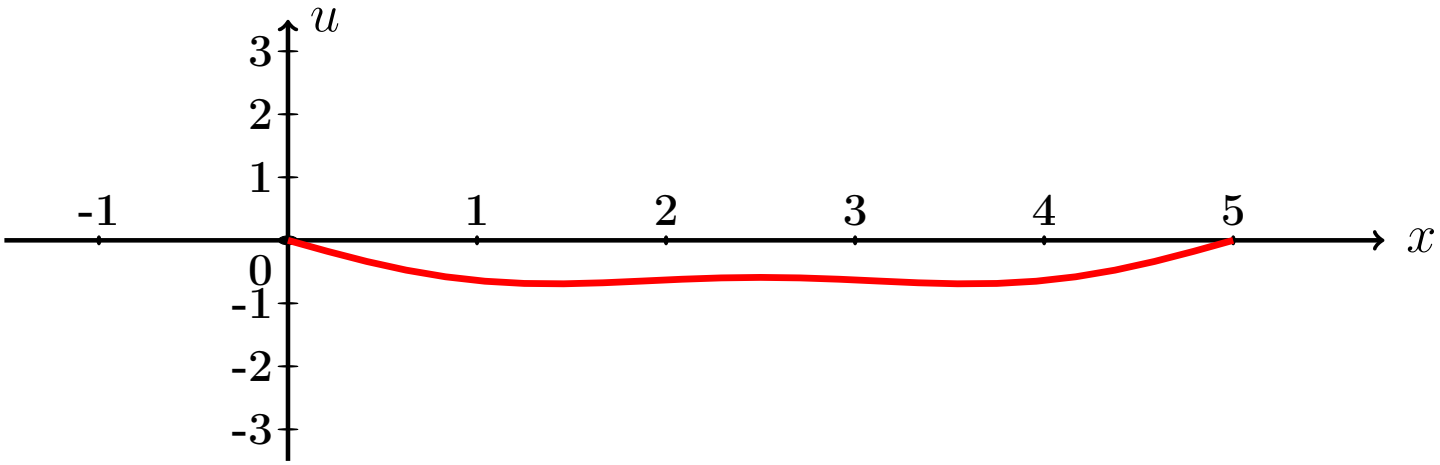


Рис.:

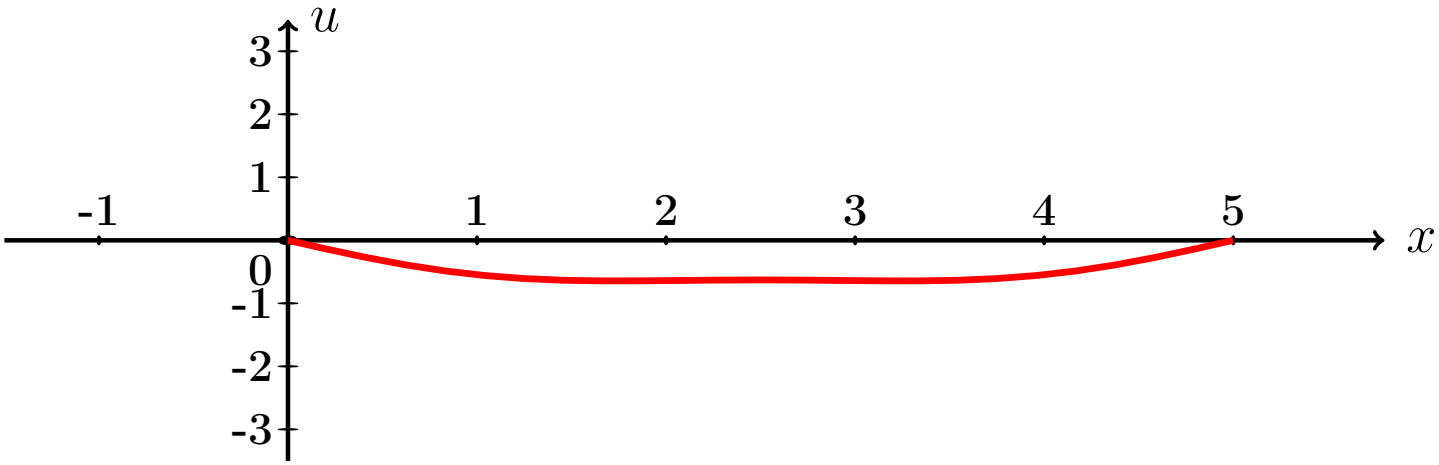


Рис.:

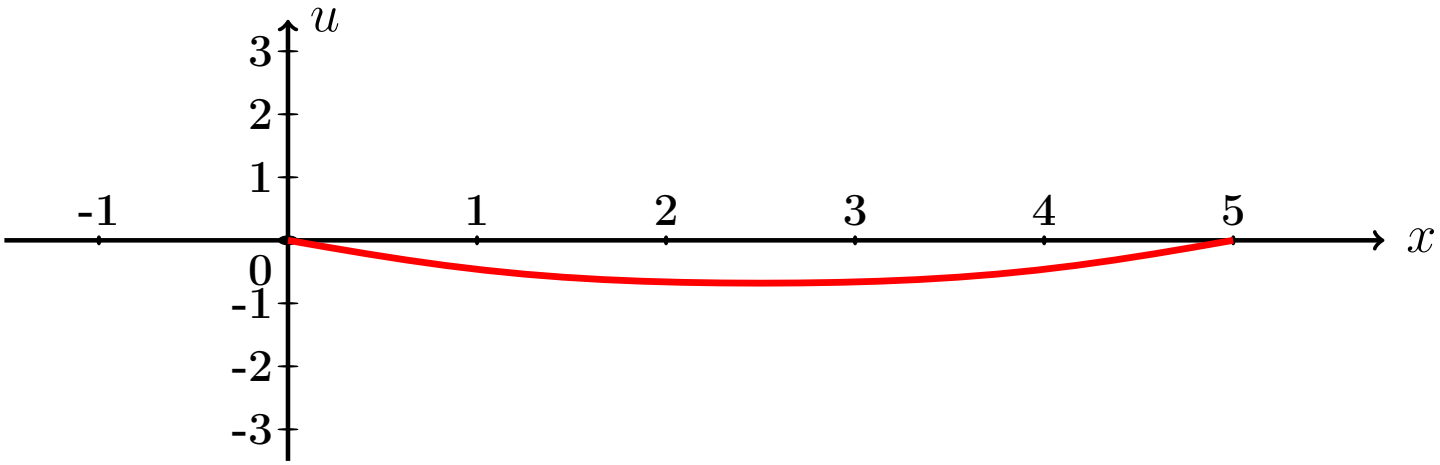


Рис.:

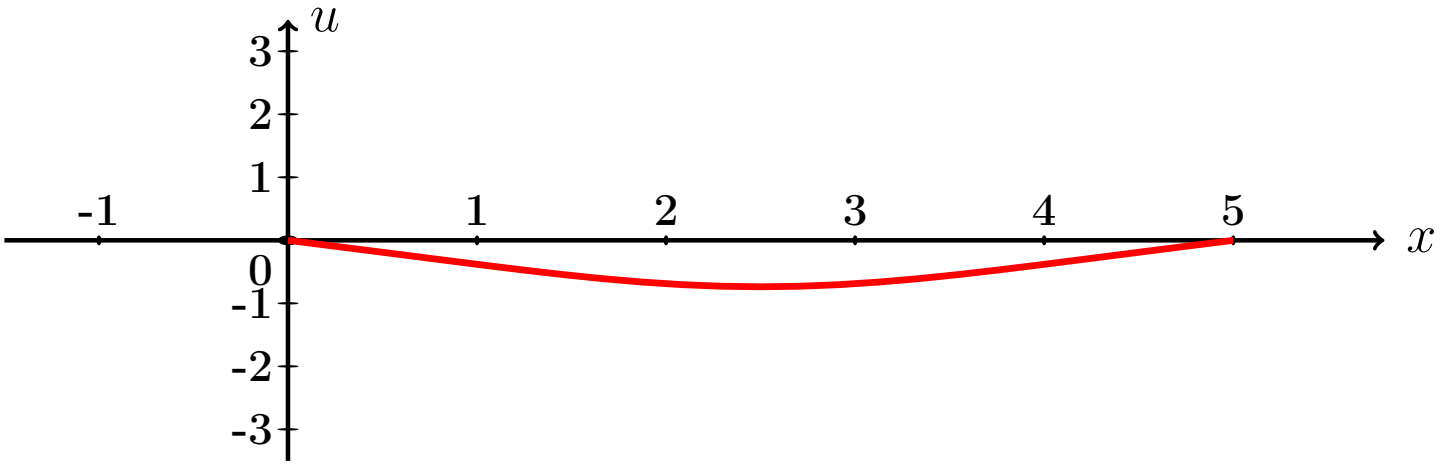


Рис.:

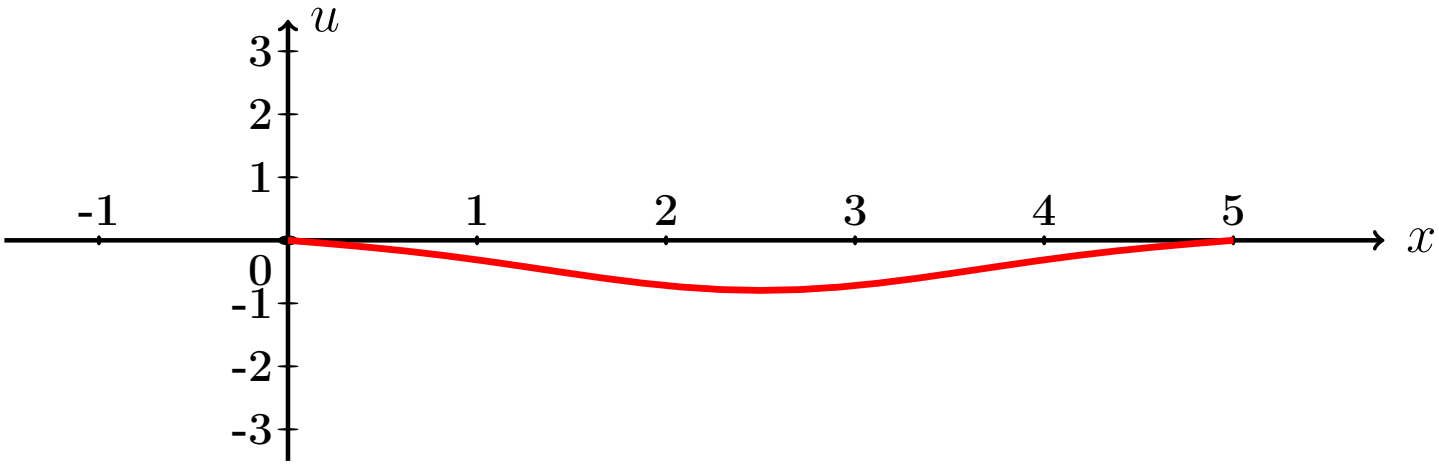


Рис.:

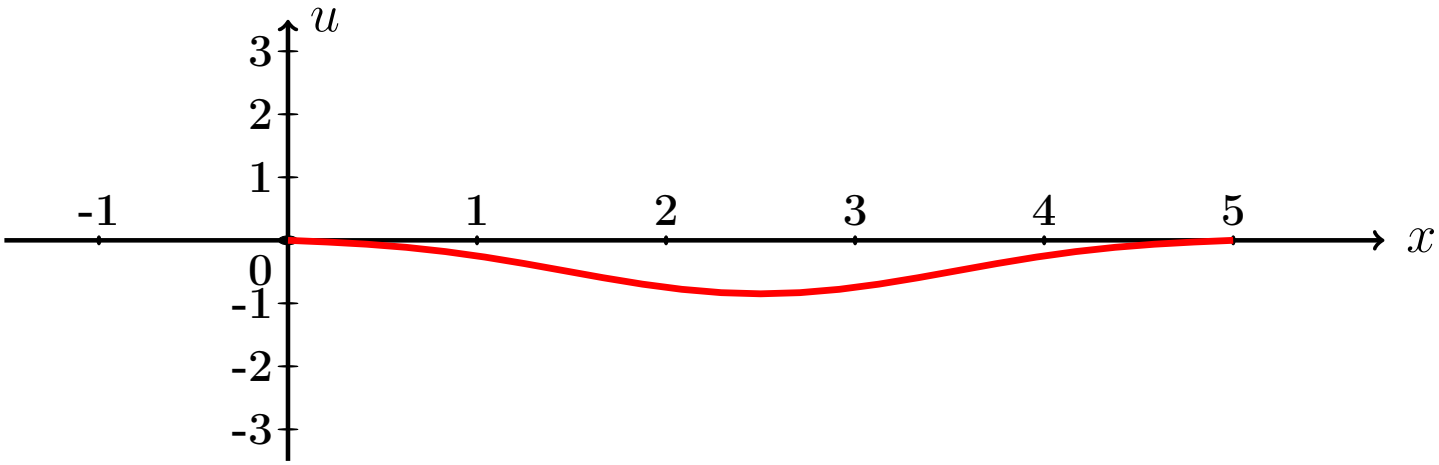


Рис.:

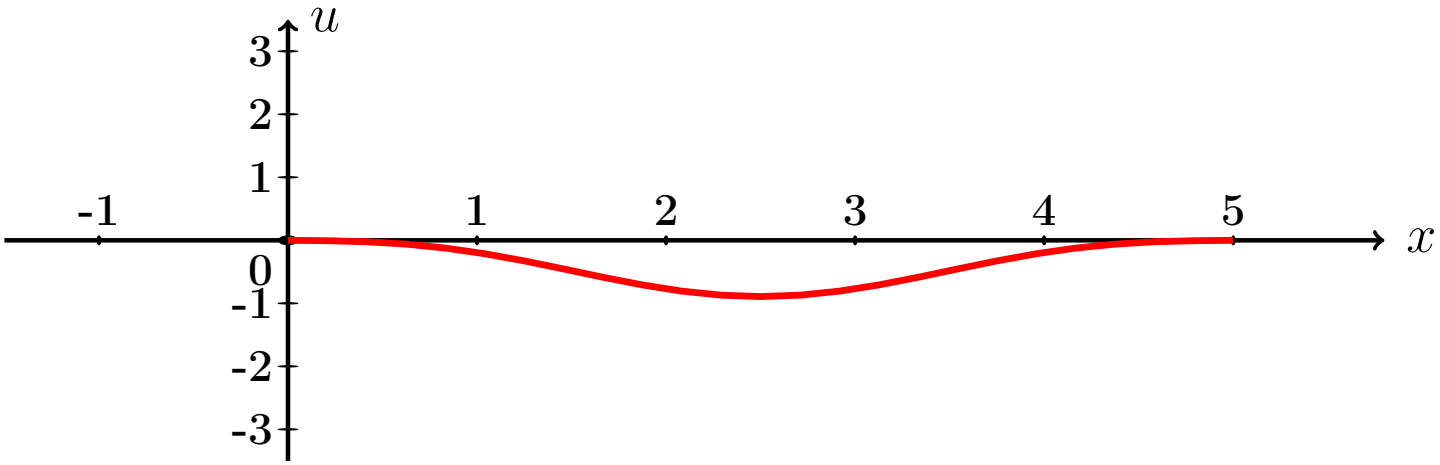


Рис.:

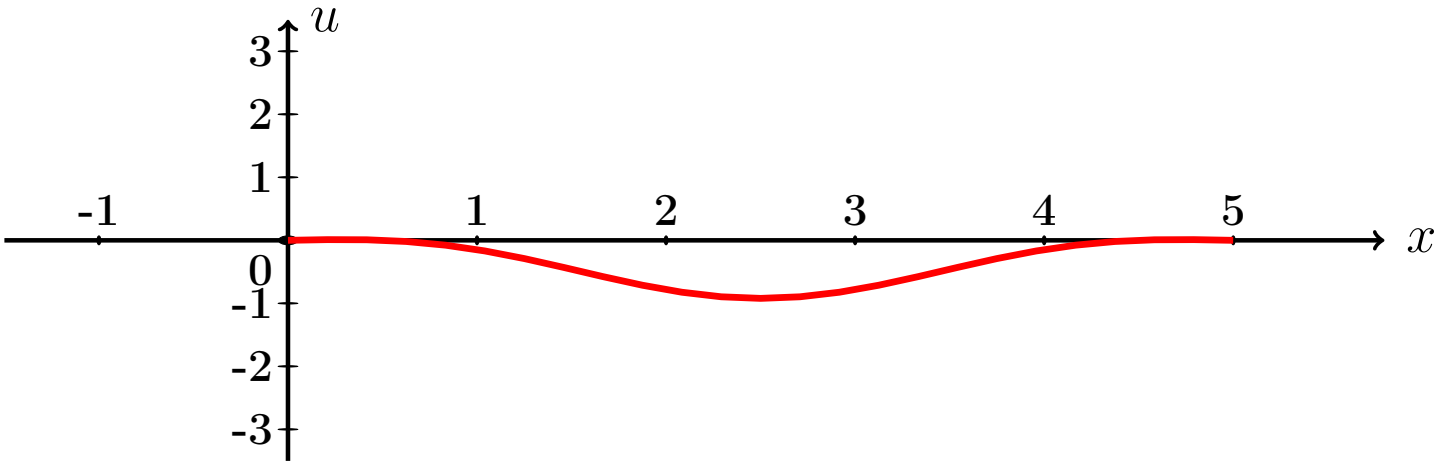


Рис.:

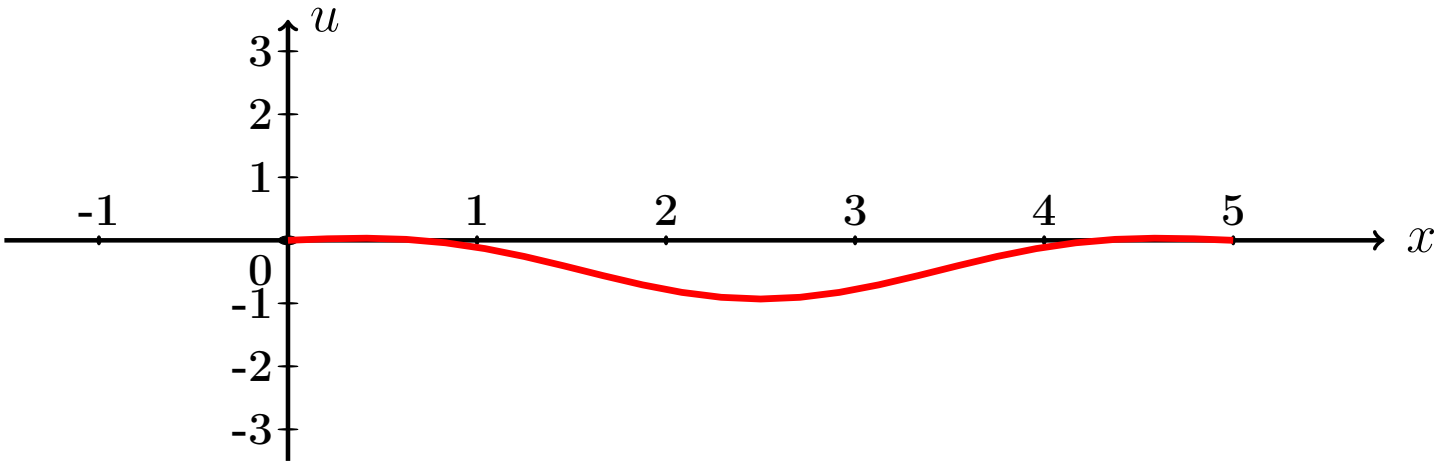


Рис.:

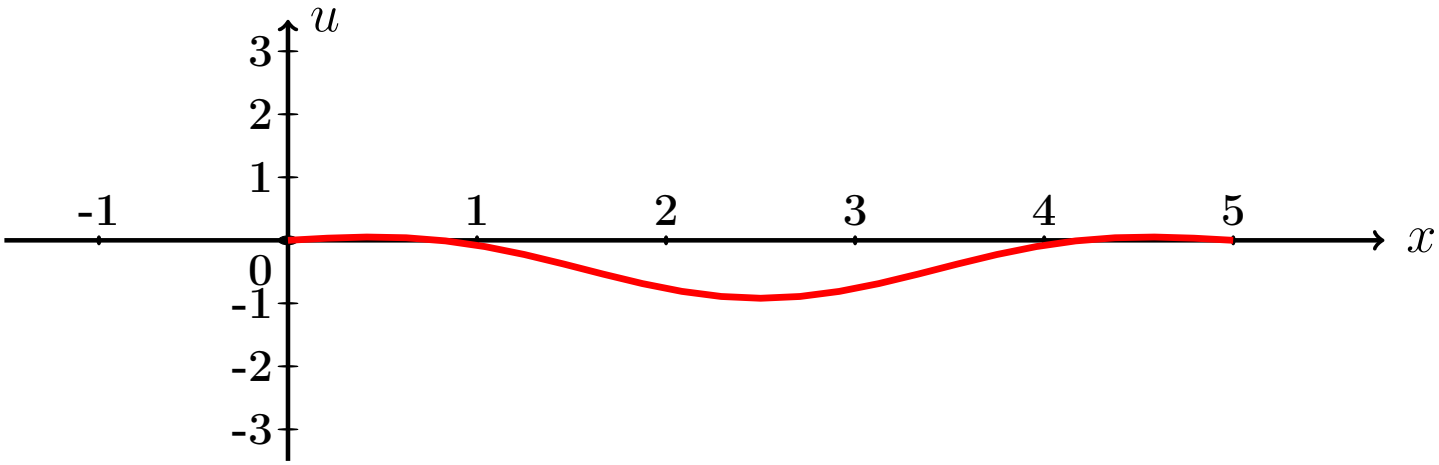


Рис.:

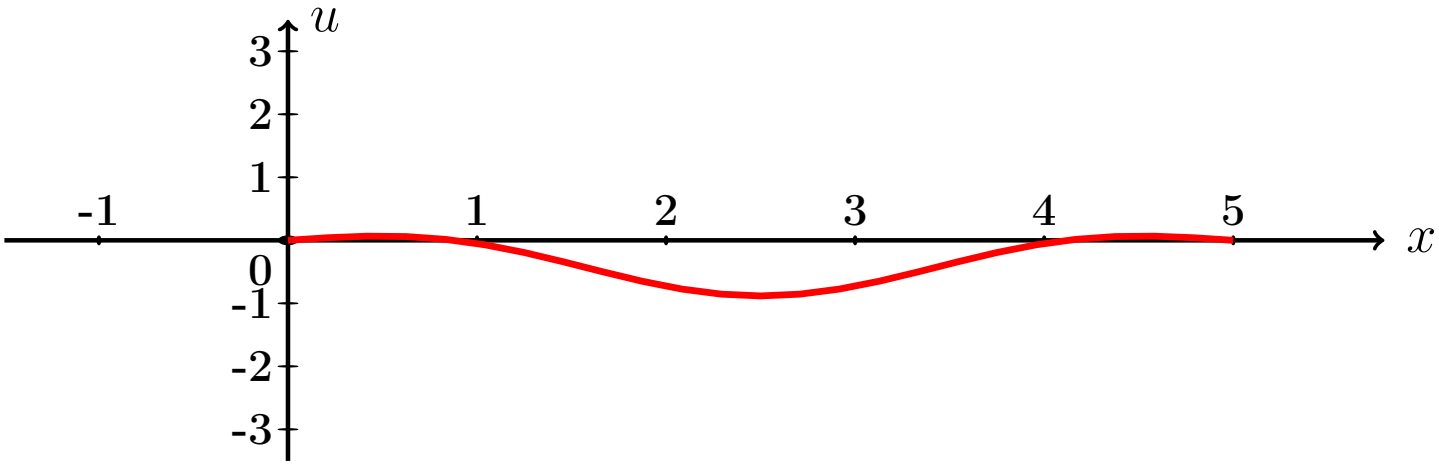


Рис.:

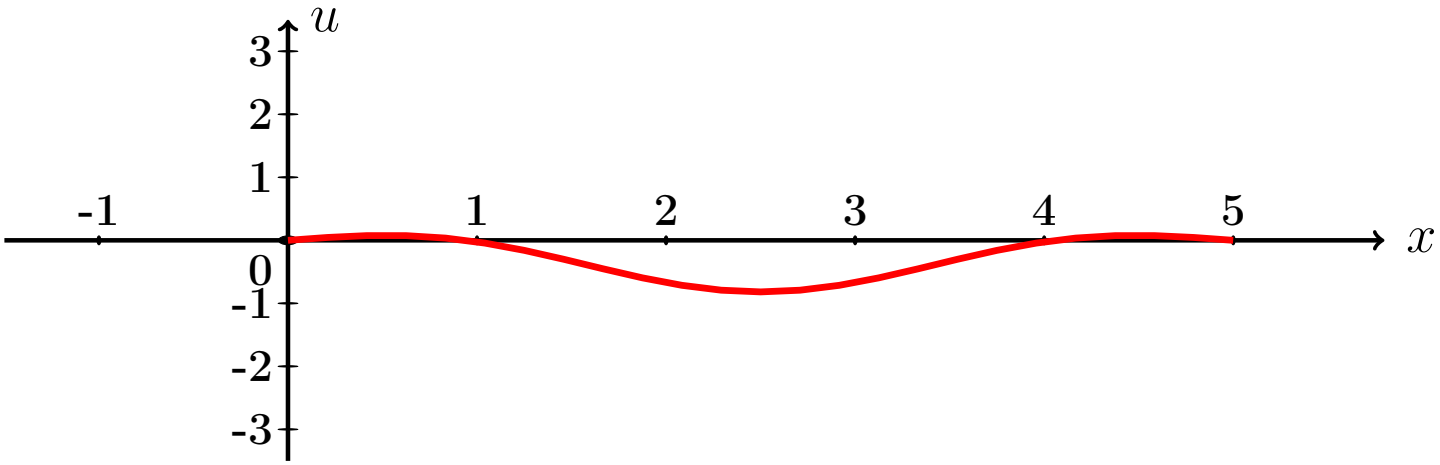


Рис.:

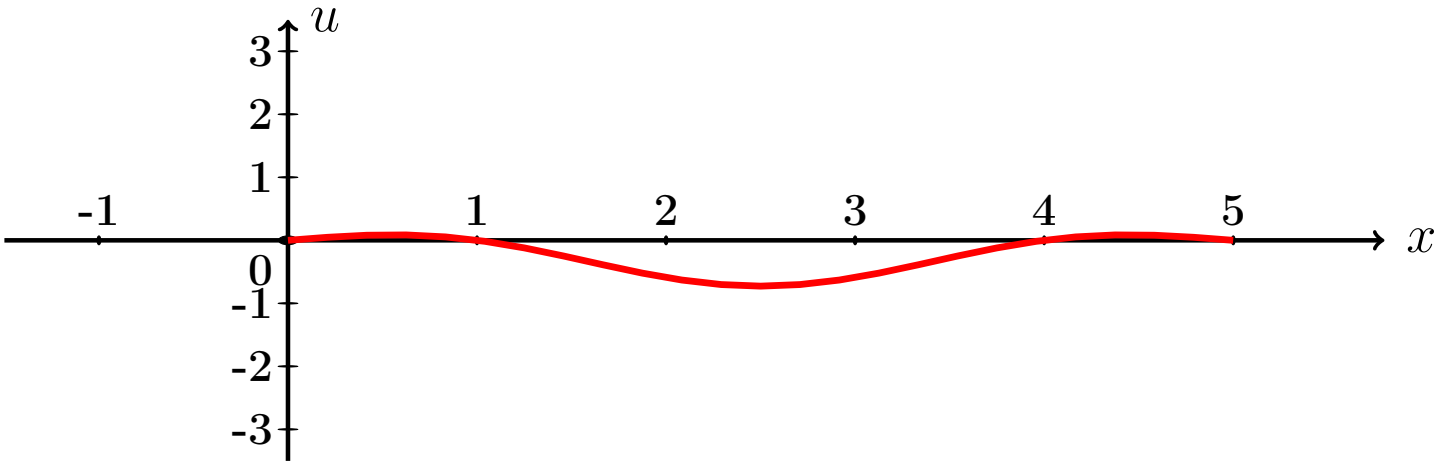


Рис.:

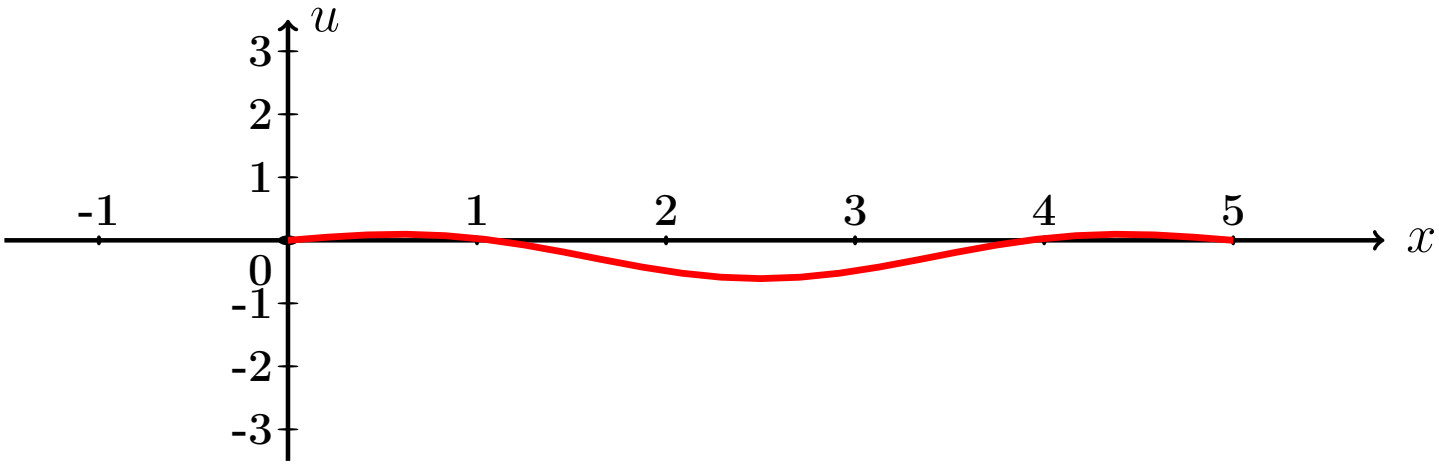


Рис.:

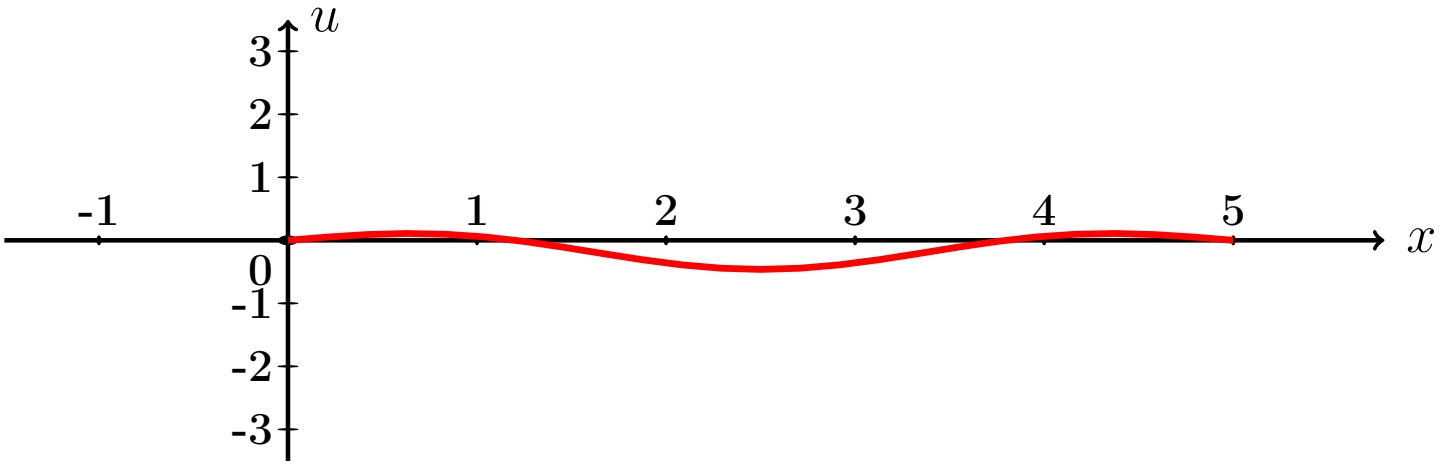


Рис.:

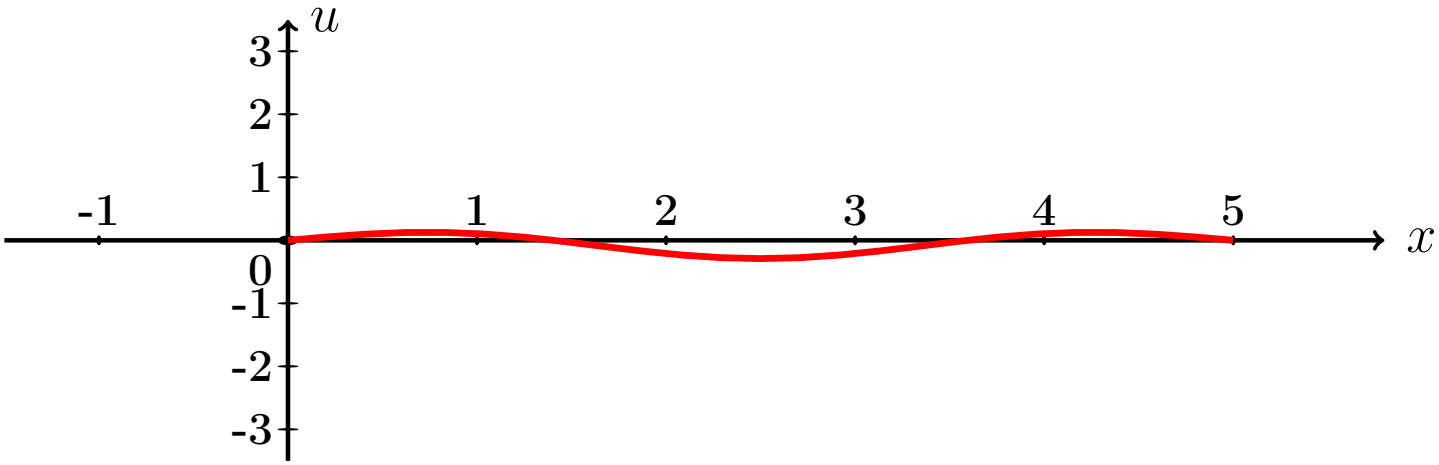


Рис.:

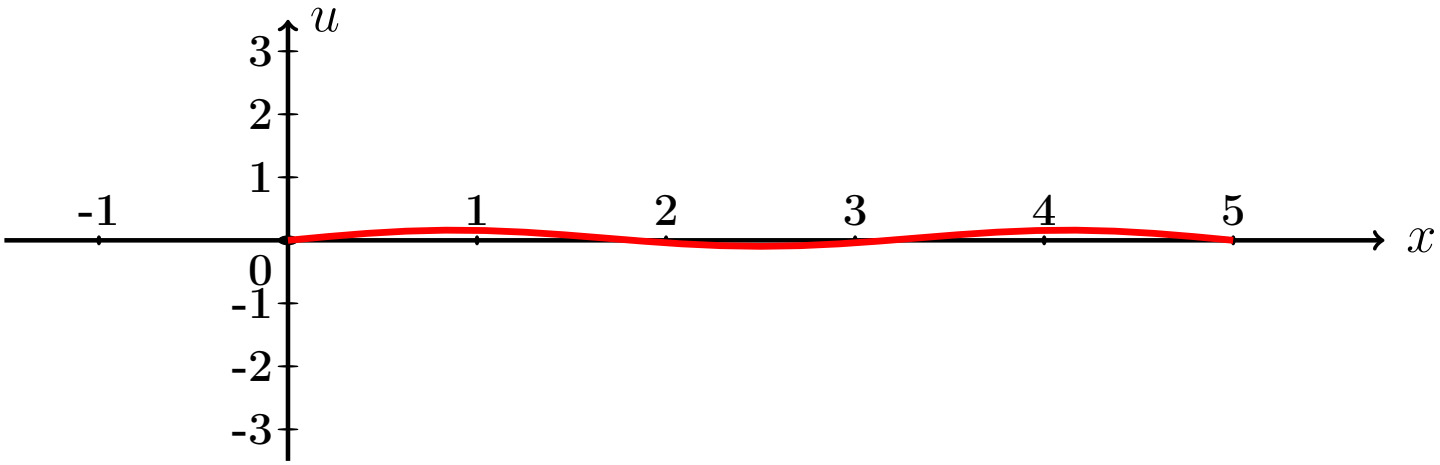


Рис.:

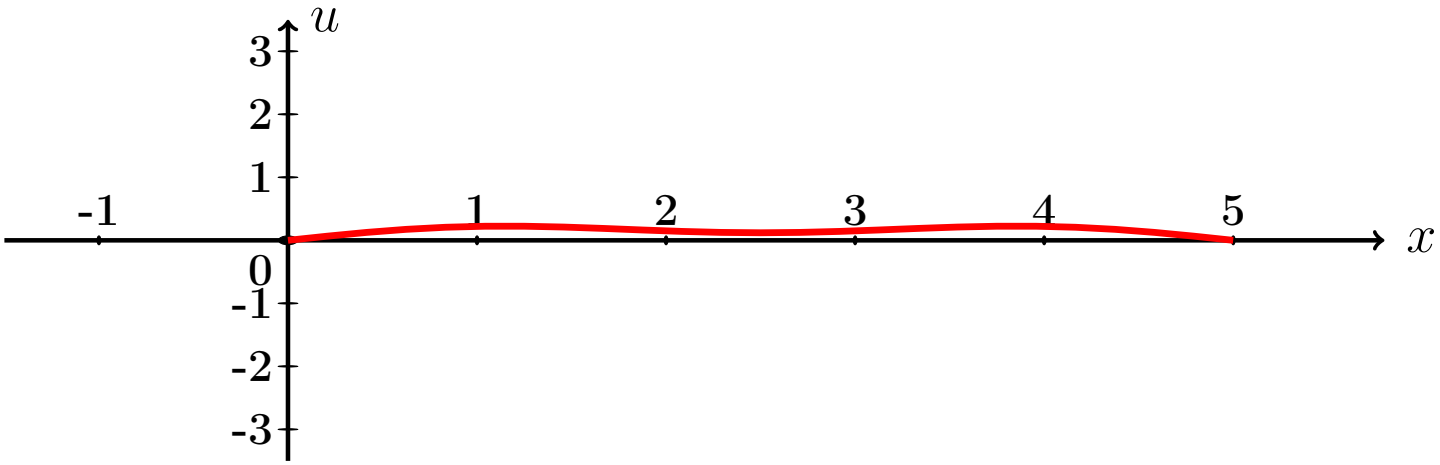


Рис.:

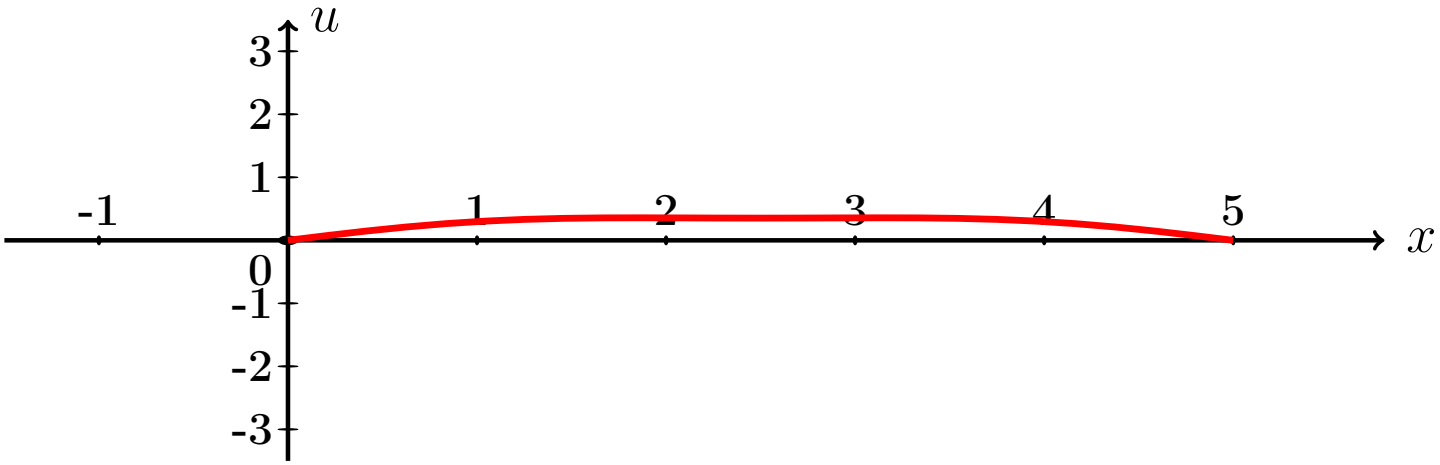


Рис.:

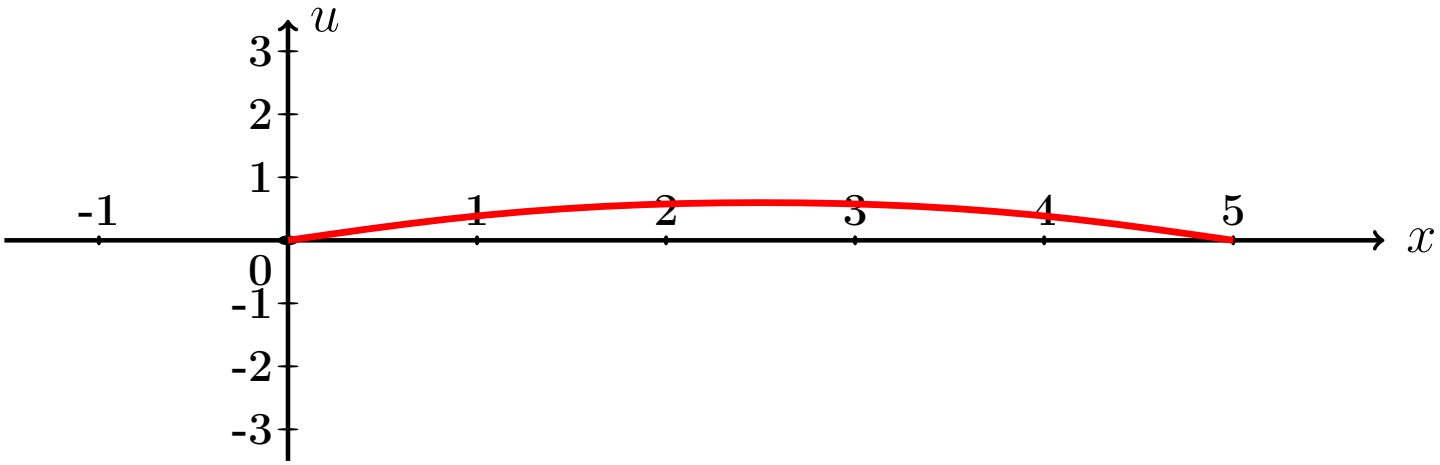


Рис.:

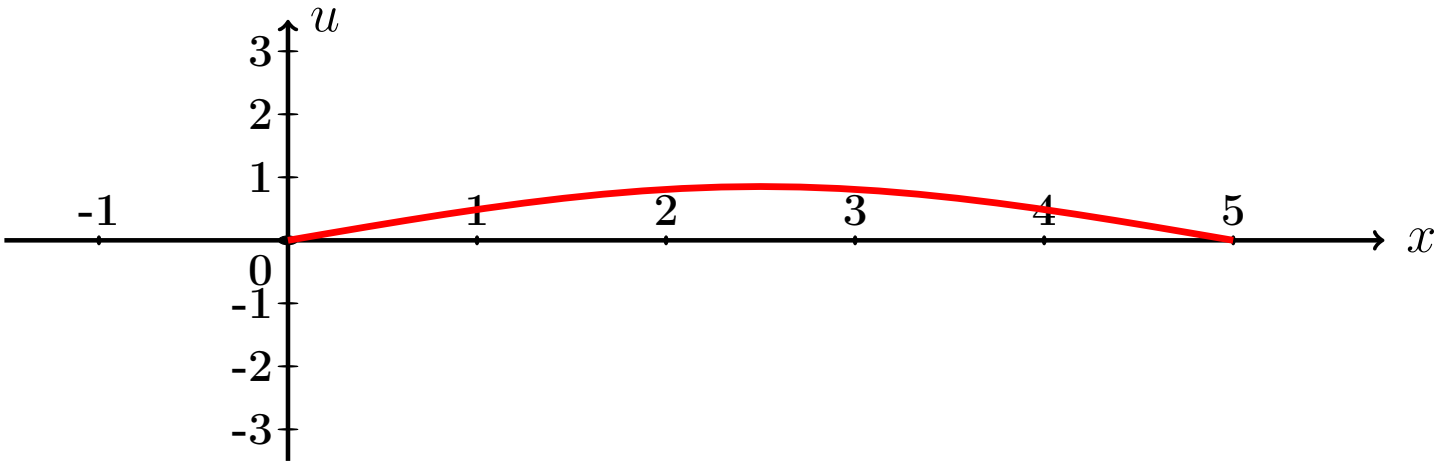


Рис.:

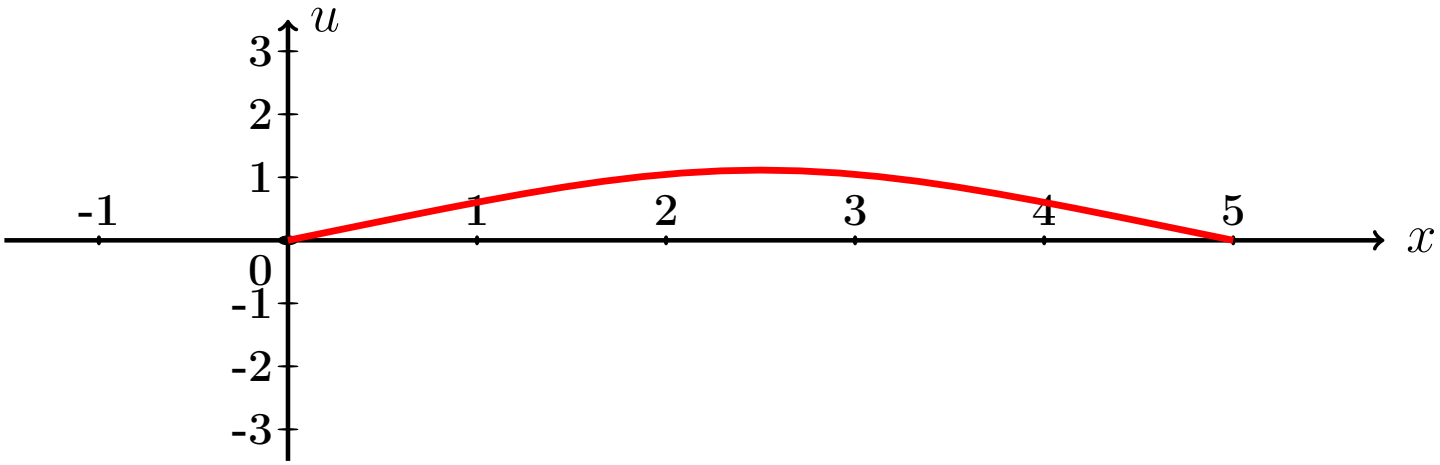


Рис.:

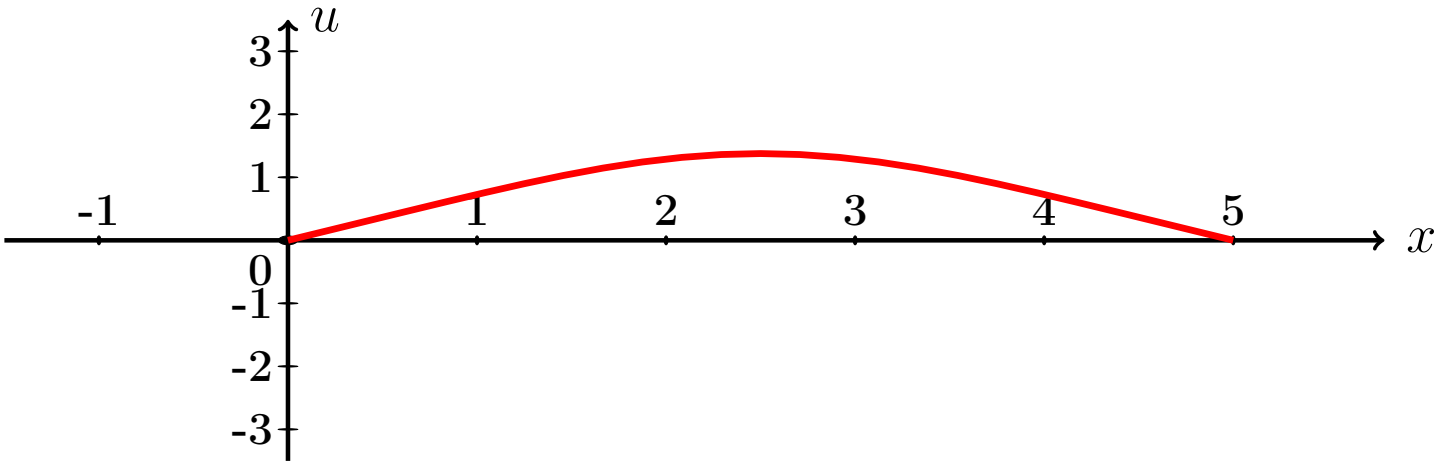


Рис.:

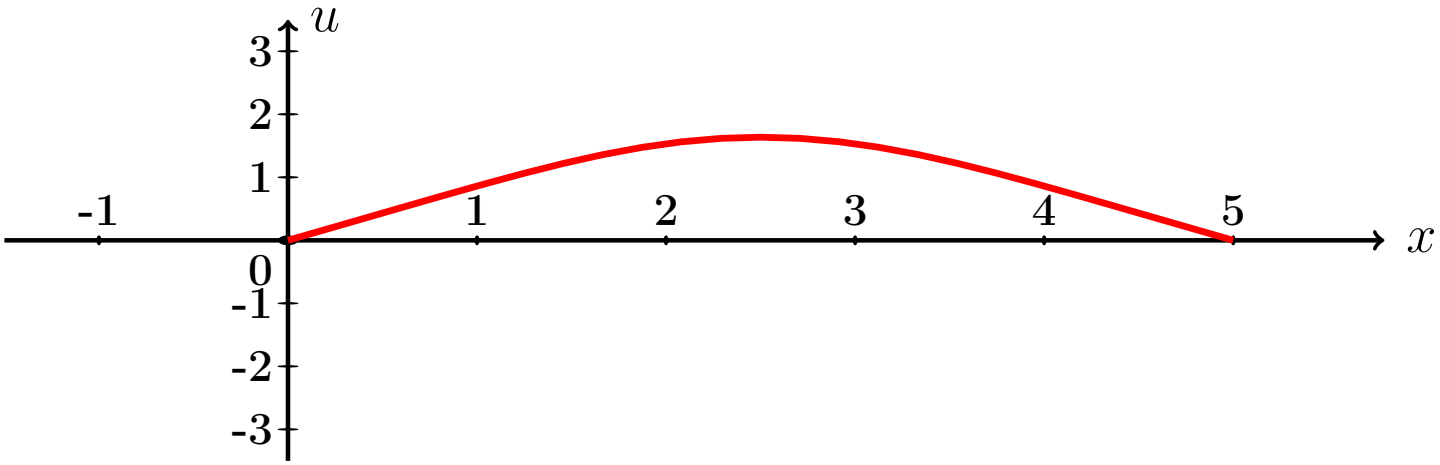


Рис.:

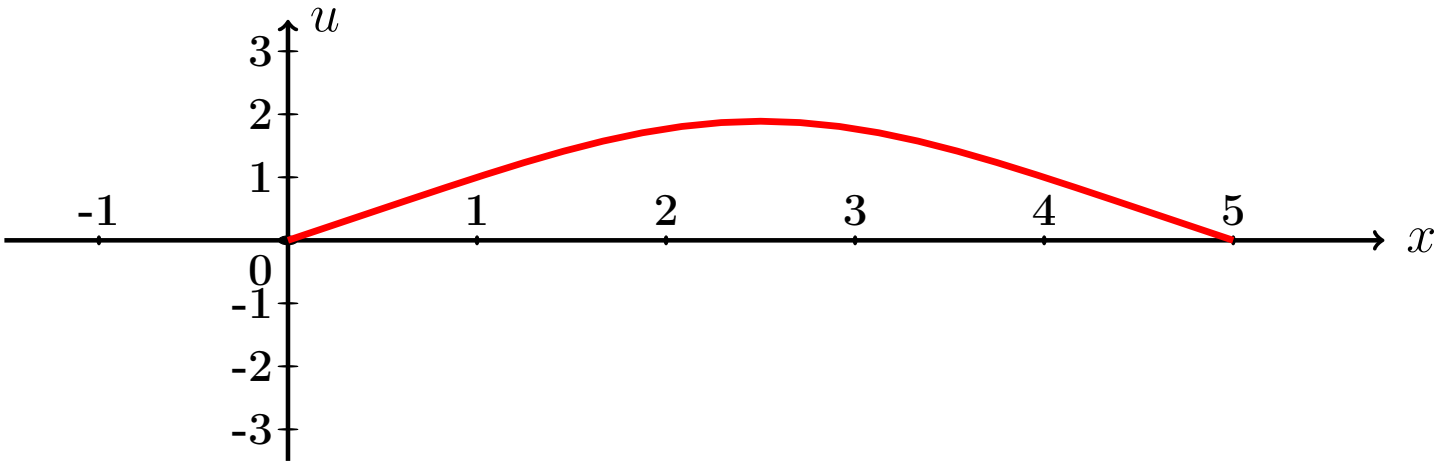


Рис.:

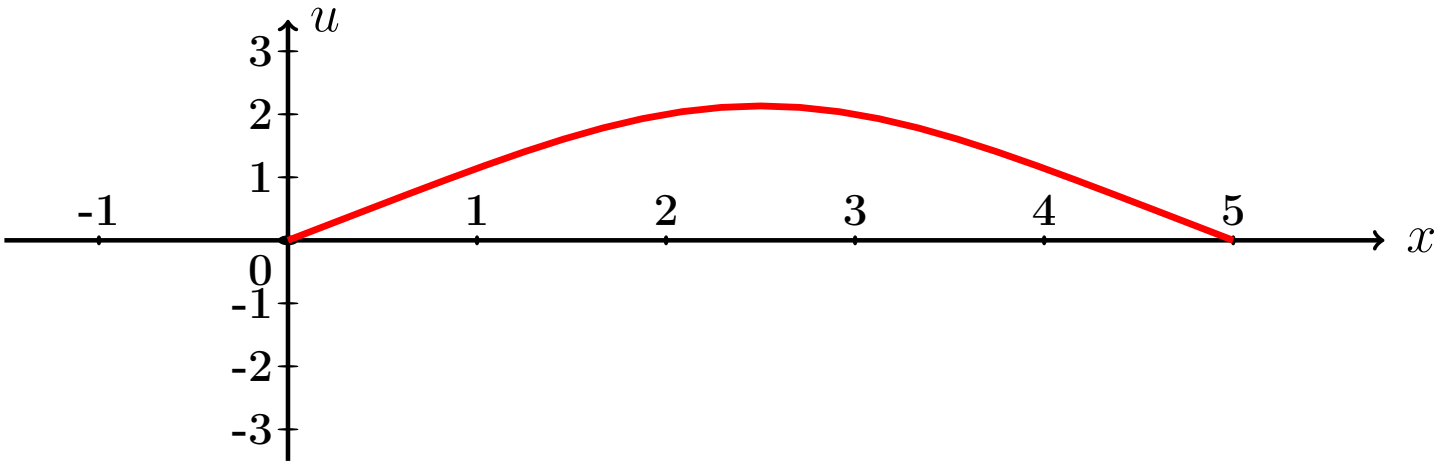


Рис.:

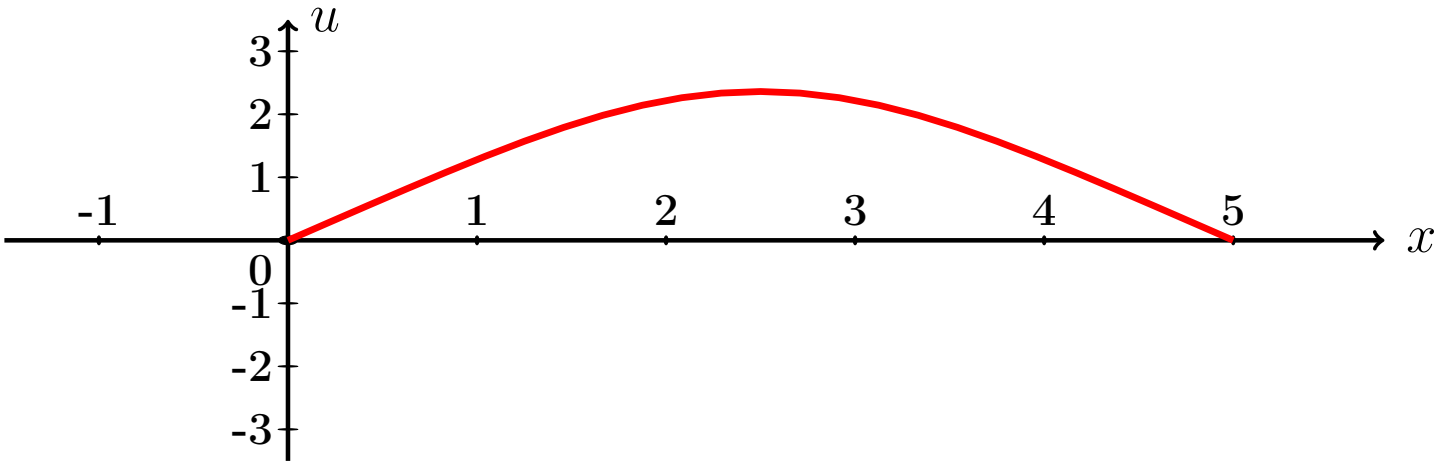


Рис.:

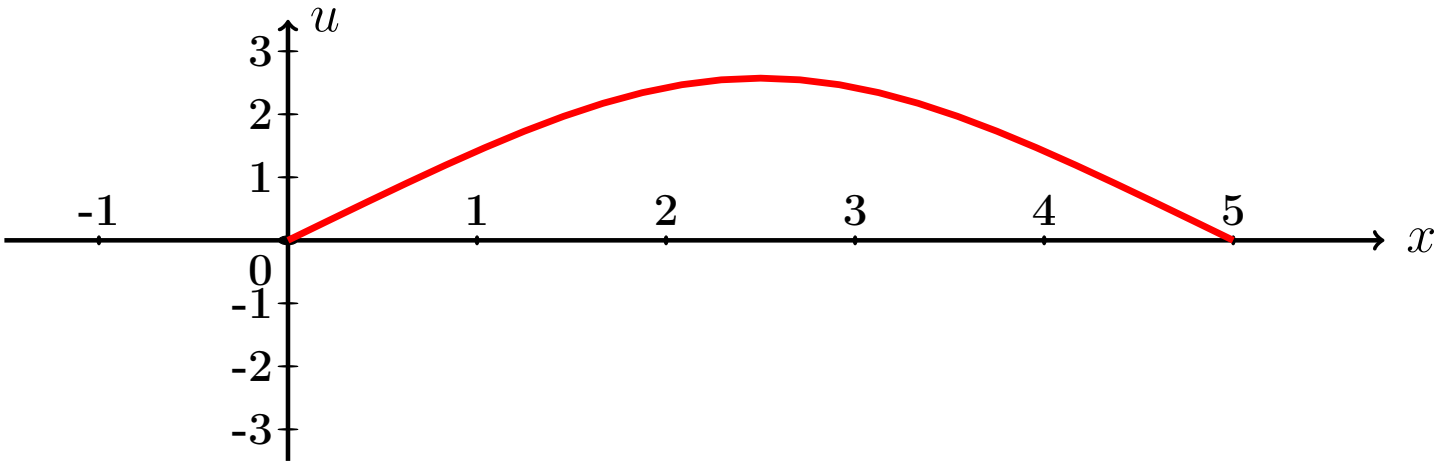


Рис.:

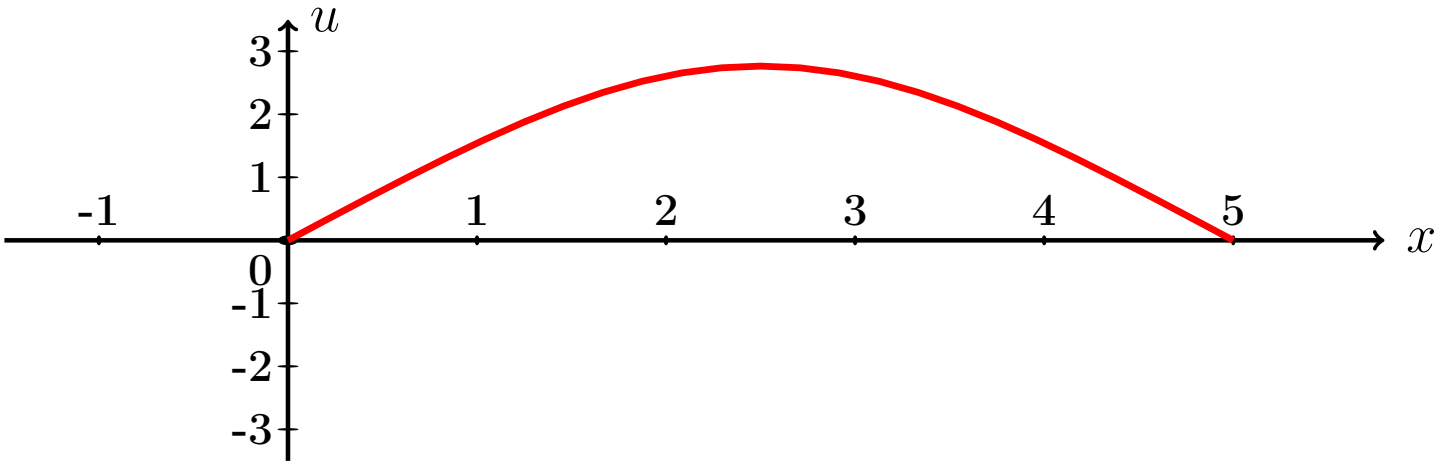


Рис.:

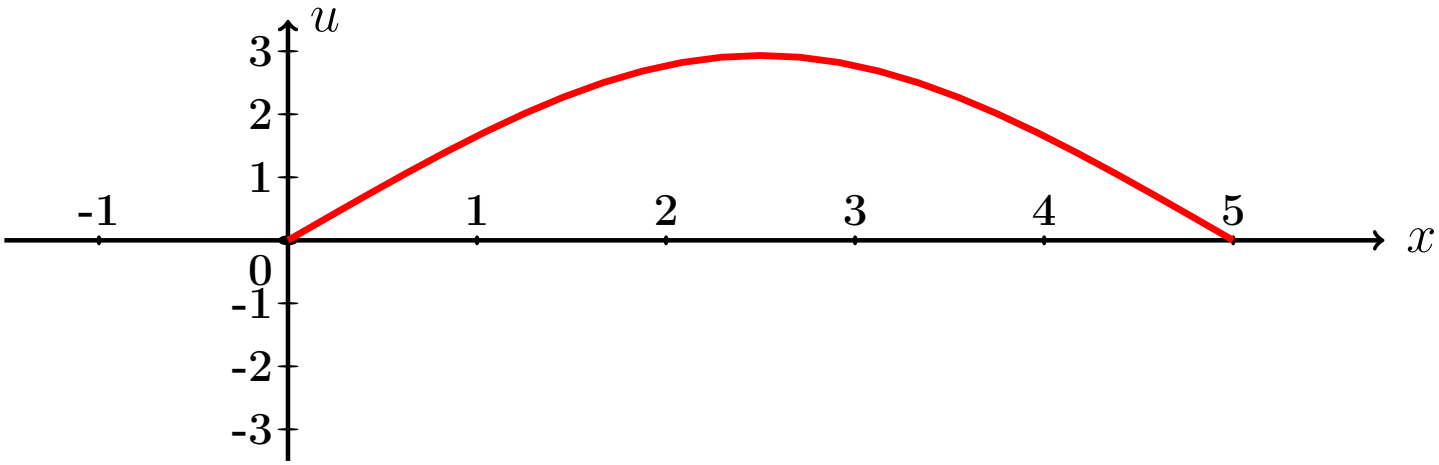


Рис.:

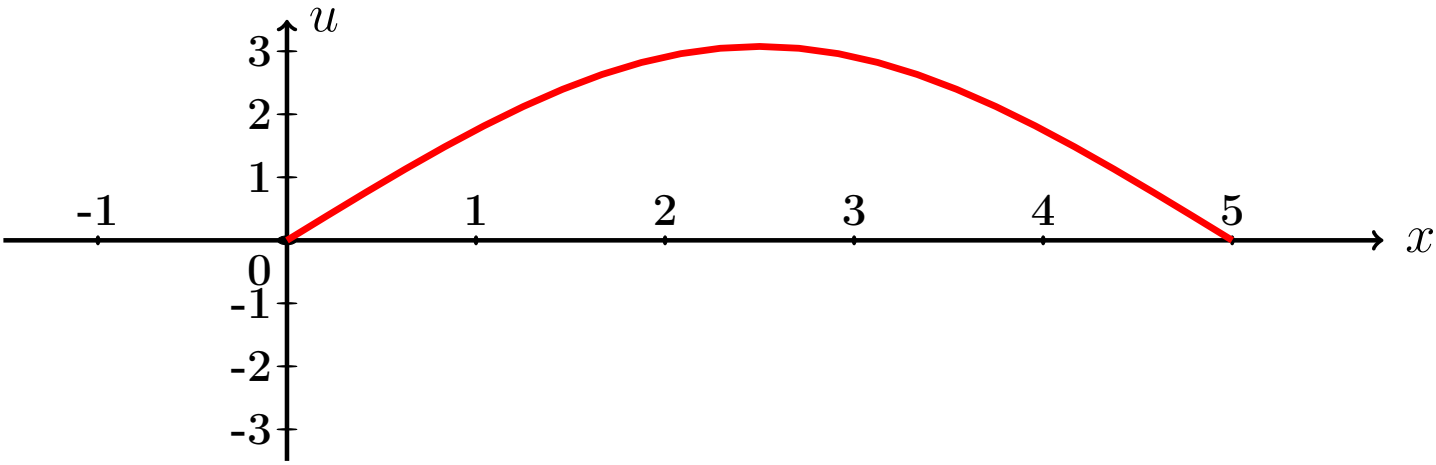


Рис.:

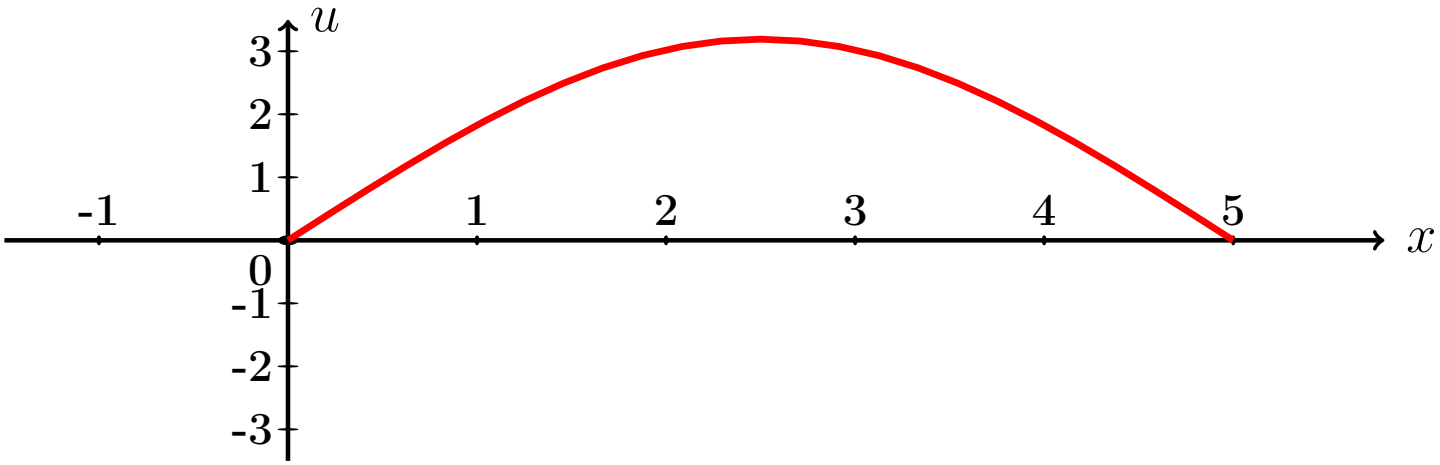


Рис.:

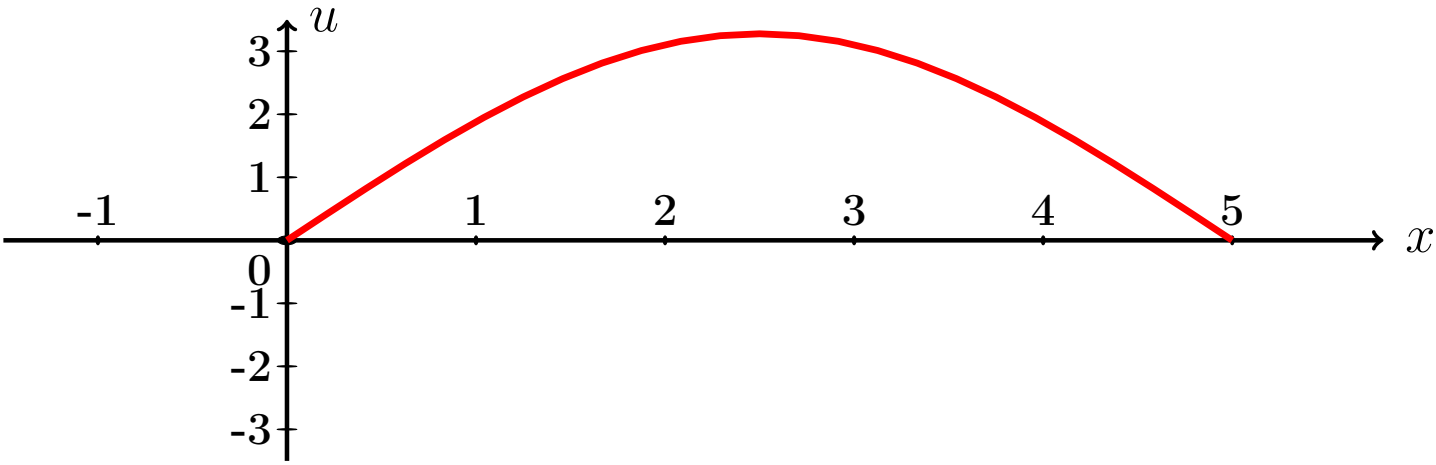


Рис.:

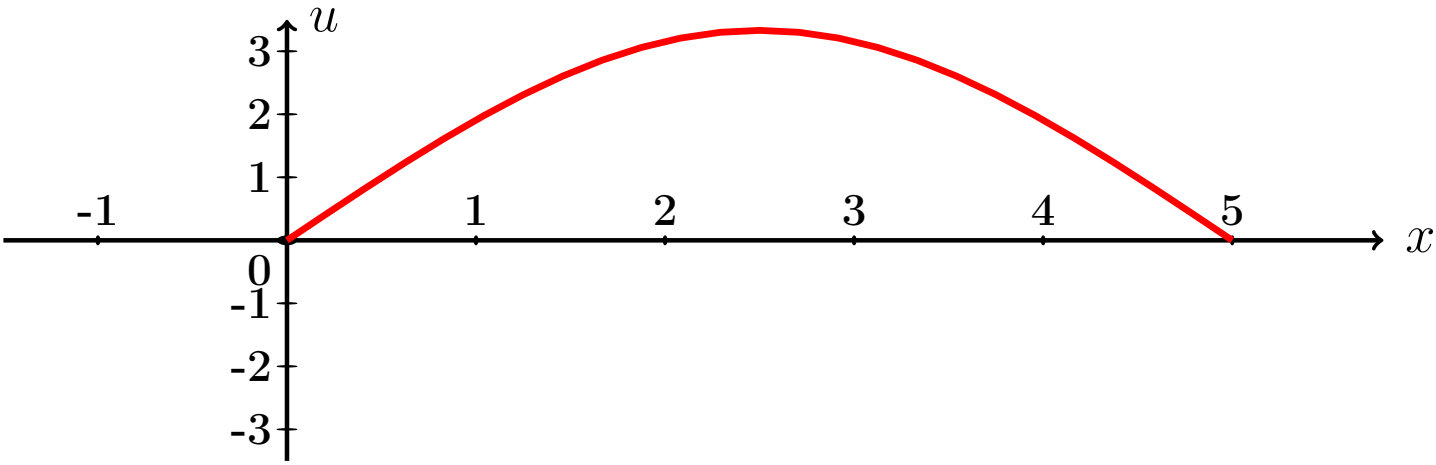


Рис.:

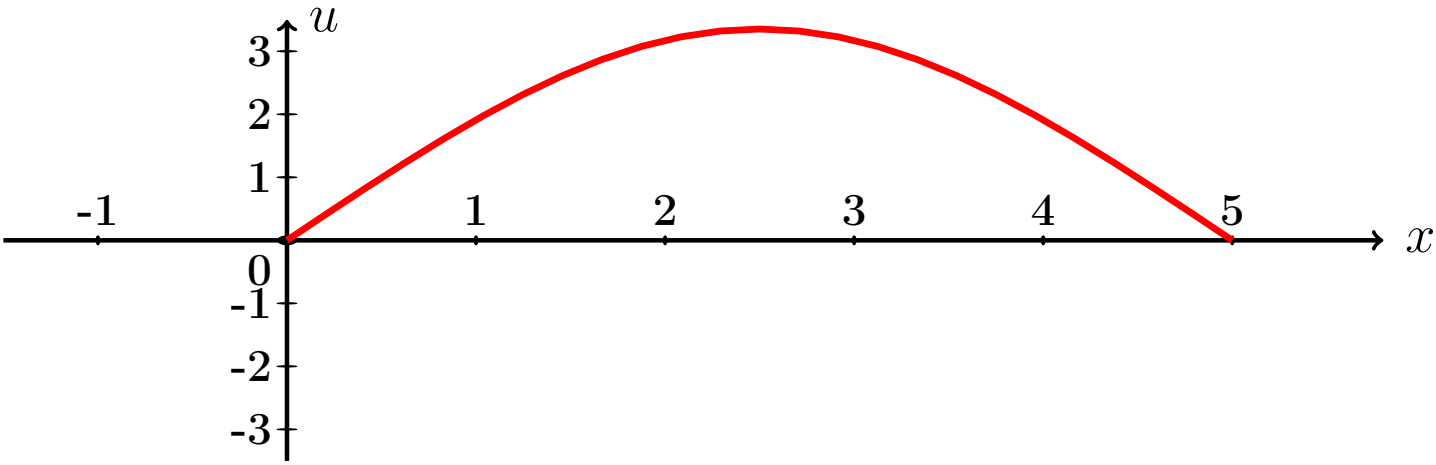


Рис.:

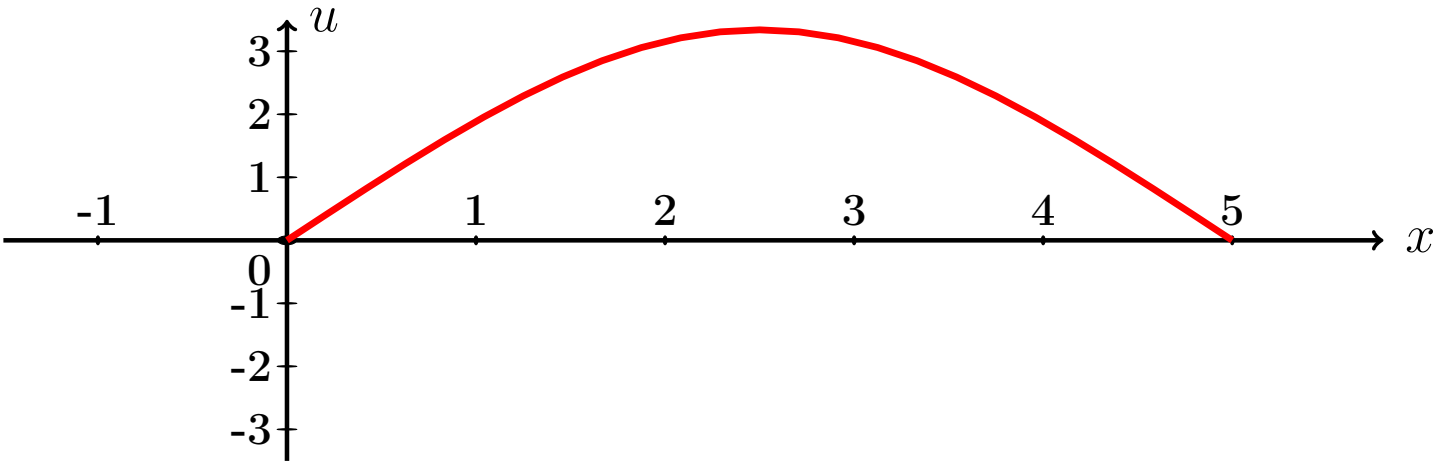


Рис.:

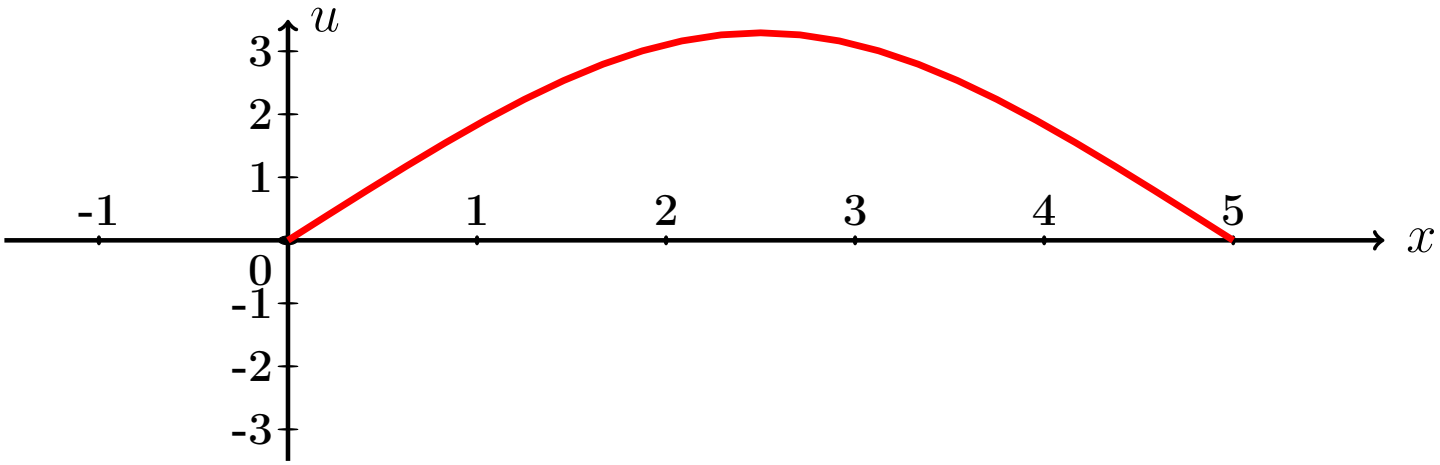


Рис.:

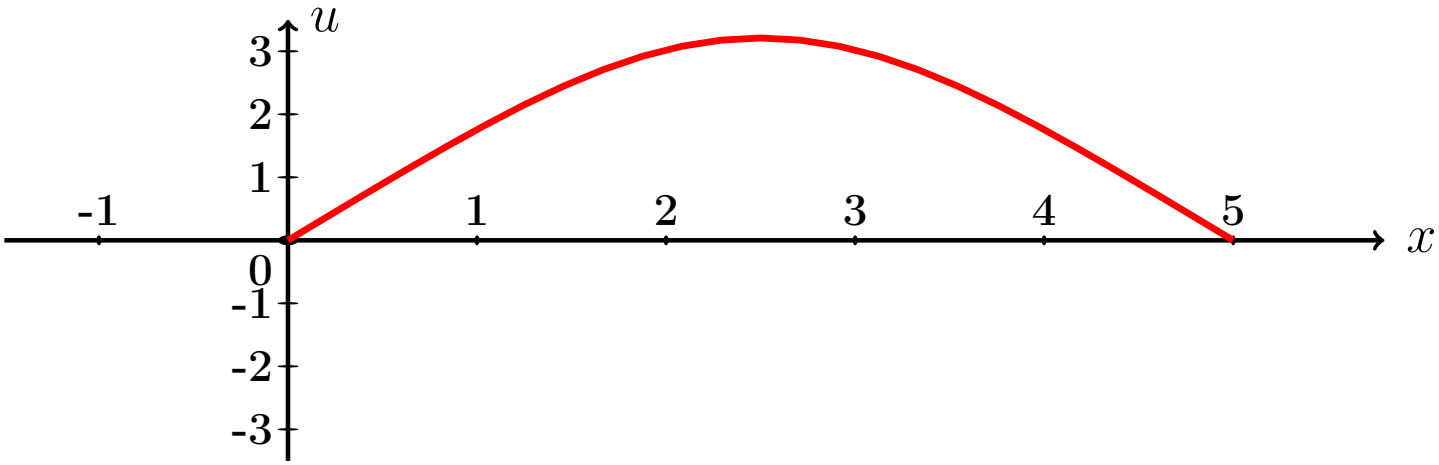


Рис.:

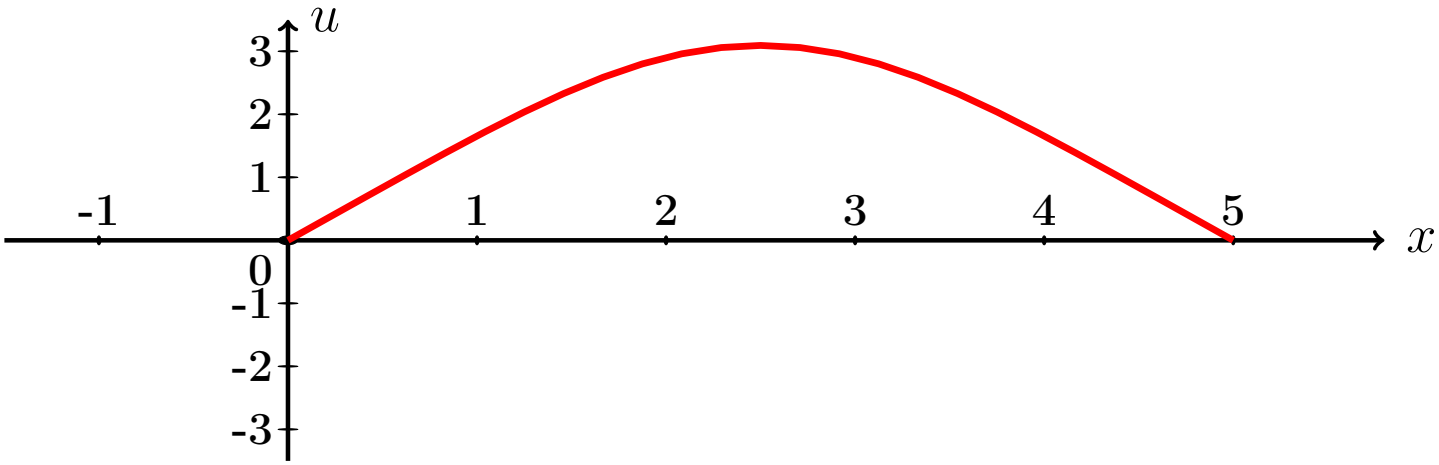


Рис.:

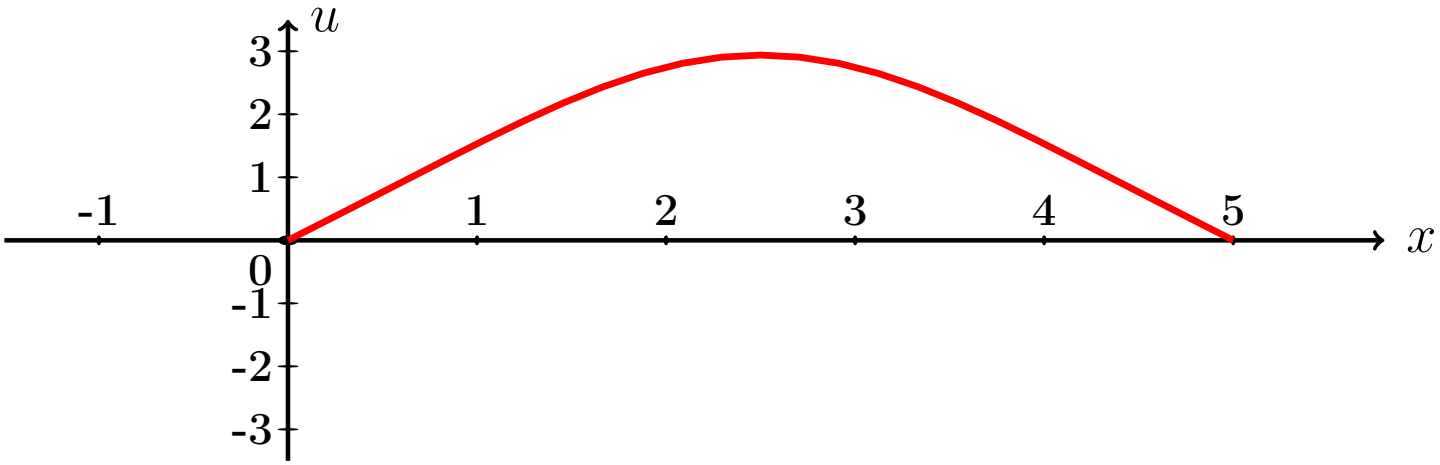


Рис.:

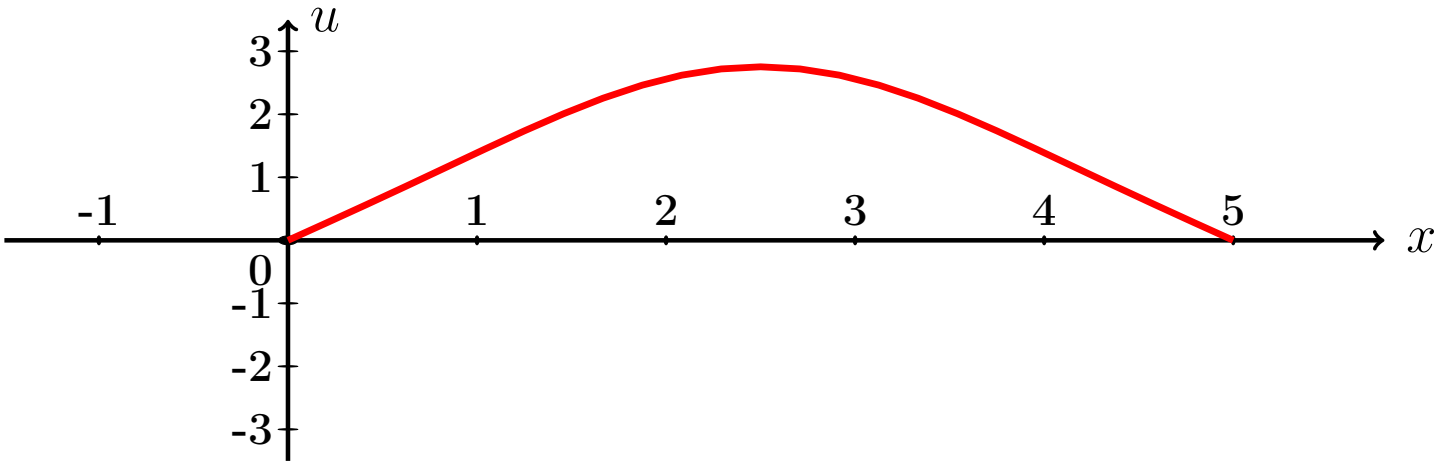


Рис.:

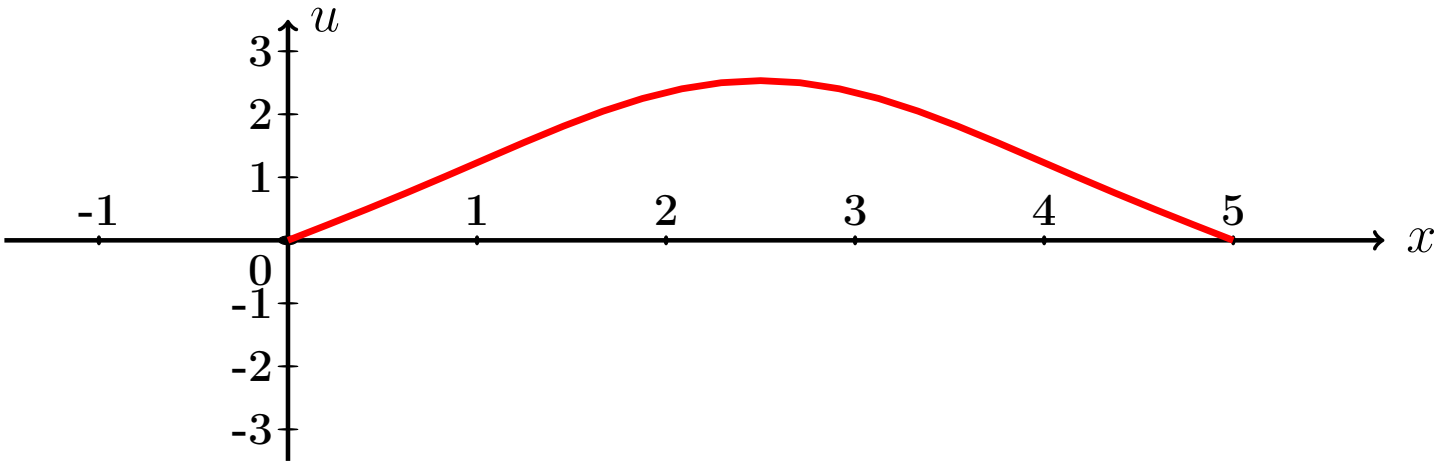


Рис.:

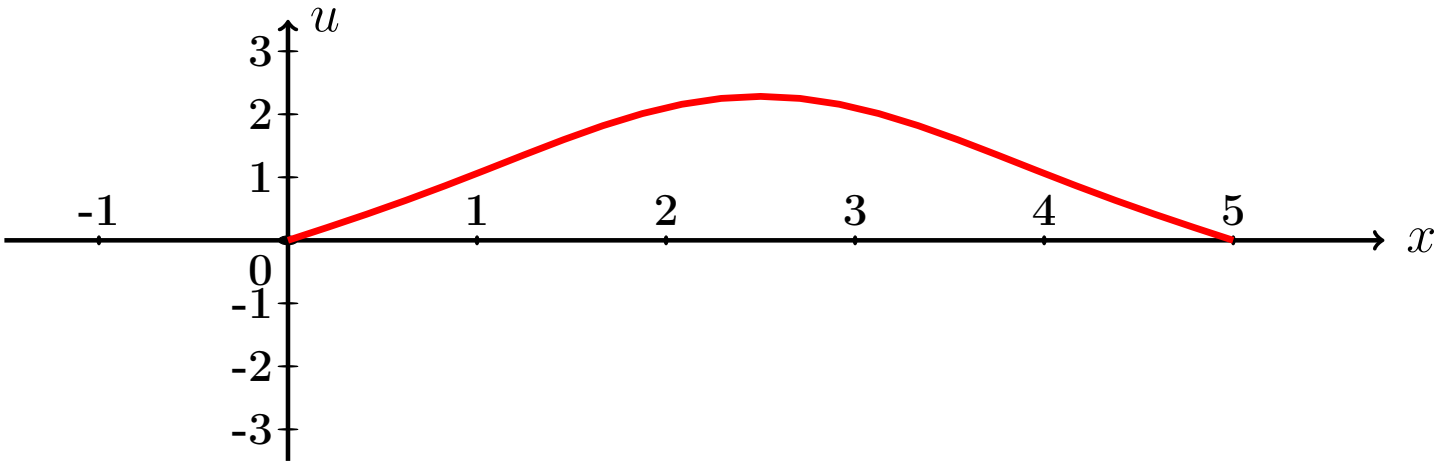


Рис.:

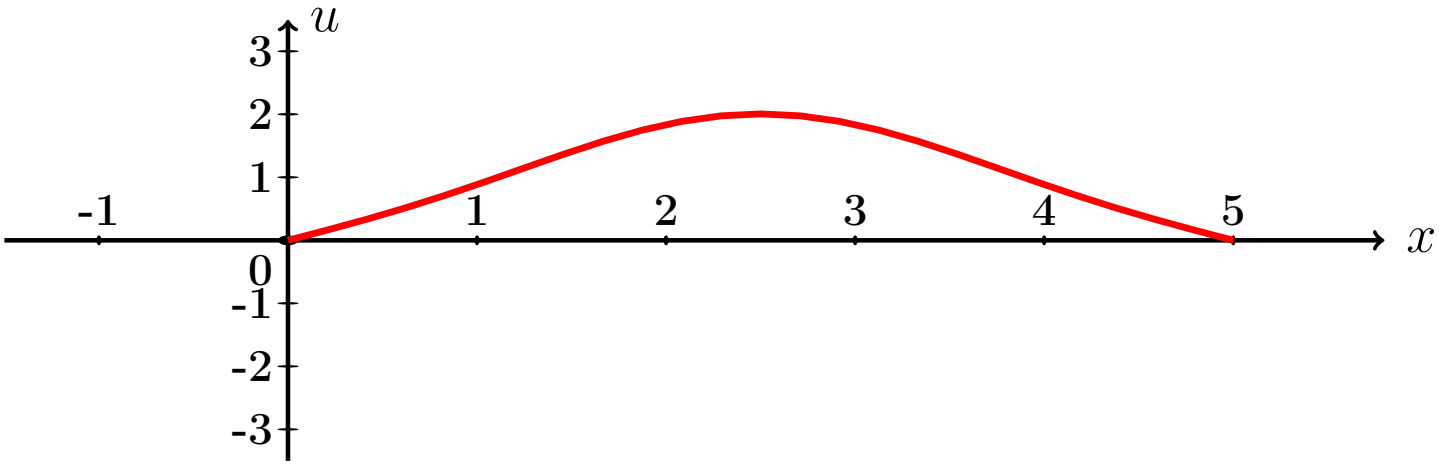


Рис.:

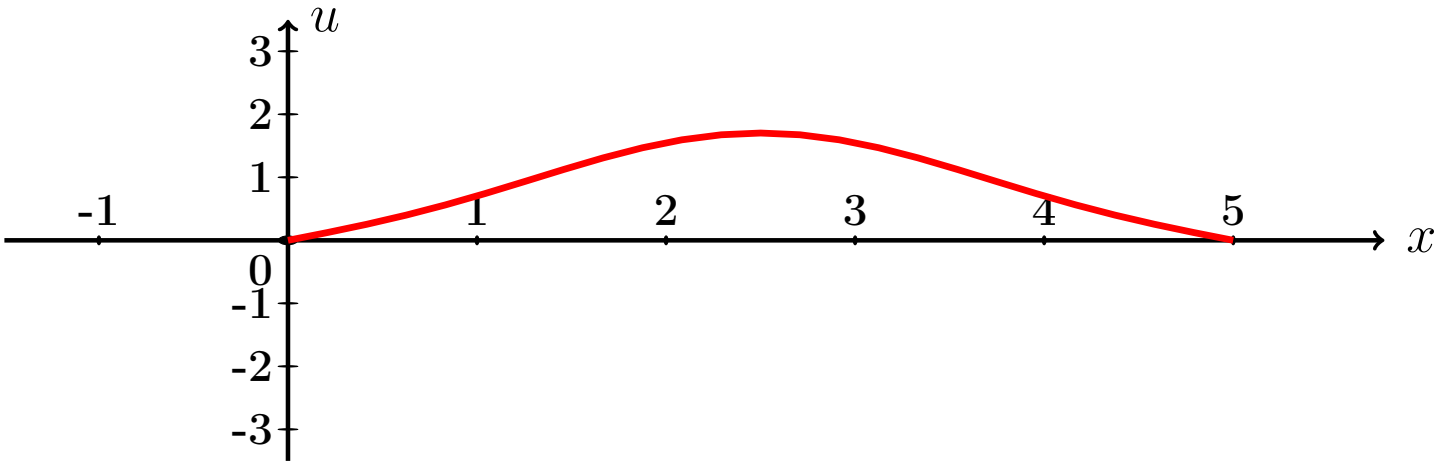


Рис.:

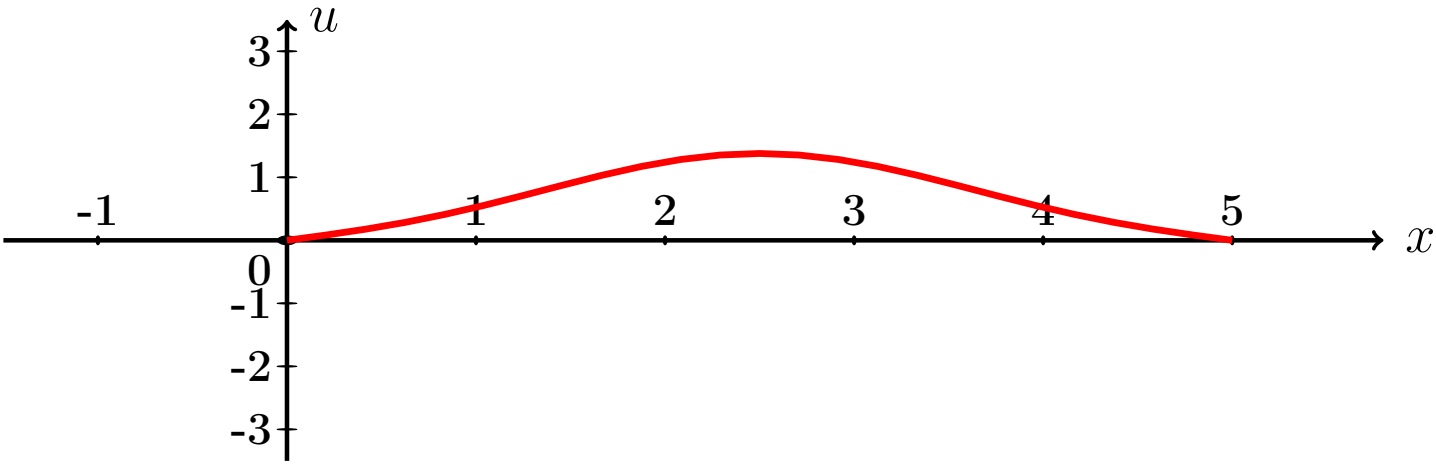


Рис.:

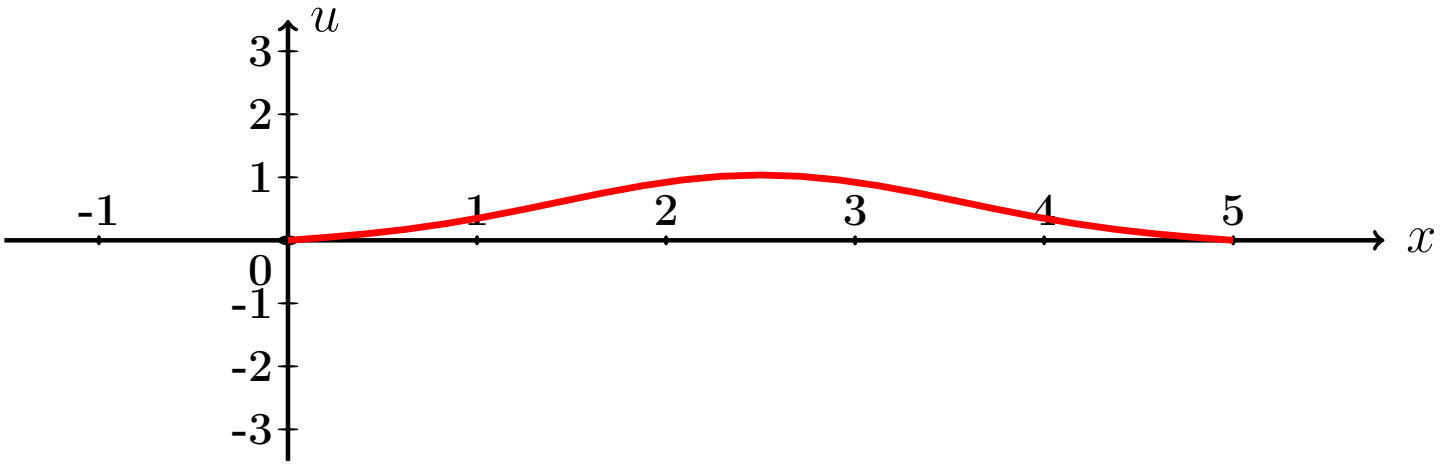


Рис.:

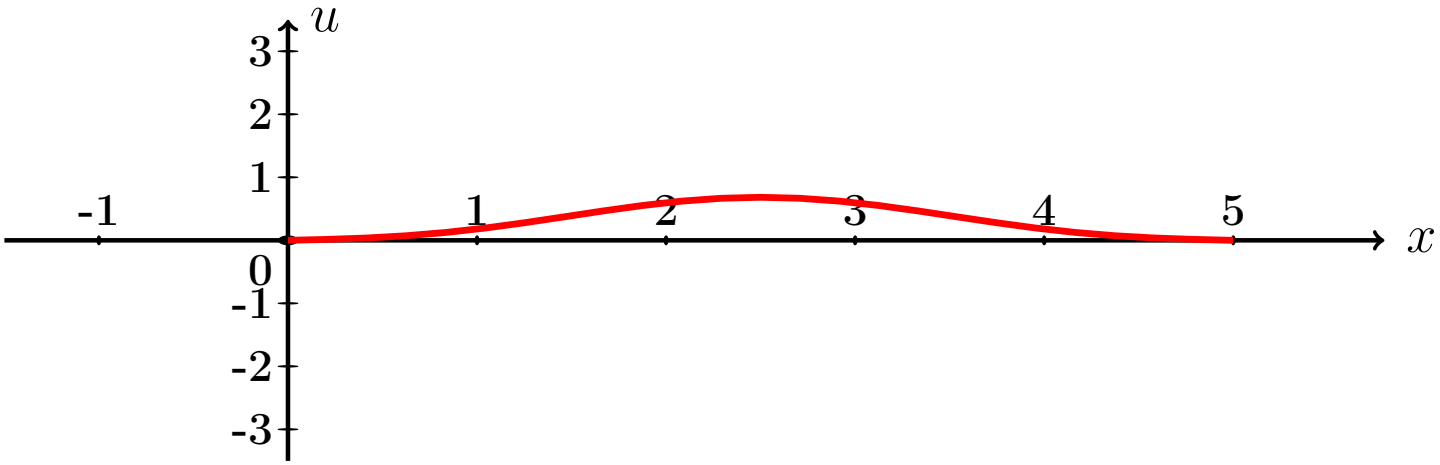


Рис.:

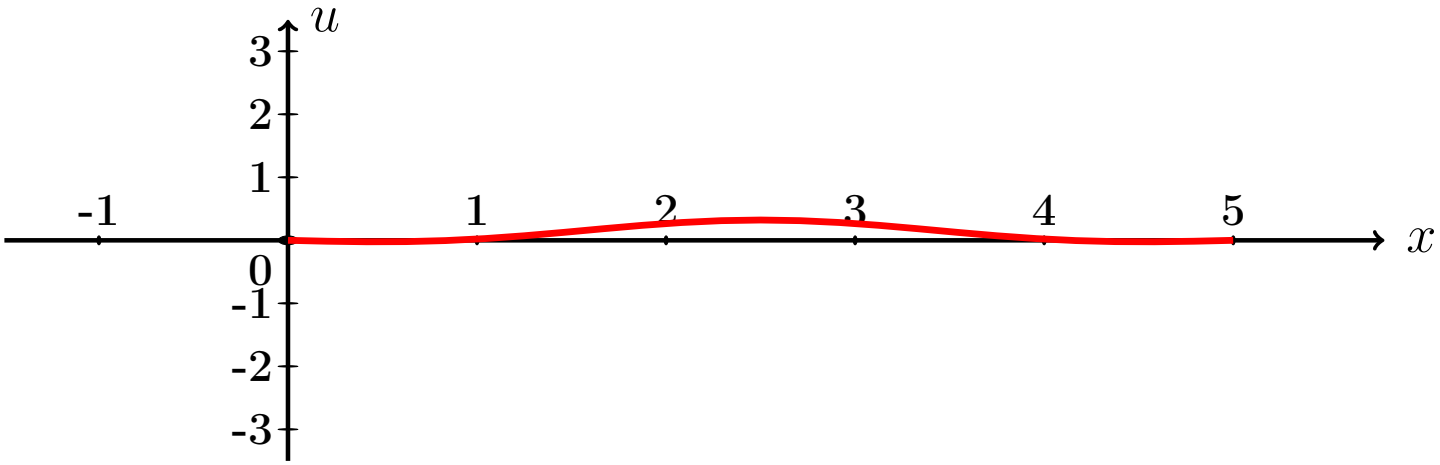


Рис.:

СМОТРИ СЛЕДУЮЩИЙ СЛАЙД

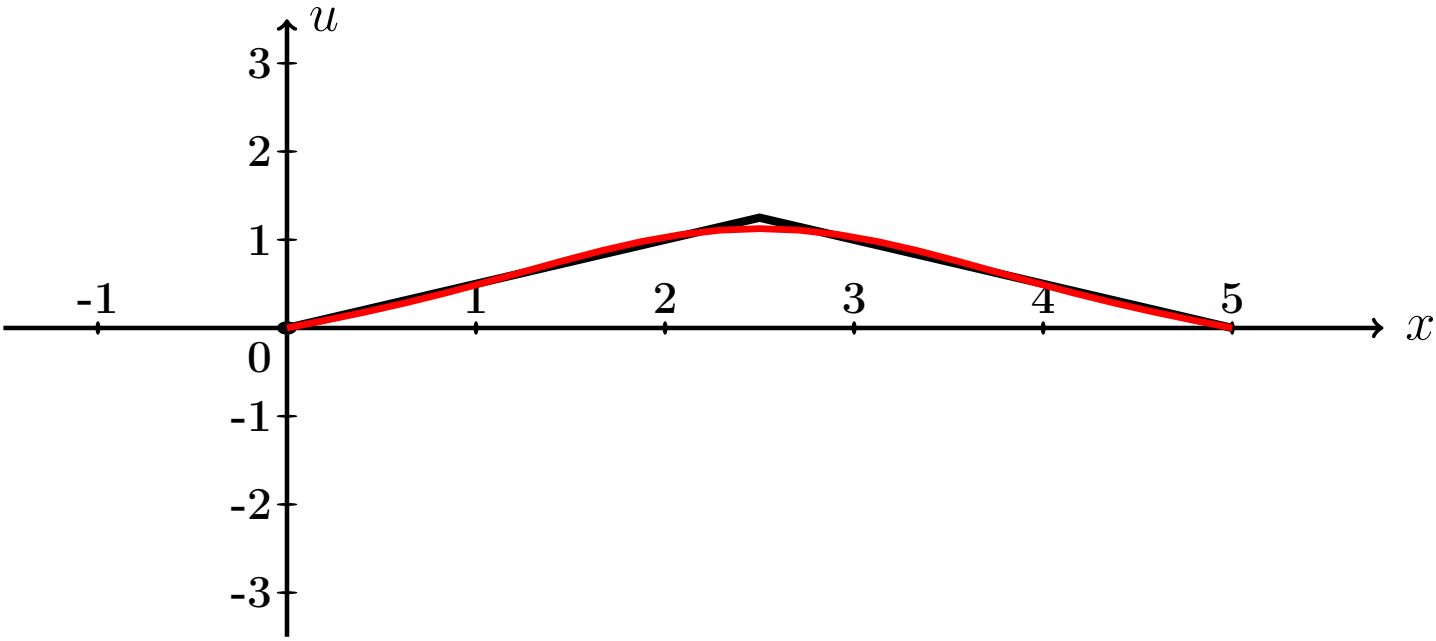


Рис.: Черным показано исходное положение струны по формуле $u(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при} \quad 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5-x), & \text{при} \quad 5/2 \le x \le 5 \end{cases}$, а красным – его расчетное приближение.

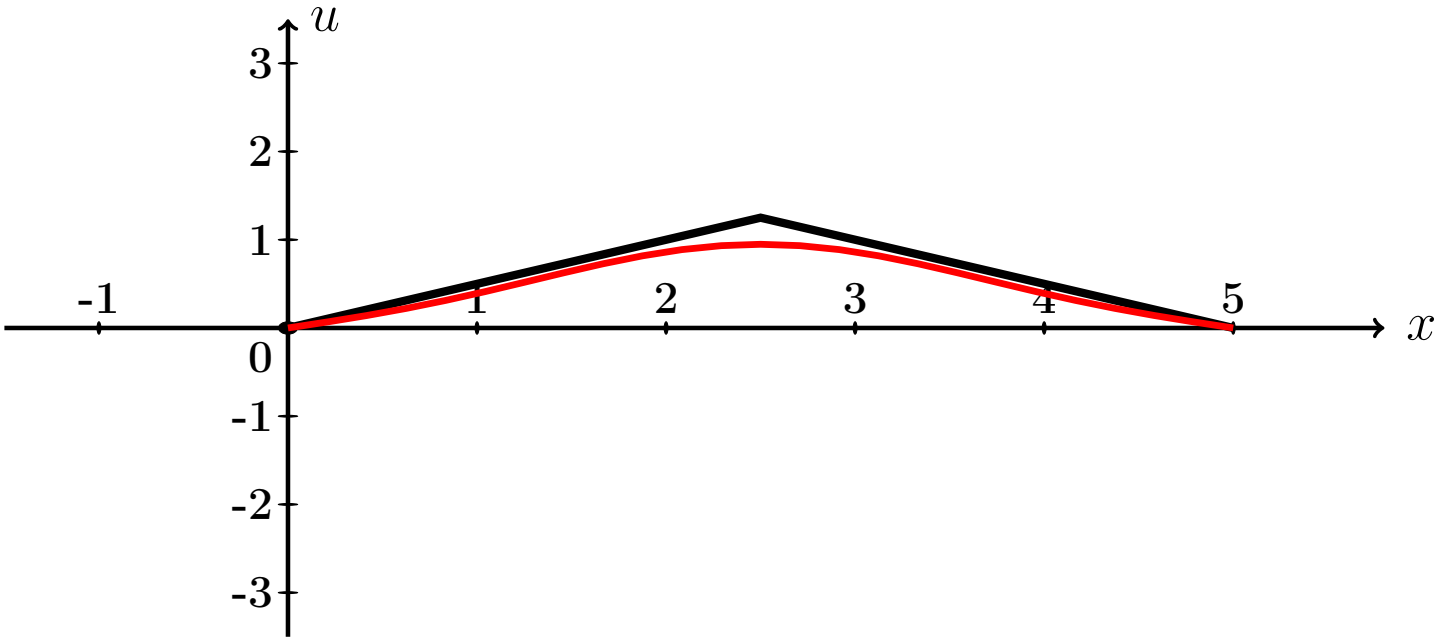


Рис.:

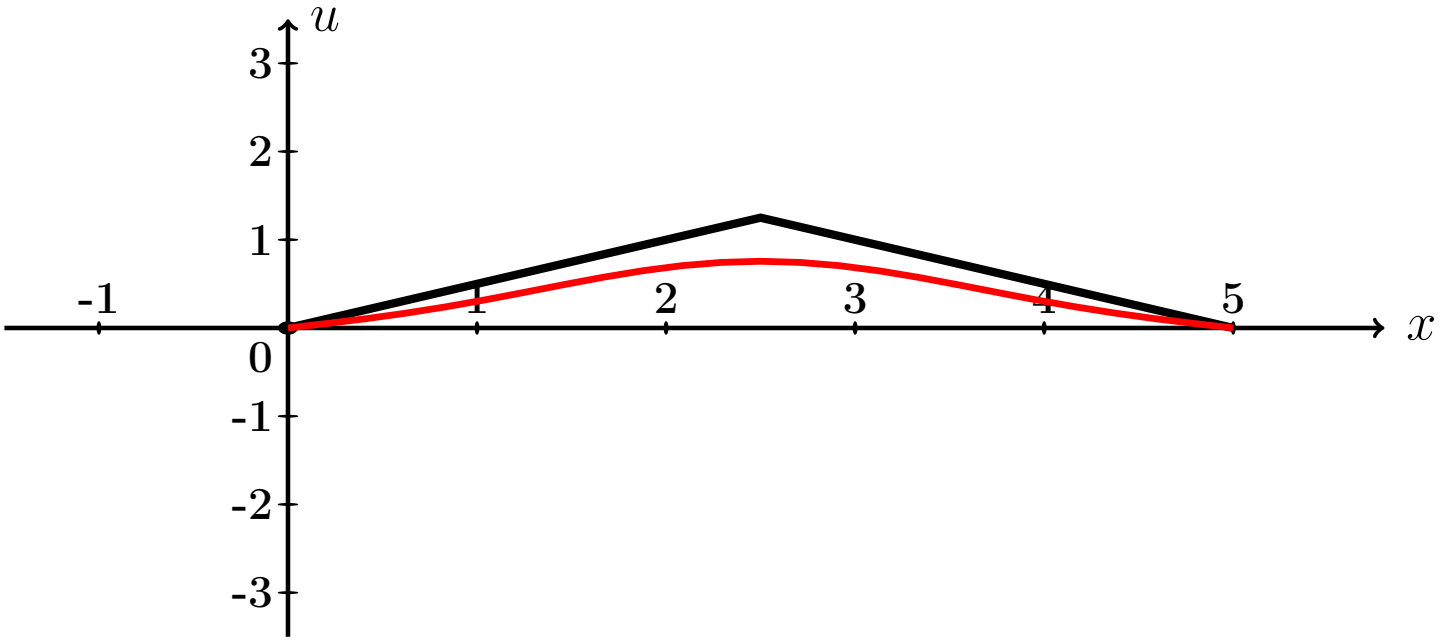


Рис.:

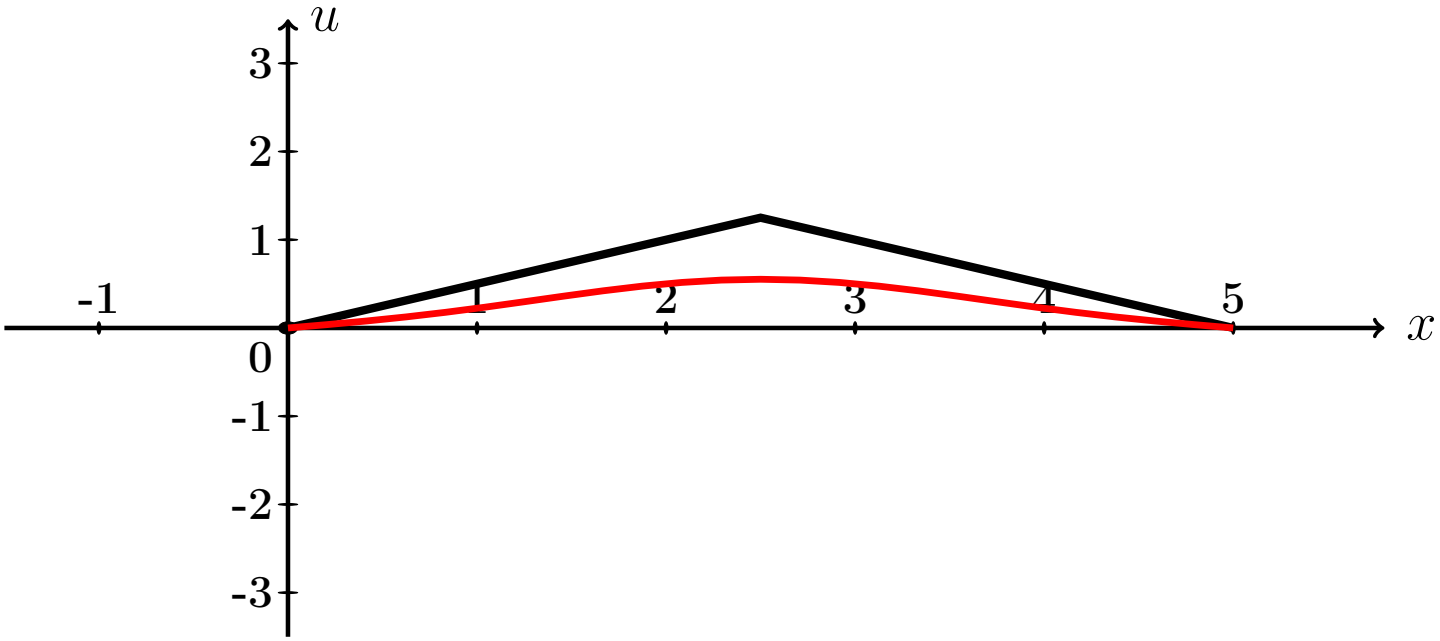


Рис.:

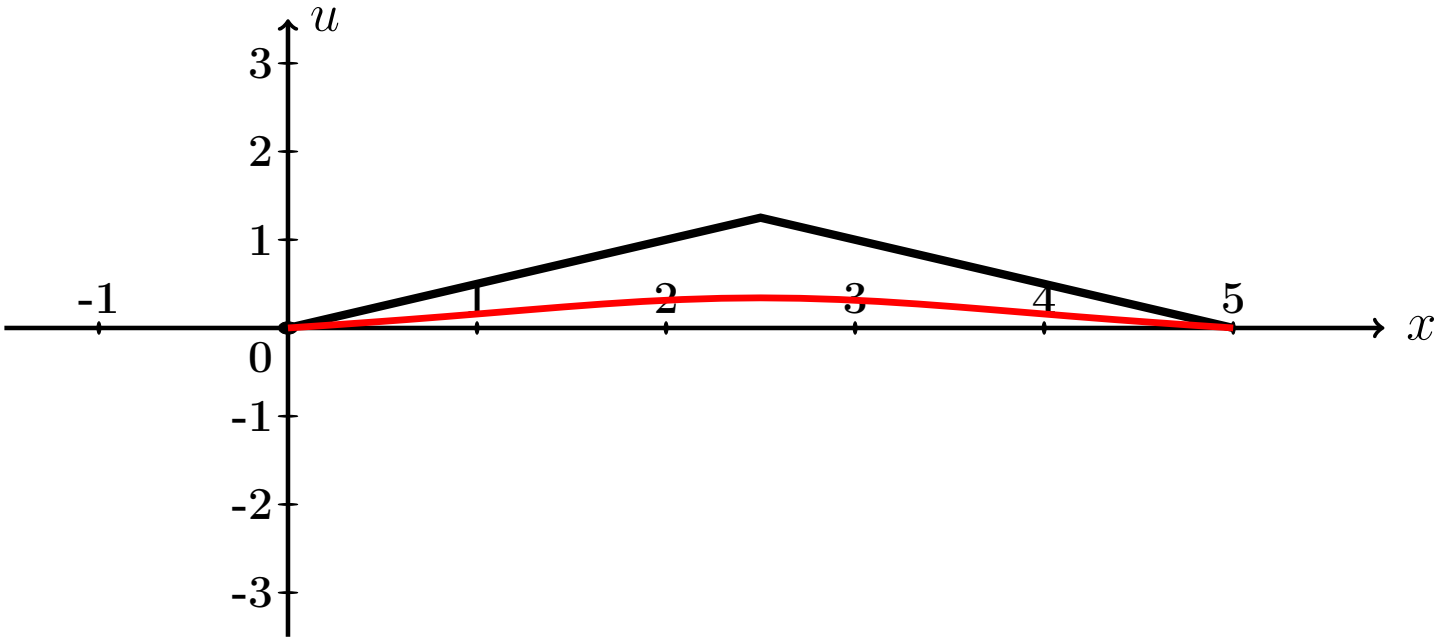


Рис.:

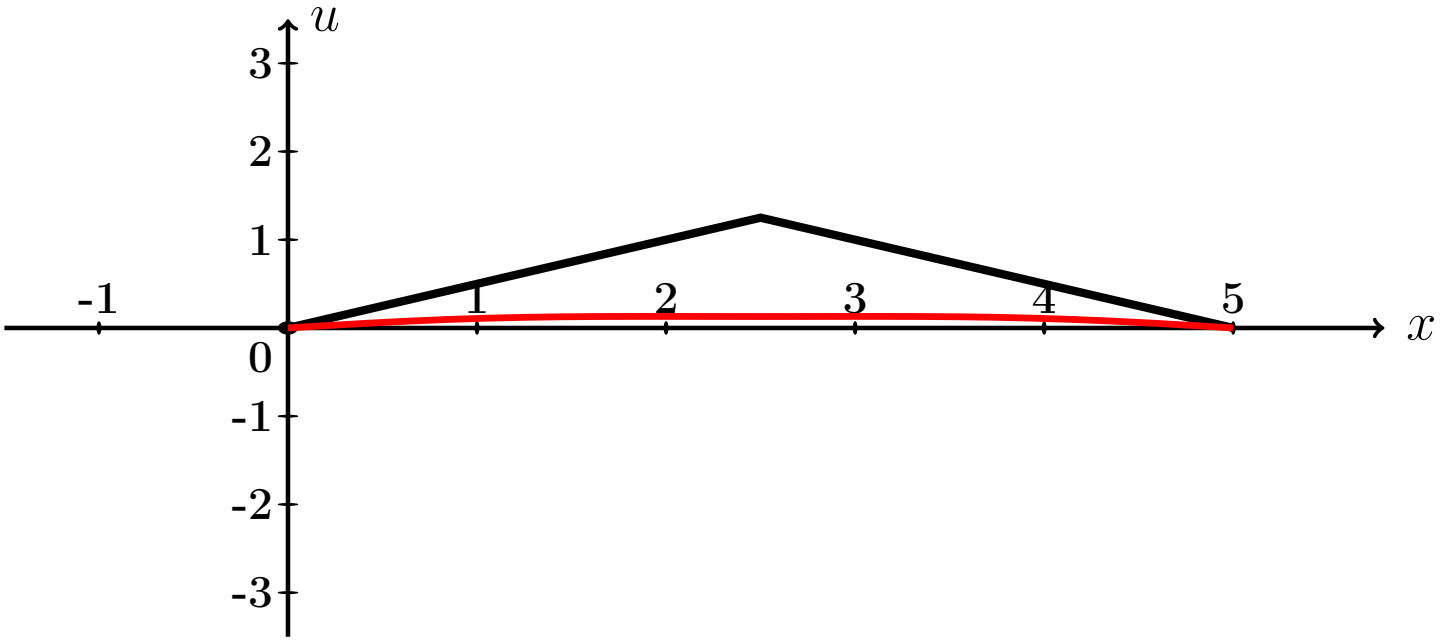


Рис.:

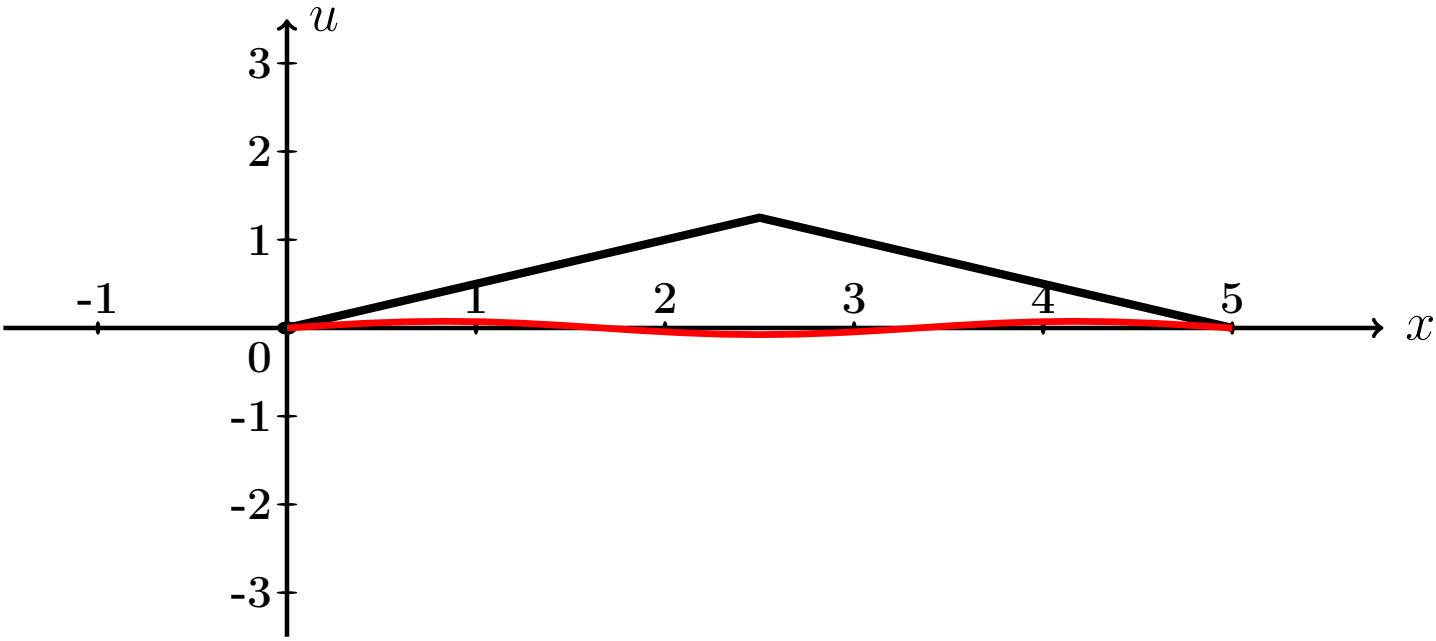


Рис.:

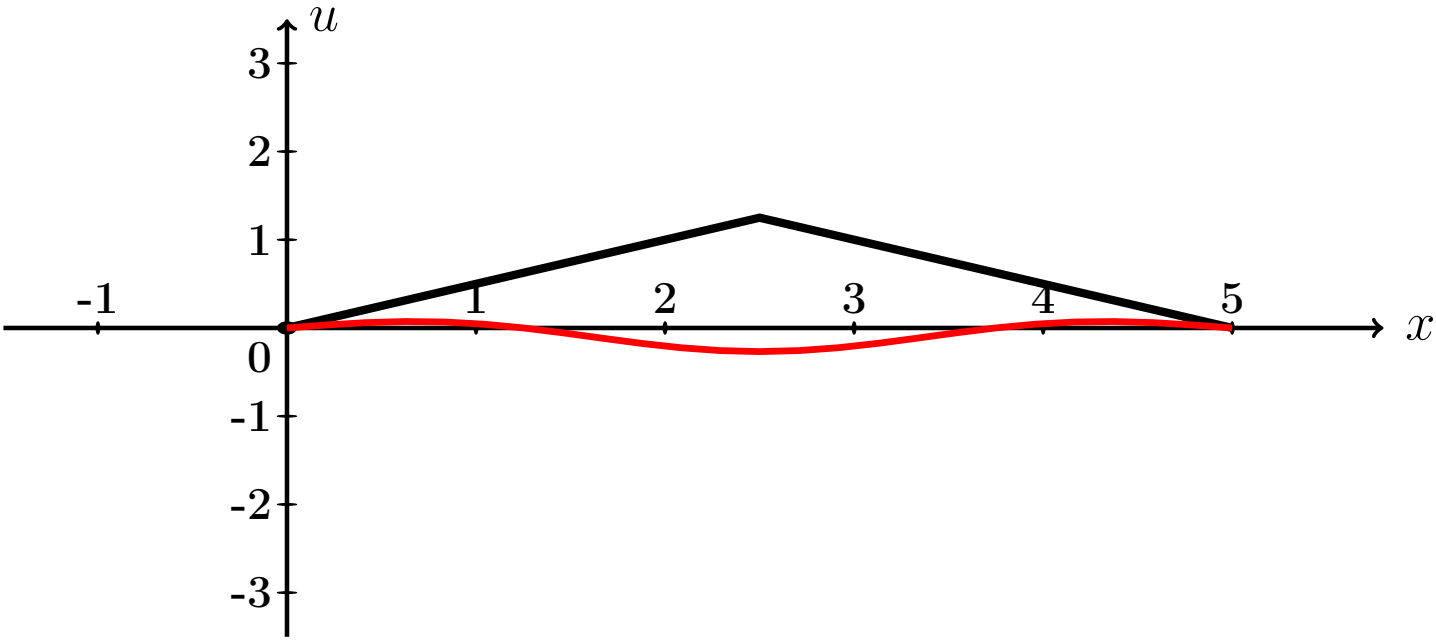


Рис.:

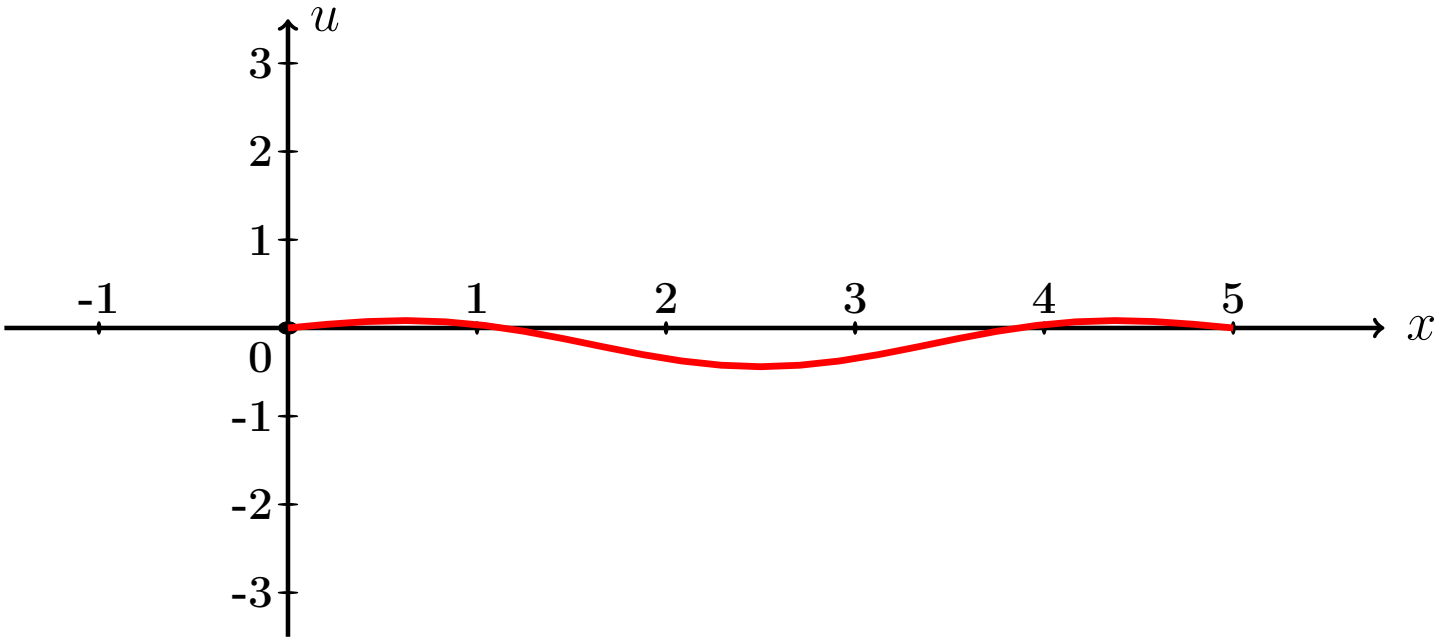


Рис.:

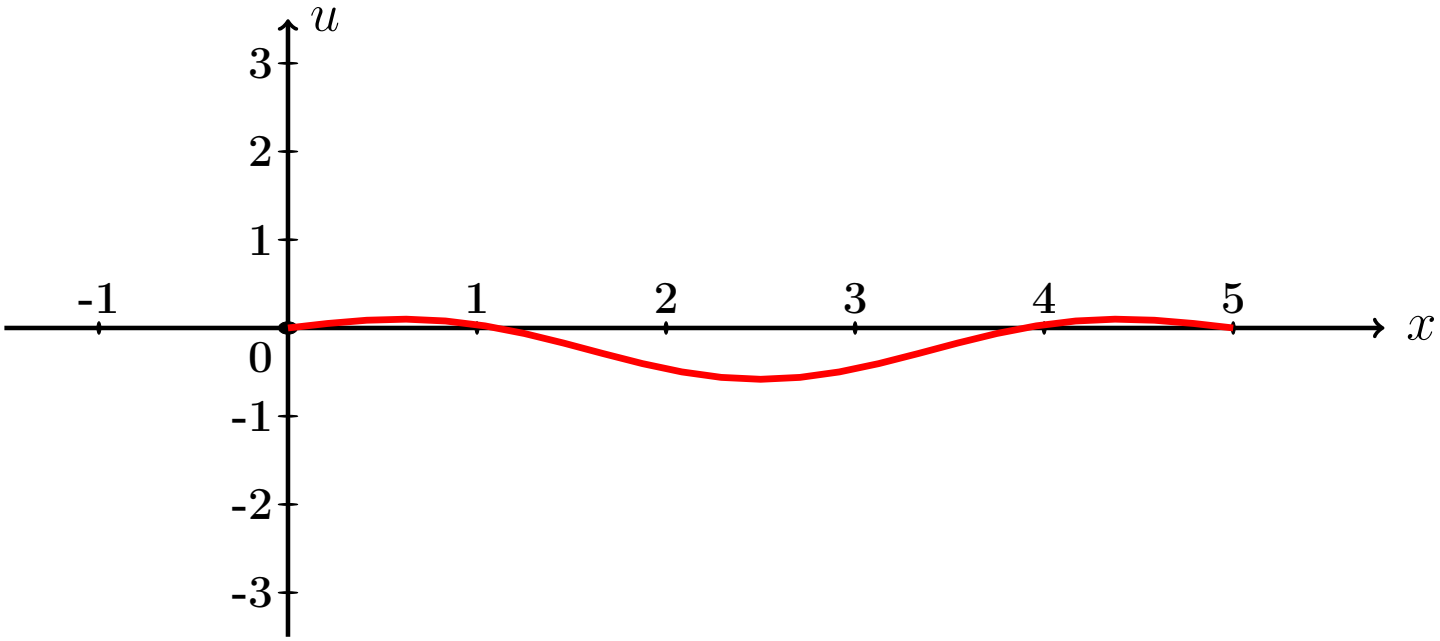


Рис.:

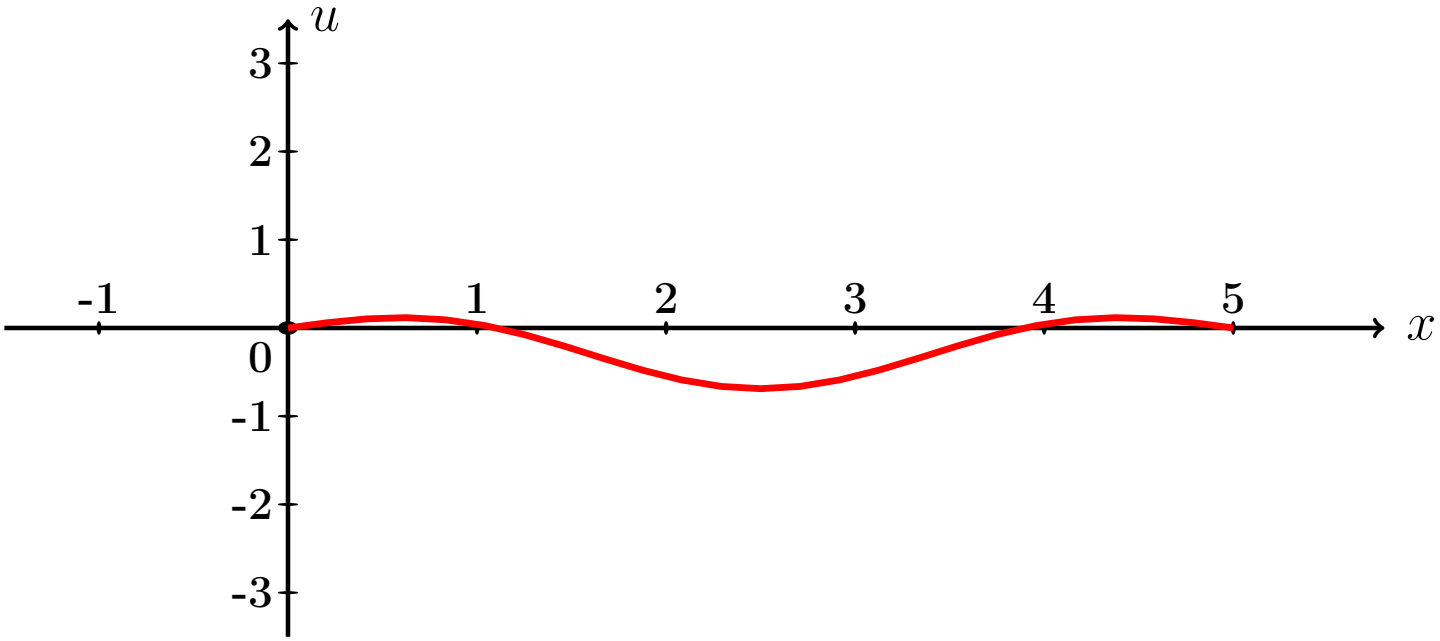


Рис.:

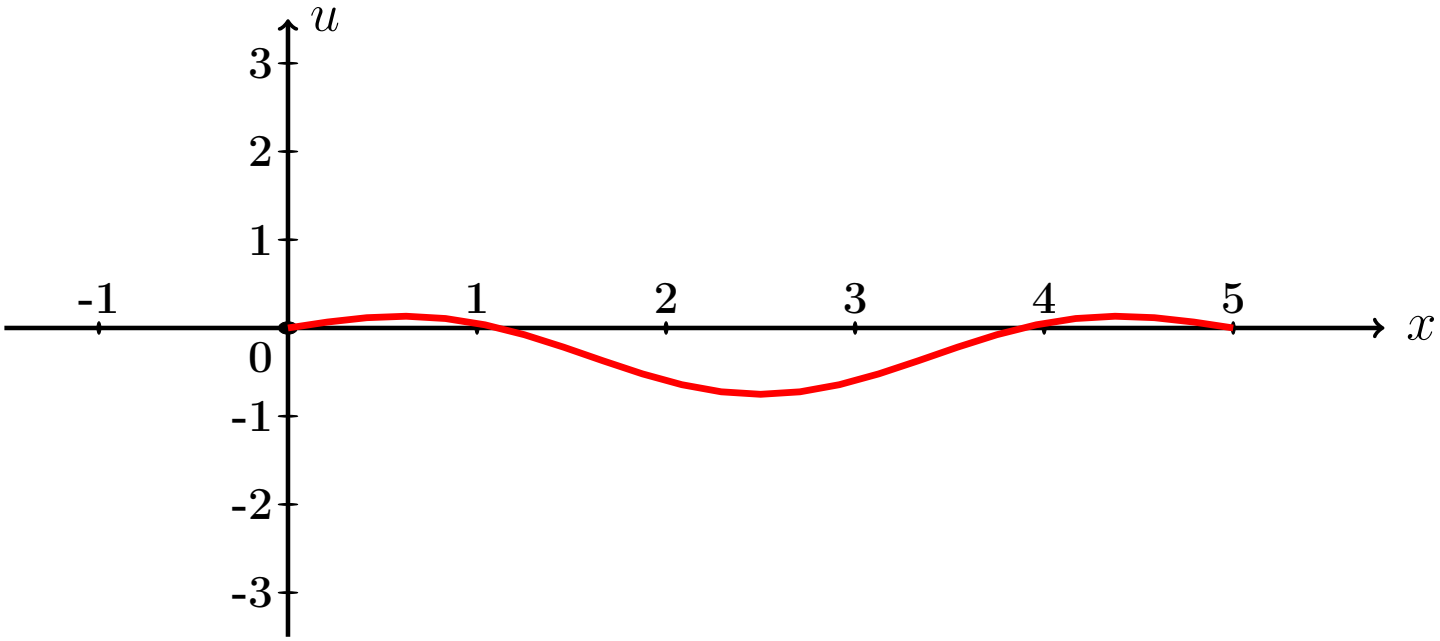


Рис.:

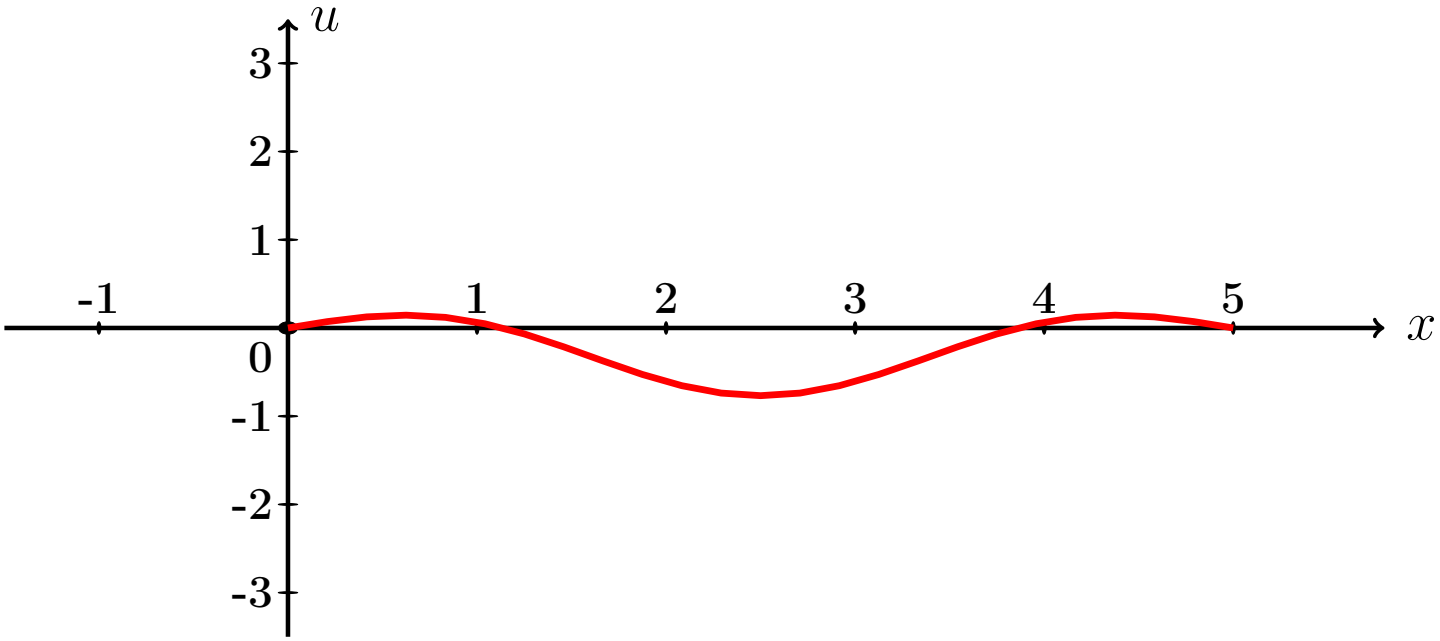


Рис.:

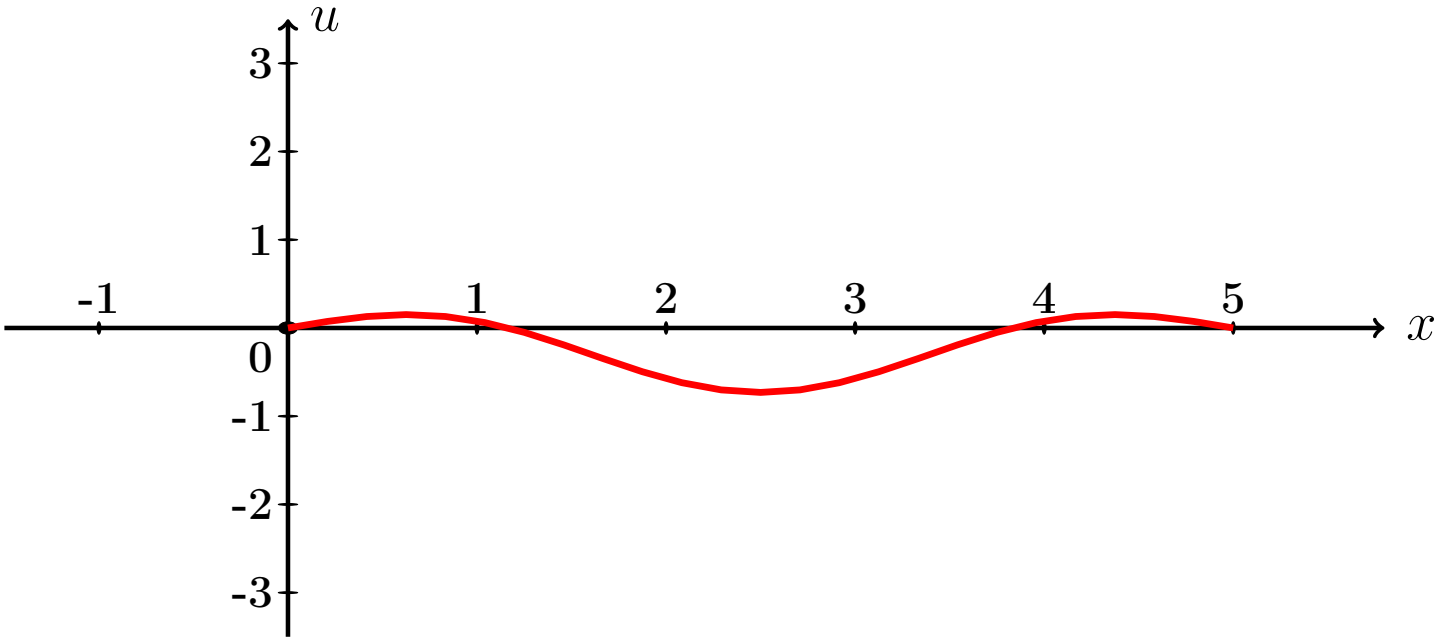


Рис.:

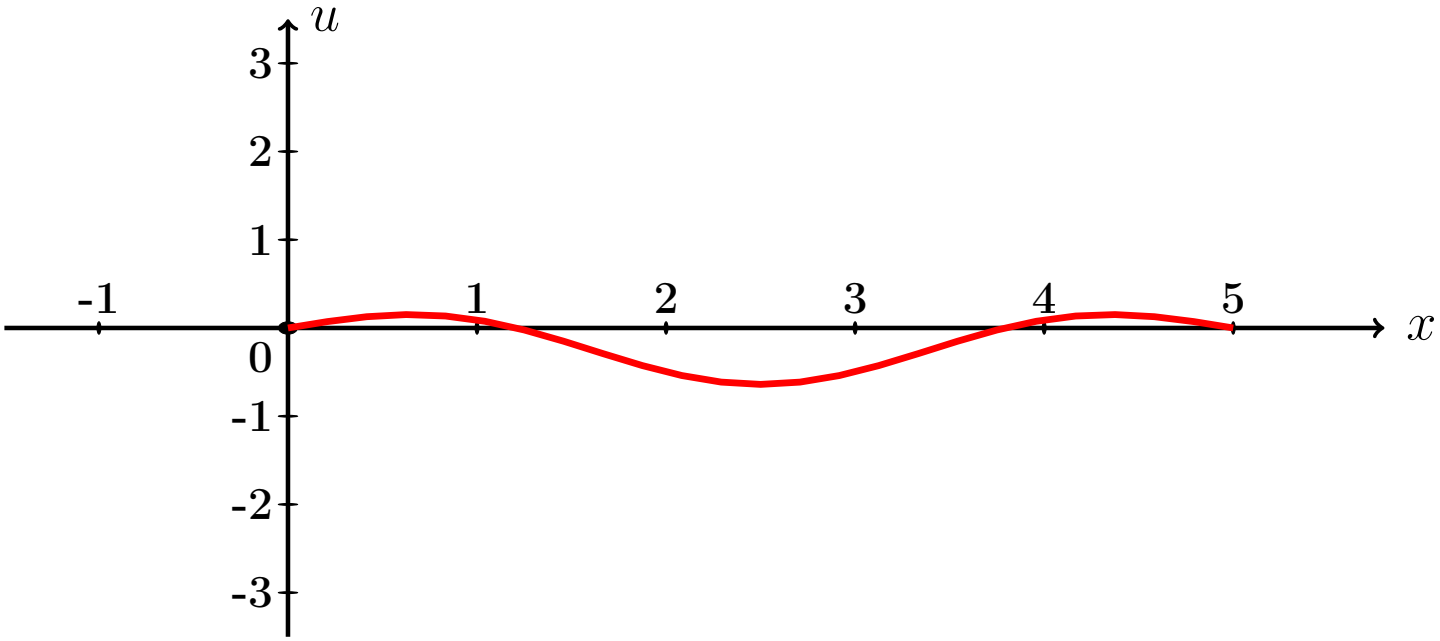


Рис.:

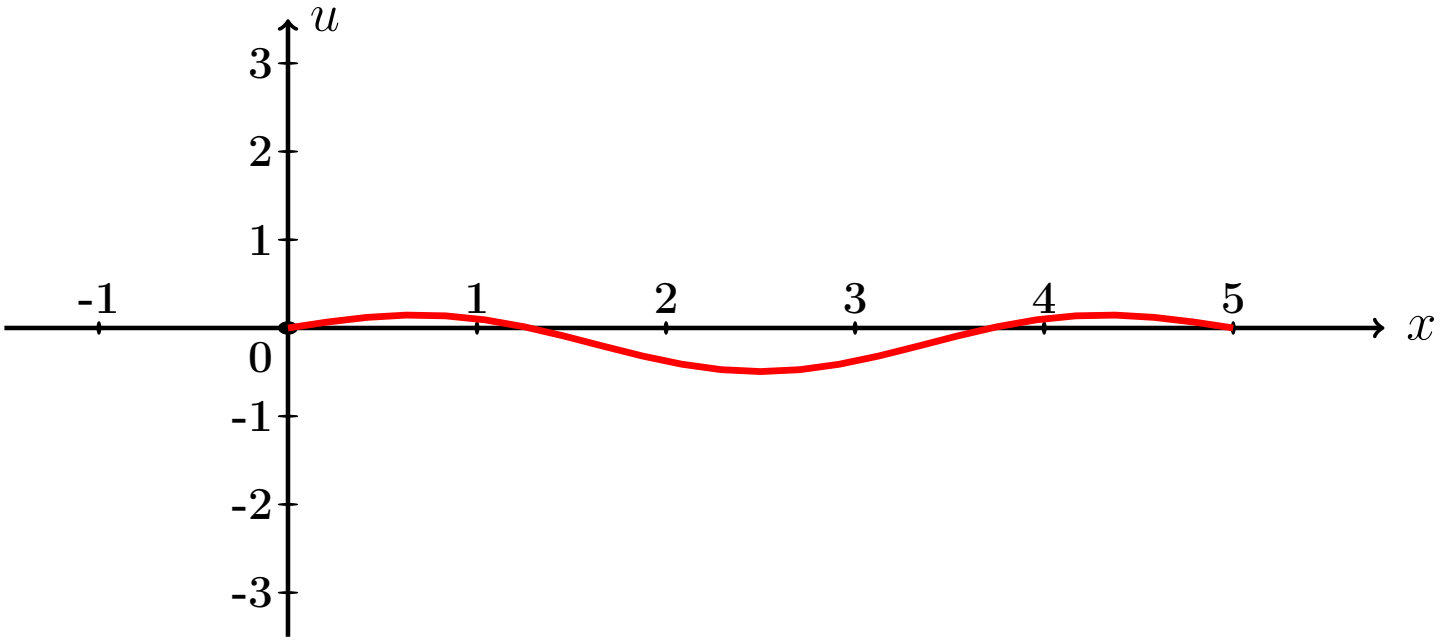


Рис.:

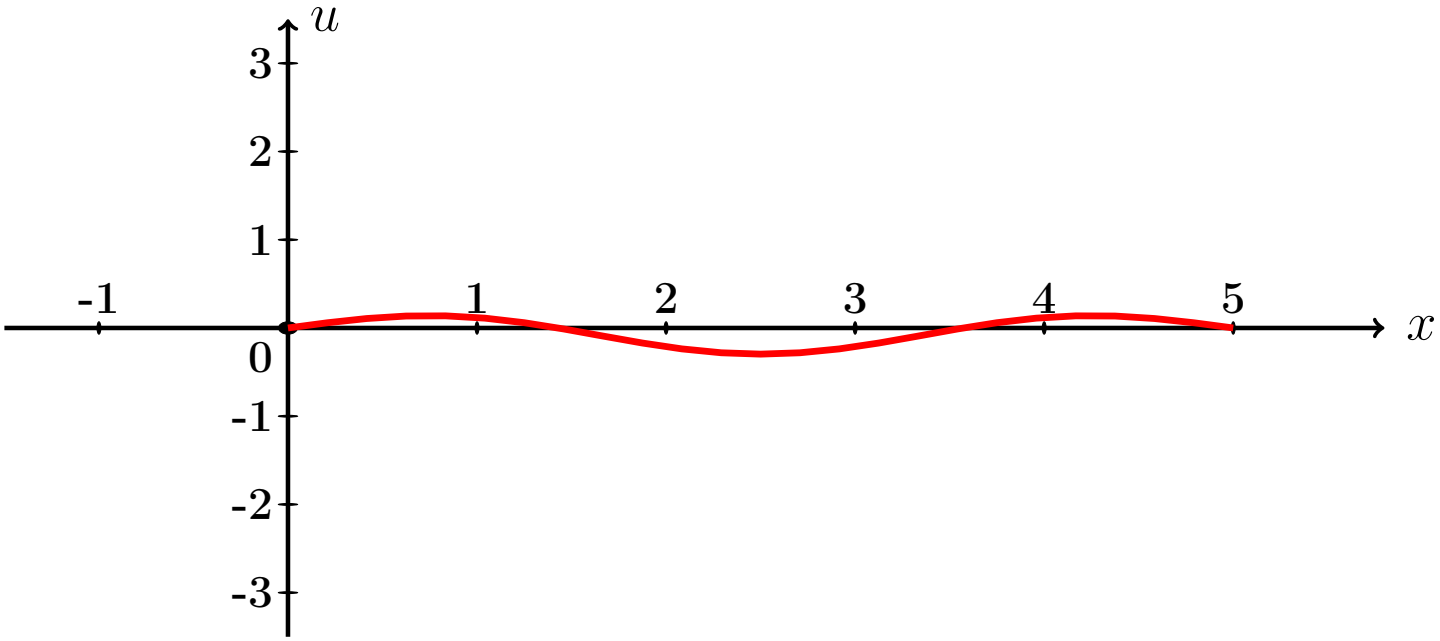


Рис.:

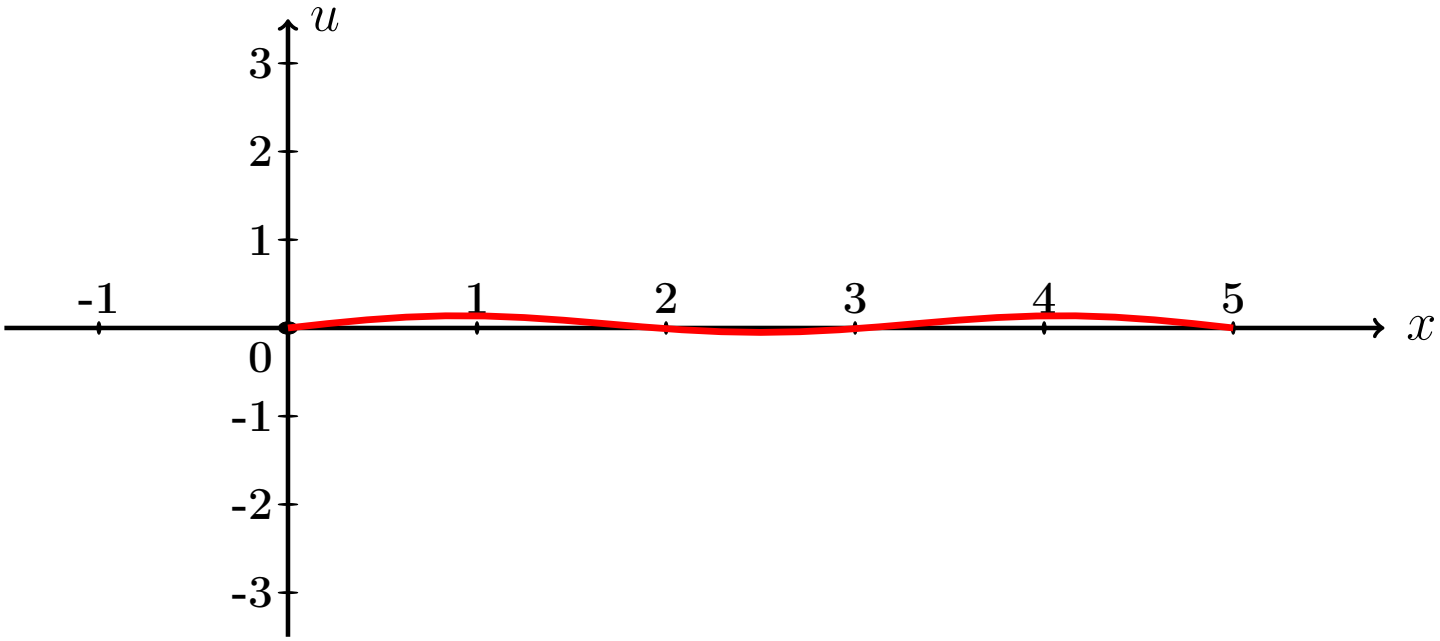


Рис.:

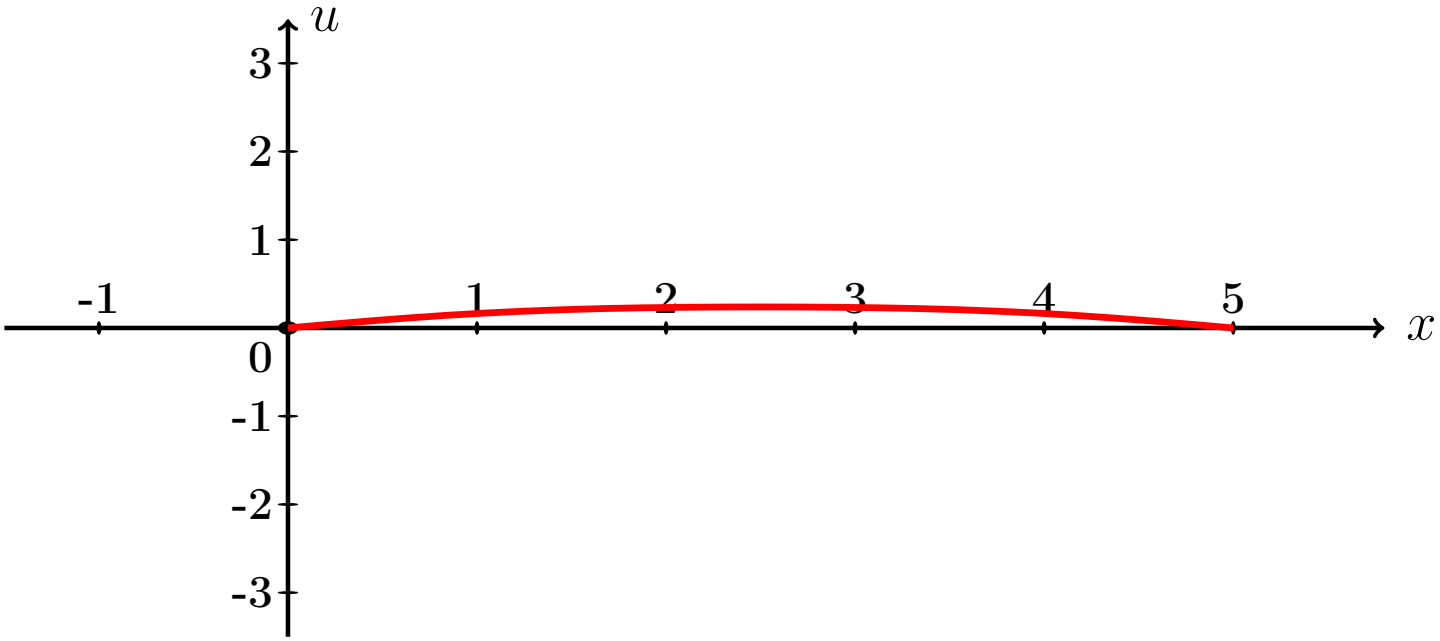


Рис.:

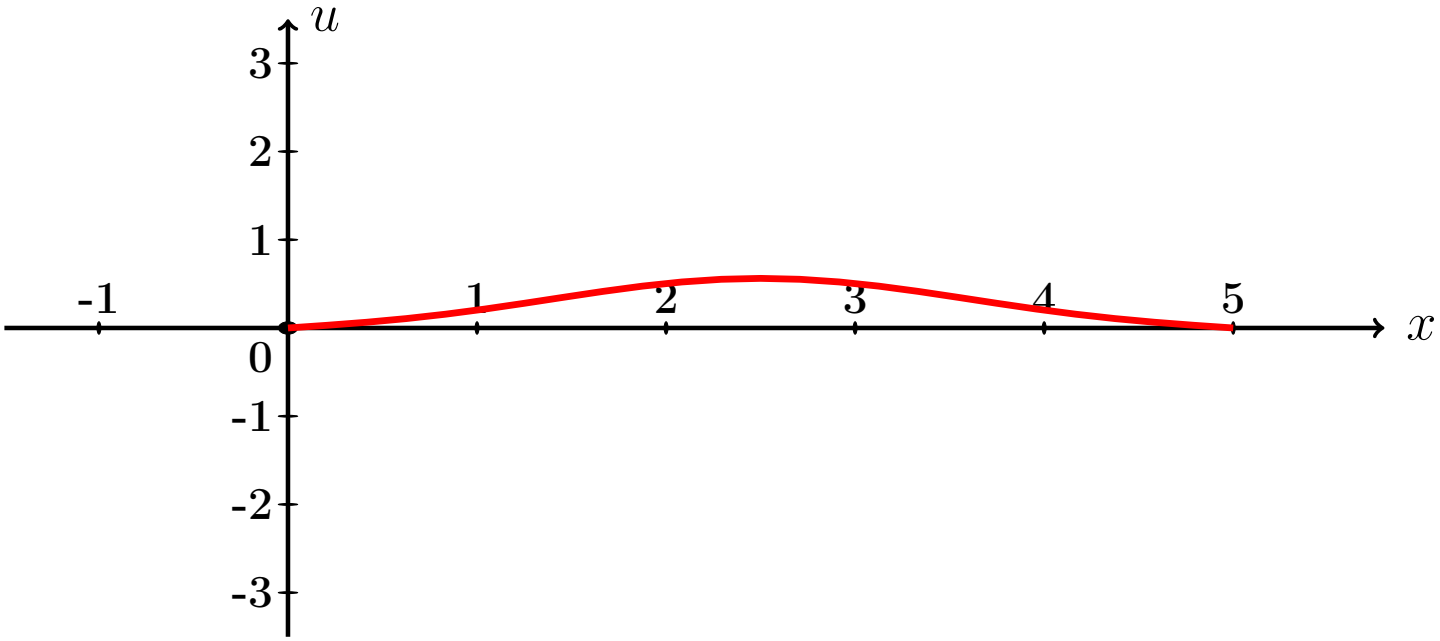


Рис.:

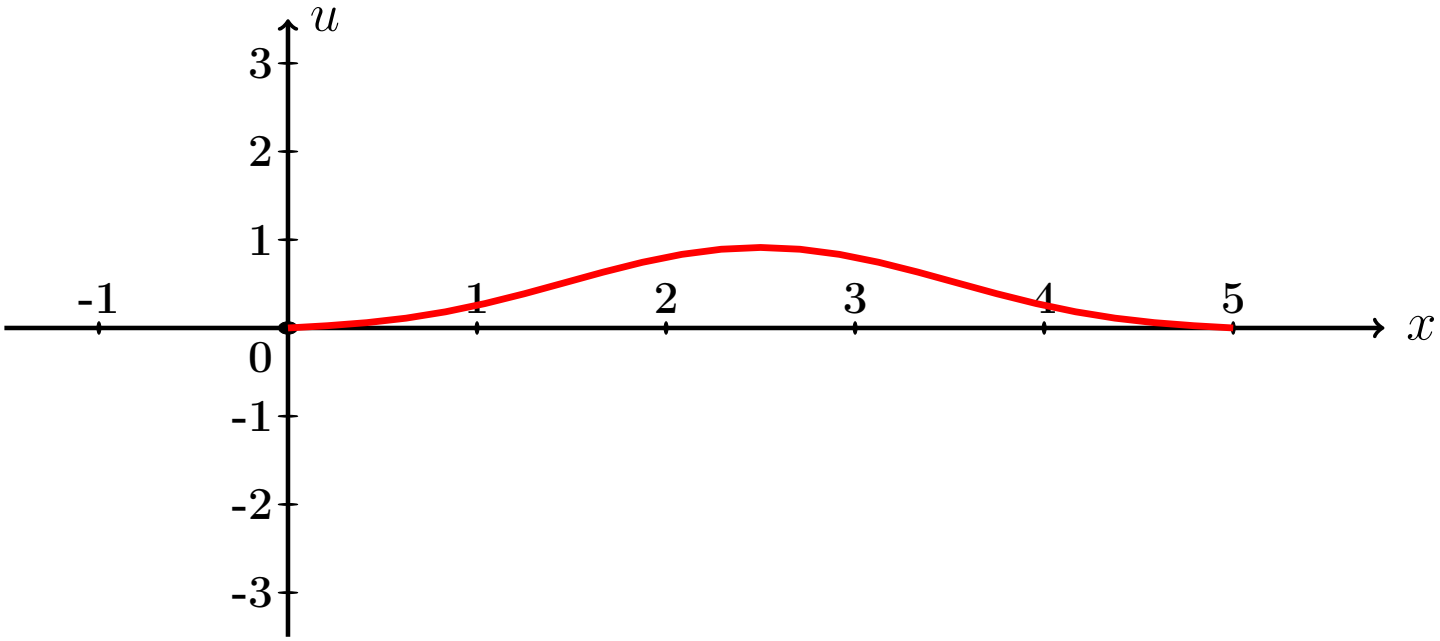


Рис.:

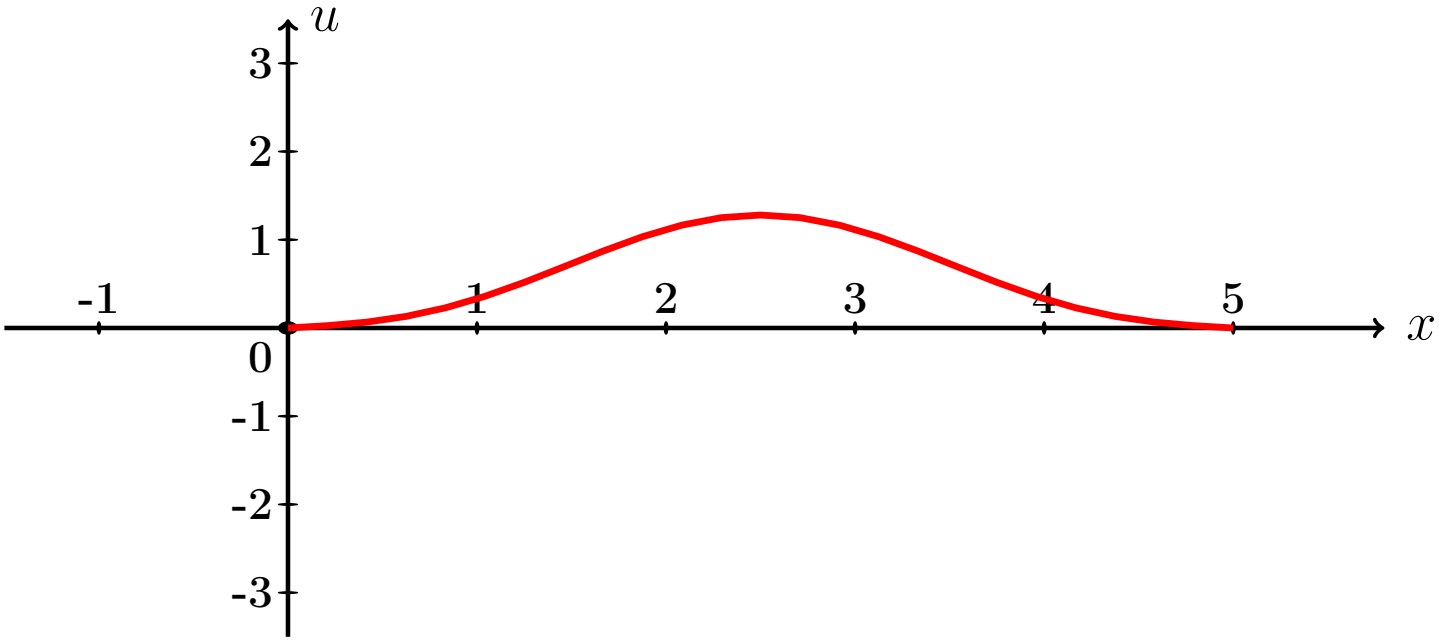


Рис.:

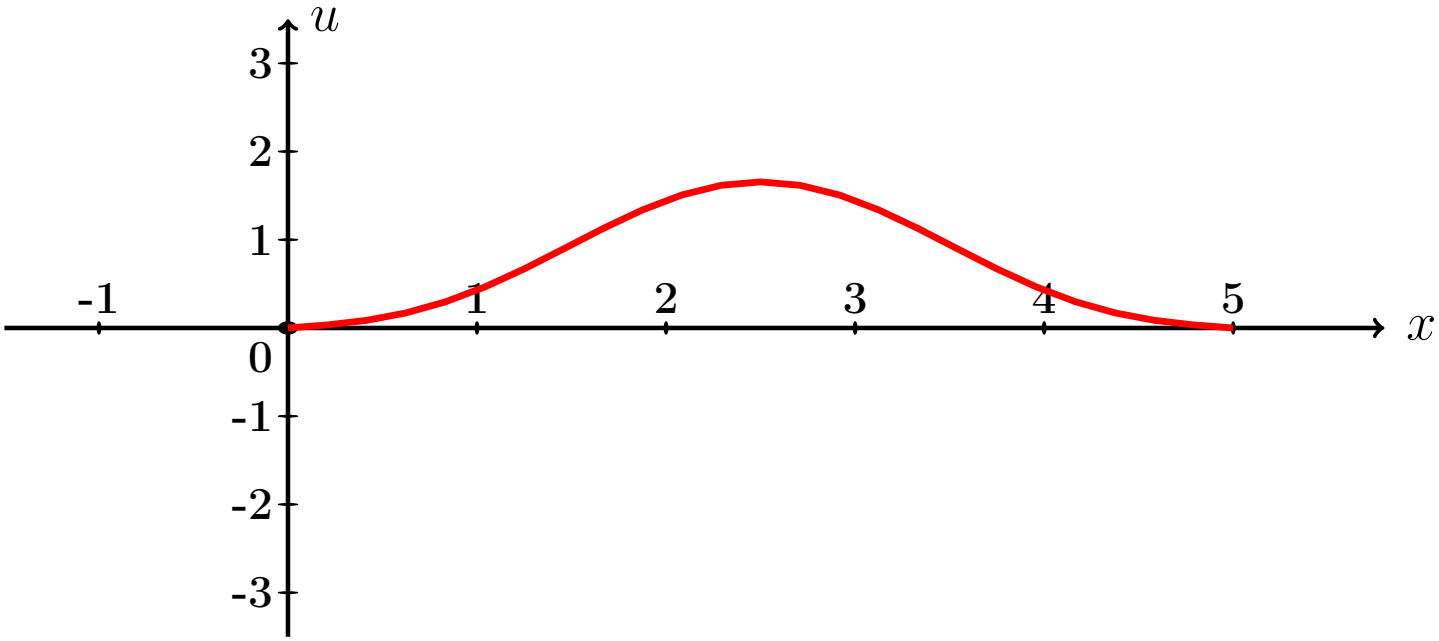


Рис.:

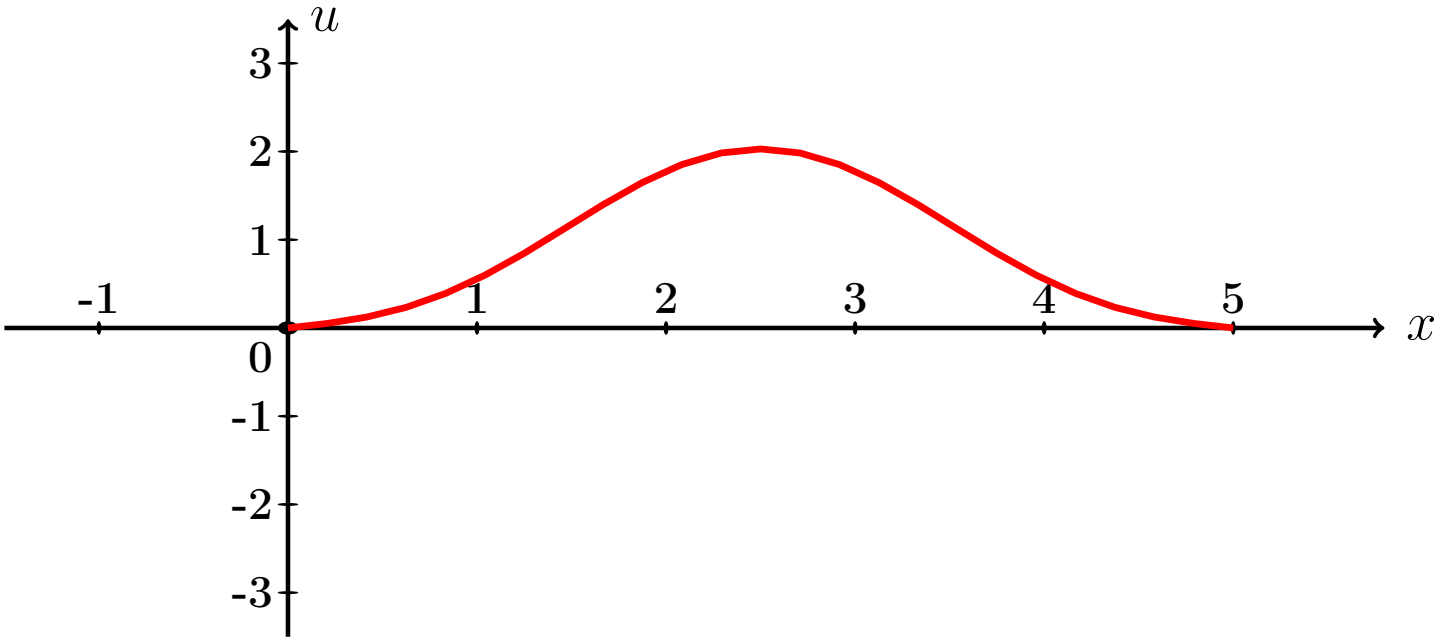


Рис.:

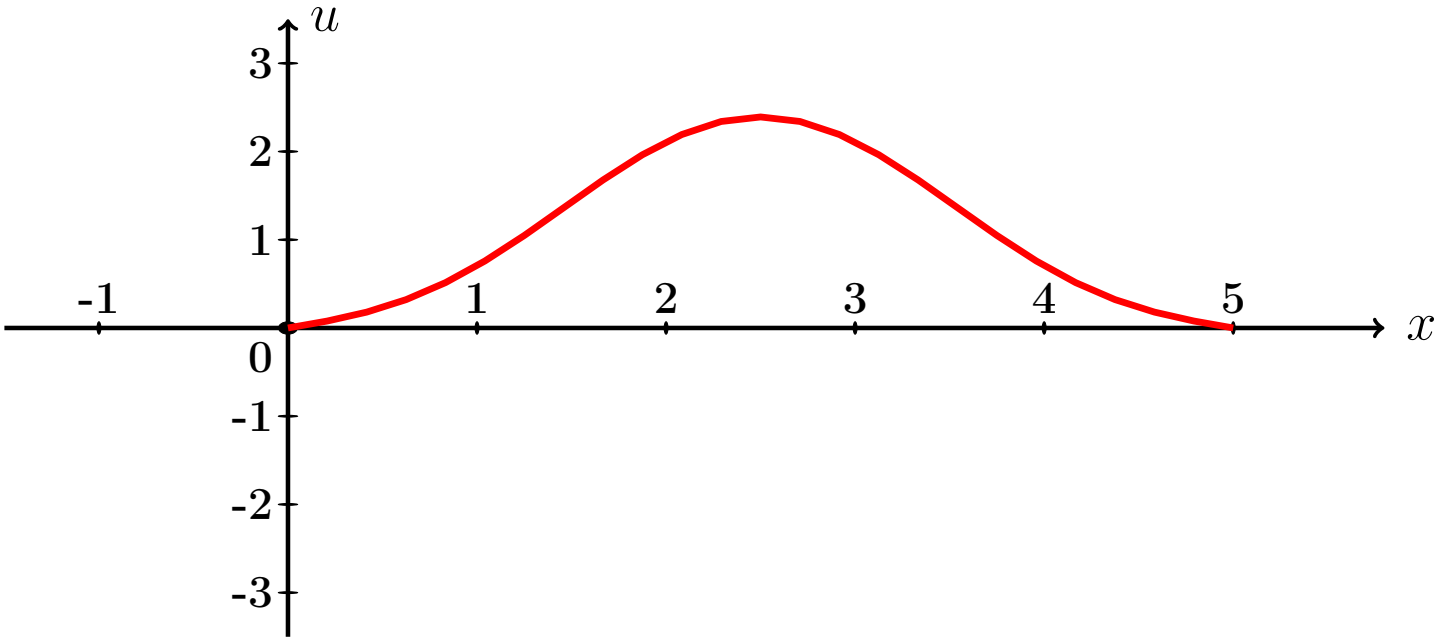


Рис.:

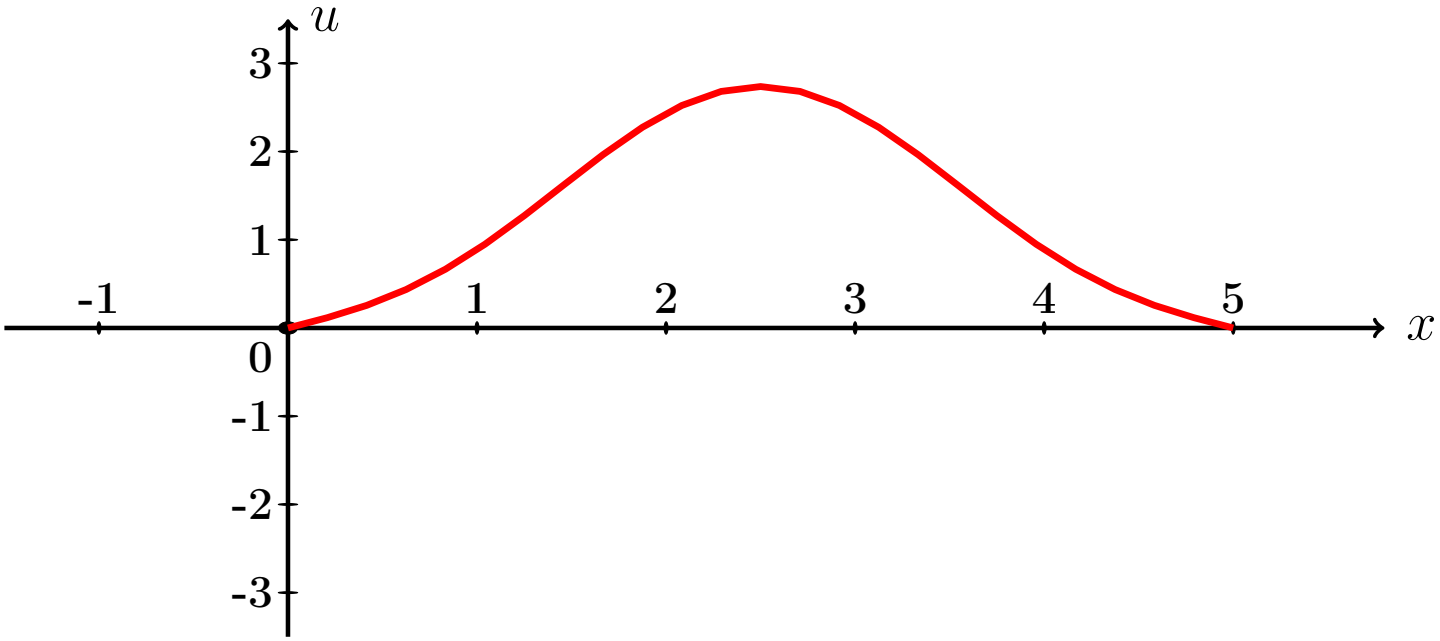


Рис.:

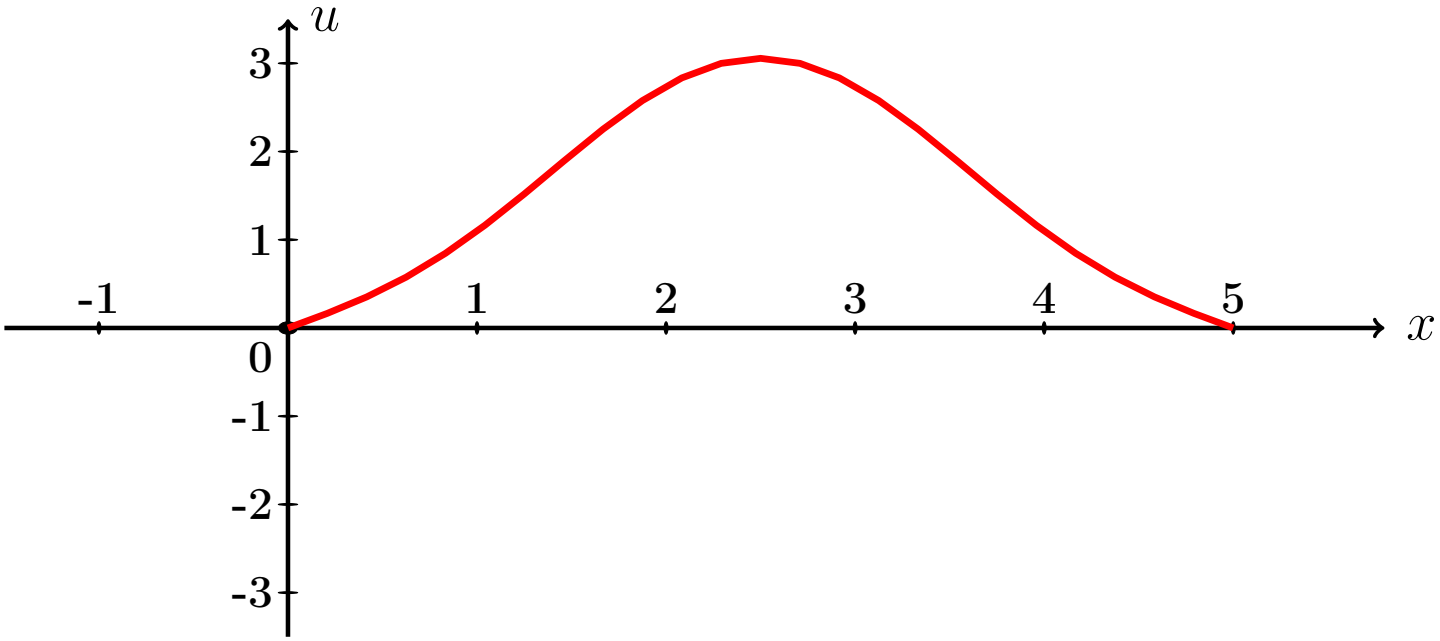


Рис.:

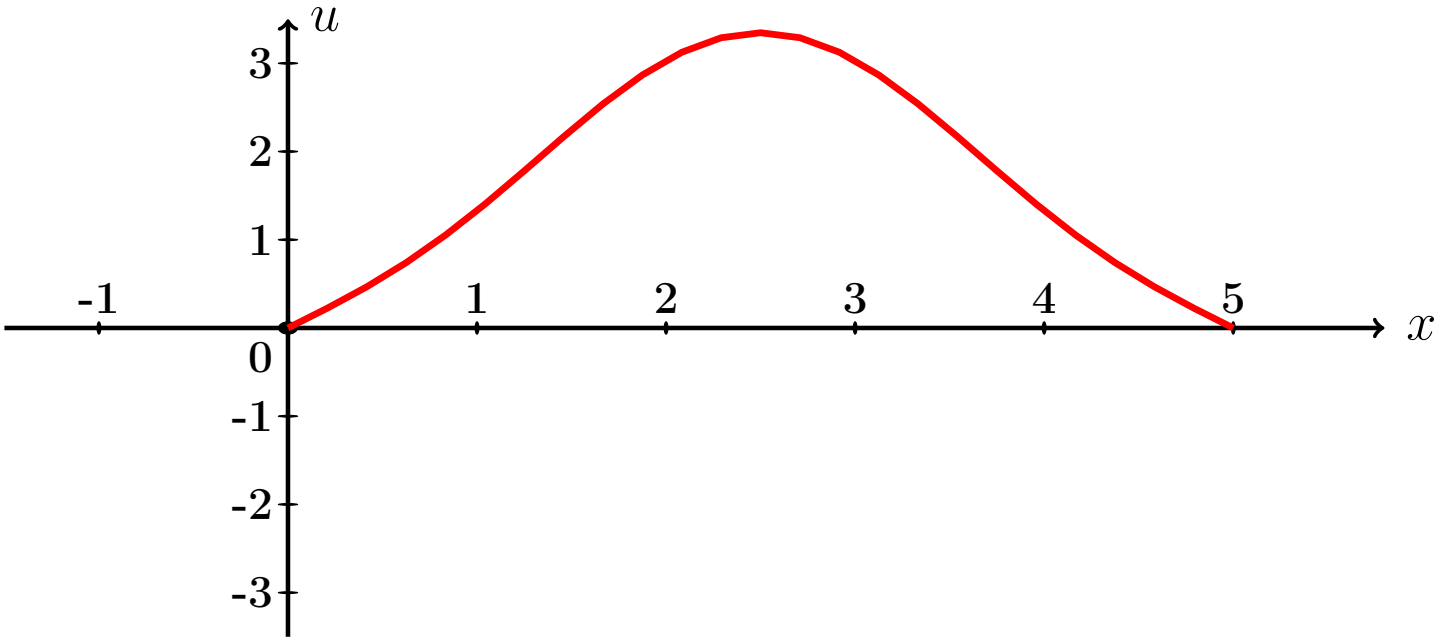


Рис.:

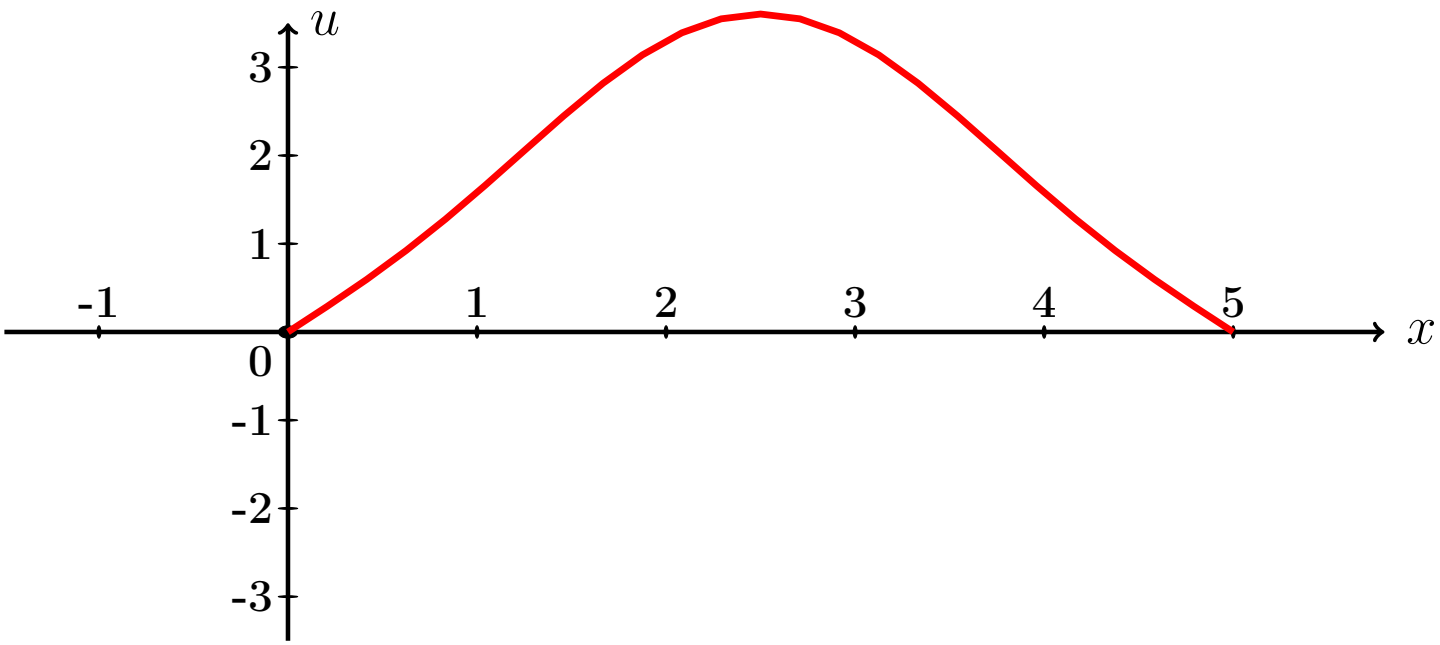


Рис.:

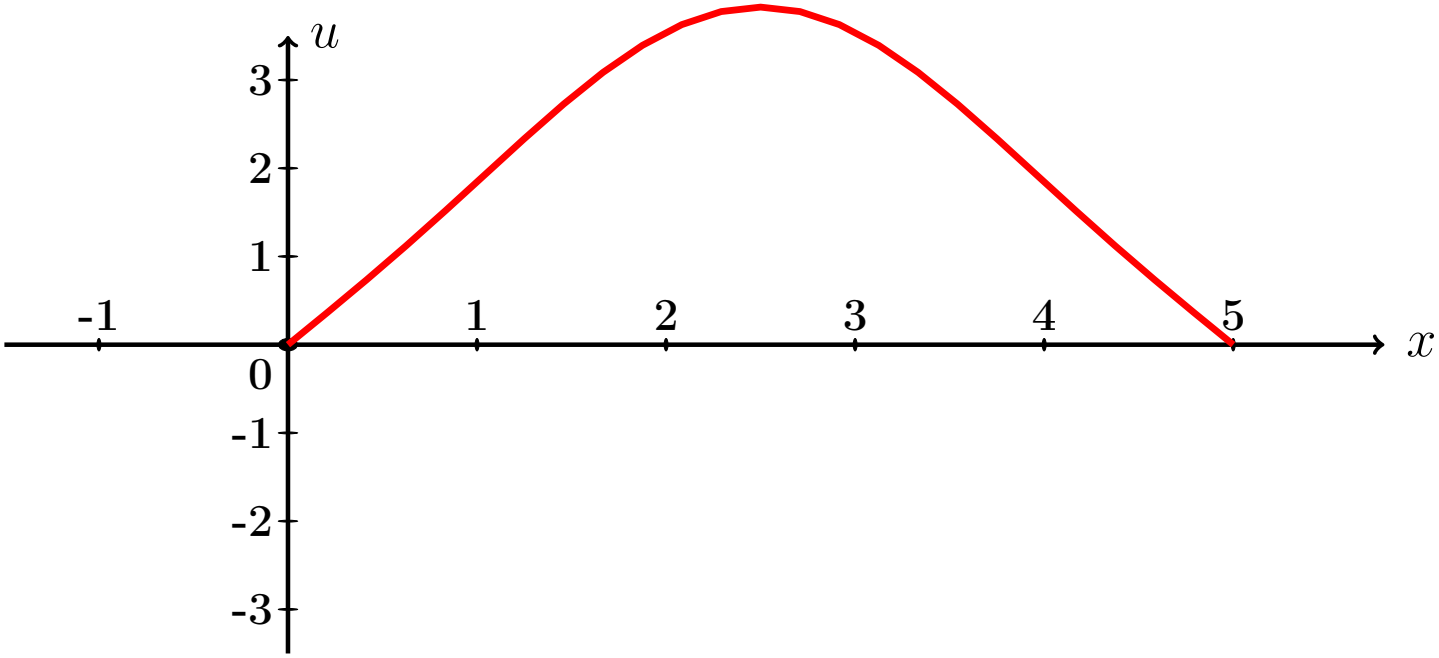


Рис.:

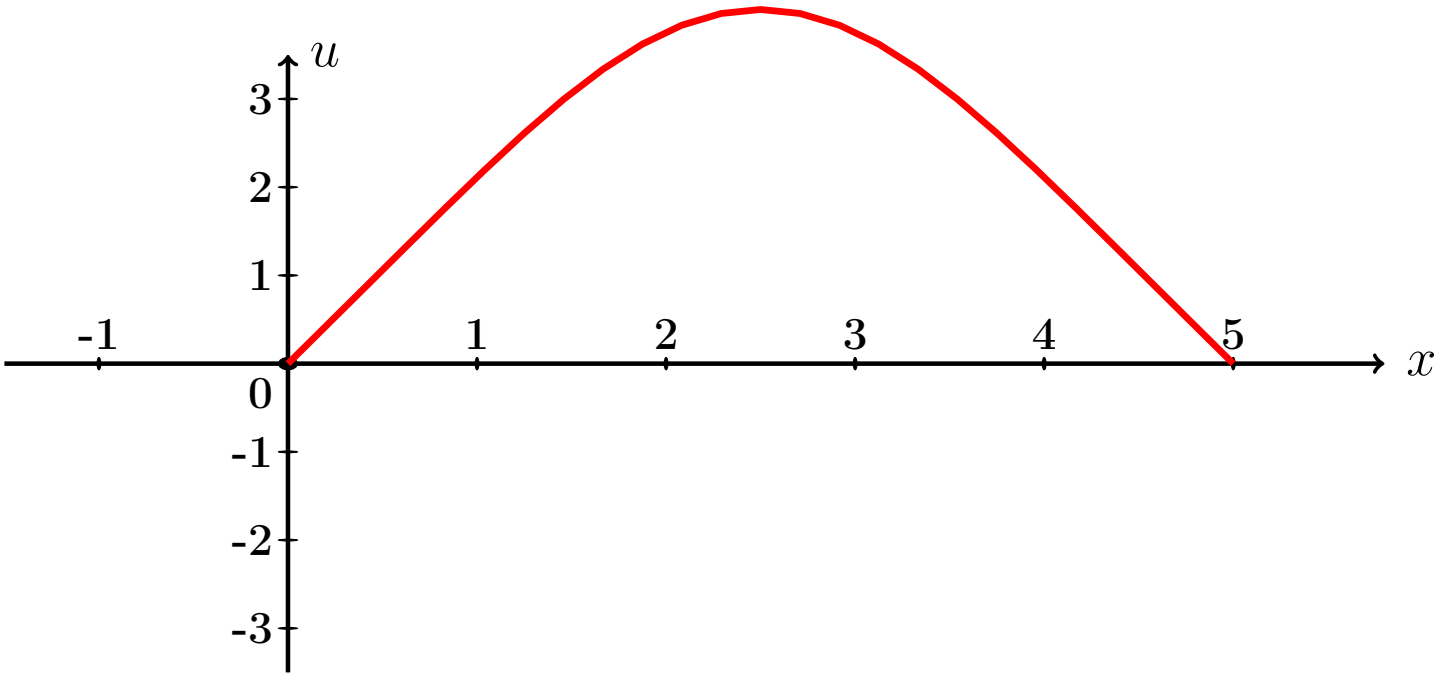


Рис.:

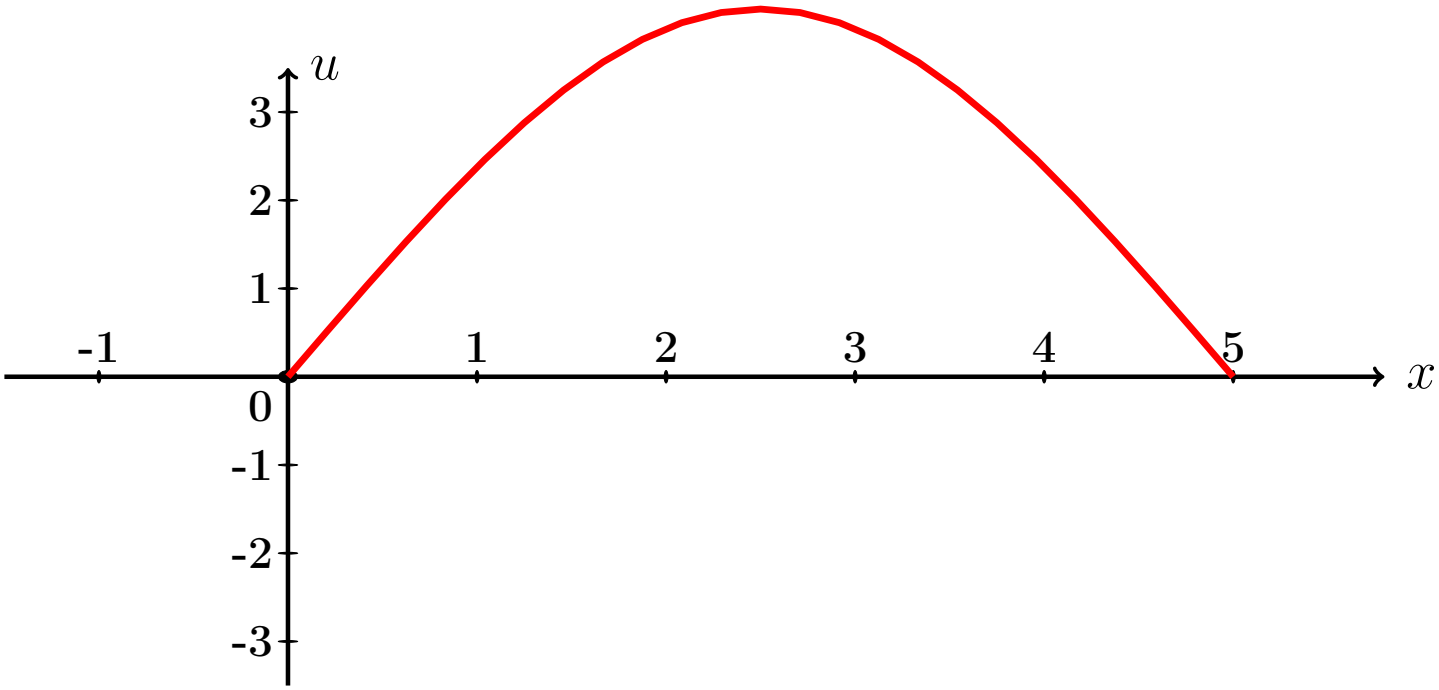


Рис.:

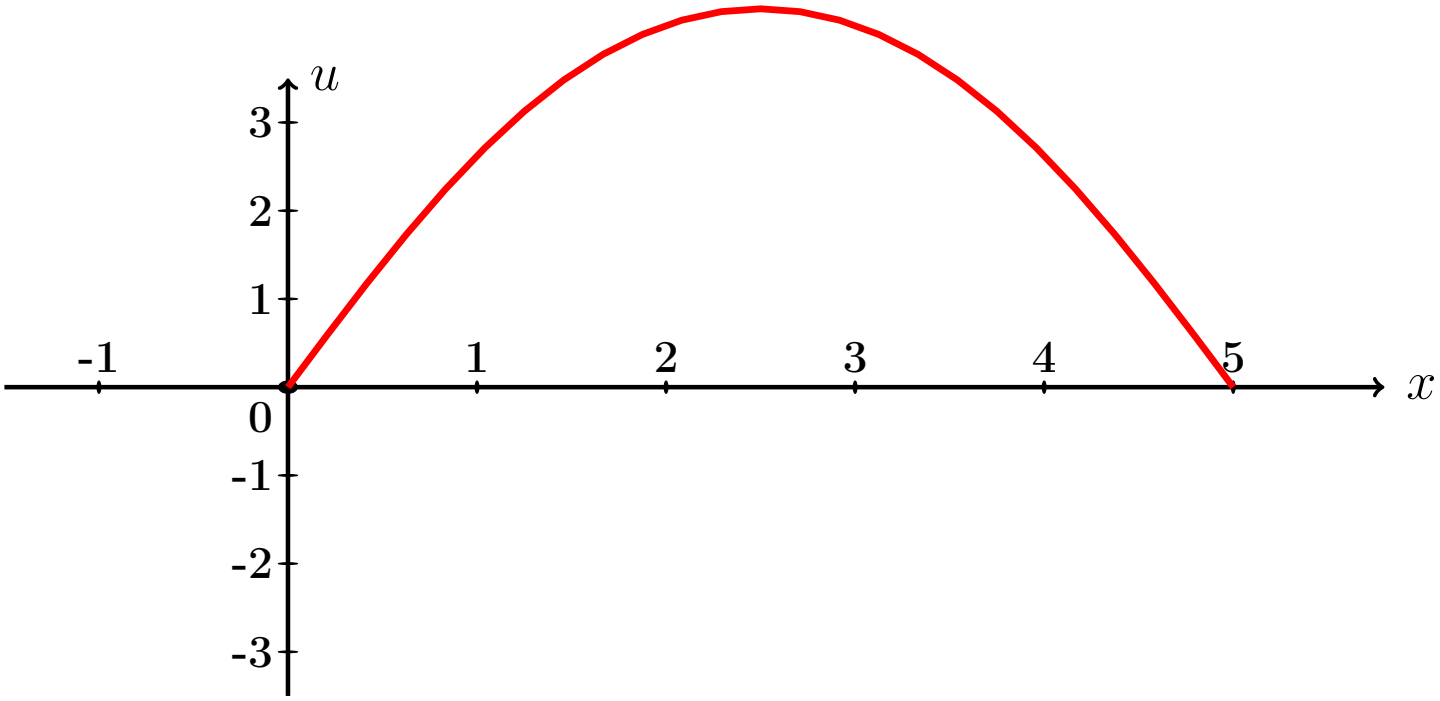


Рис.:

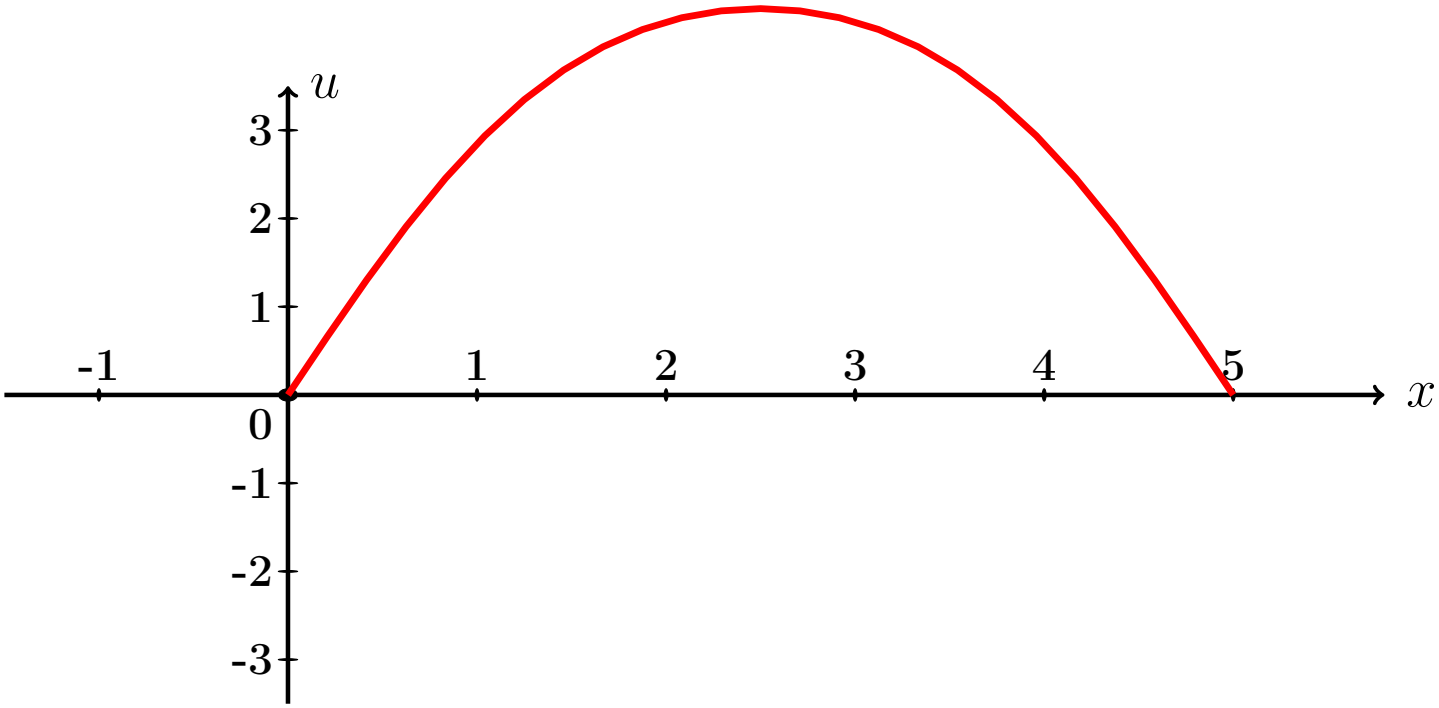


Рис.:

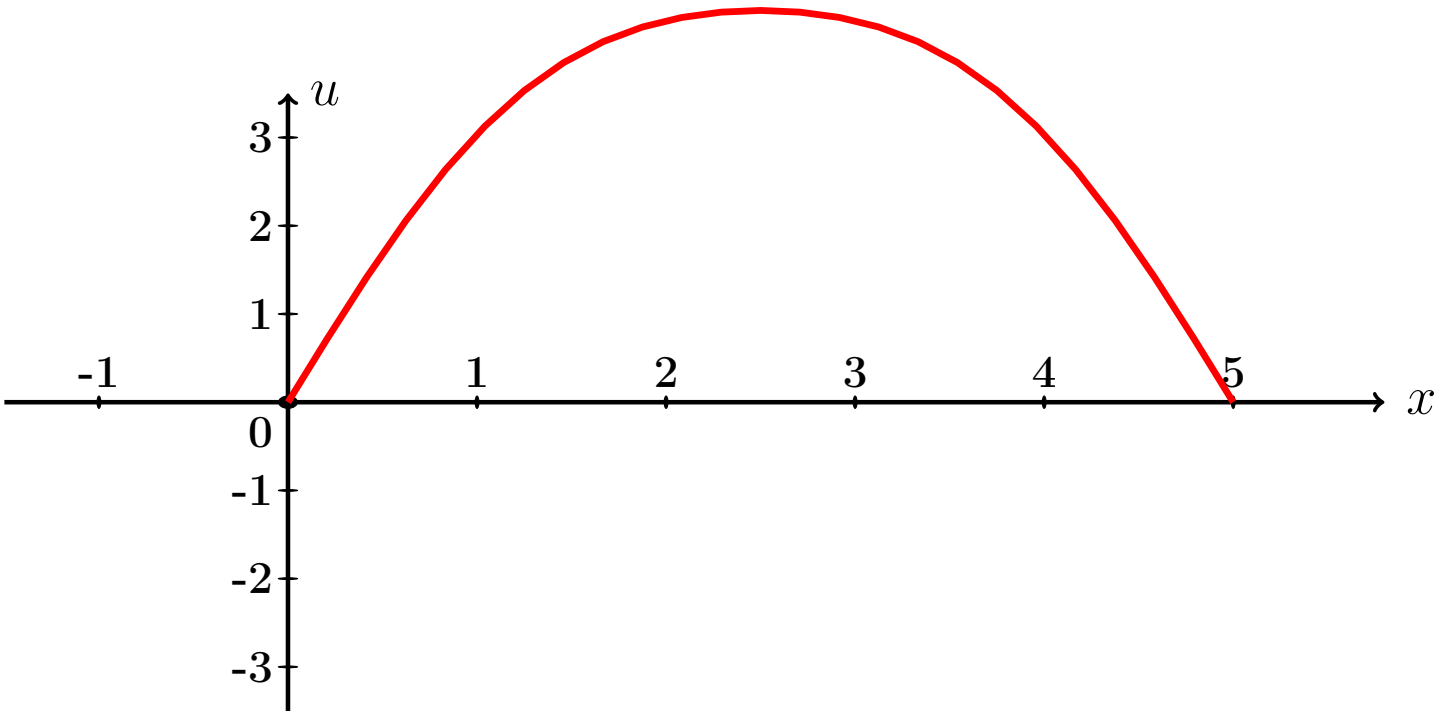


Рис.:

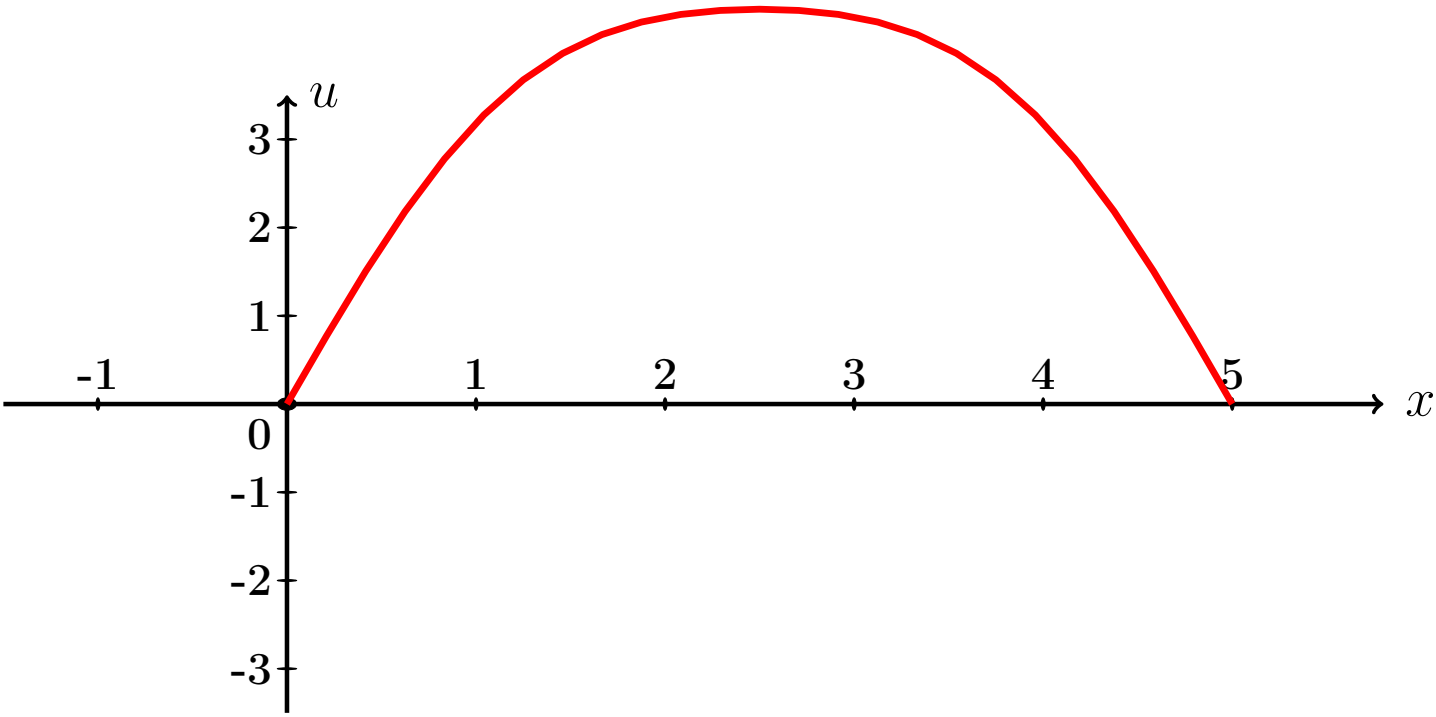


Рис.:

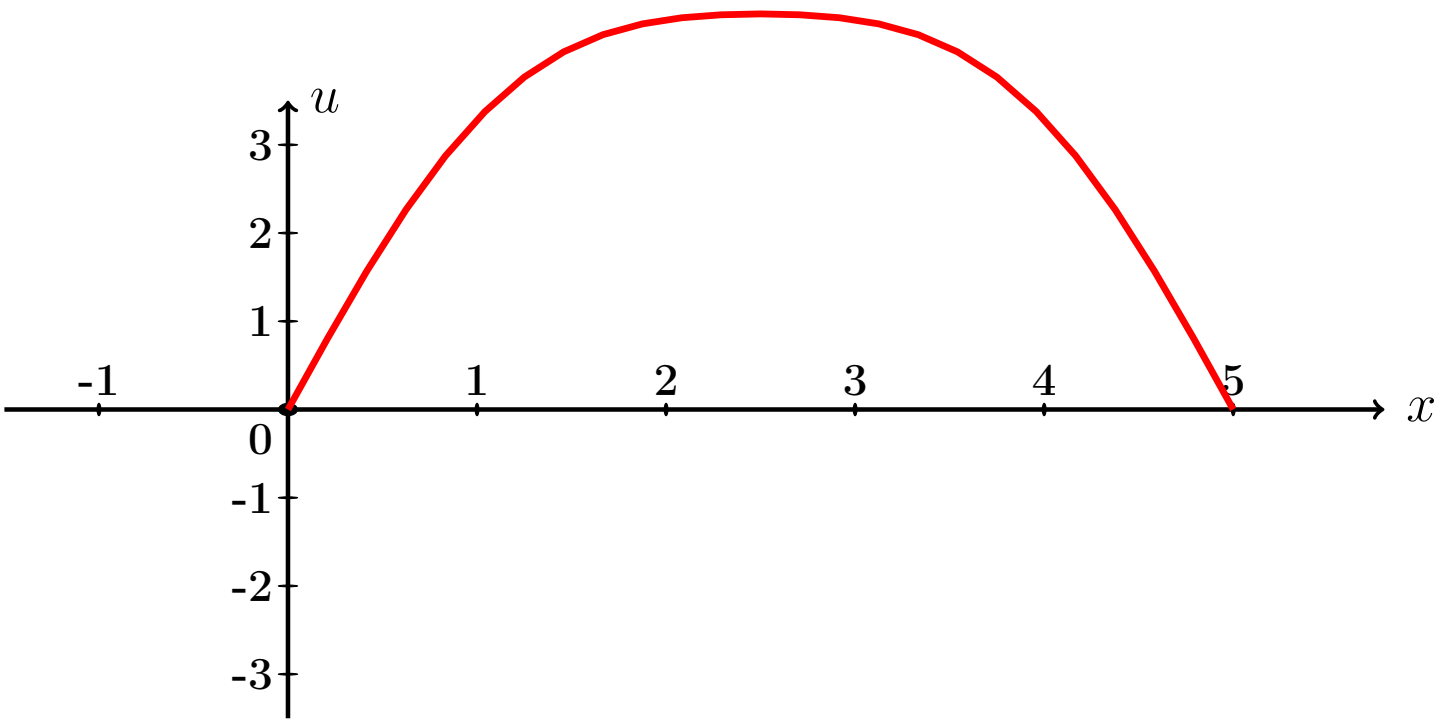


Рис.:

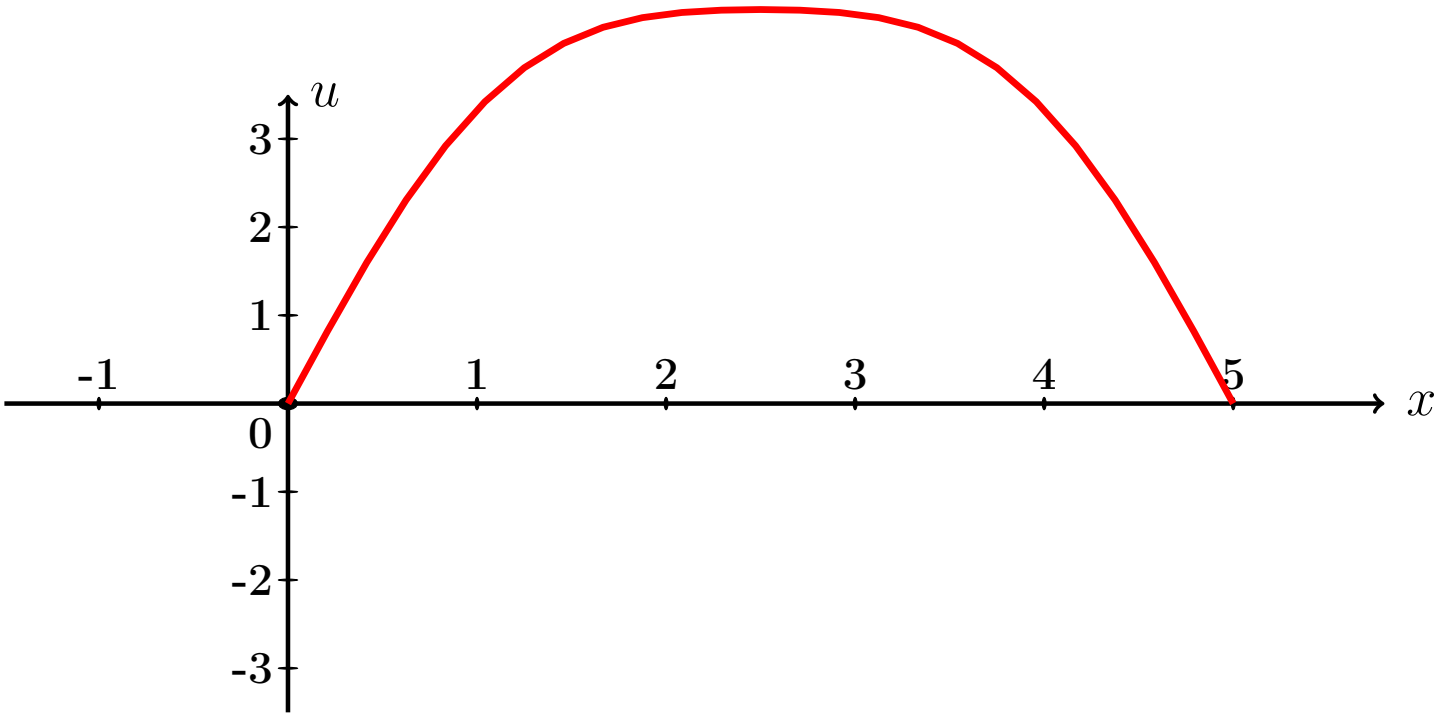


Рис.:

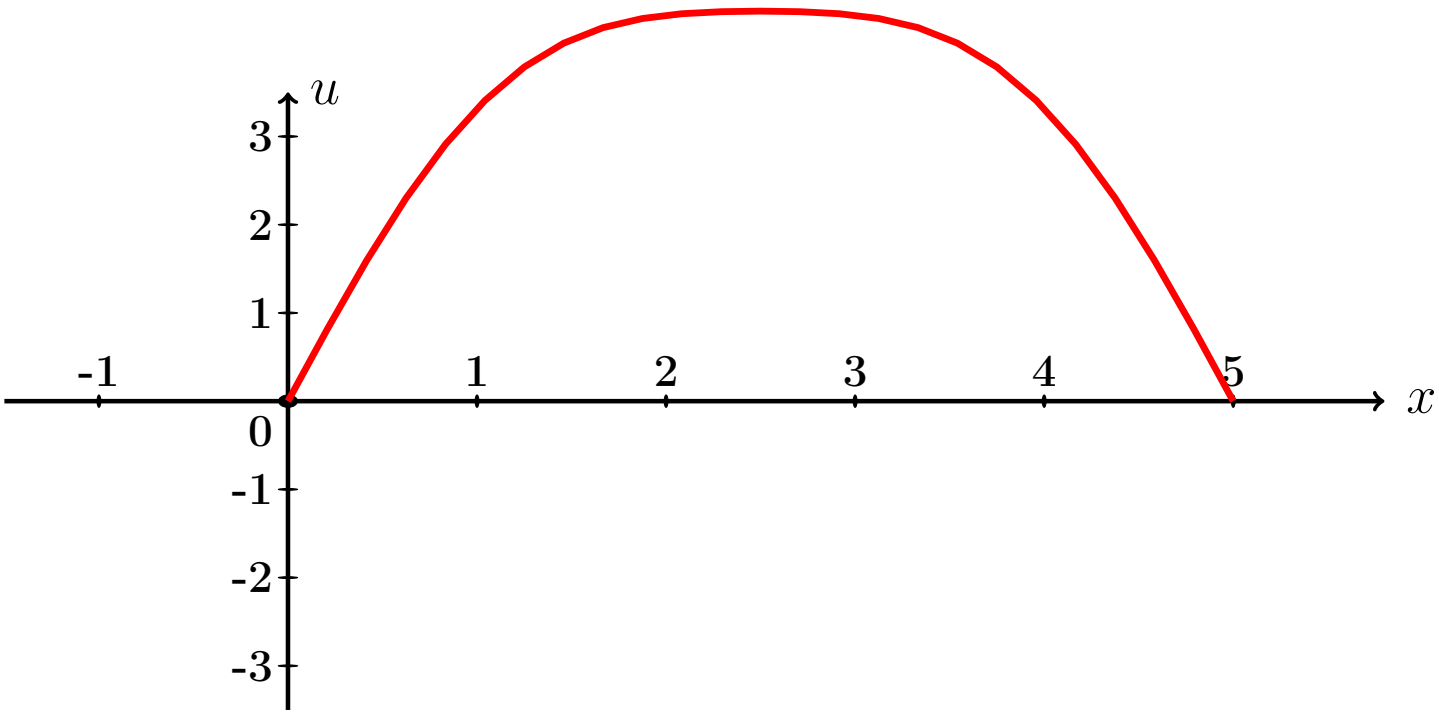


Рис.:

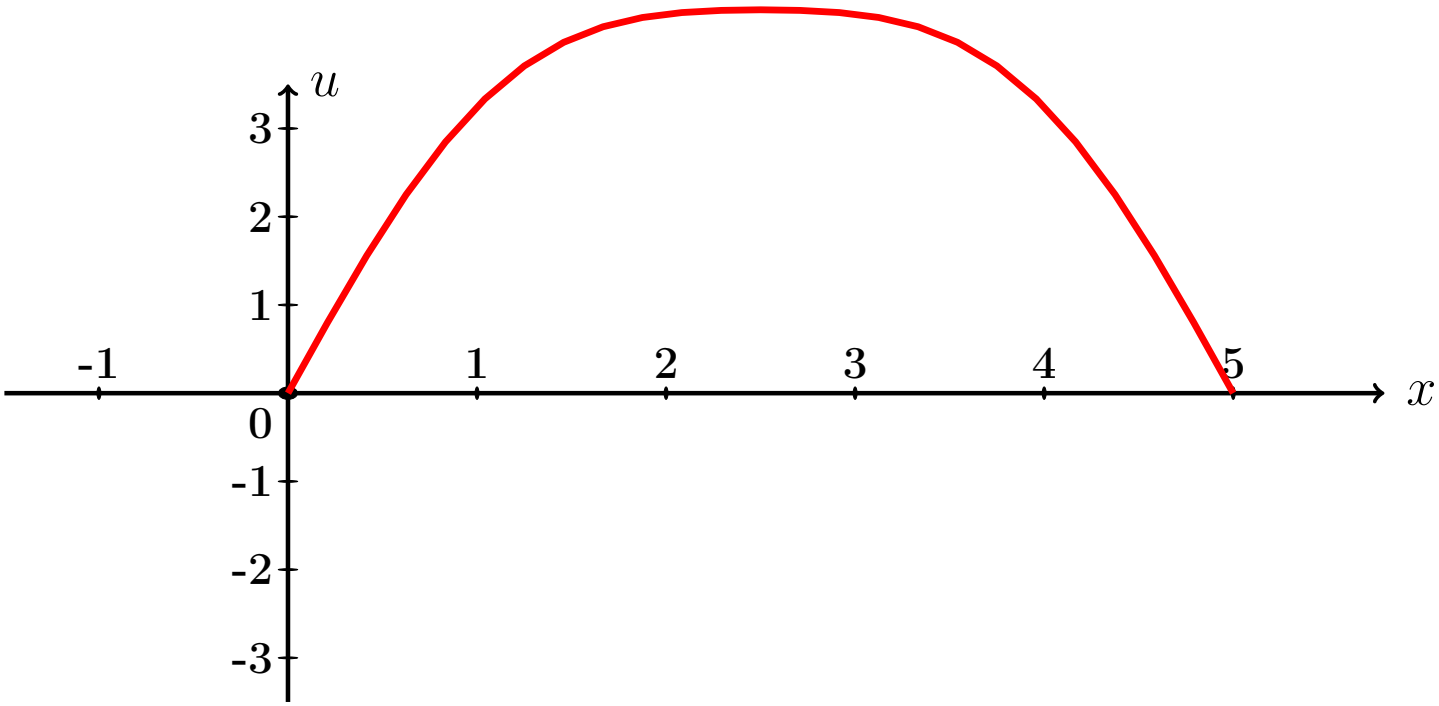


Рис.:

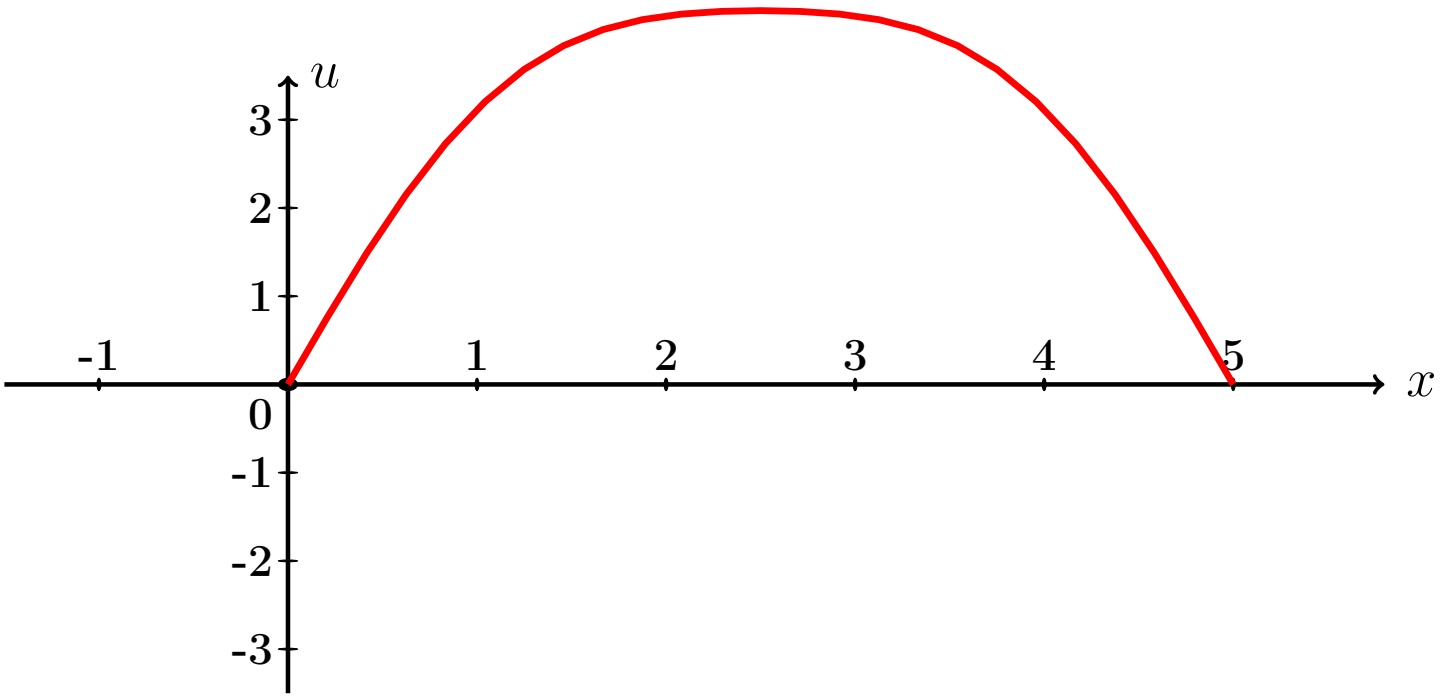


Рис.:

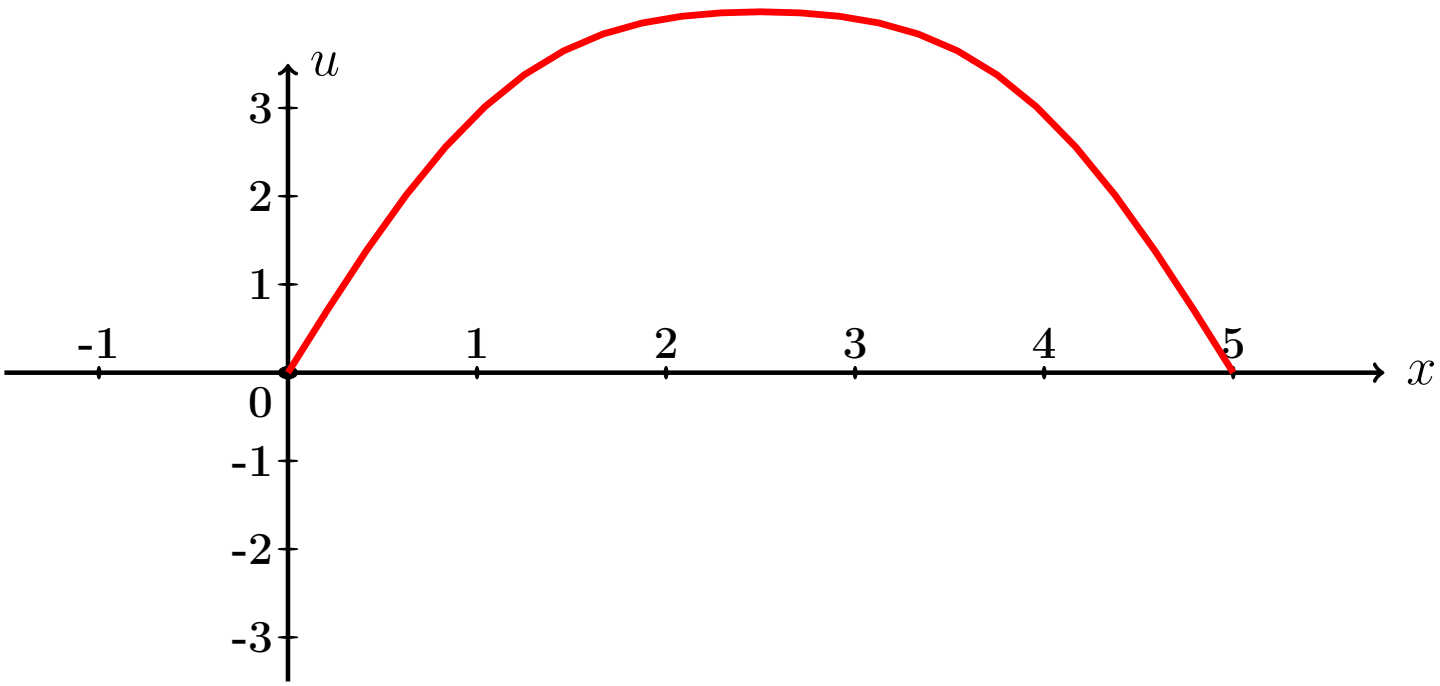


Рис.:

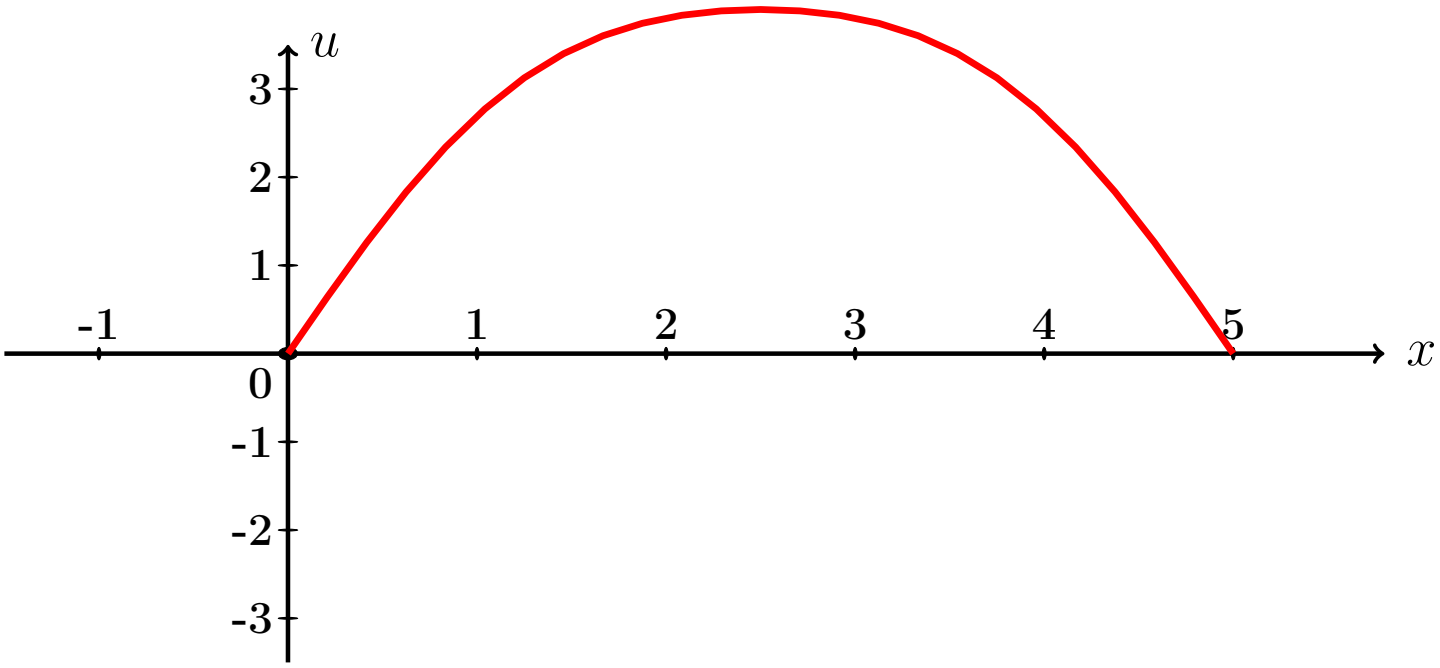


Рис.:

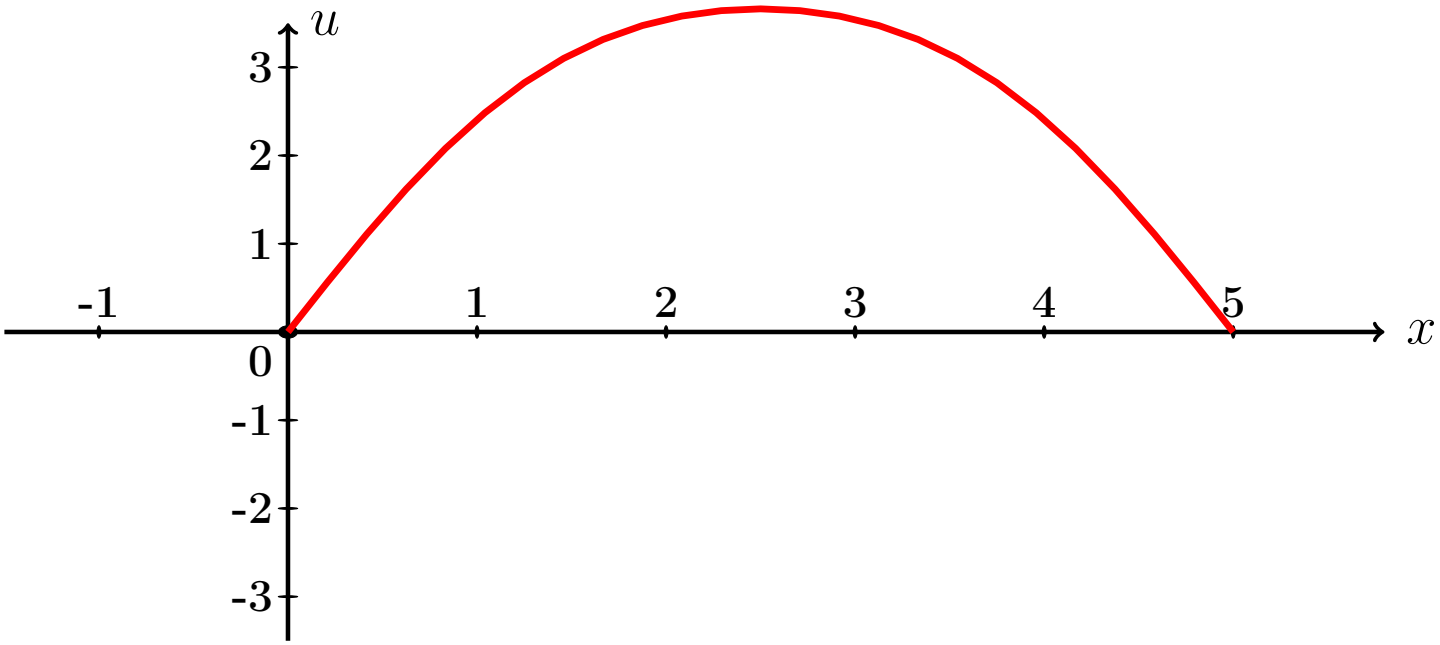


Рис.:

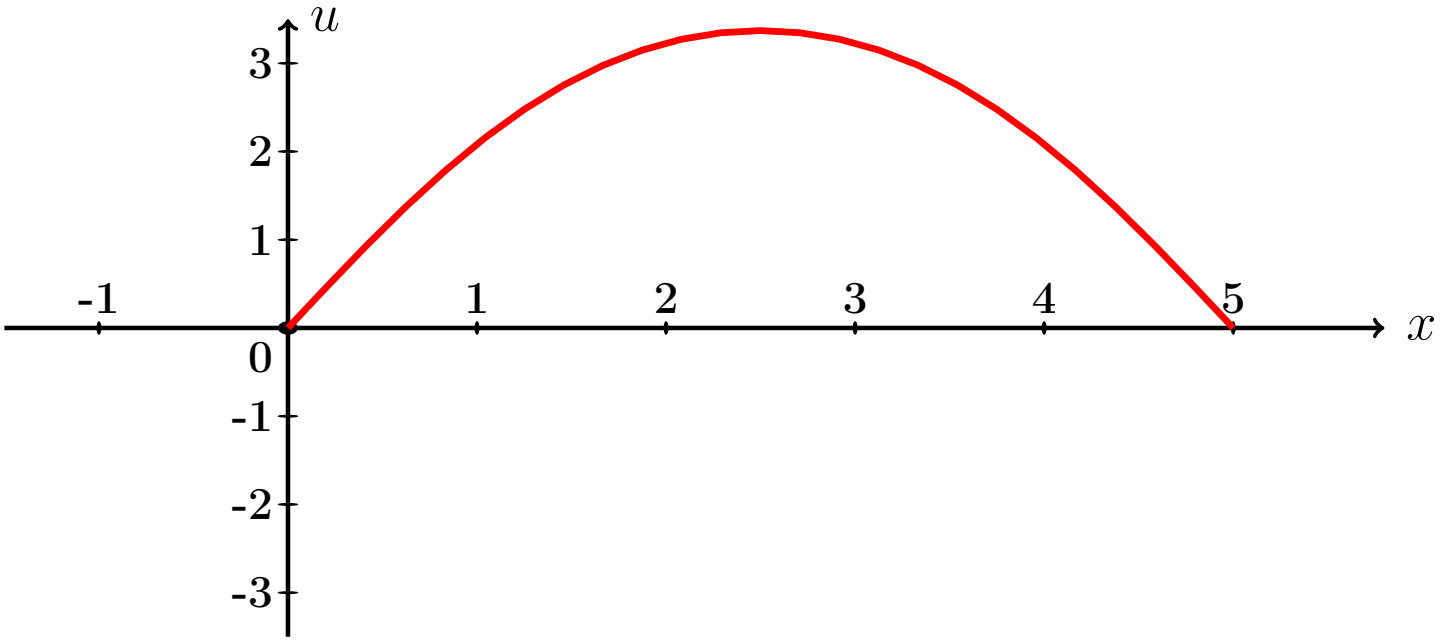


Рис.:

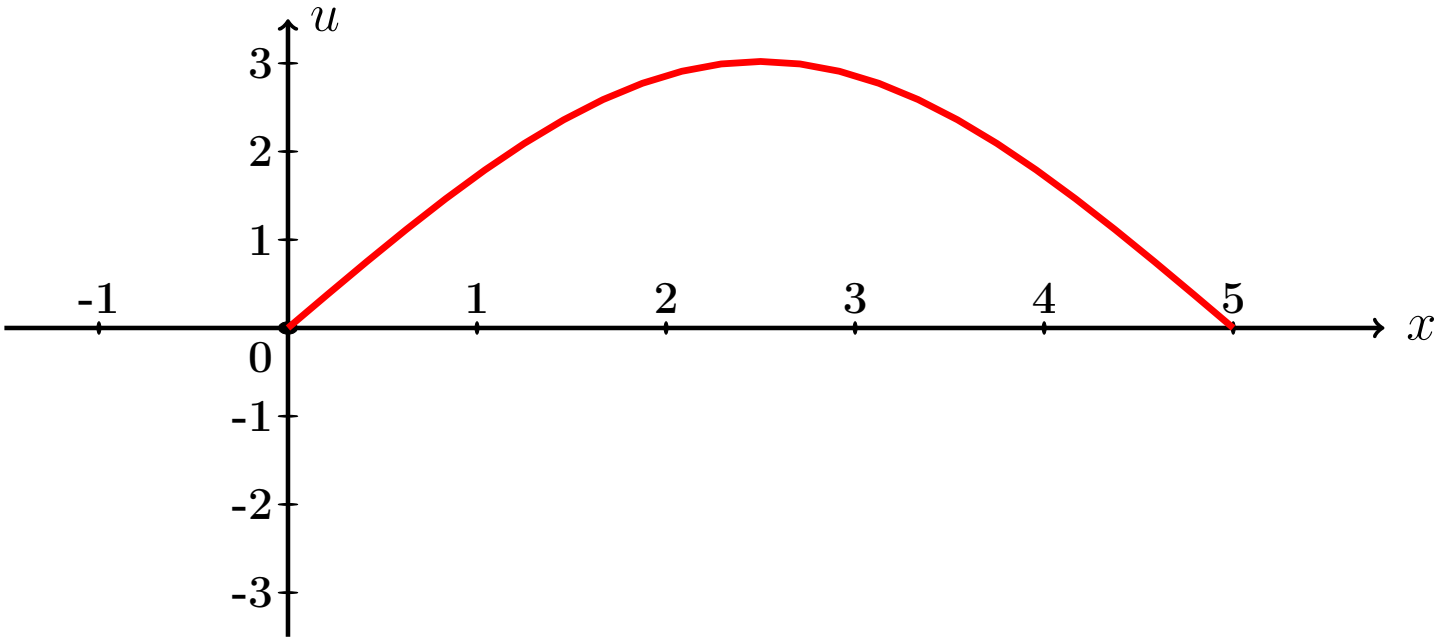


Рис.:

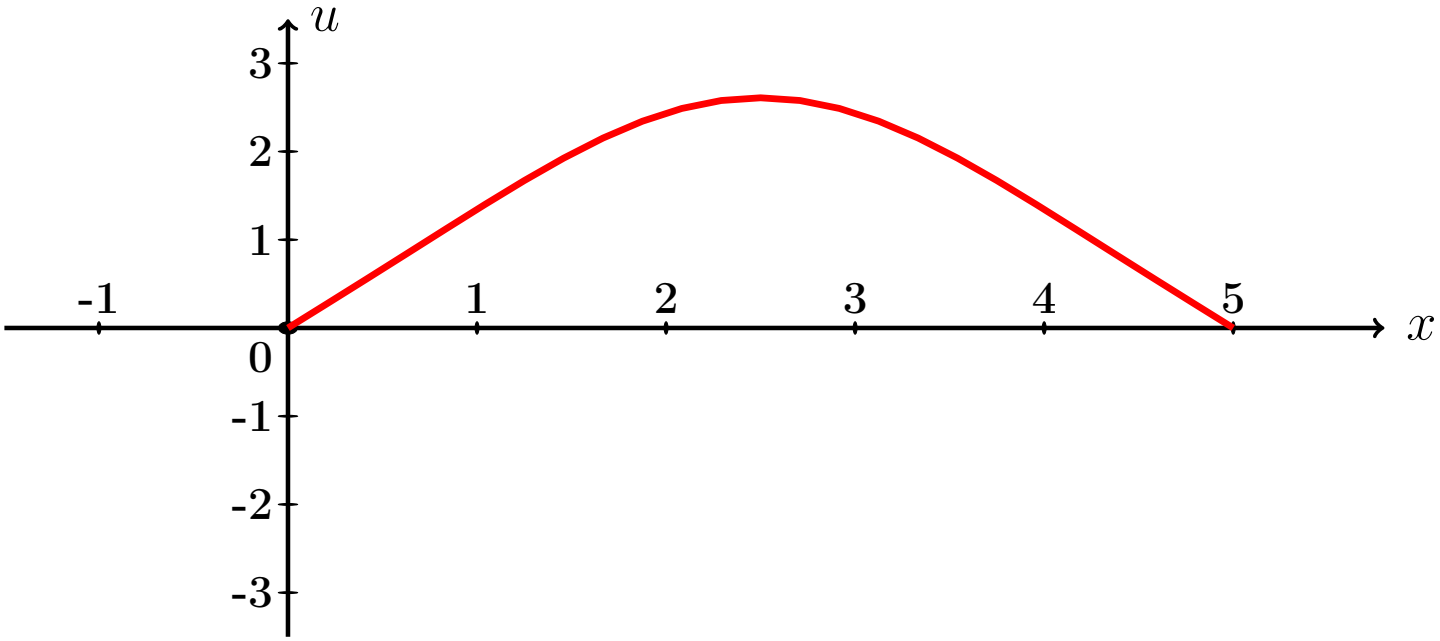


Рис.:

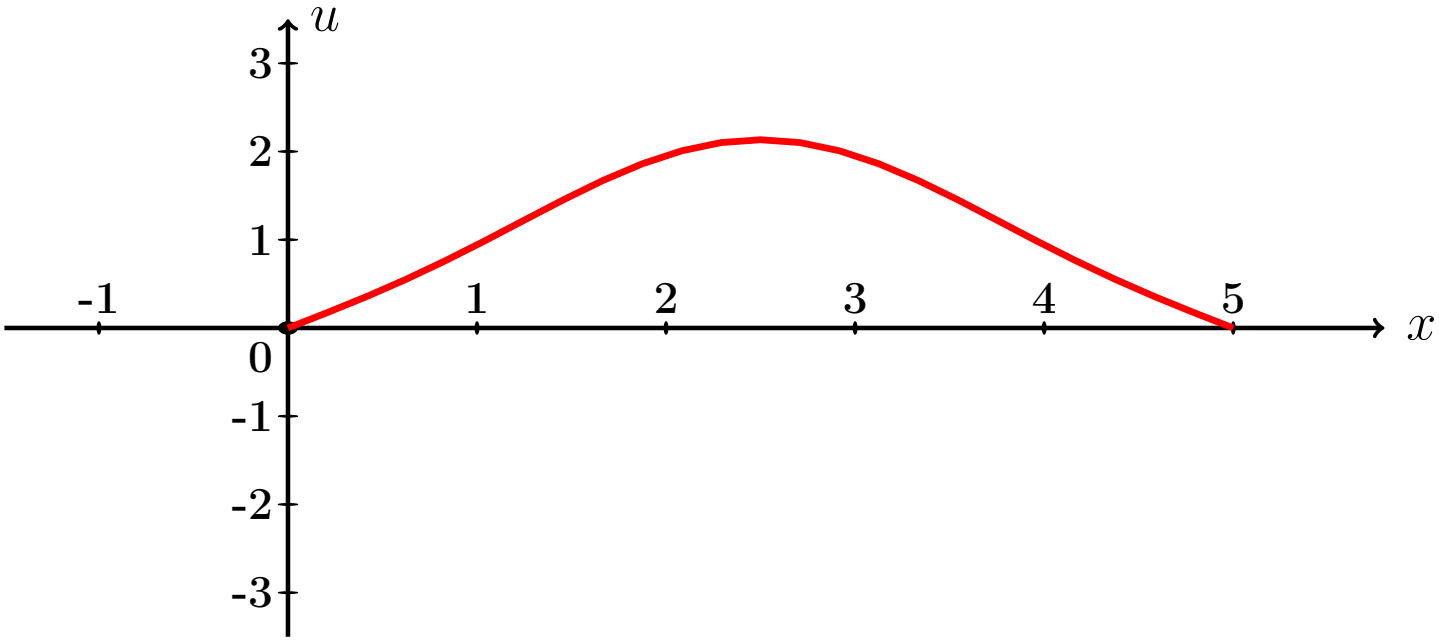


Рис.:

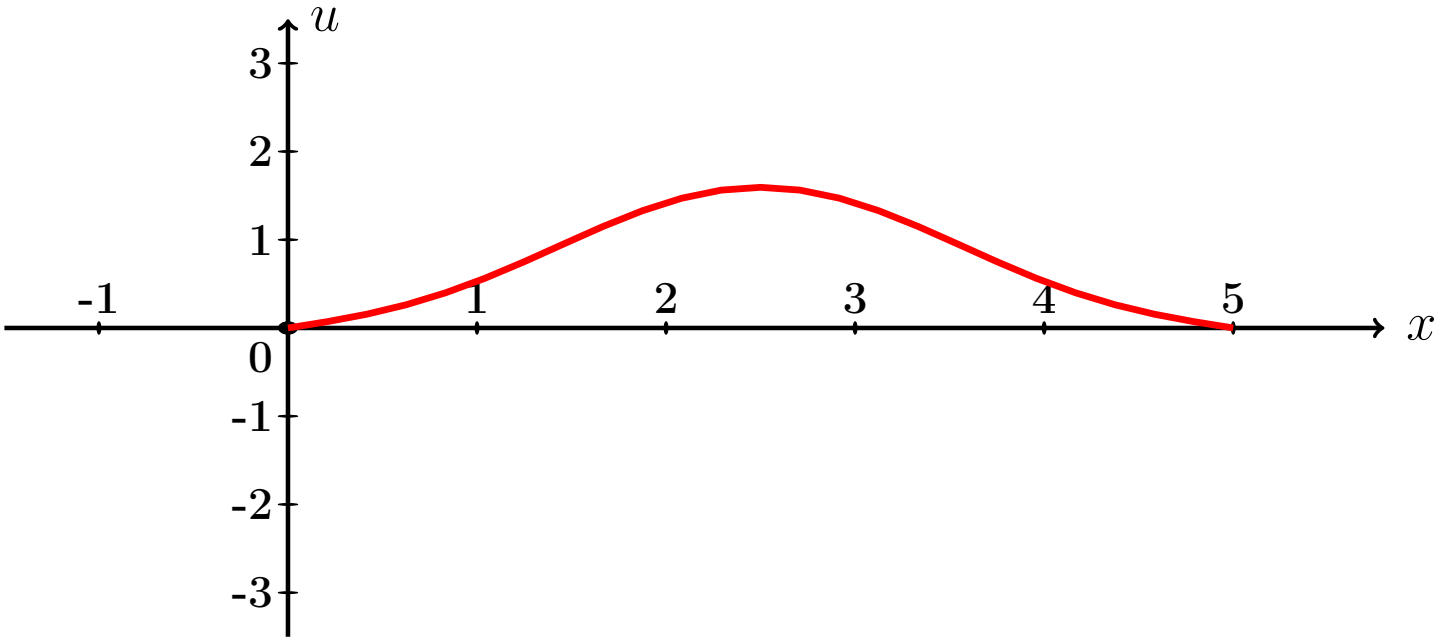


Рис.:

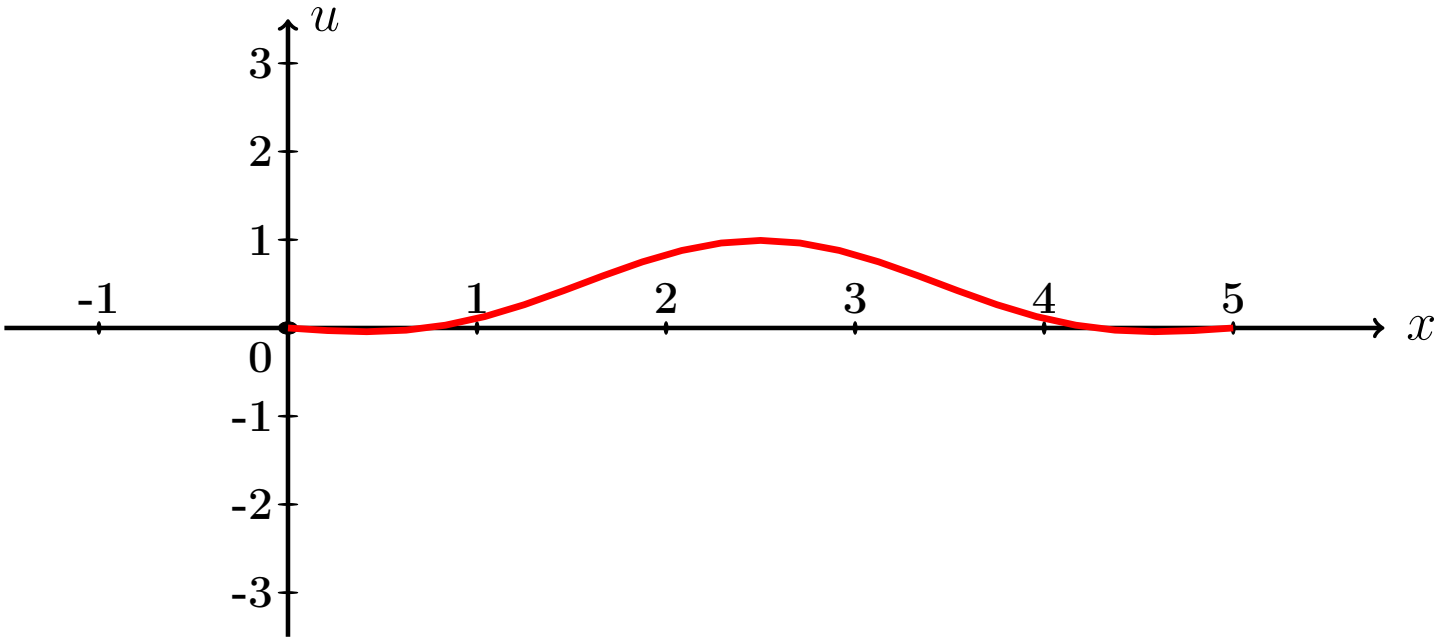


Рис.:

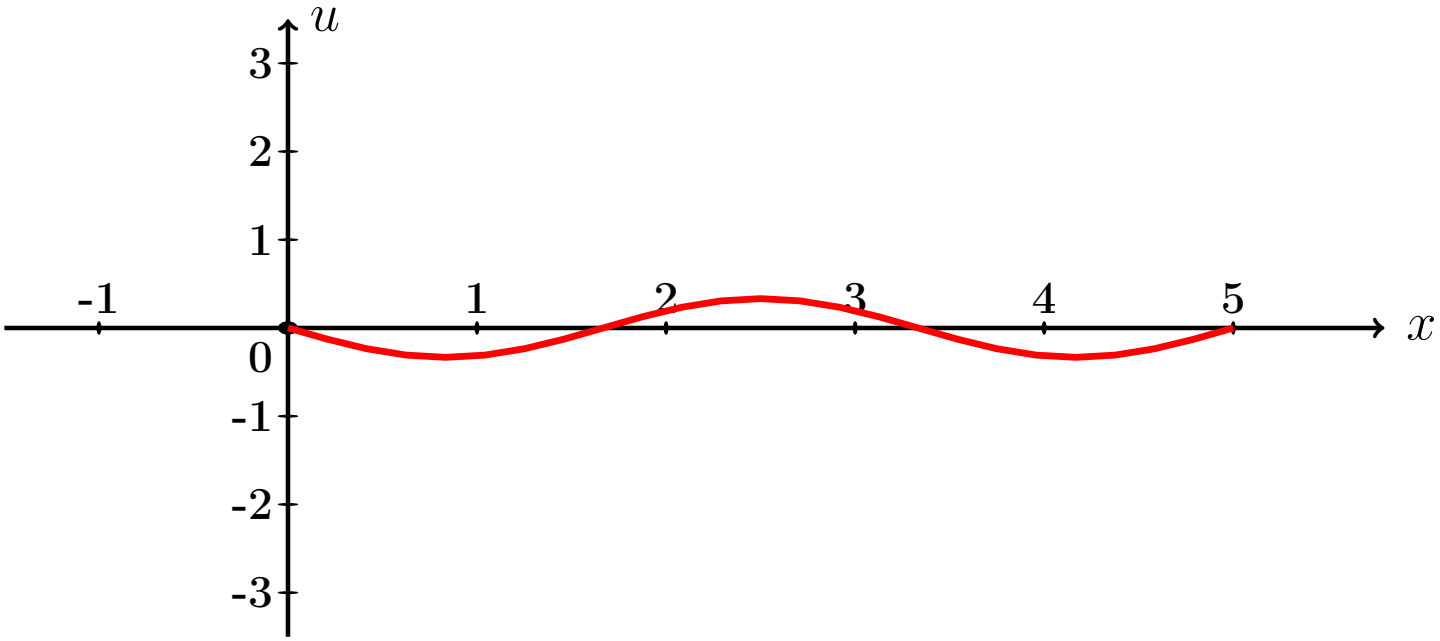


Рис.:

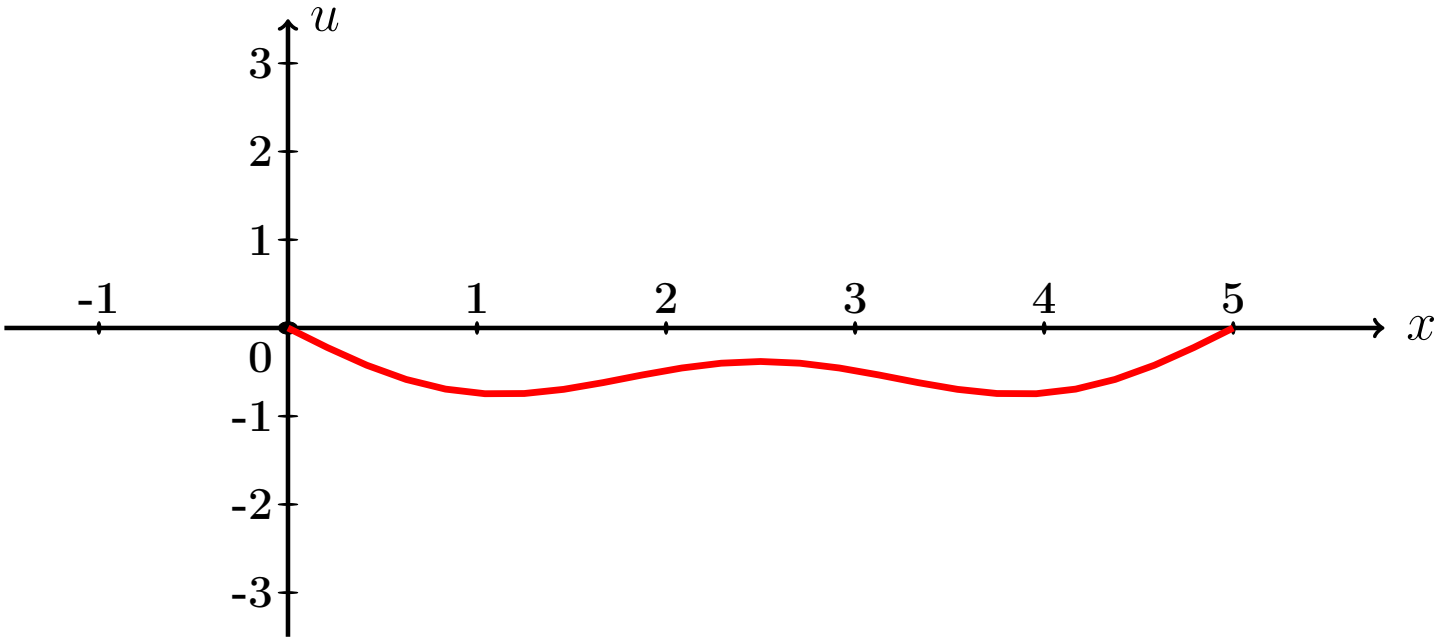


Рис.:

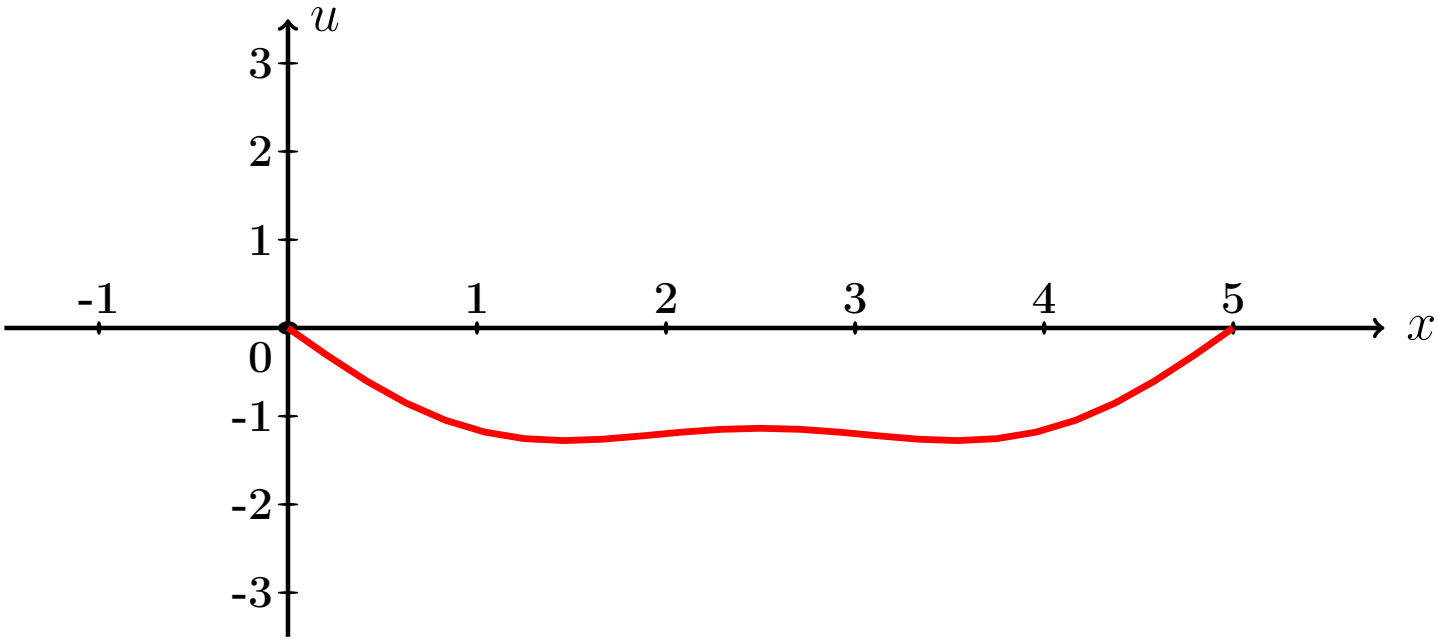


Рис.:

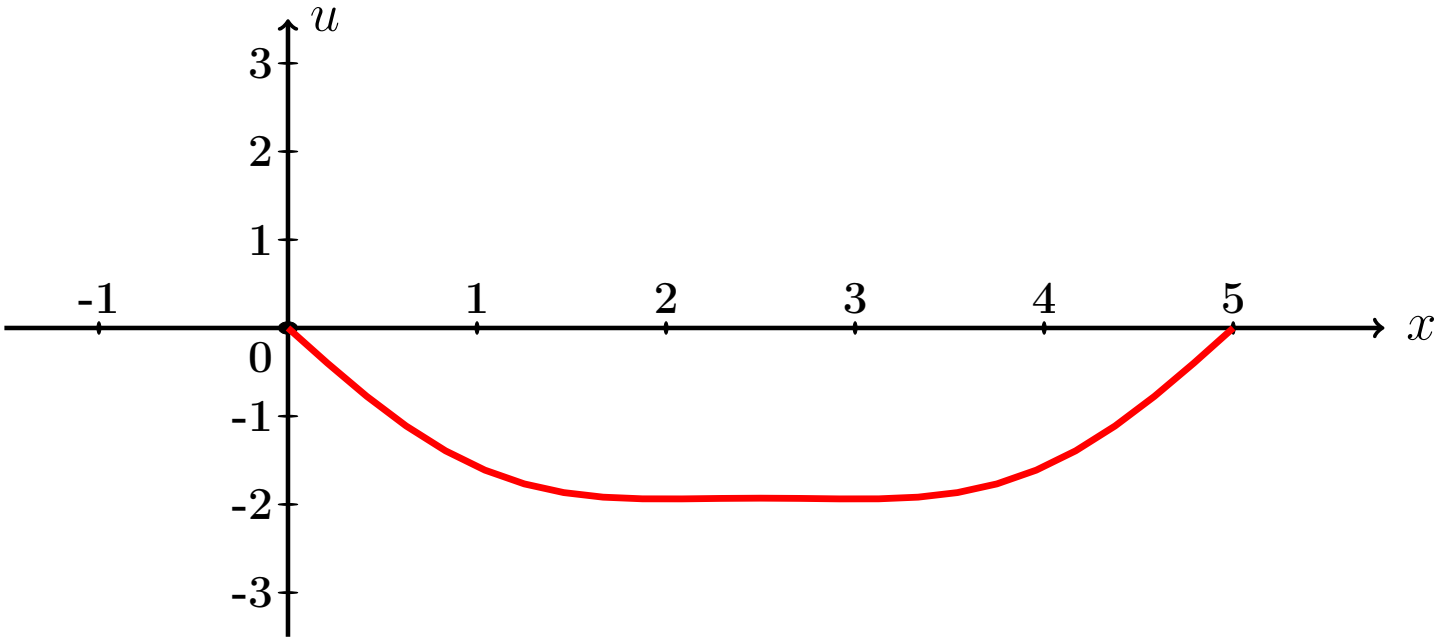


Рис.:

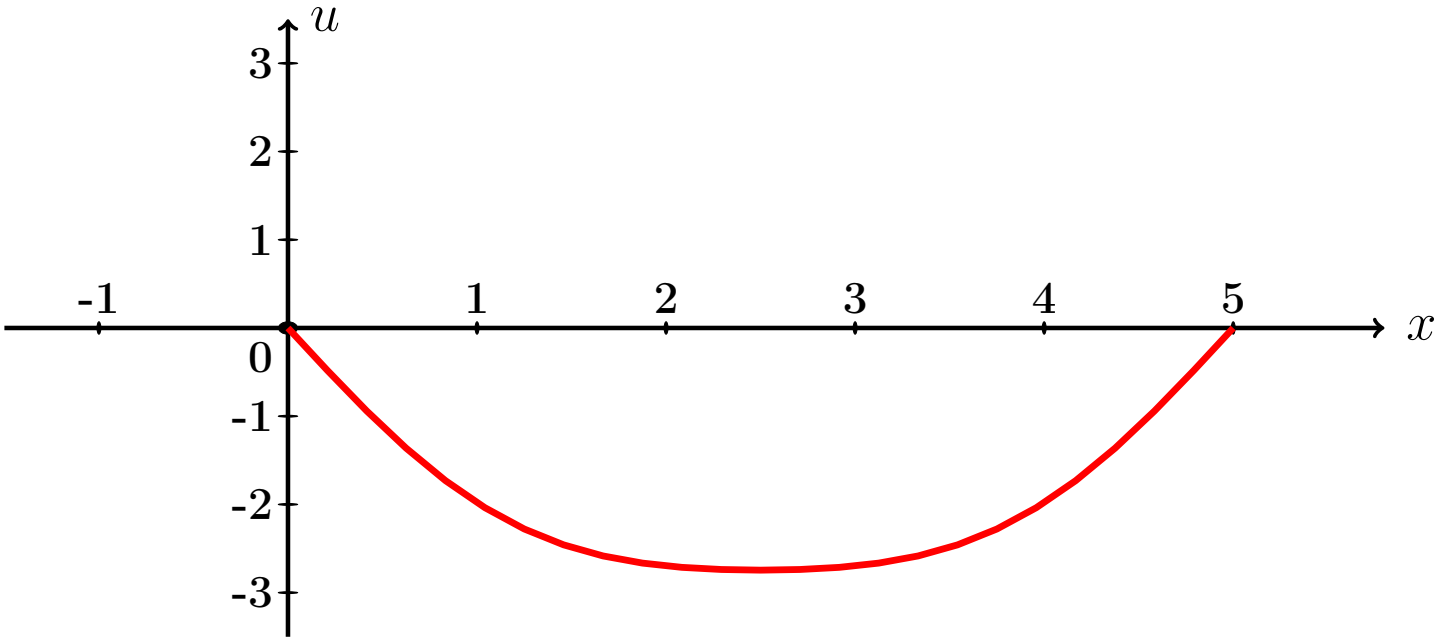


Рис.:

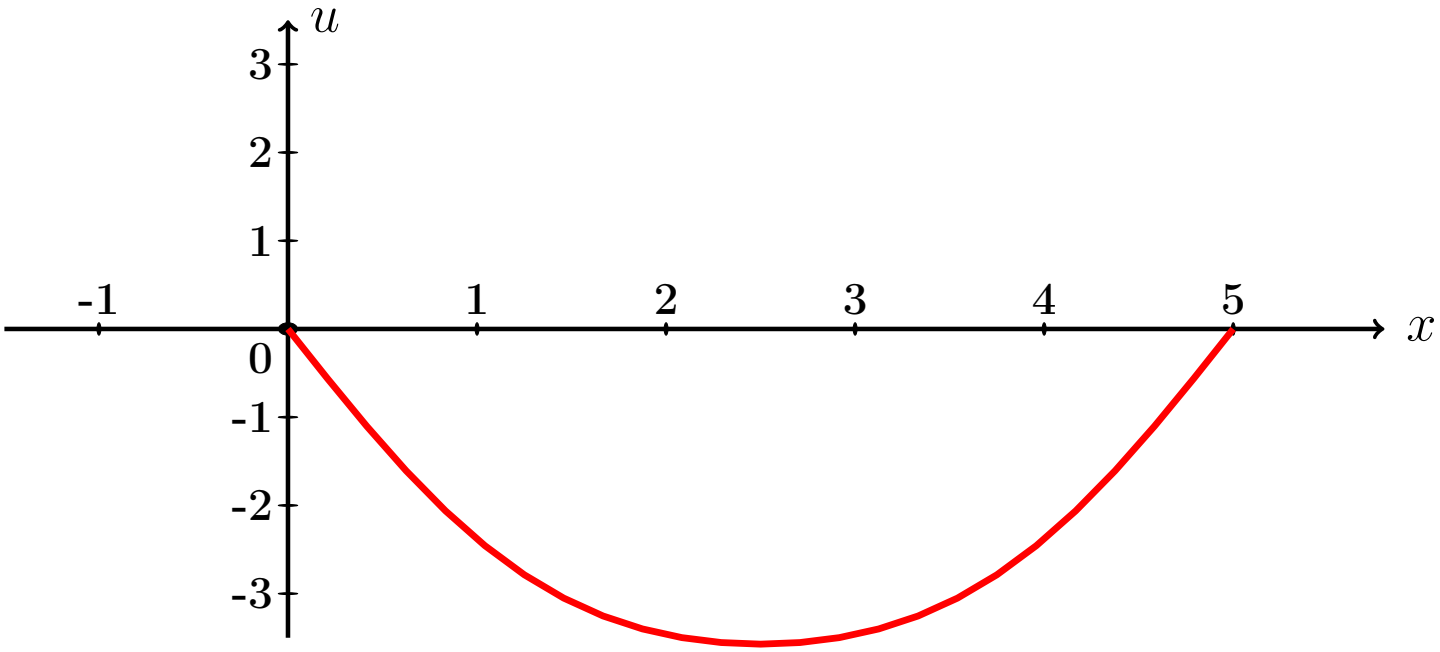


Рис.:

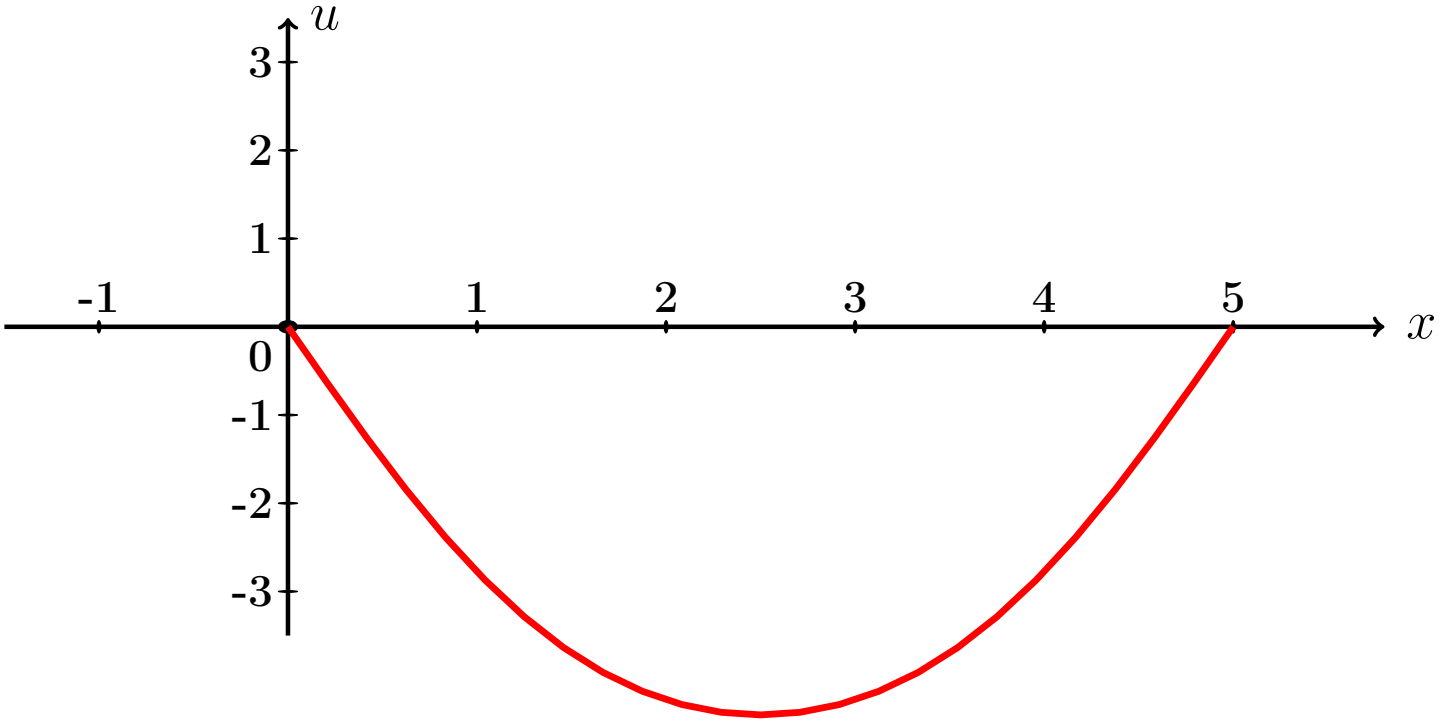


Рис.:

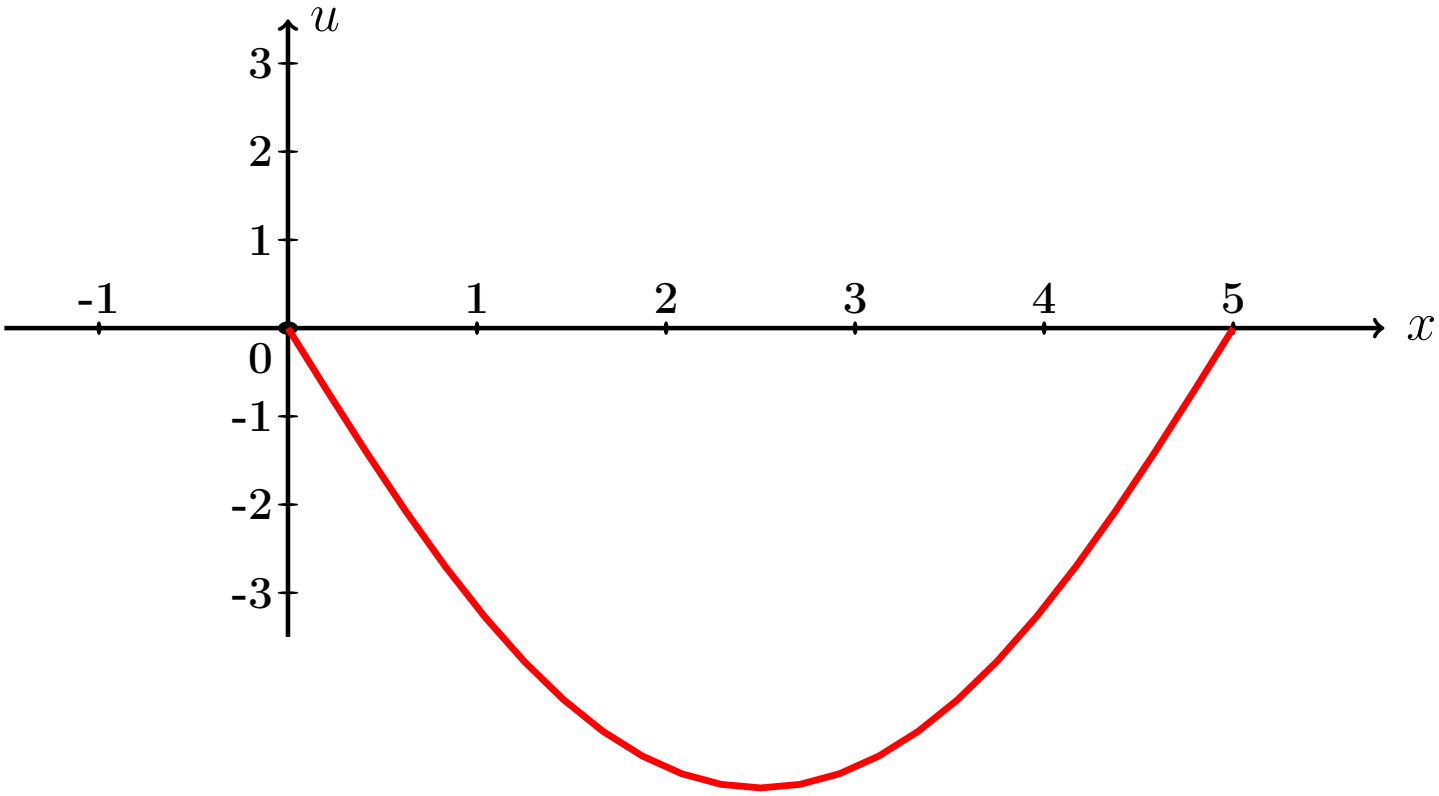


Рис.:

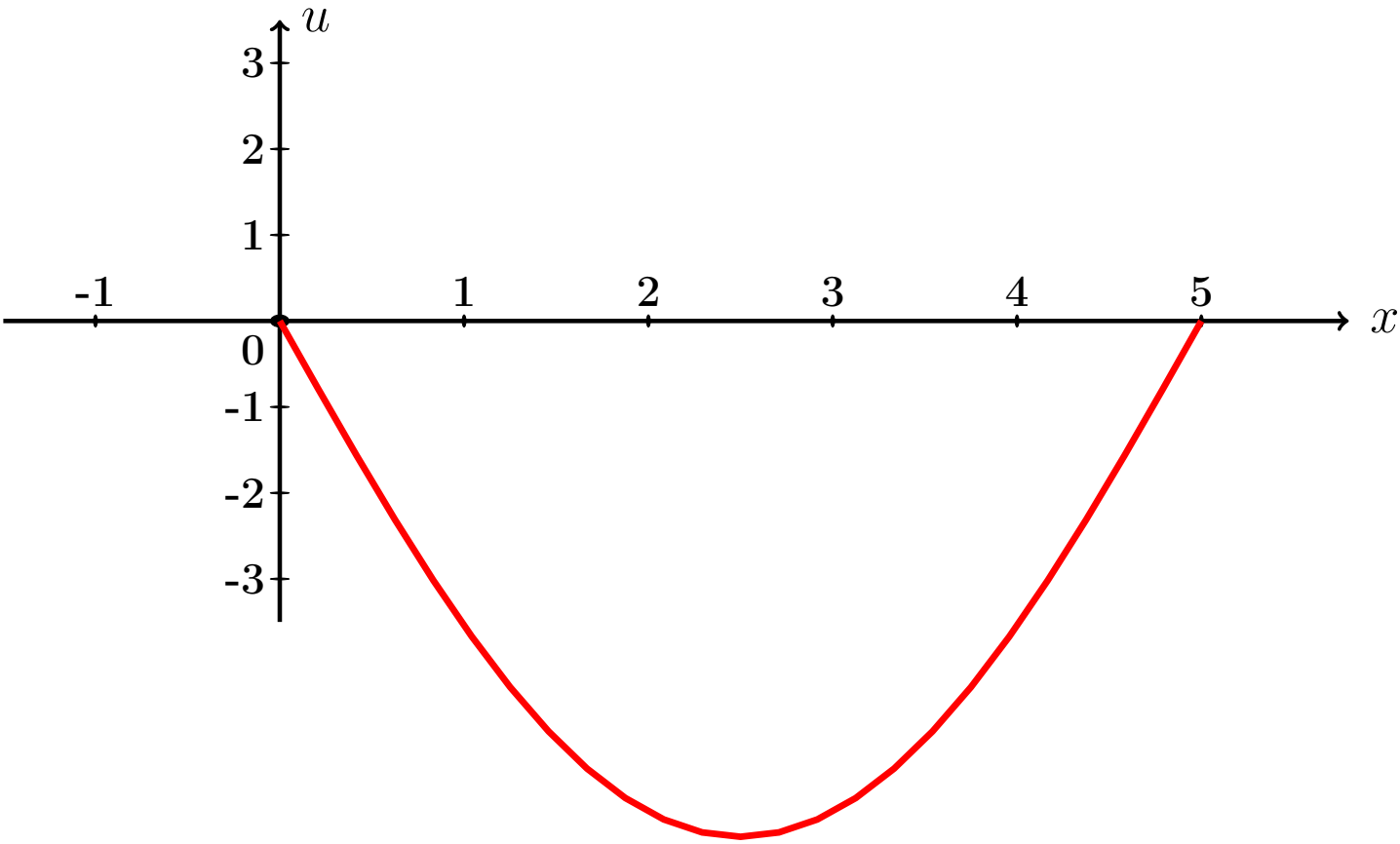


Рис.:

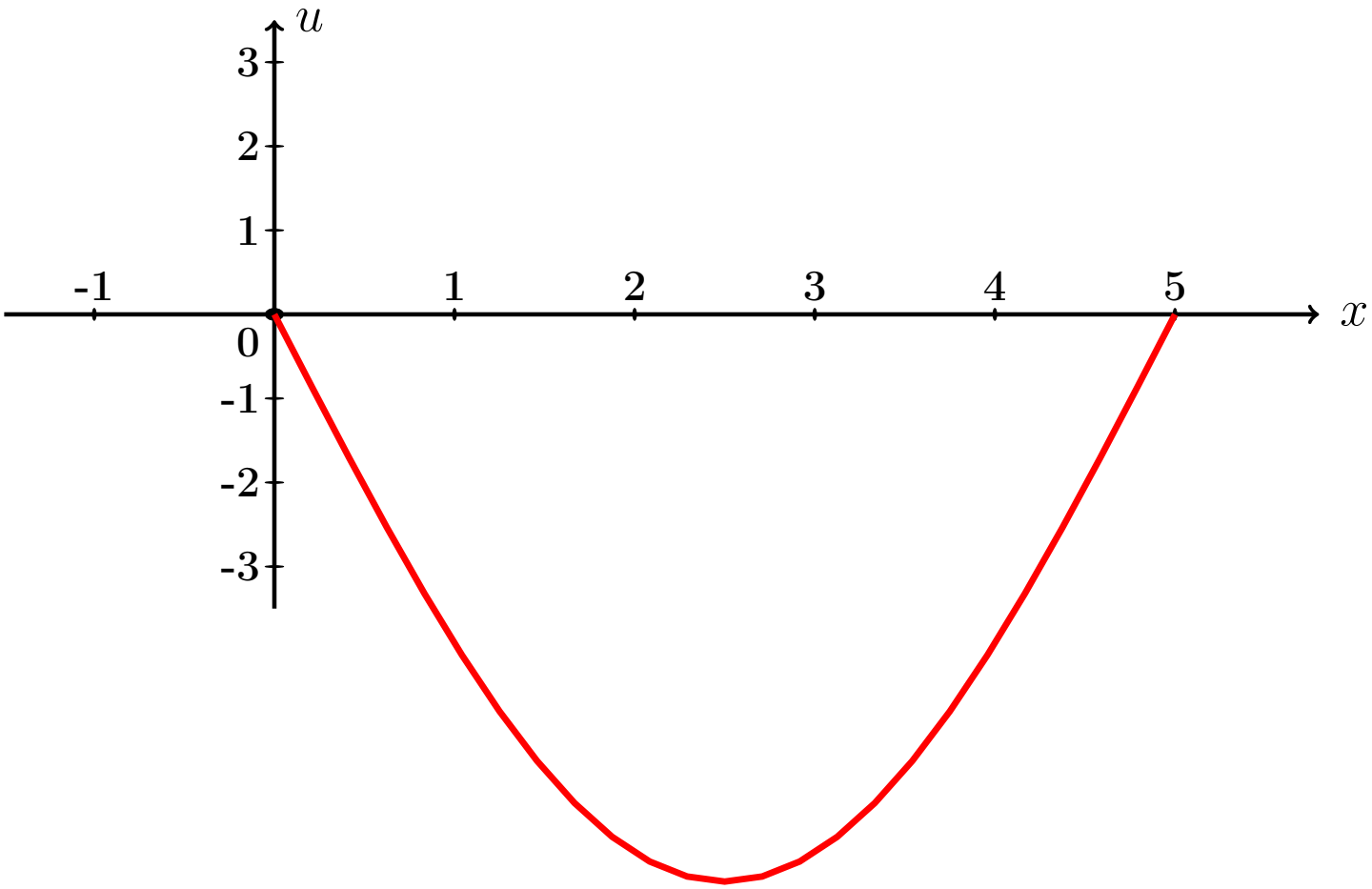


Рис.:

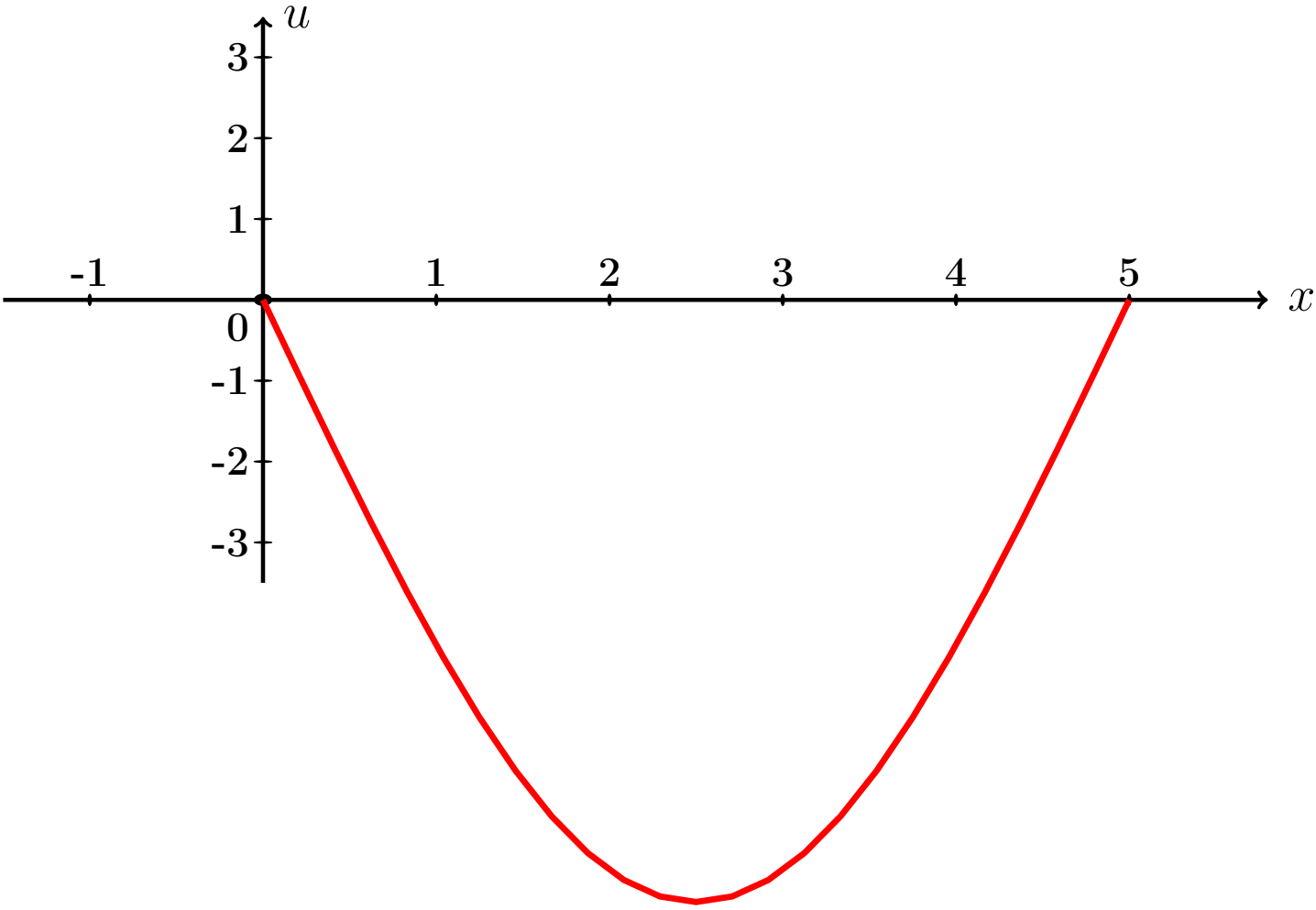


Рис.:

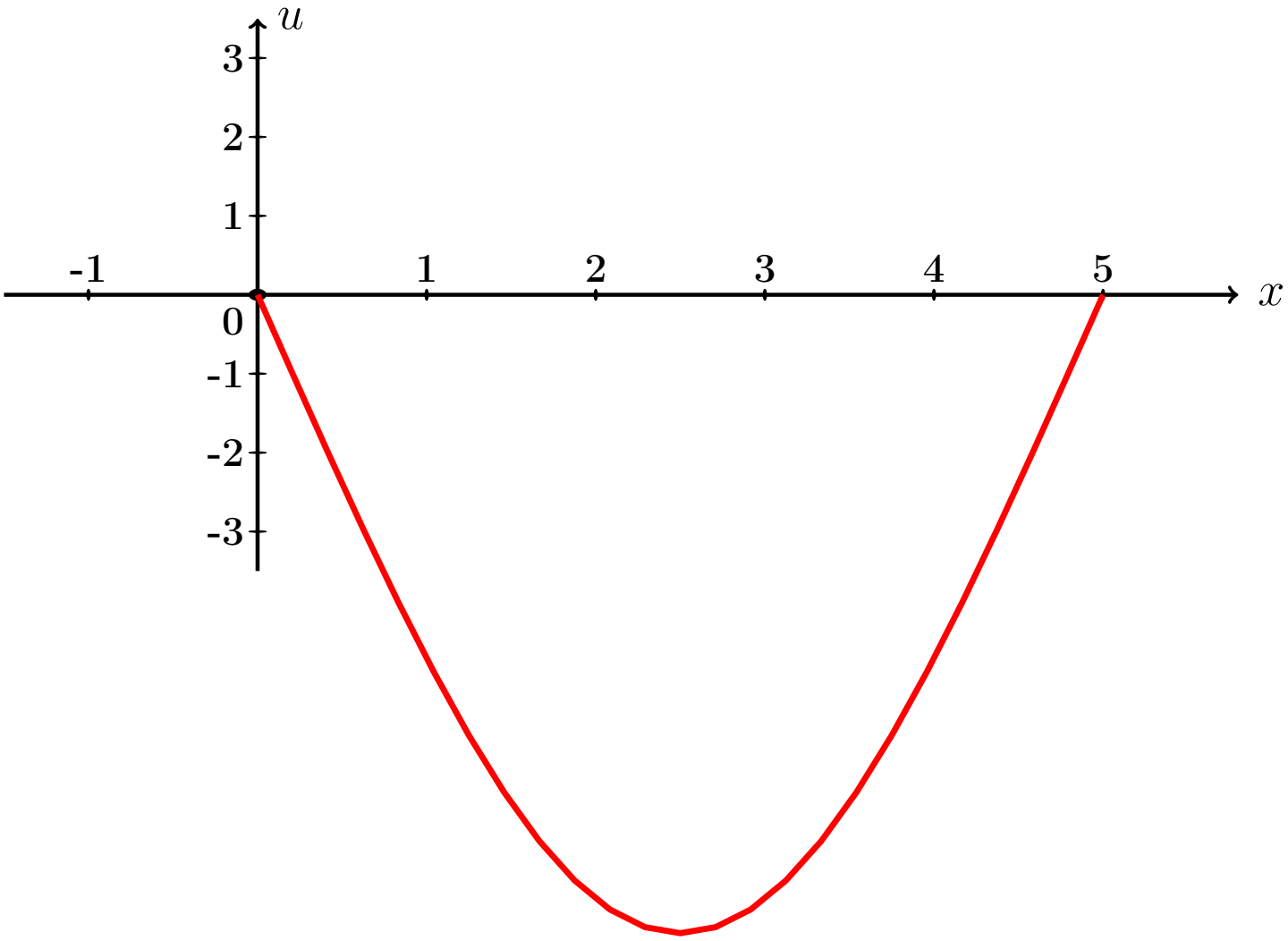


Рис.:

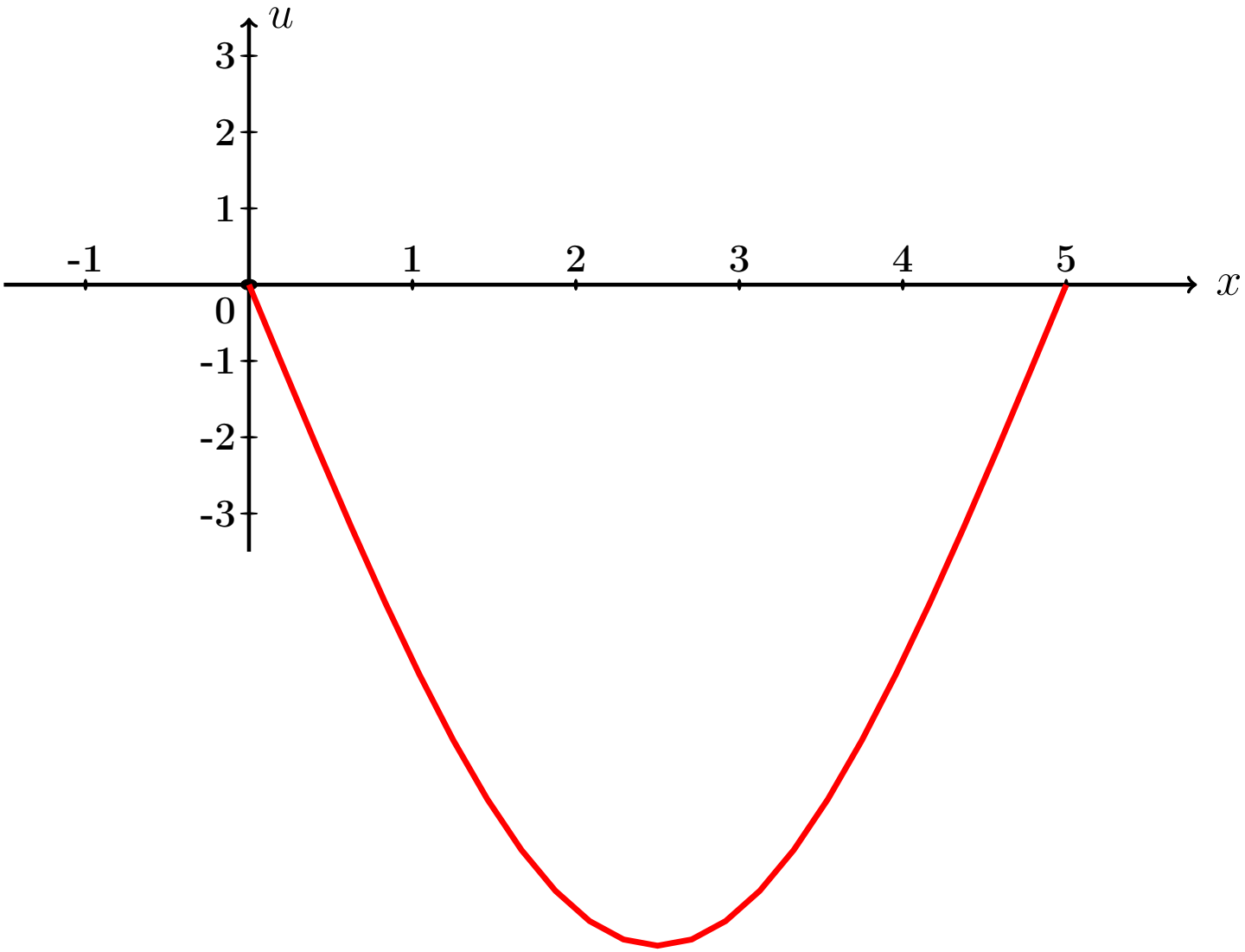


Рис.:

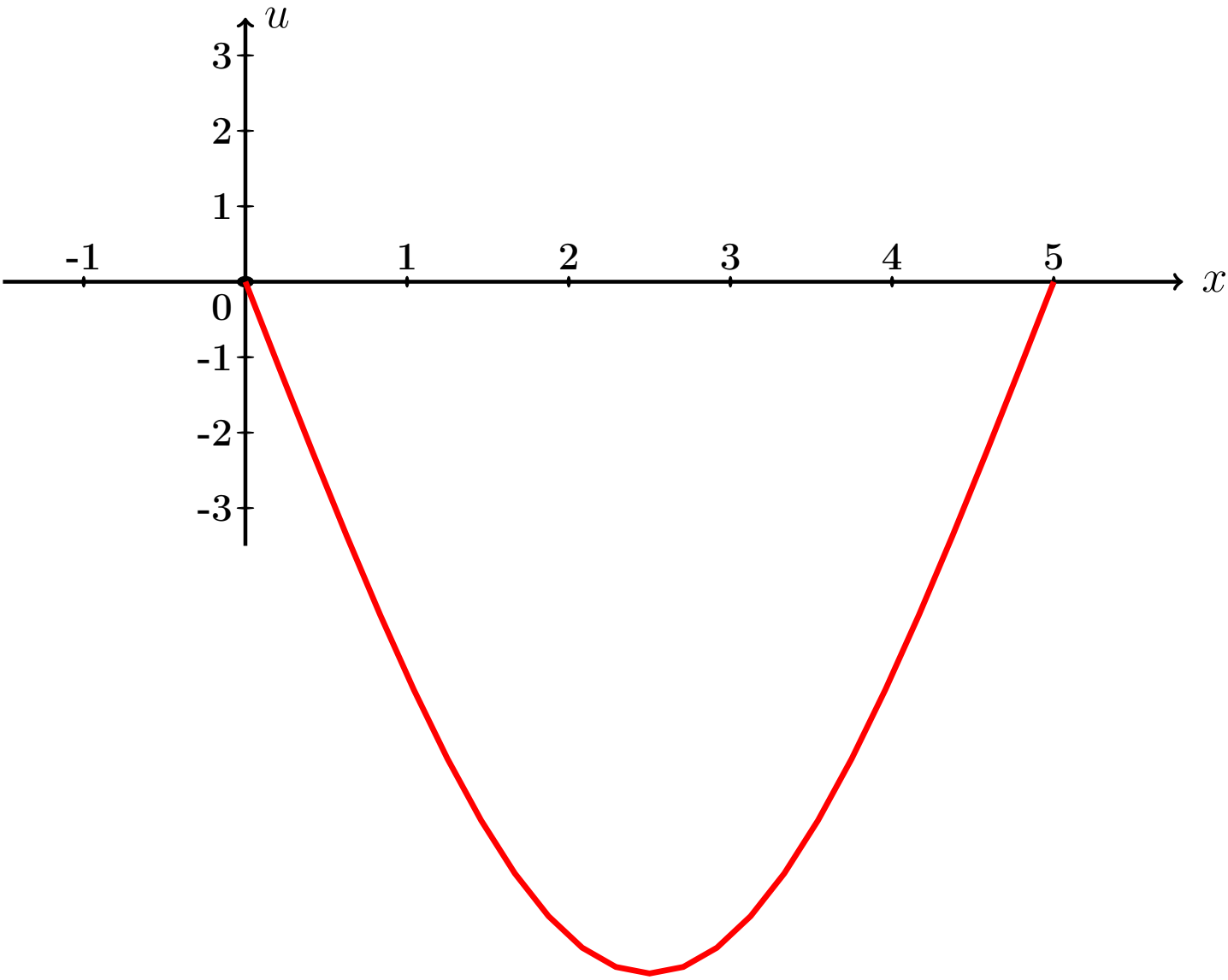


Рис.:

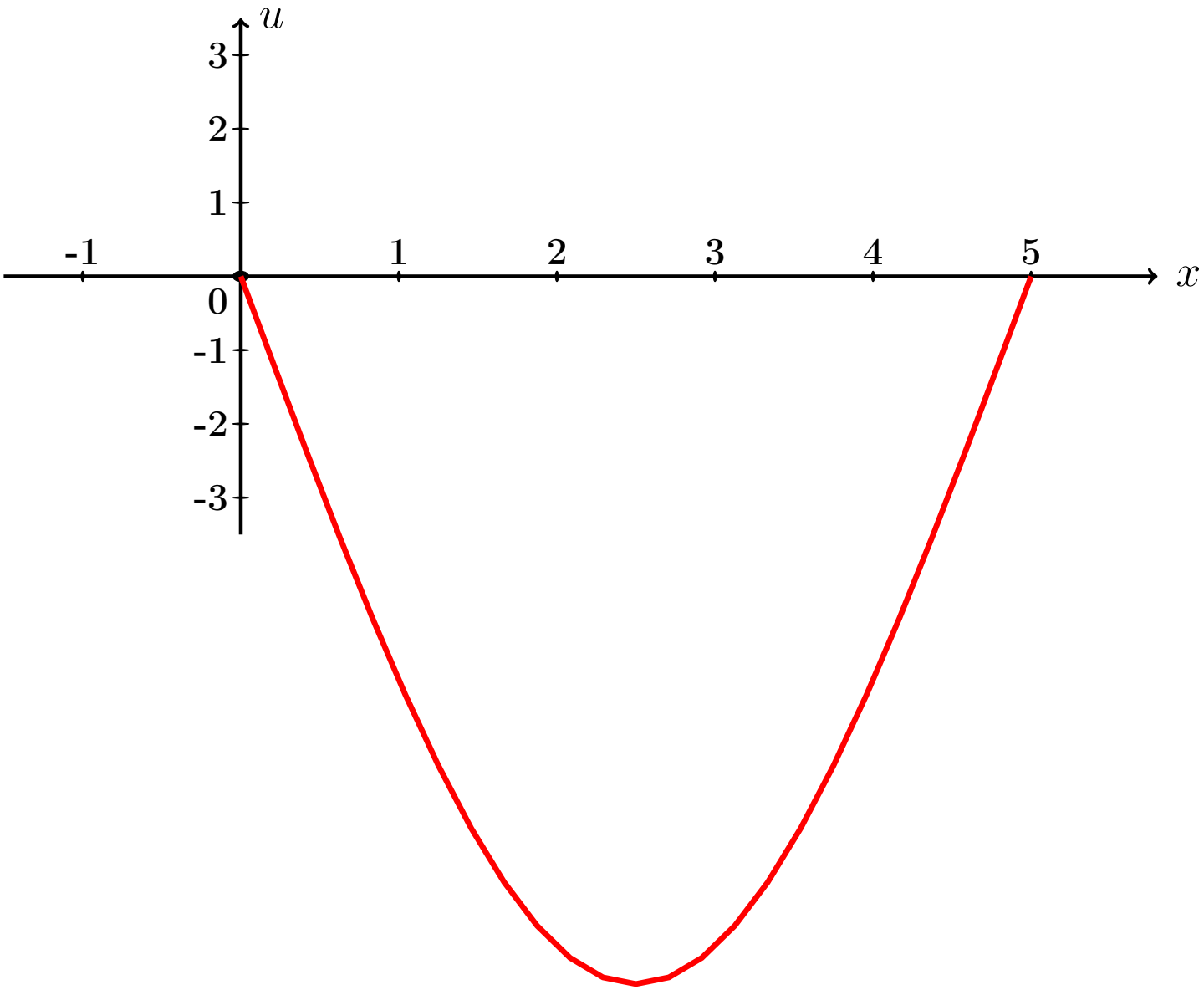


Рис.:

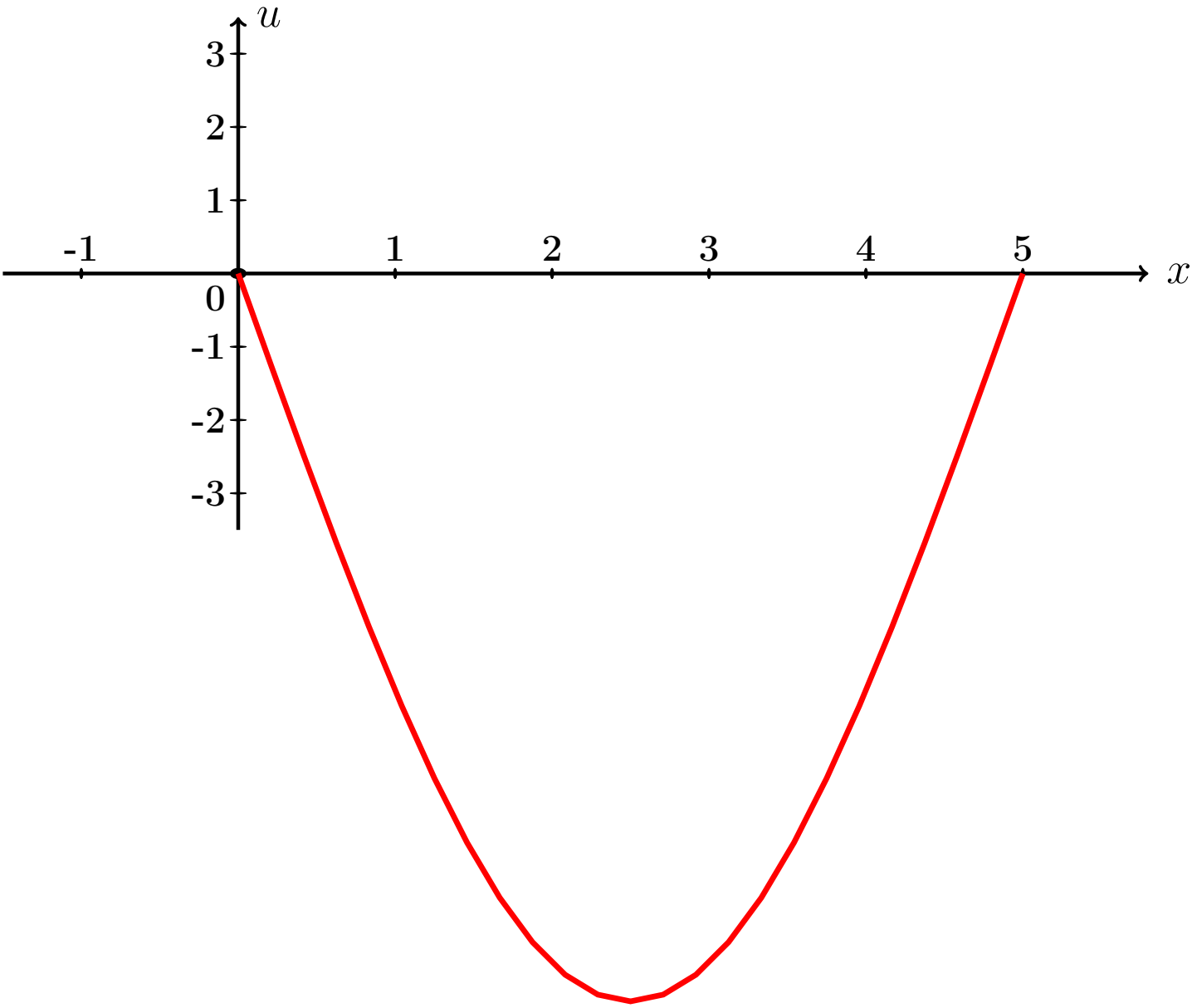


Рис.:

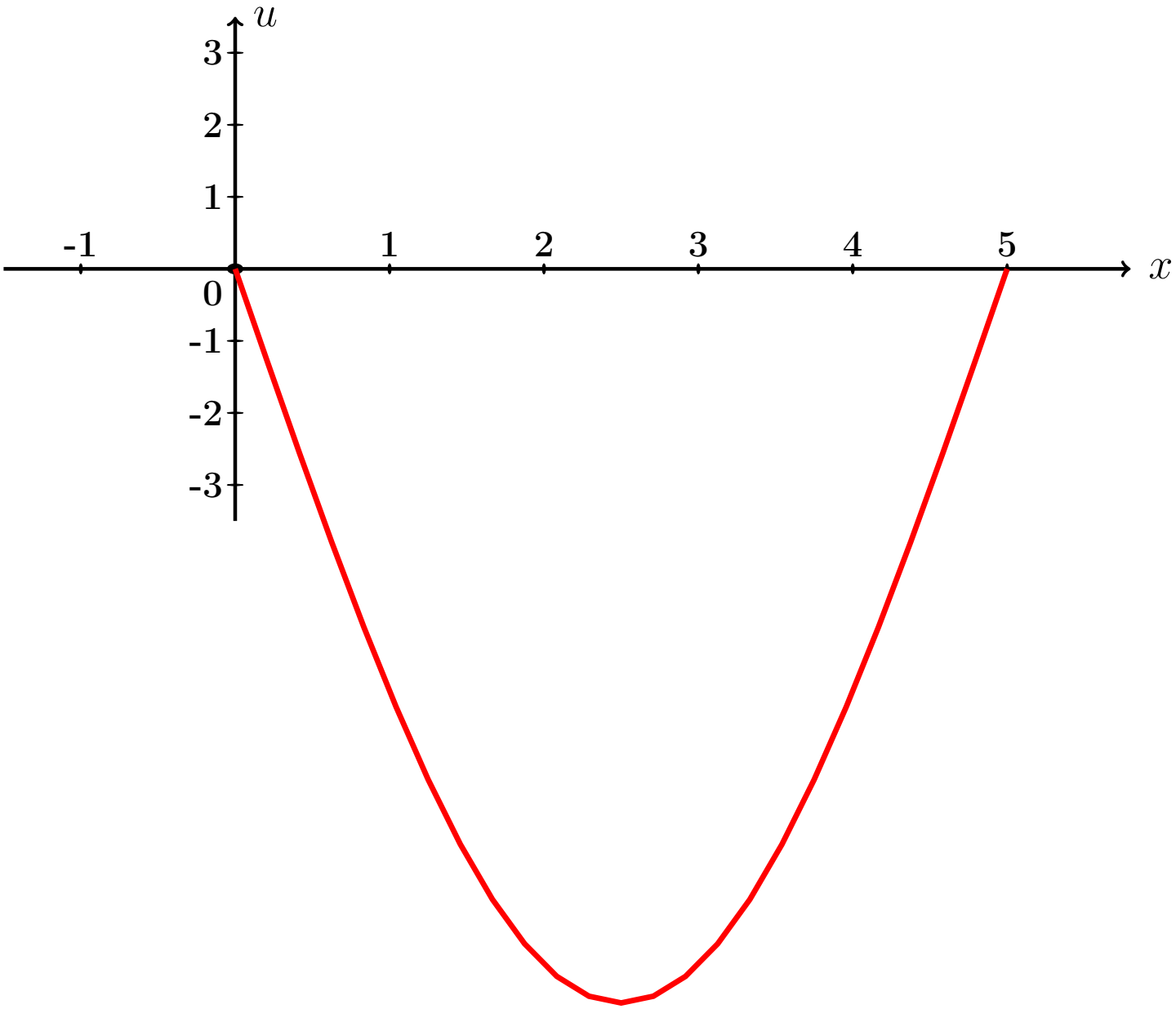


Рис.:

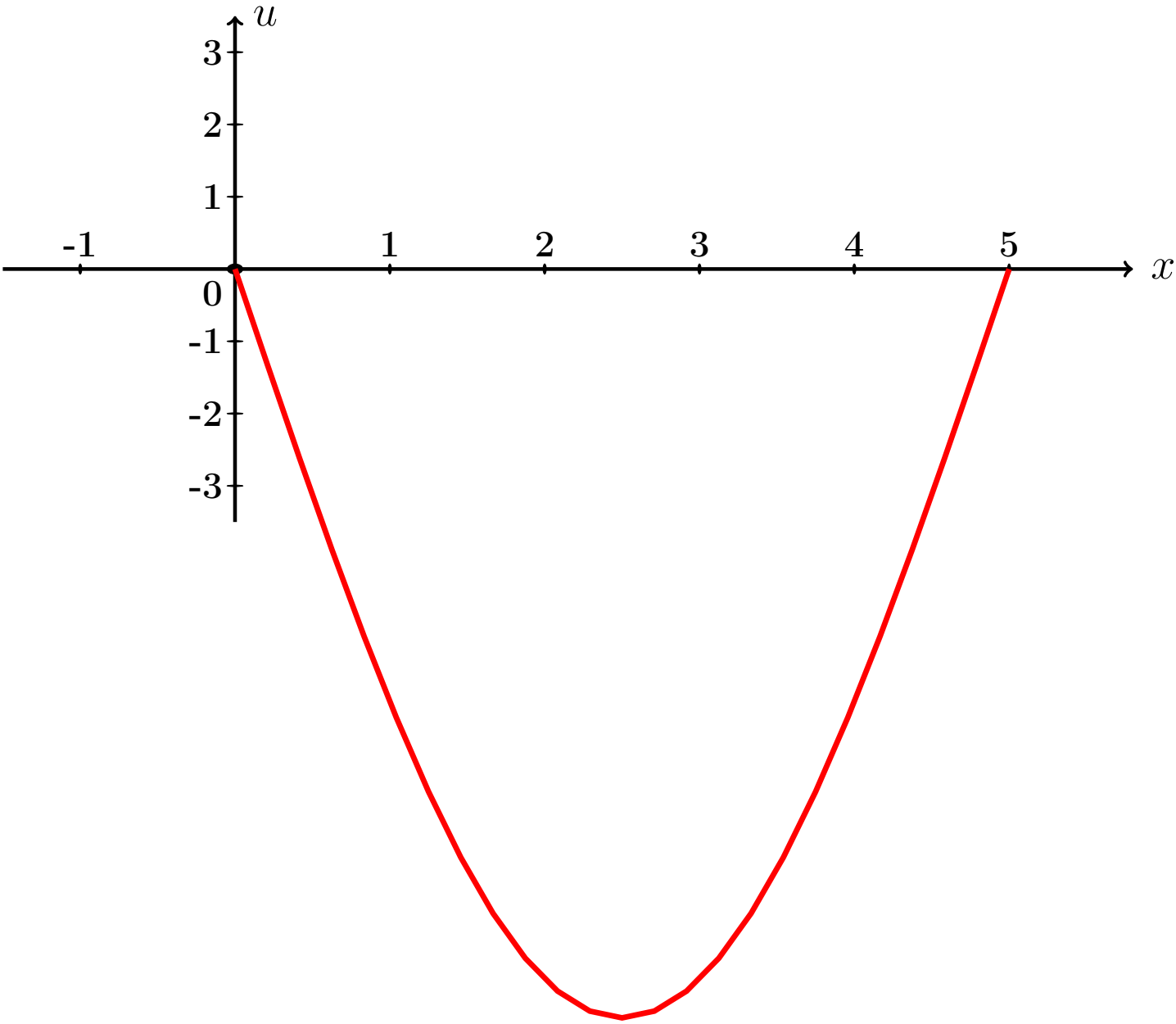


Рис.:

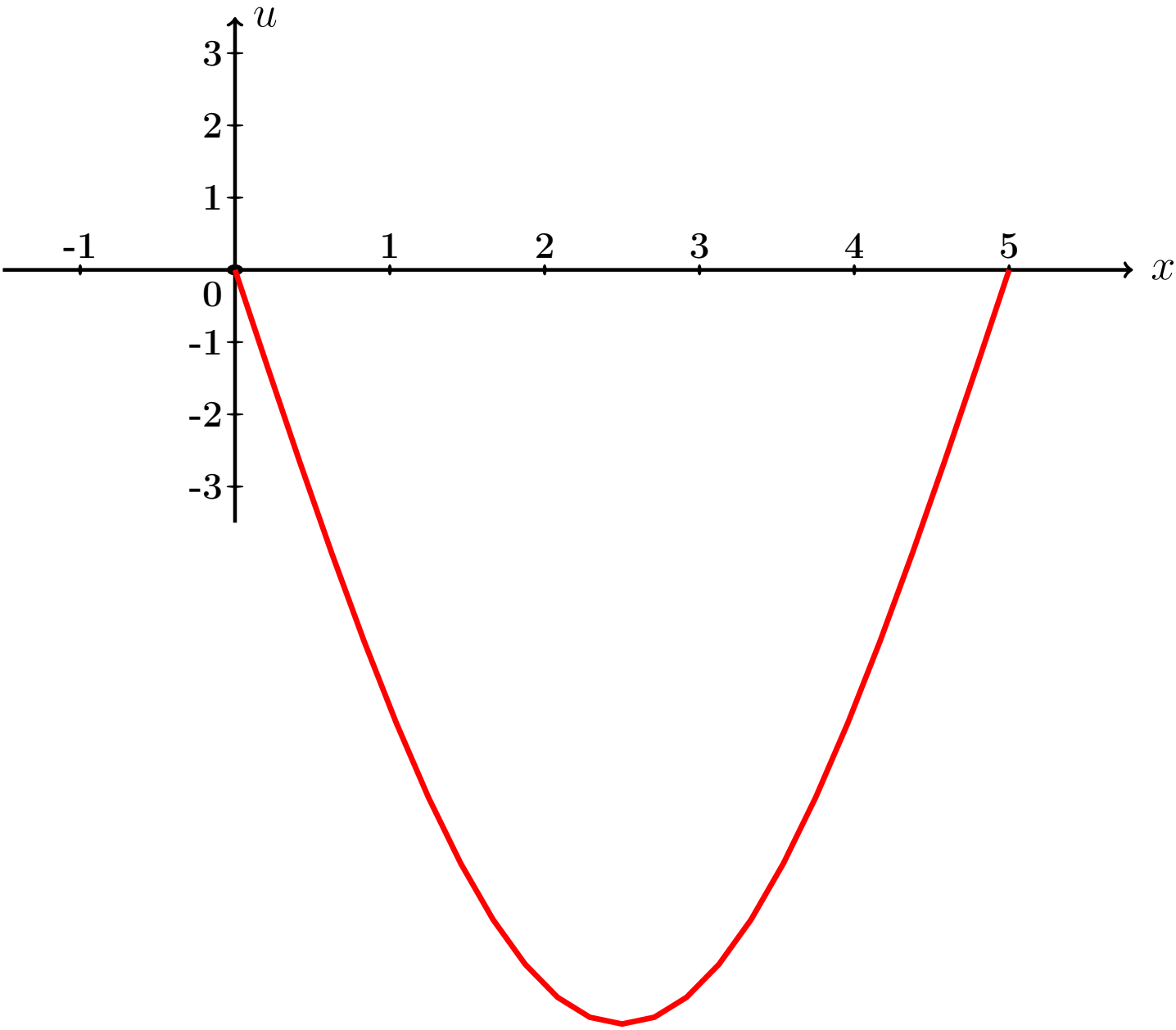


Рис.:

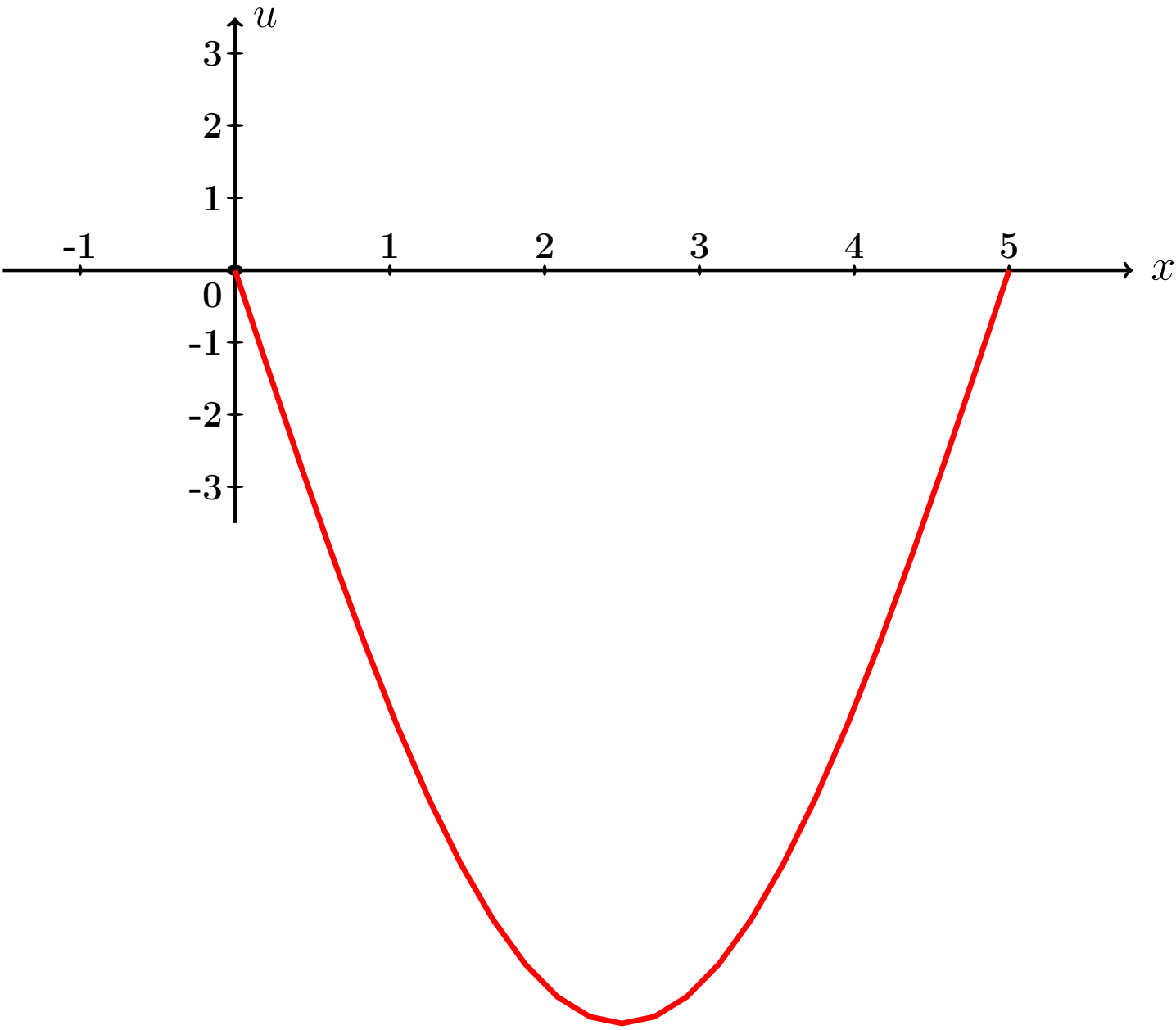


Рис.:

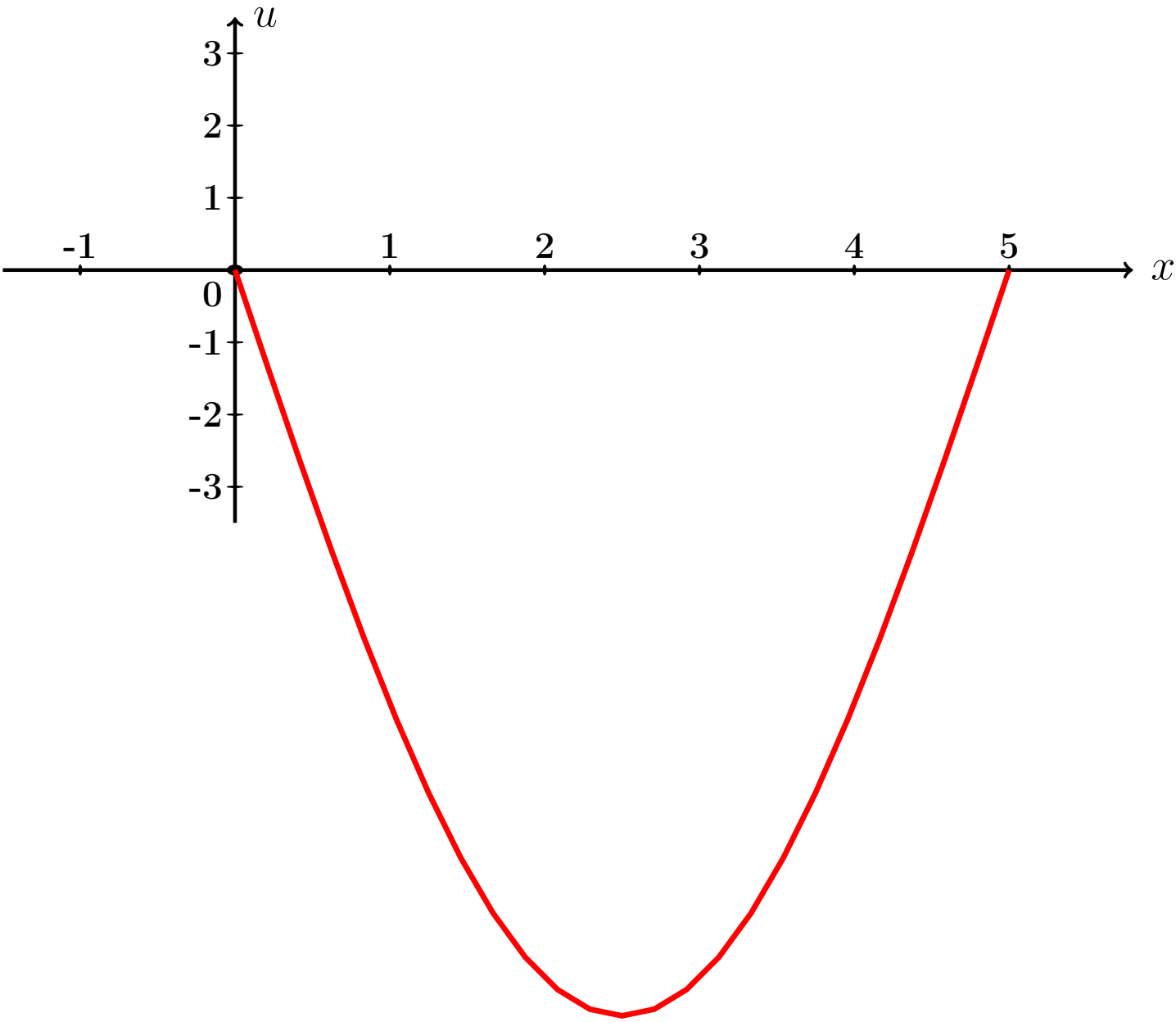


Рис.:

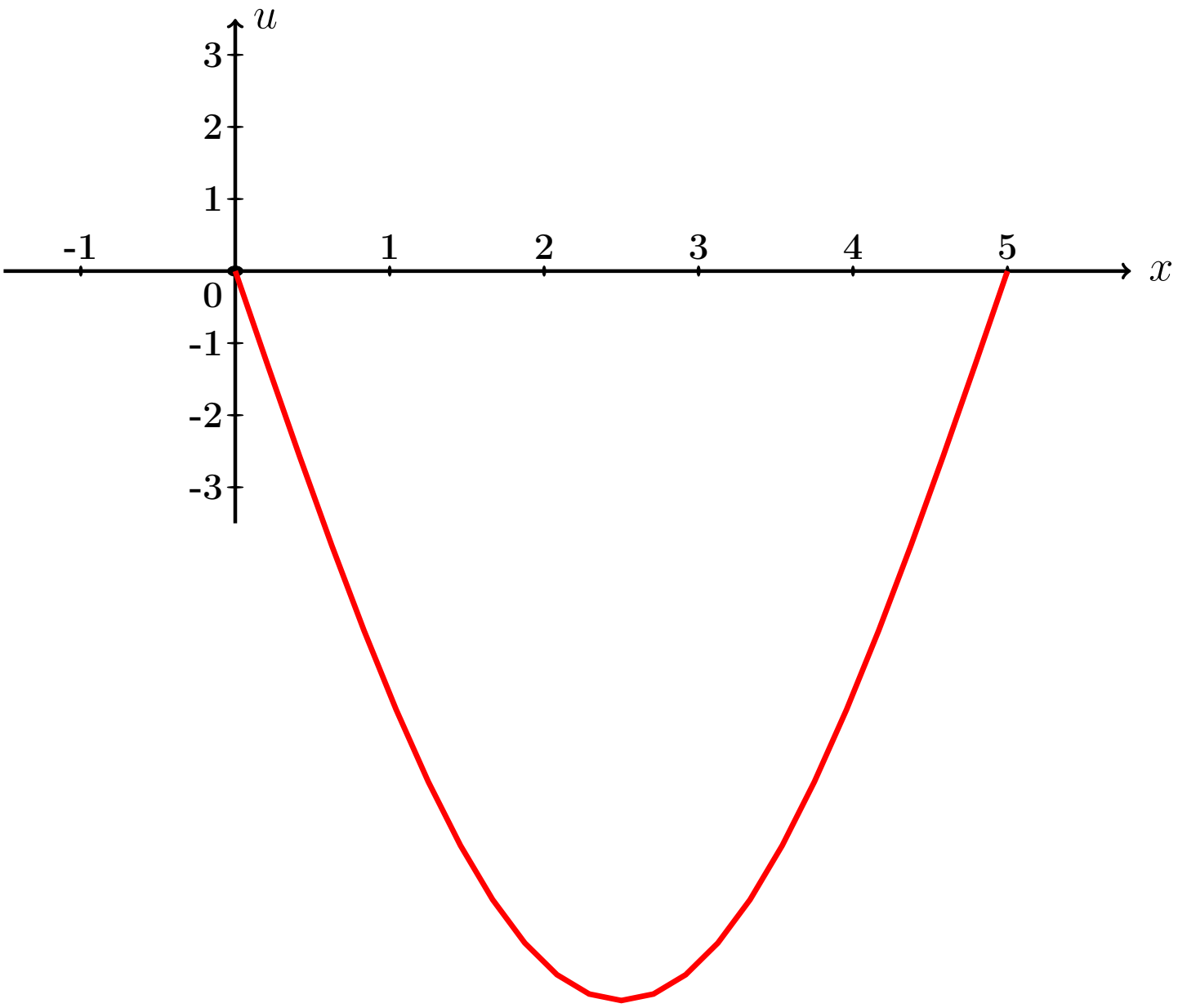


Рис.:

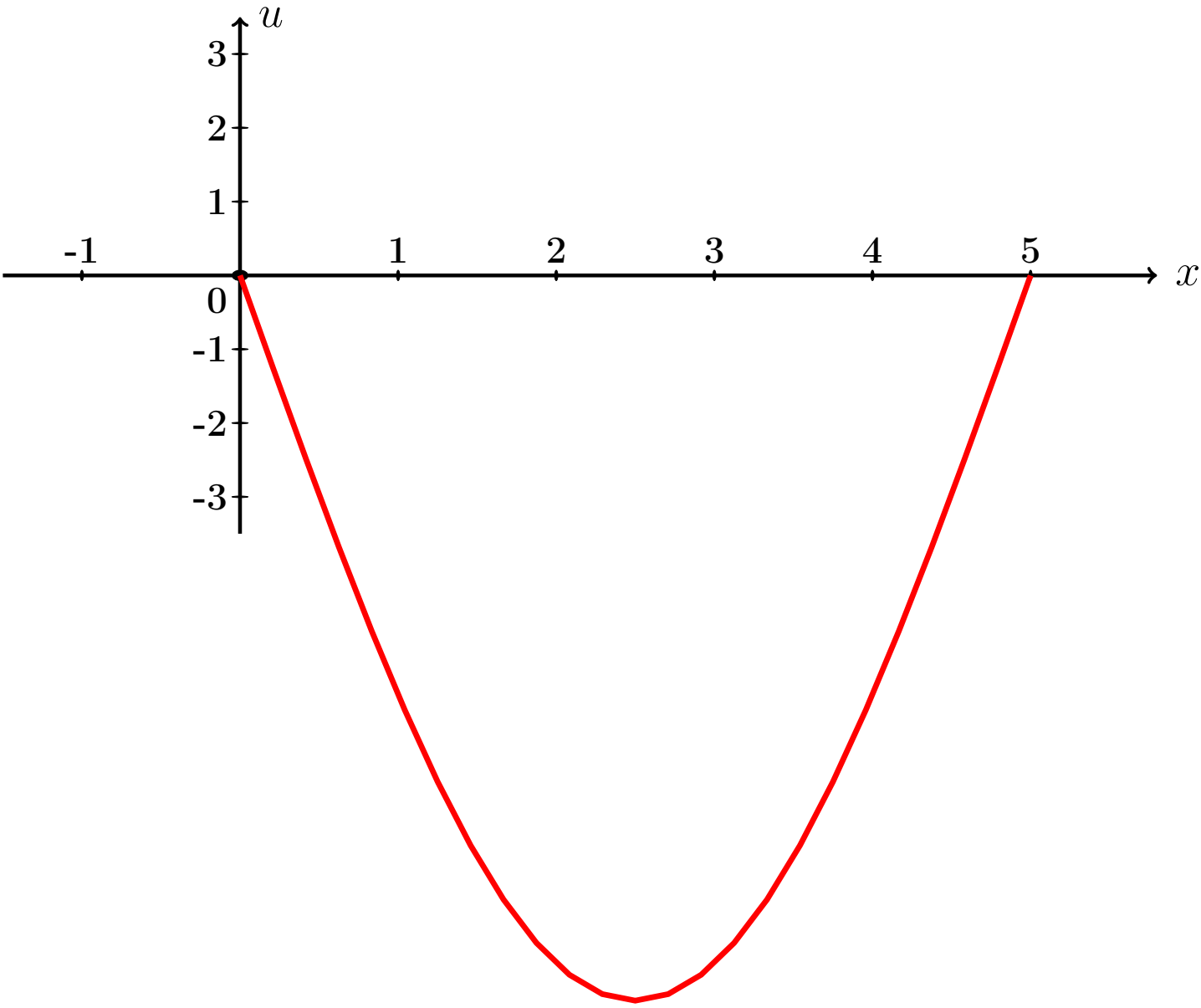


Рис.:

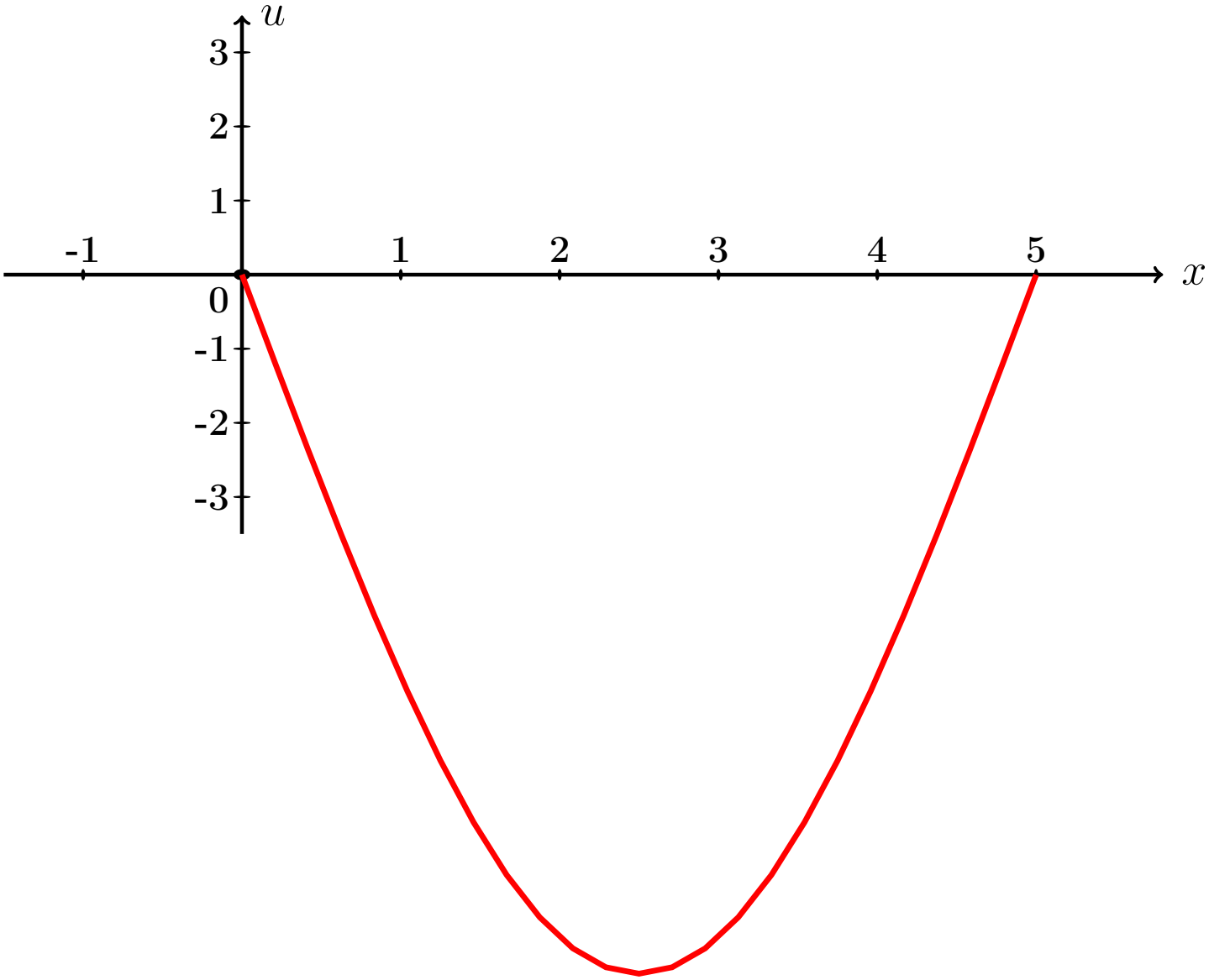


Рис.:

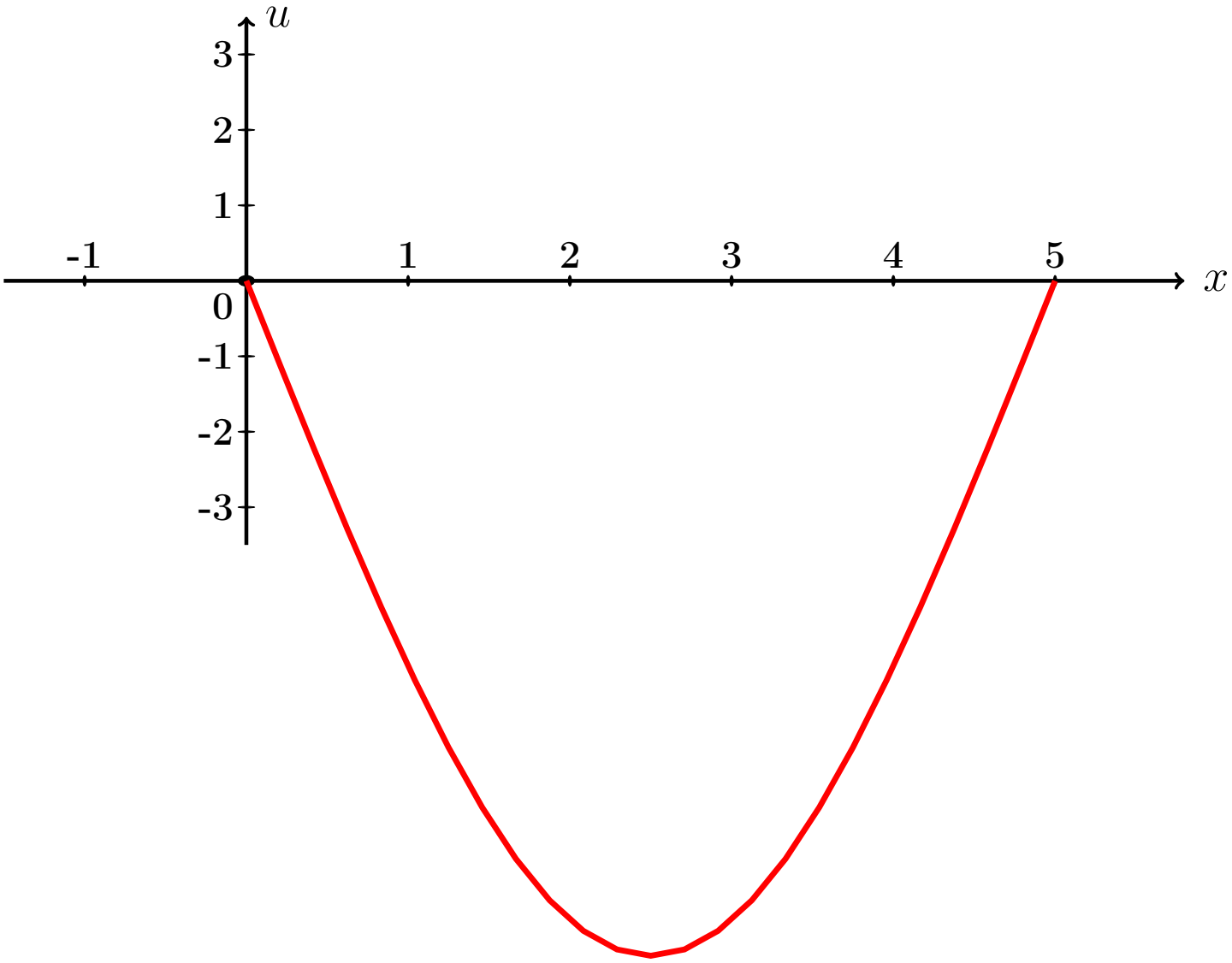


Рис.:

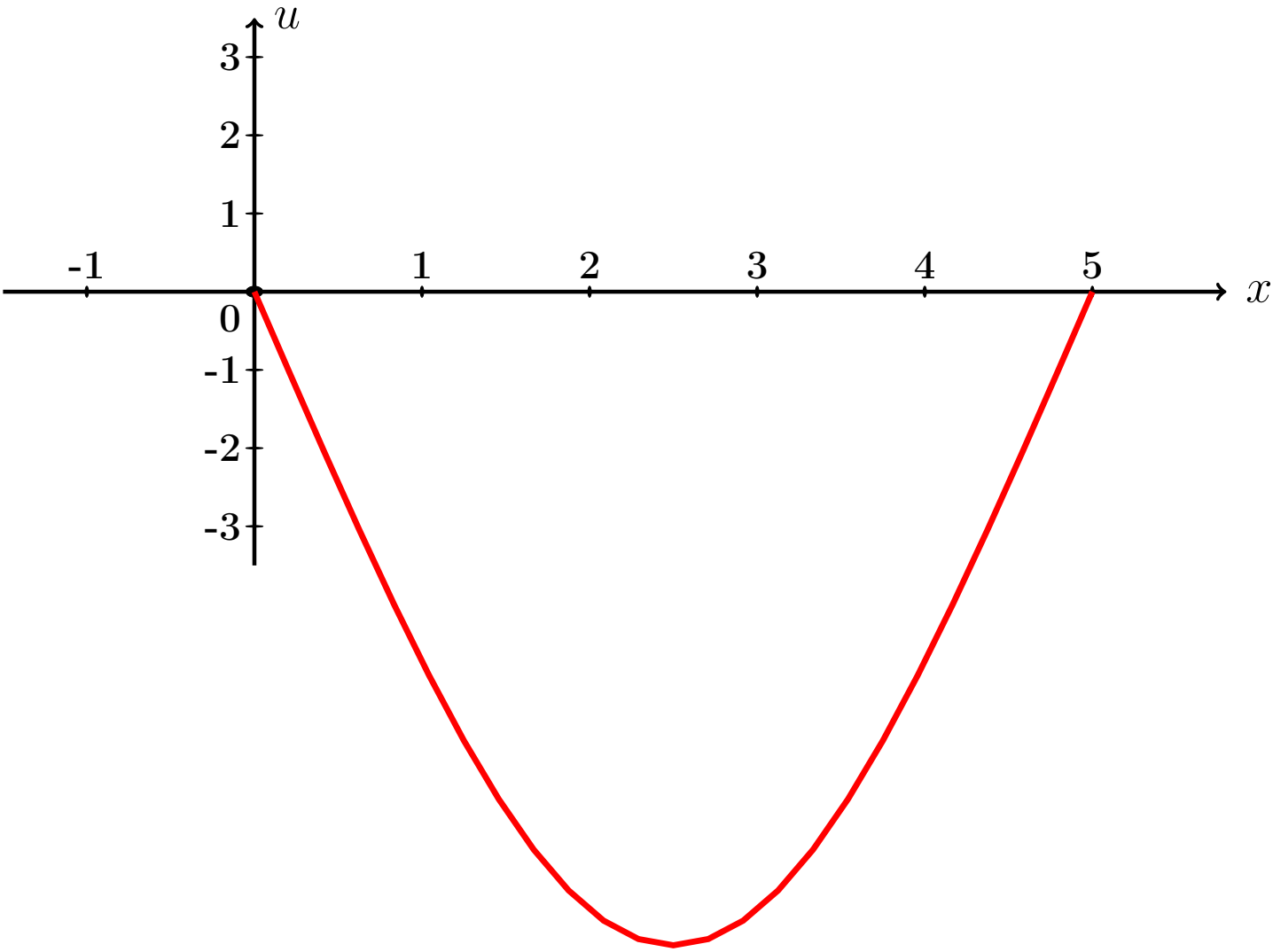


Рис.:

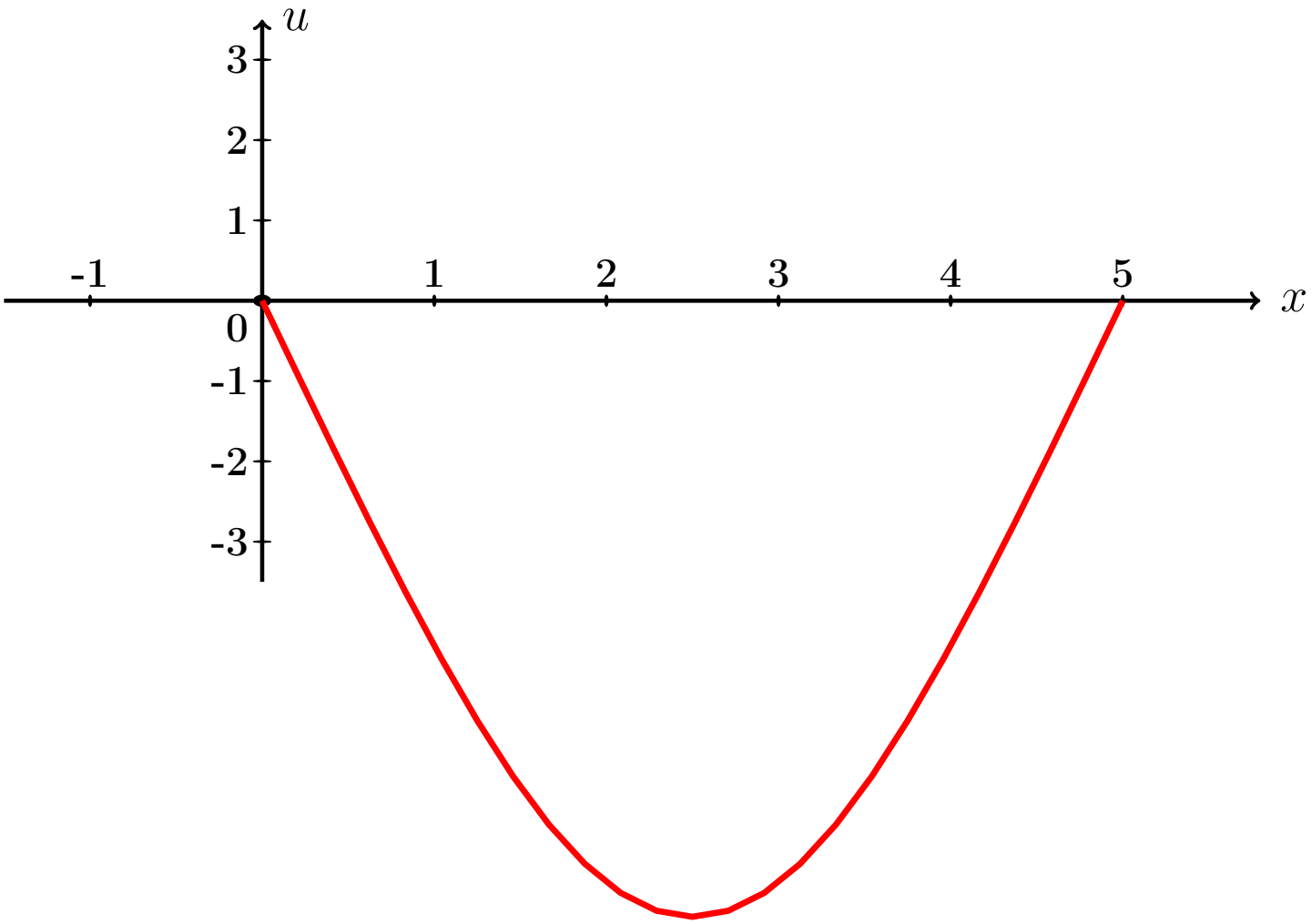


Рис.:

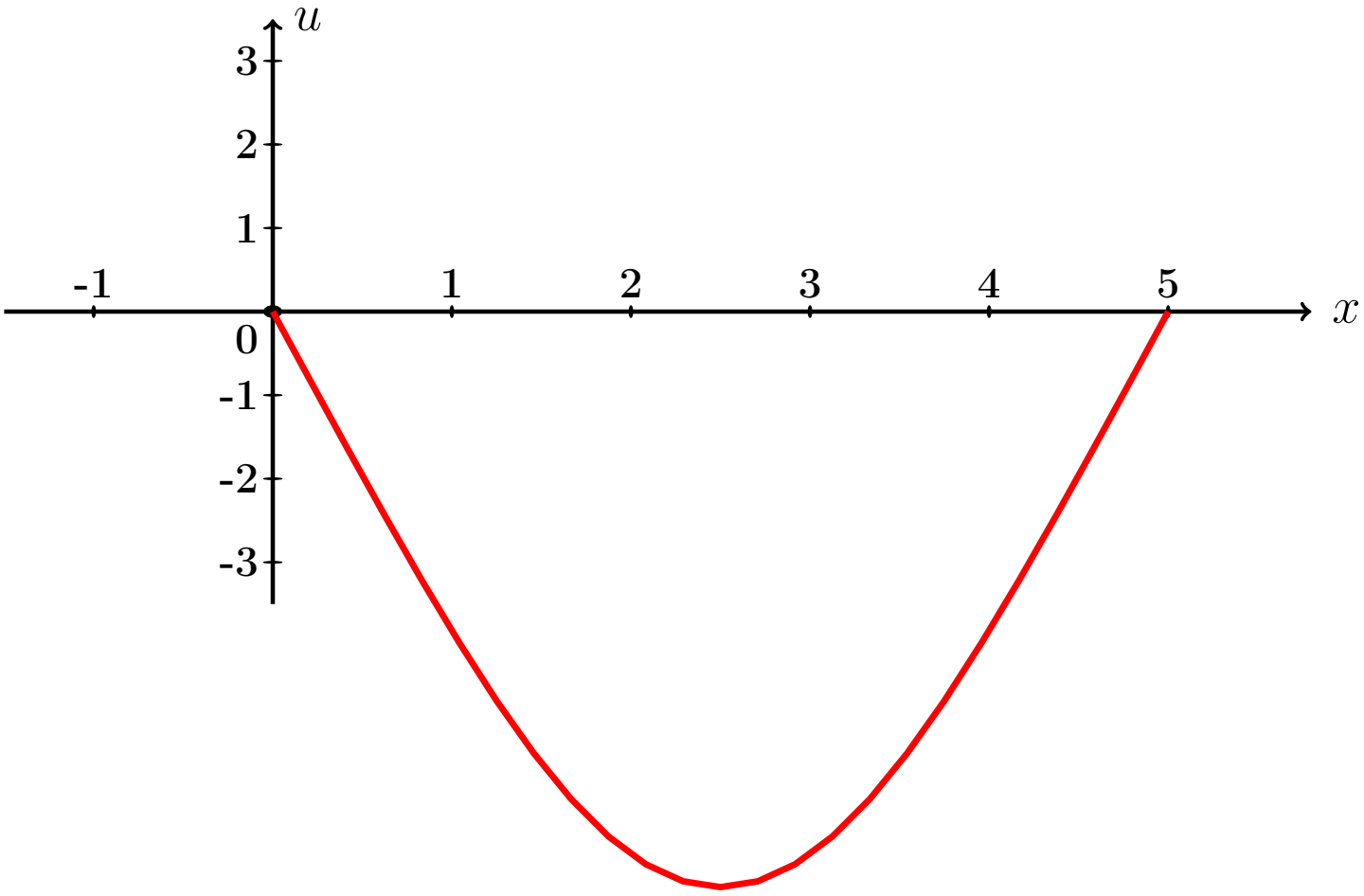


Рис.:

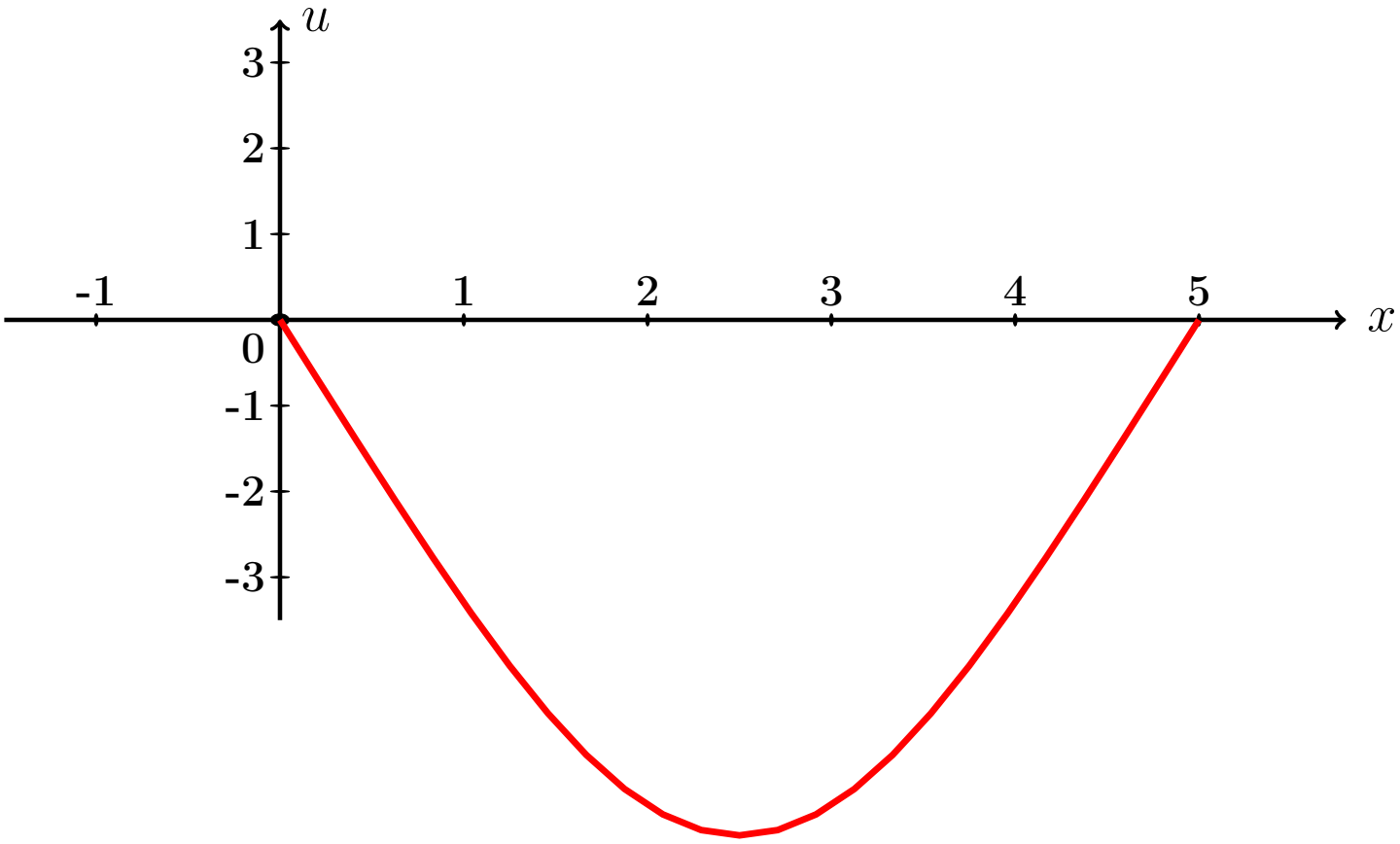


Рис.:

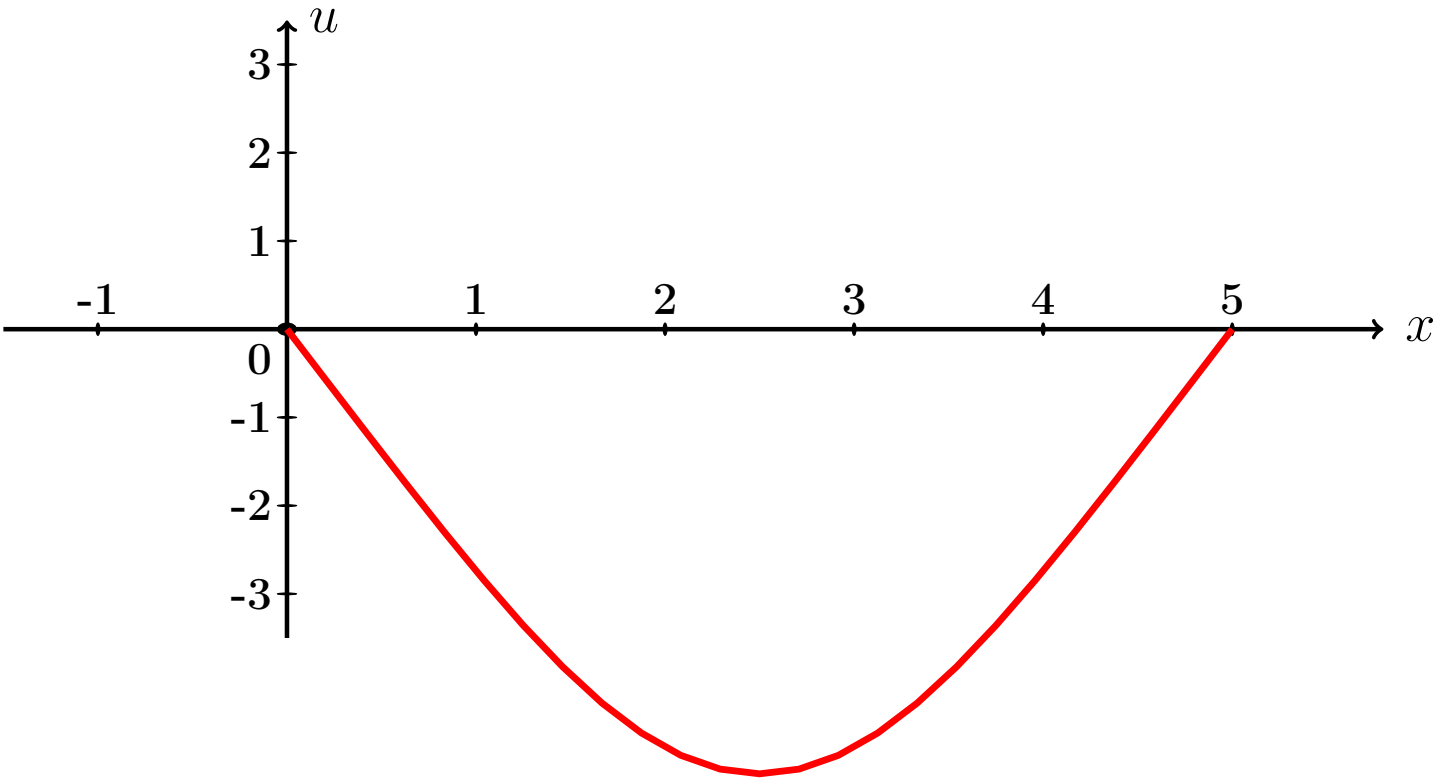


Рис.:

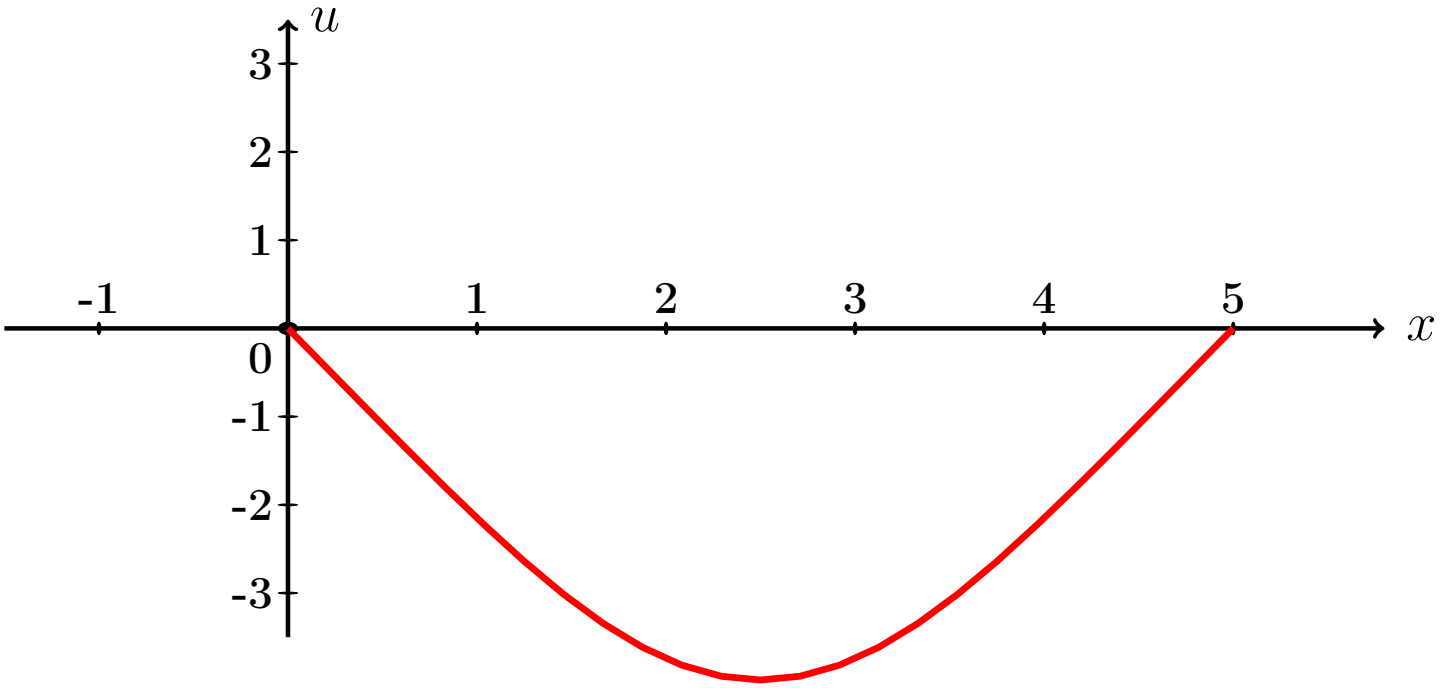


Рис.:

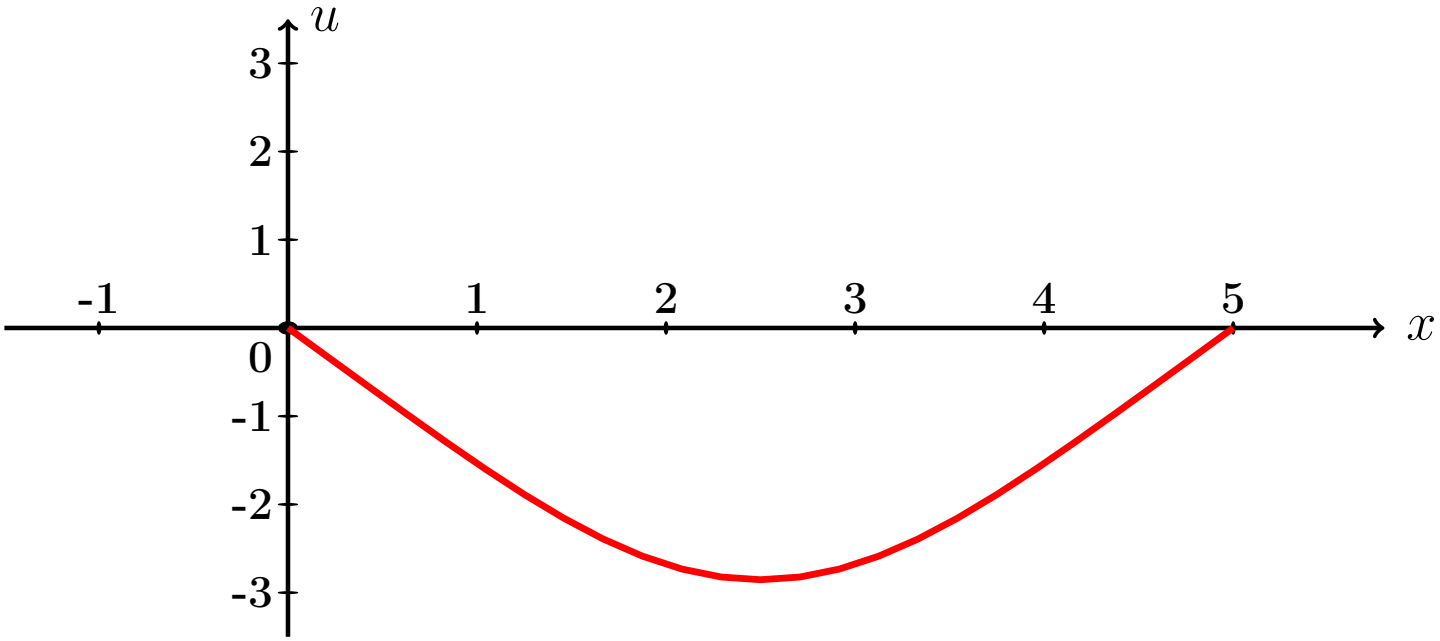


Рис.:

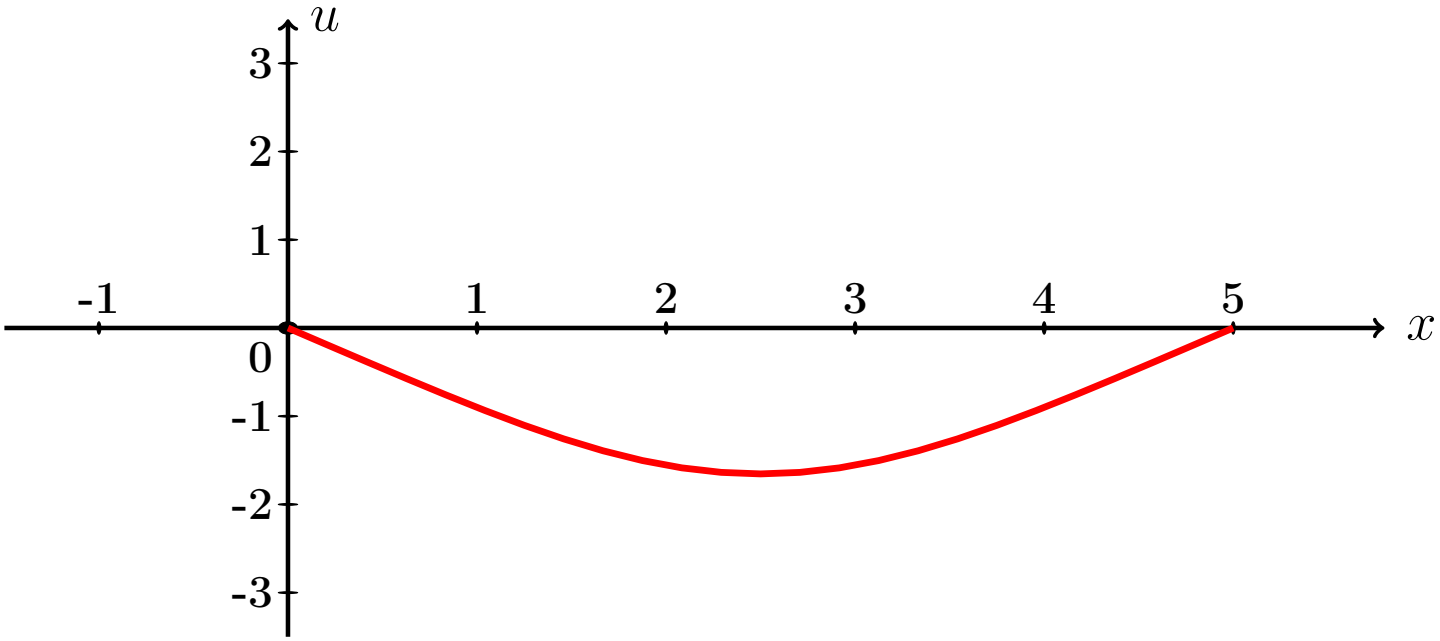


Рис.:

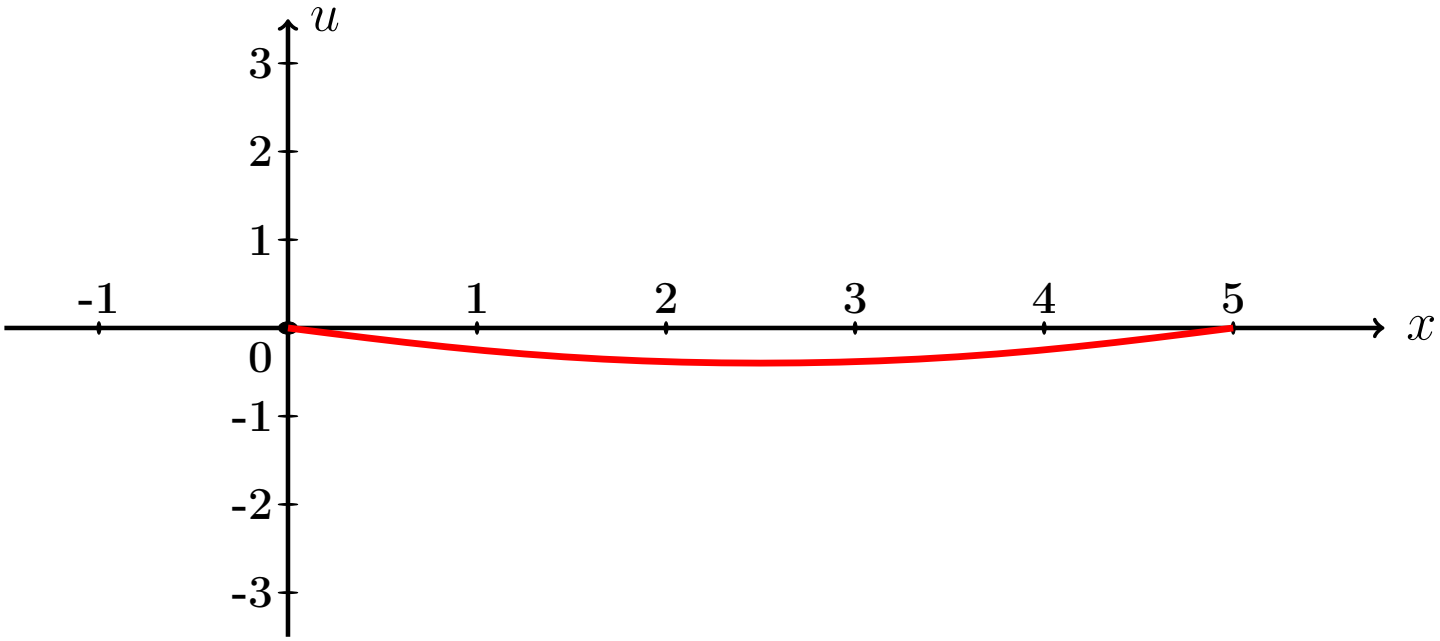


Рис.:

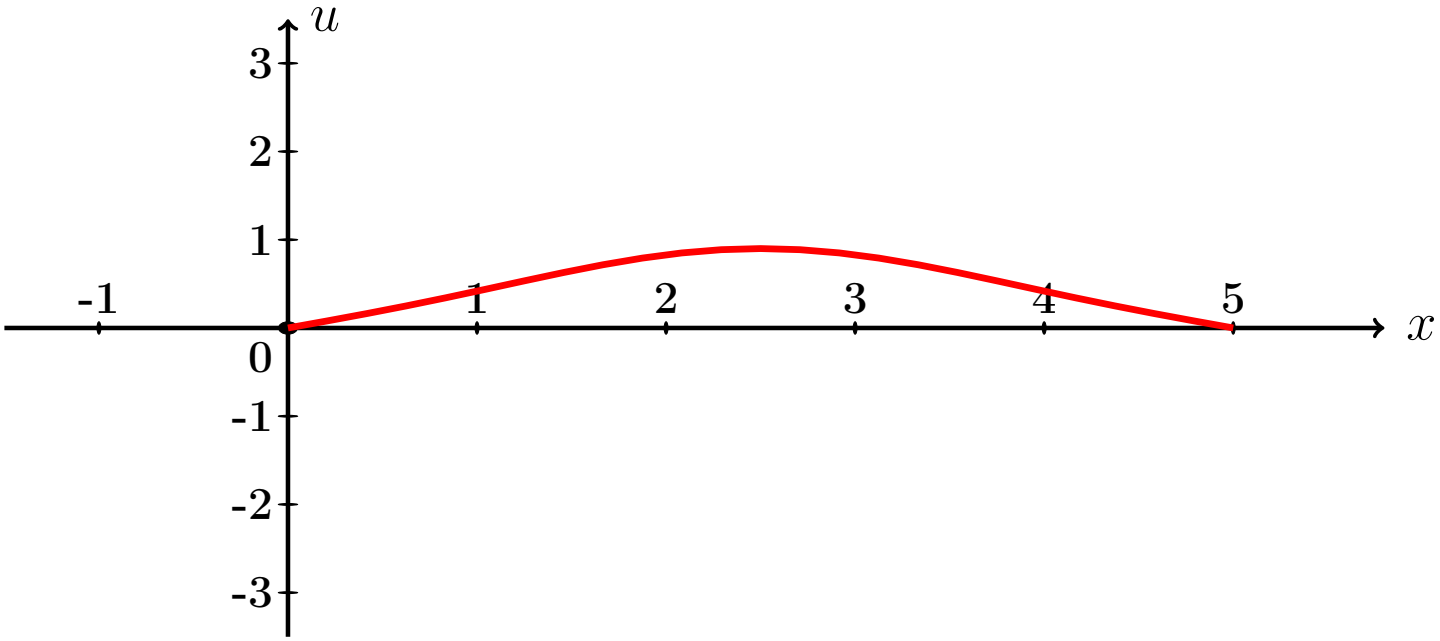


Рис.:

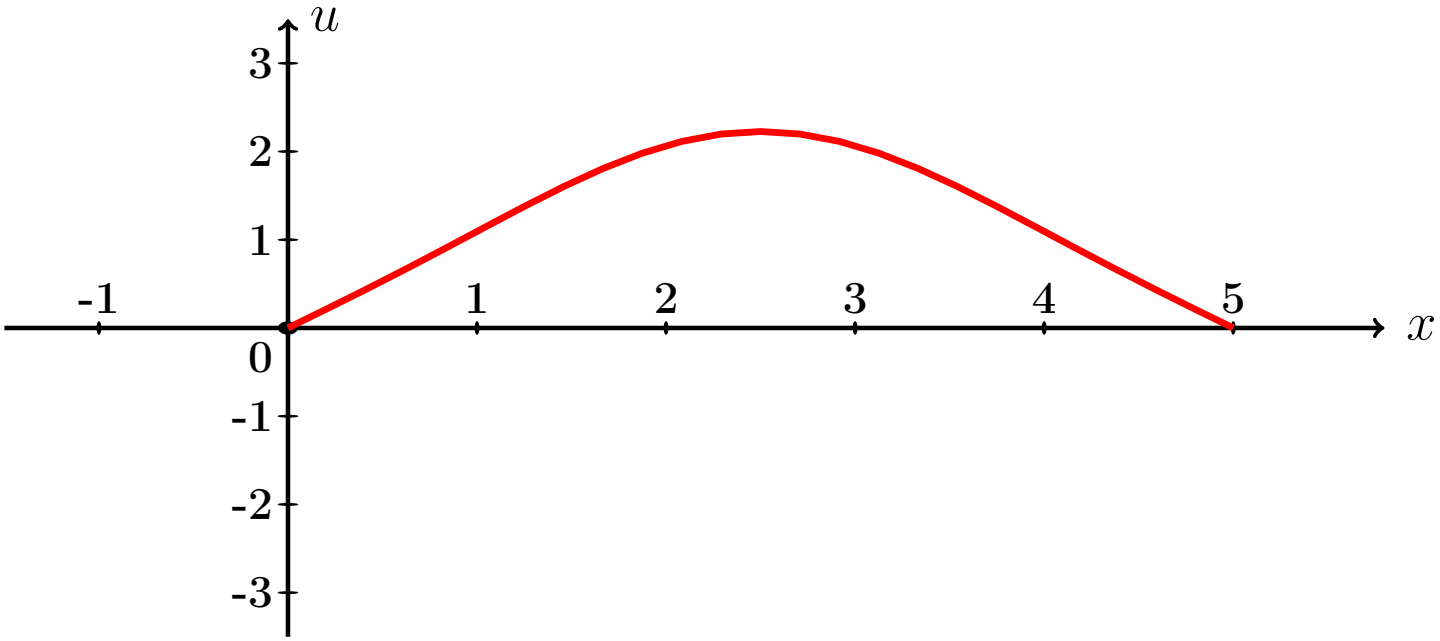


Рис.:

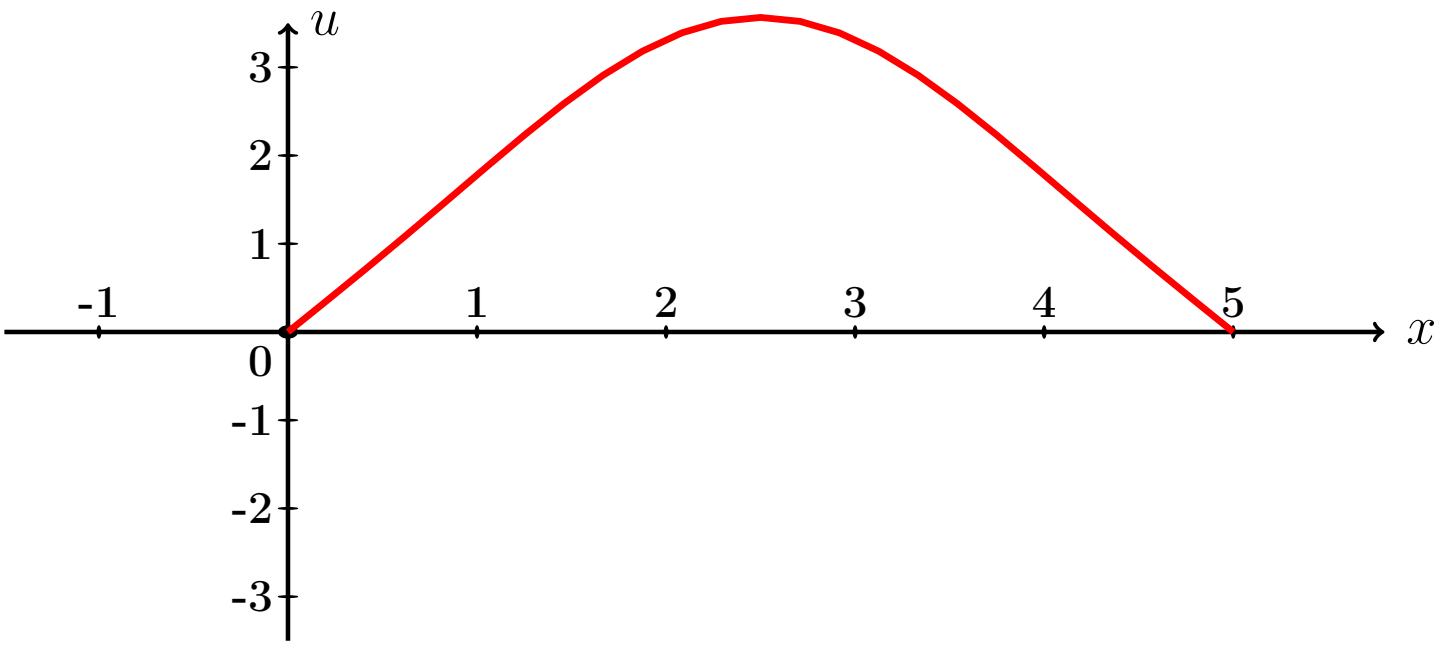


Рис.:

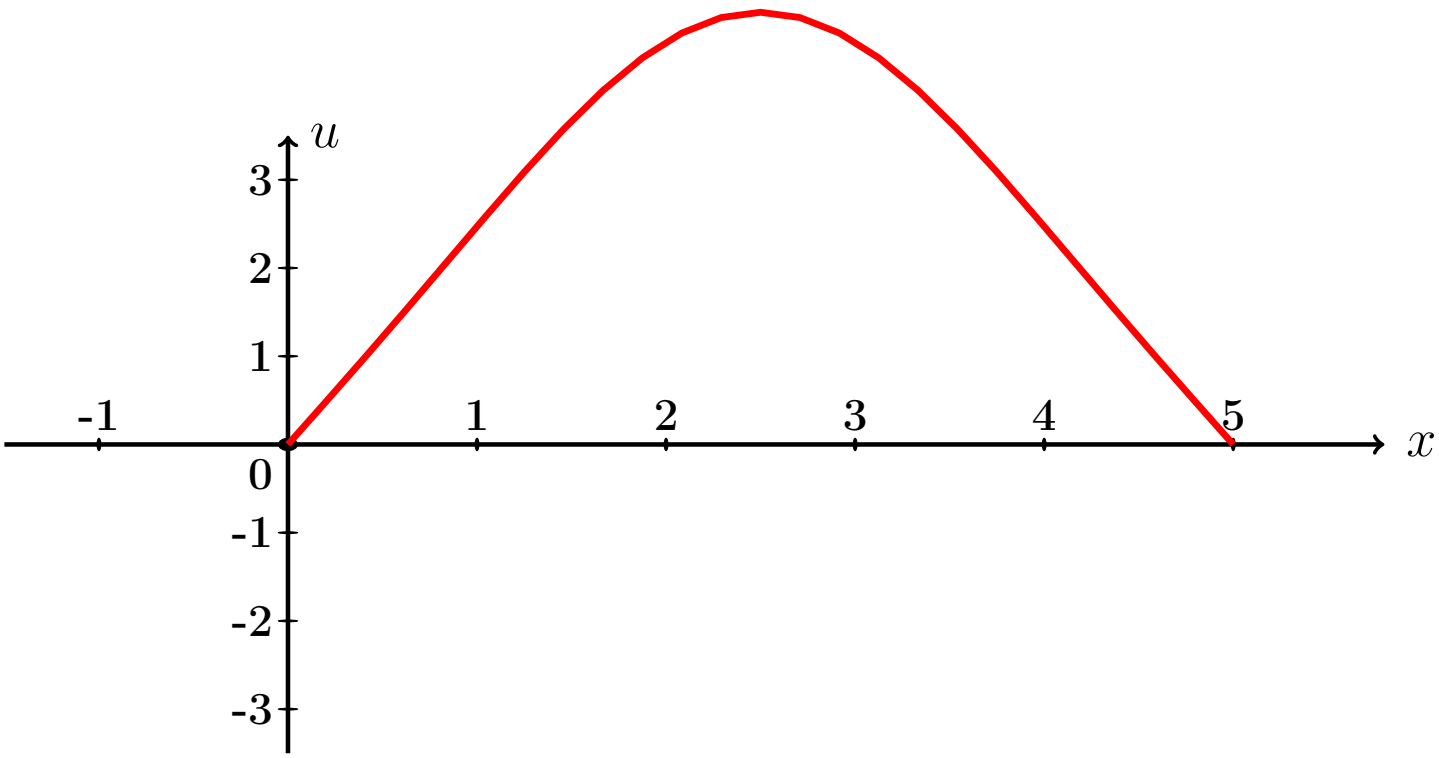


Рис.:

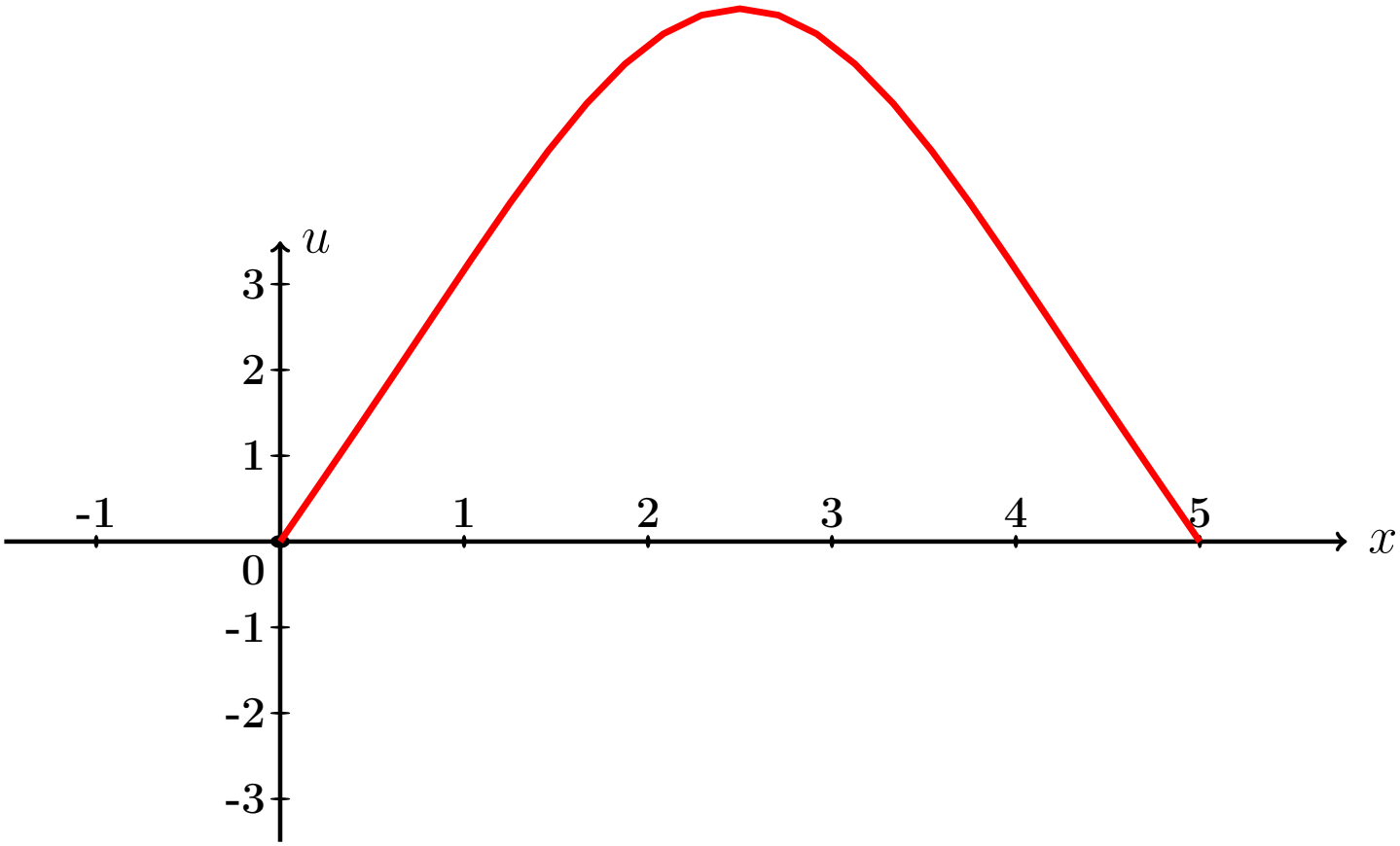


Рис.:

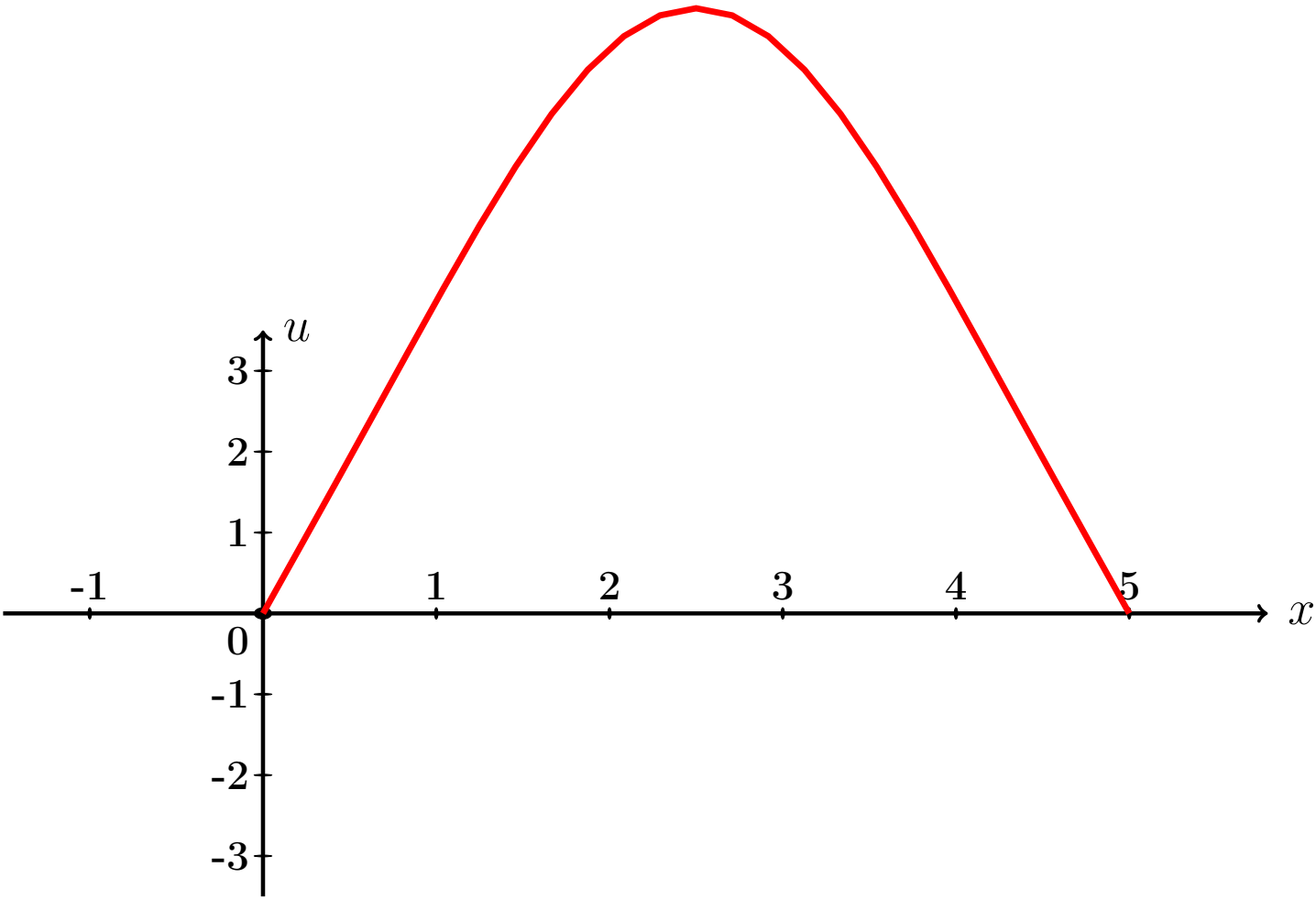


Рис.:

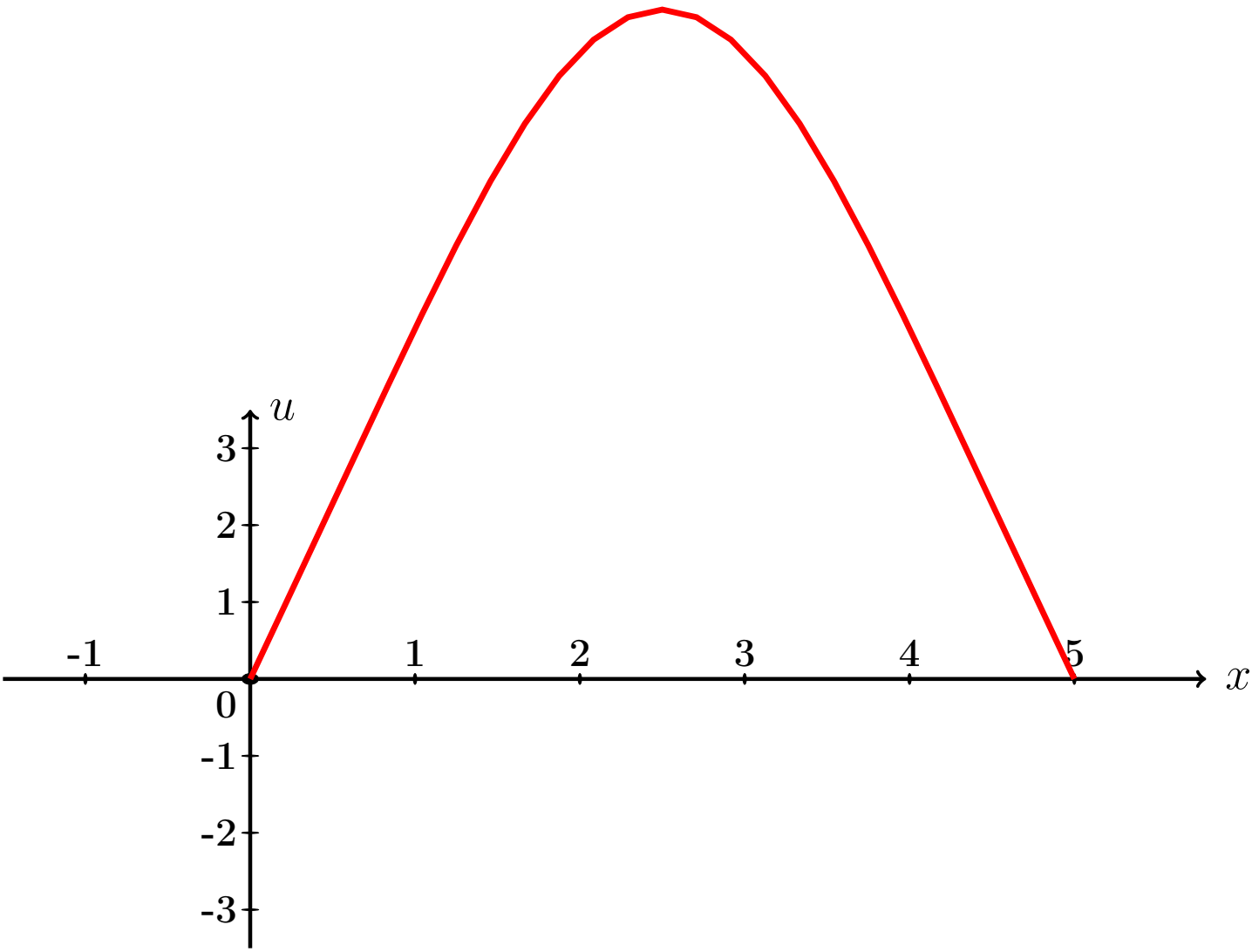


Рис.:

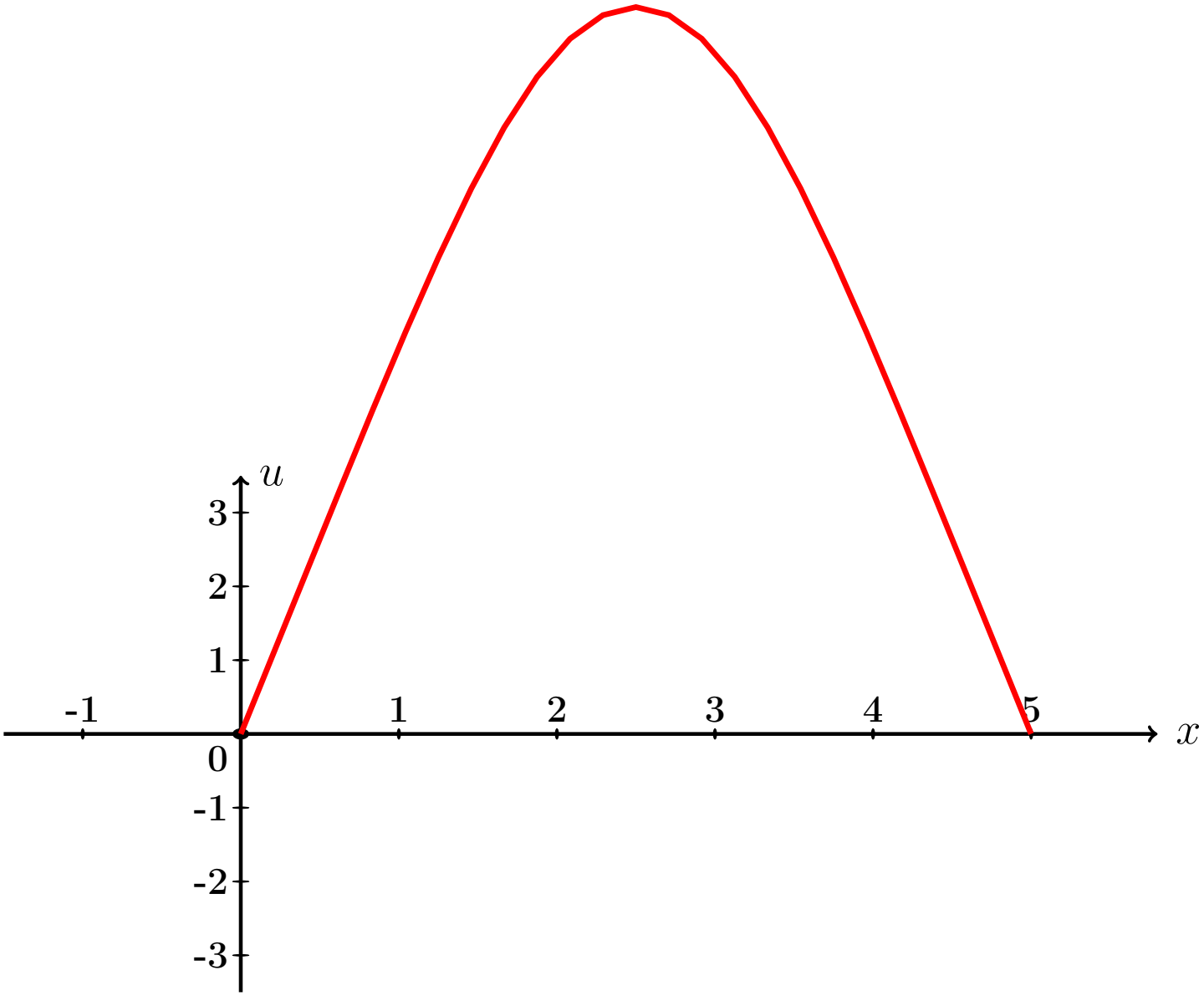


Рис.:

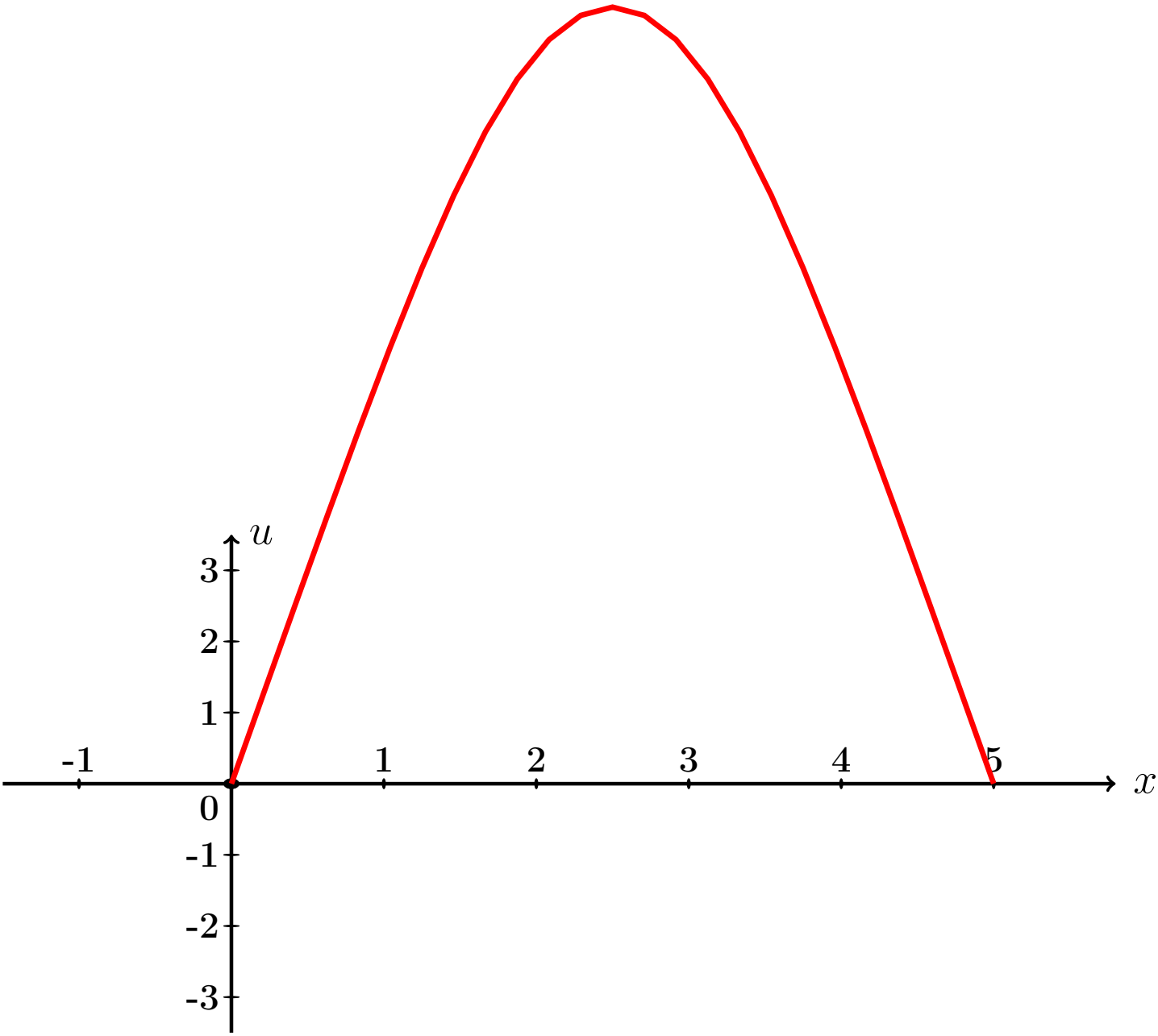


Рис.:

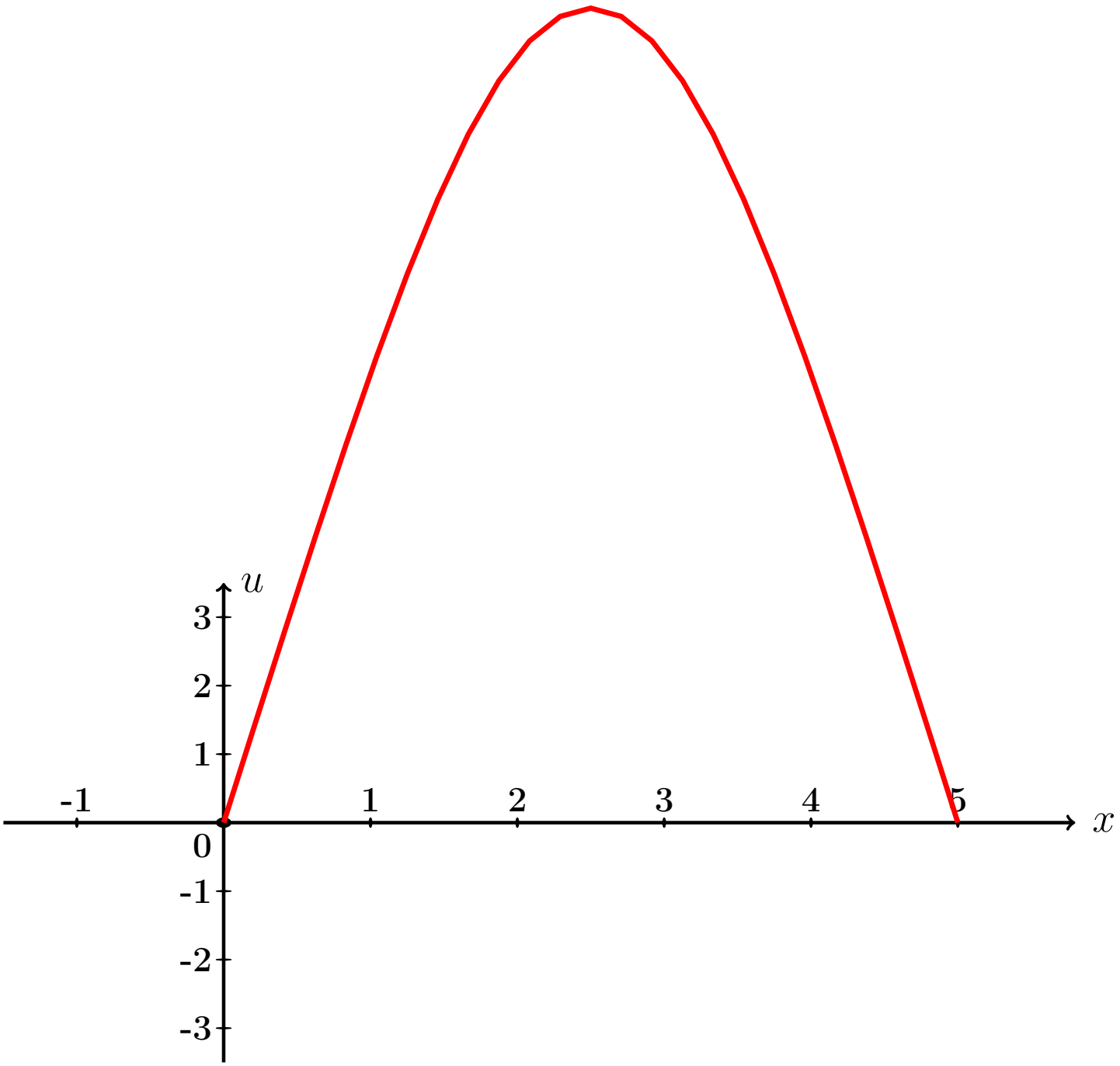


Рис.:

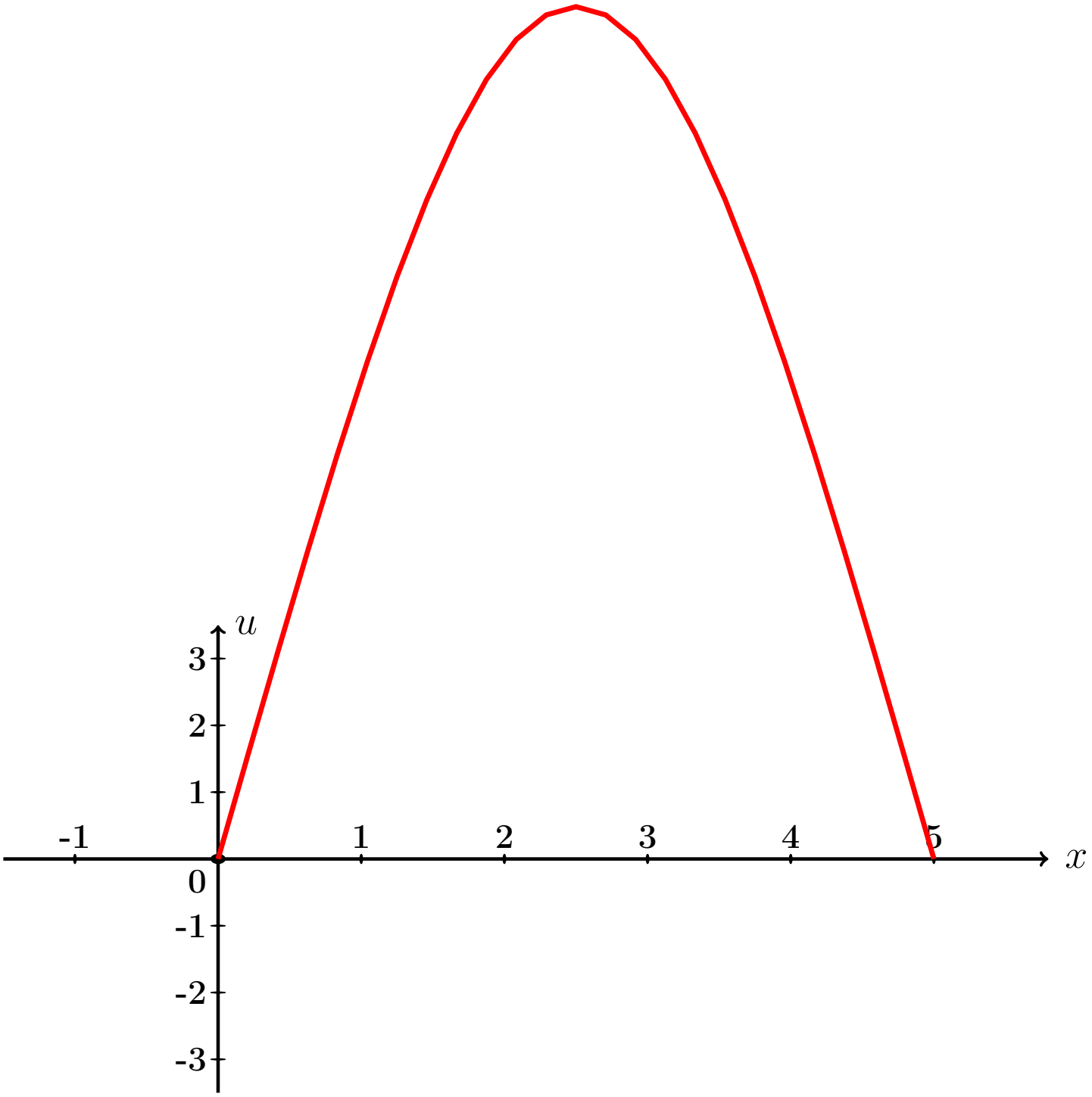


Рис.:

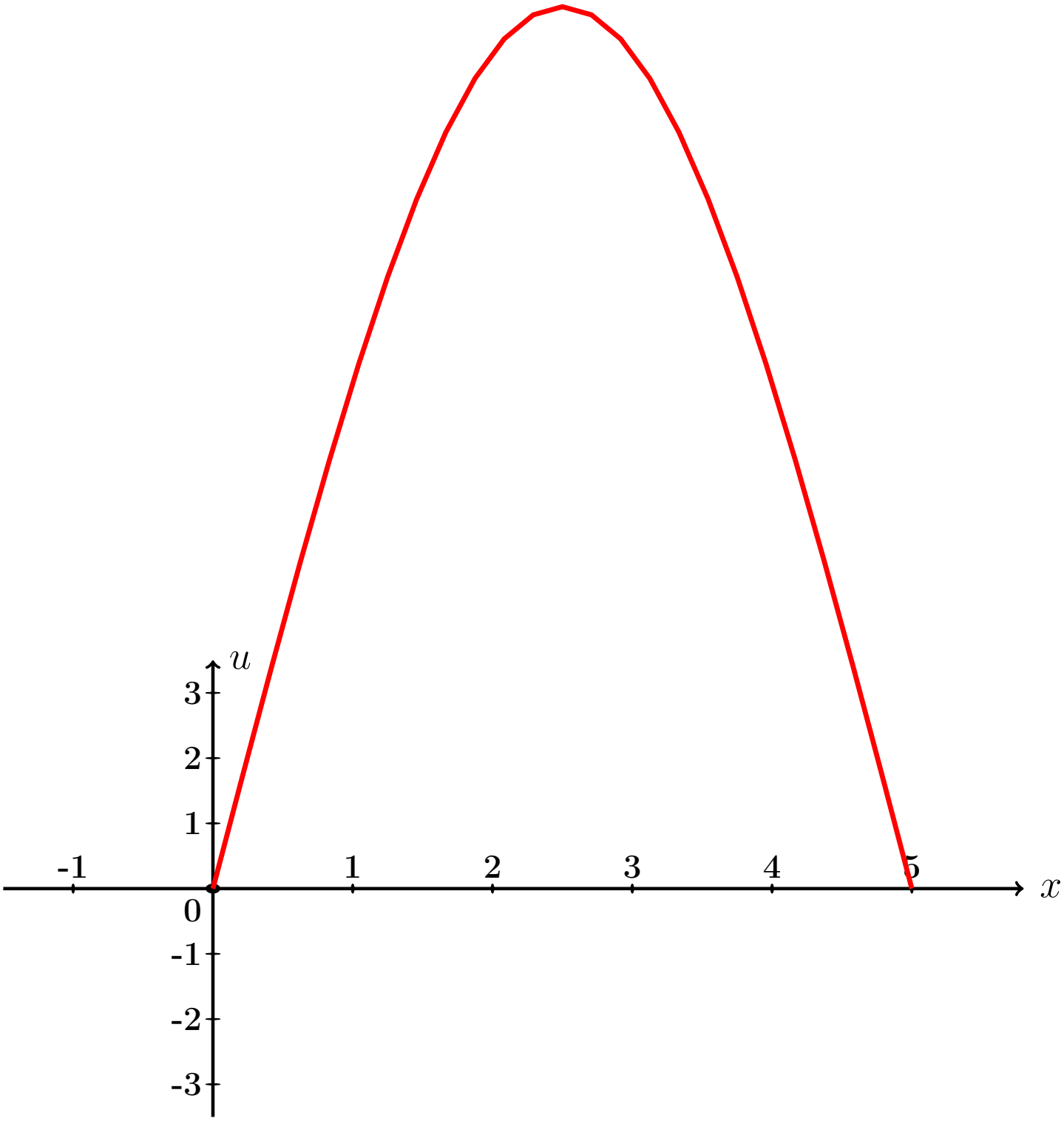


Рис.:

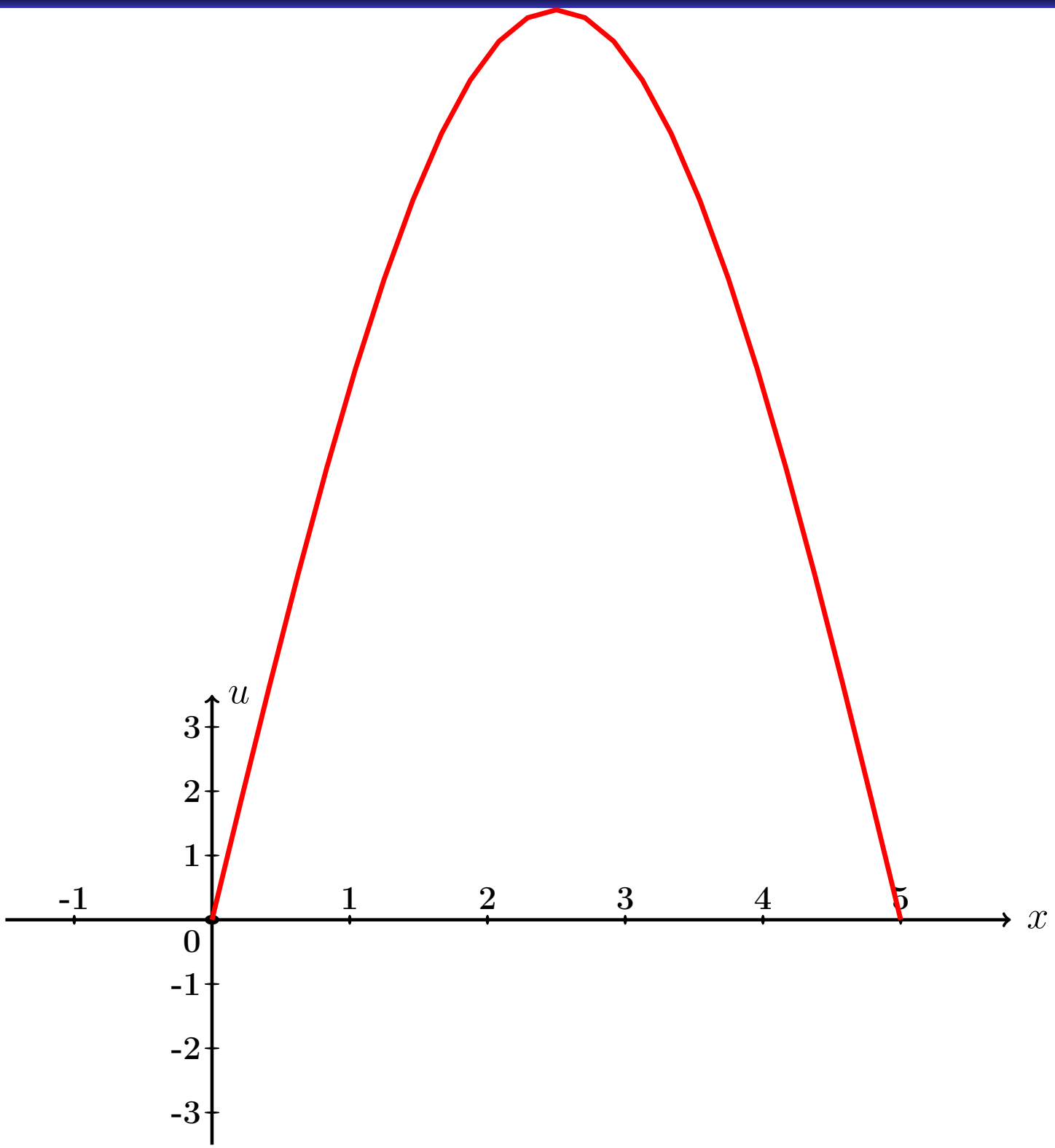


Рис.:

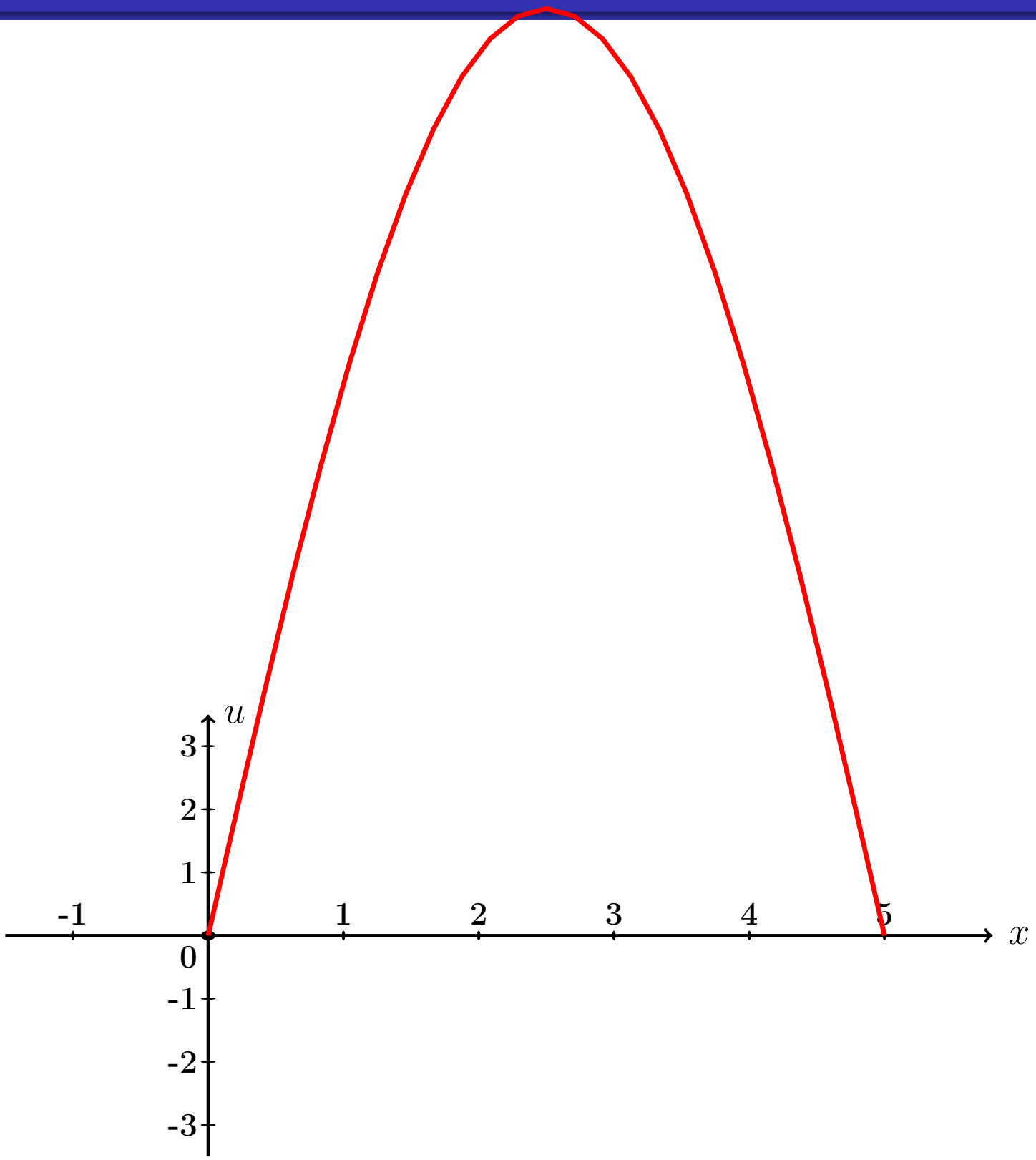


Рис.:

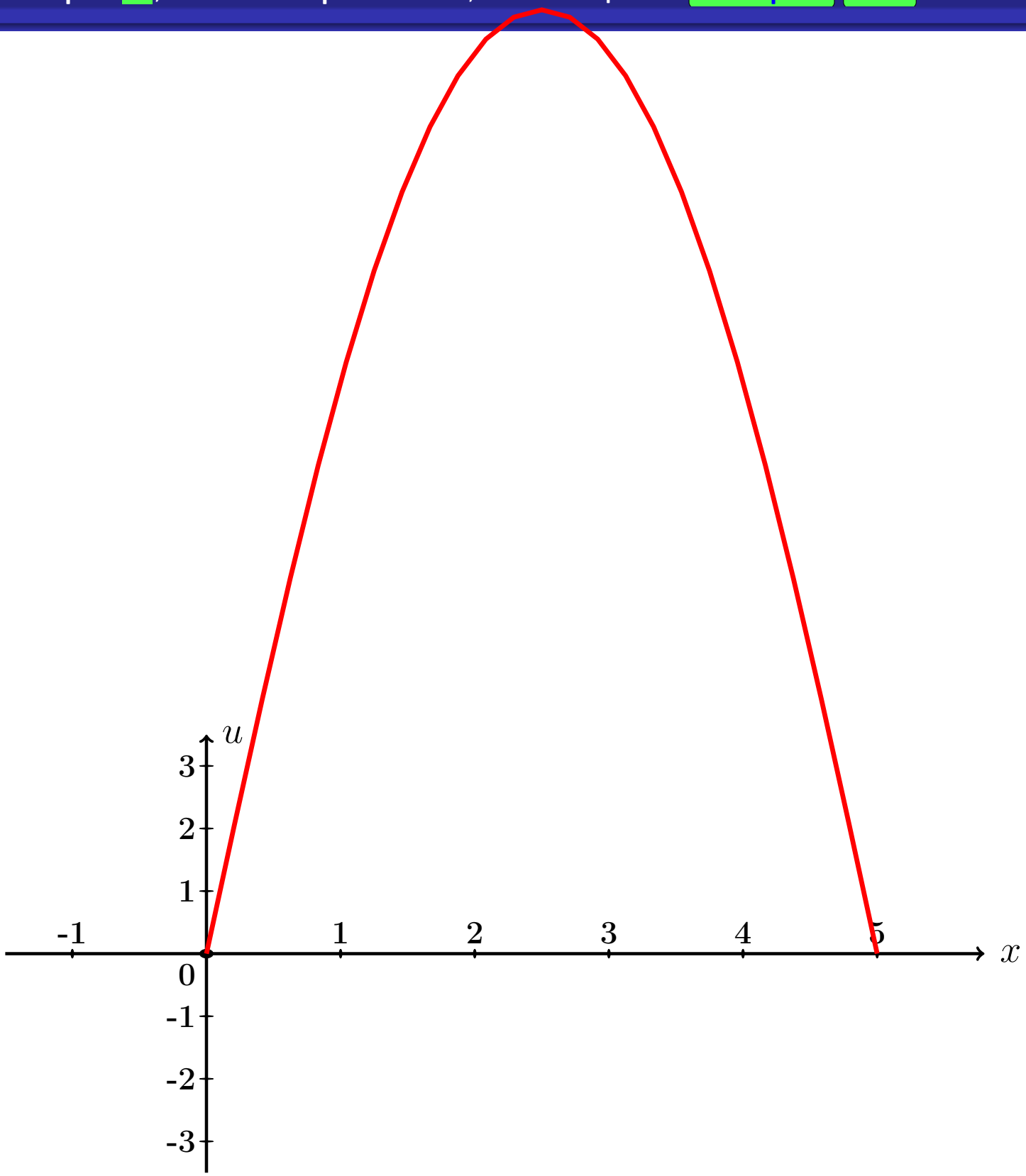


Рис.:

СМОТРИ СЛЕДУЮЩИЙ СЛАЙД

Пример П7, анимация возврат огл

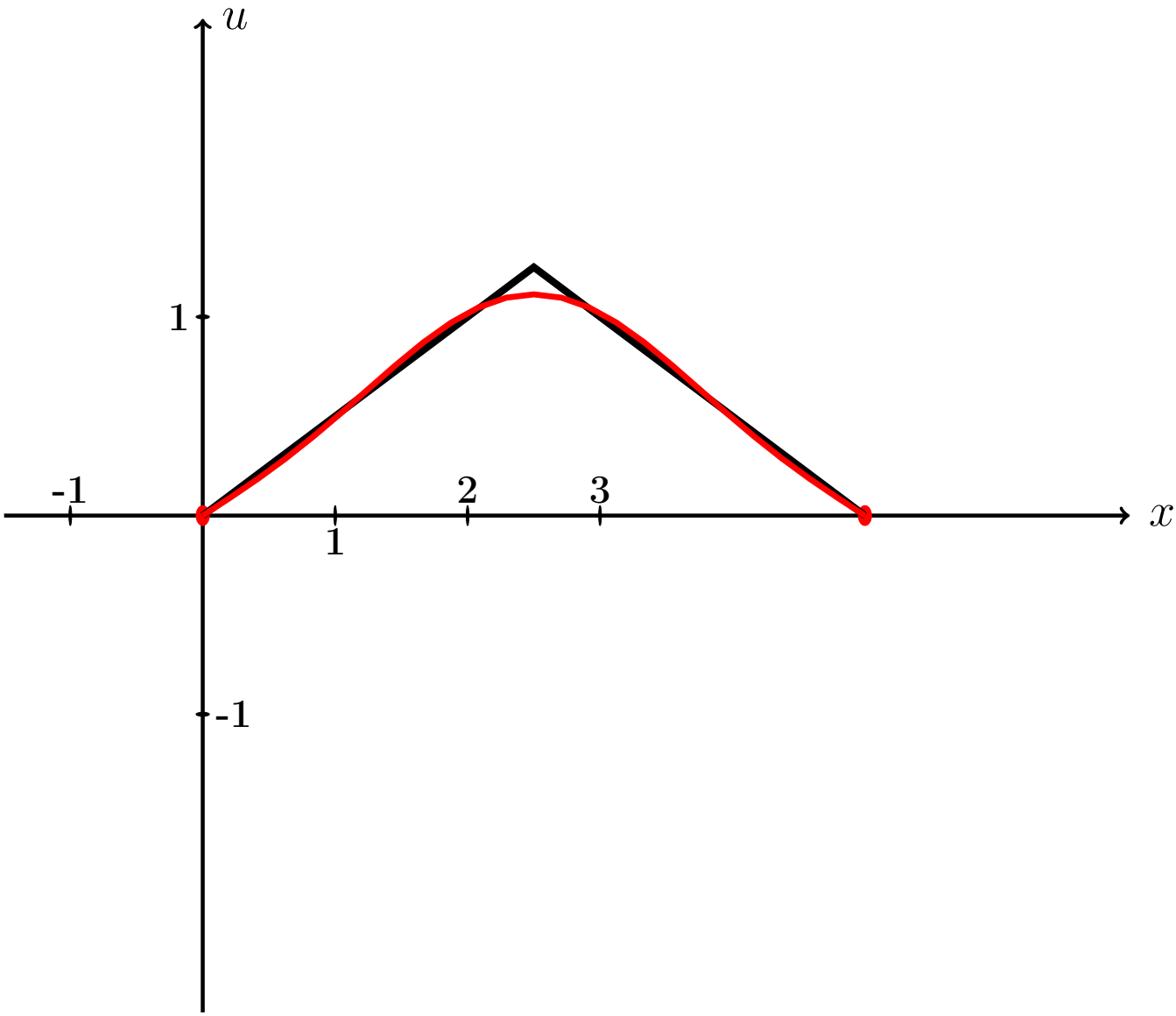


Рис.: Черным показано исходное положение струны по формуле $u(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при} \quad 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5-x), & \text{при} \quad 5/2 \le x \le 5 \end{cases}$, а красным – его расчетное приближение.

Пример П7, анимация возврат огл

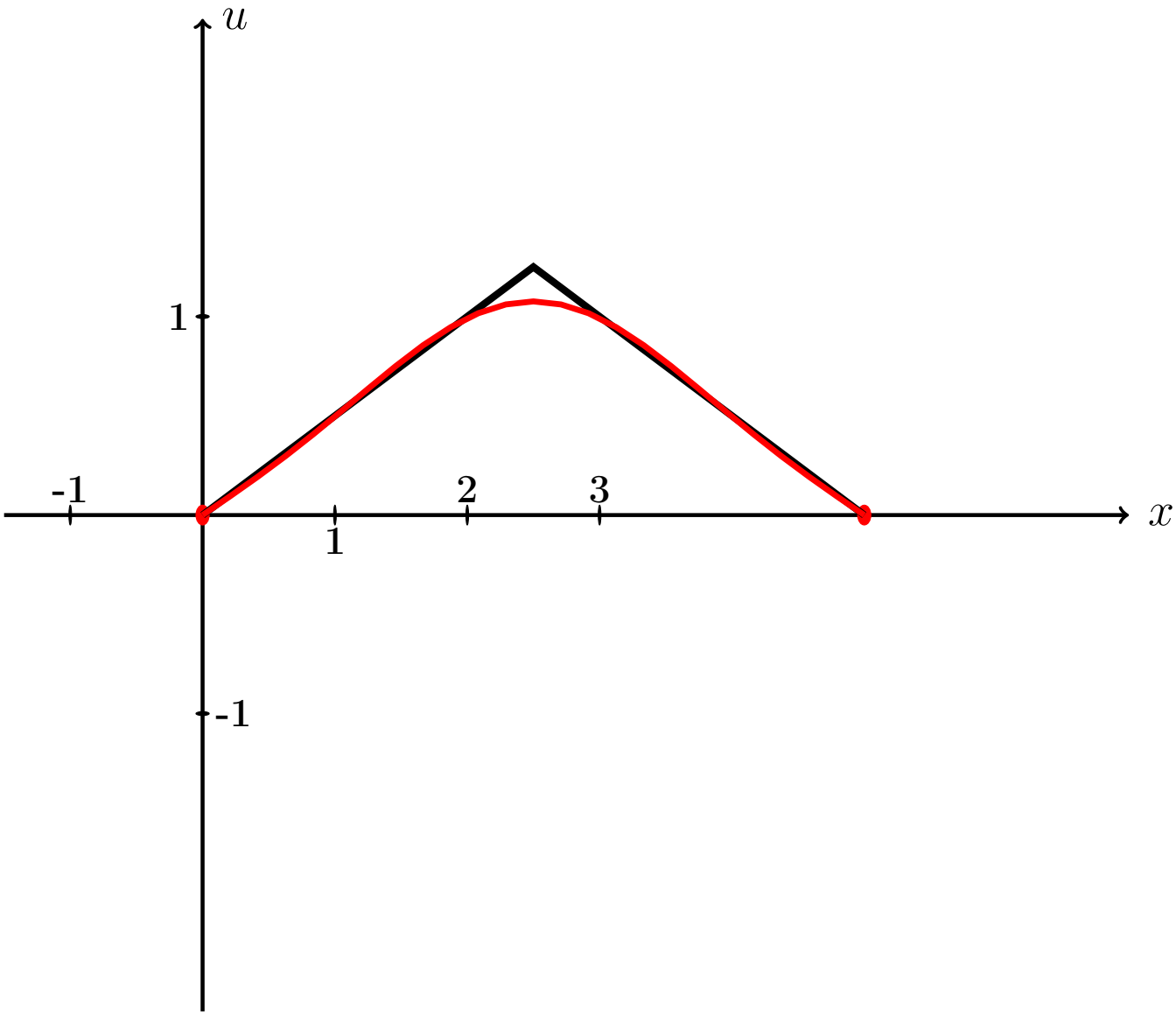


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

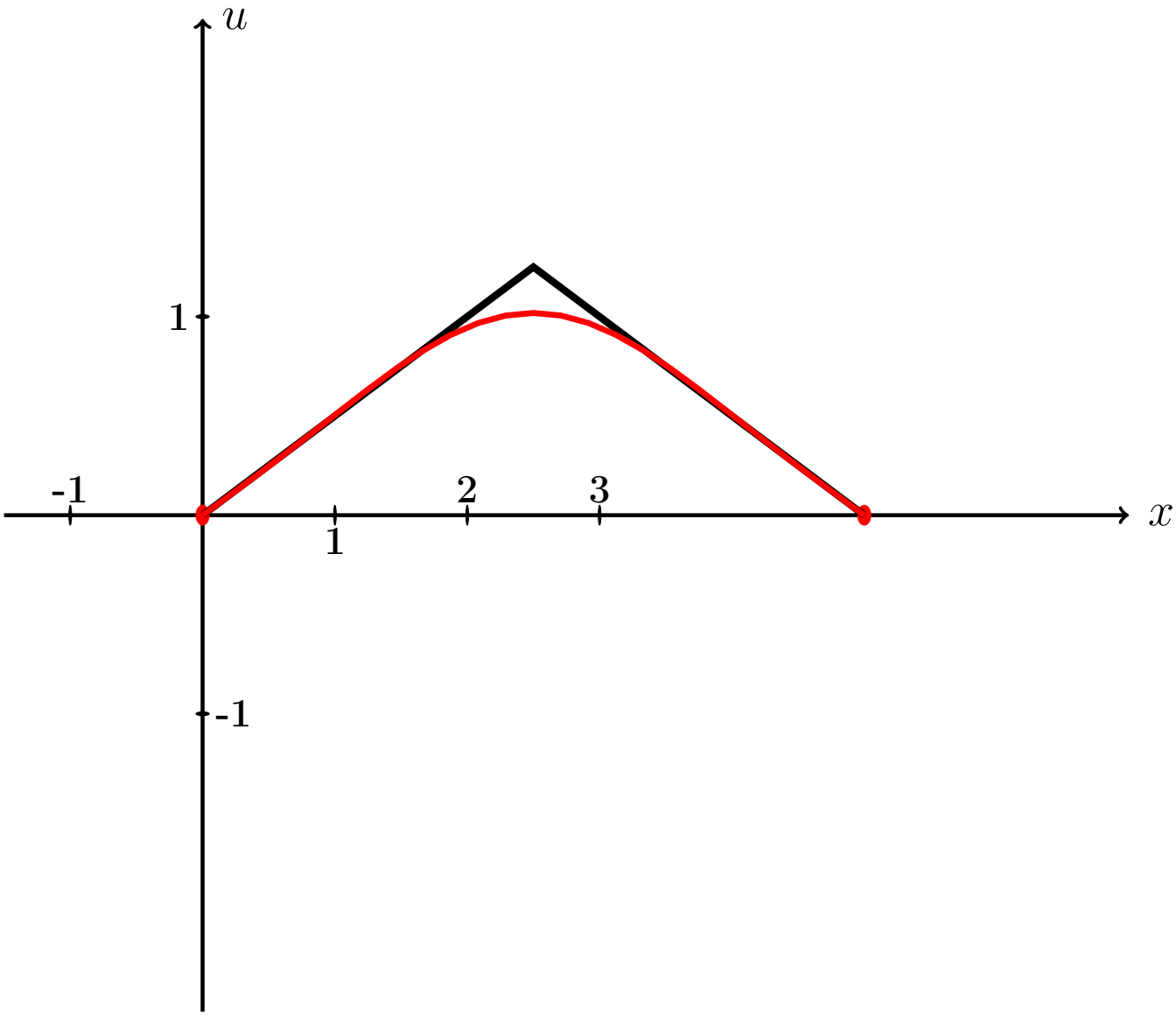


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

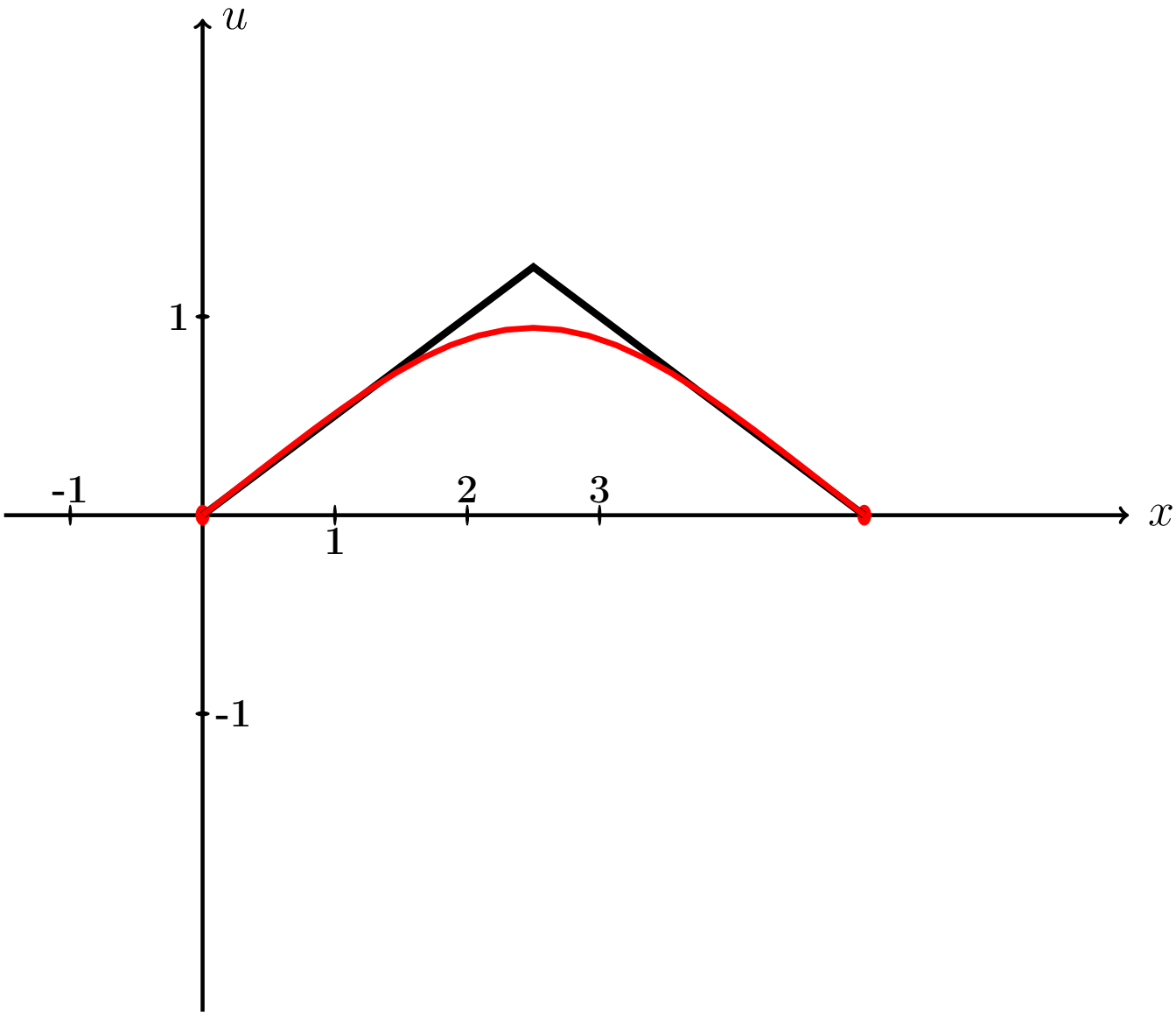


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

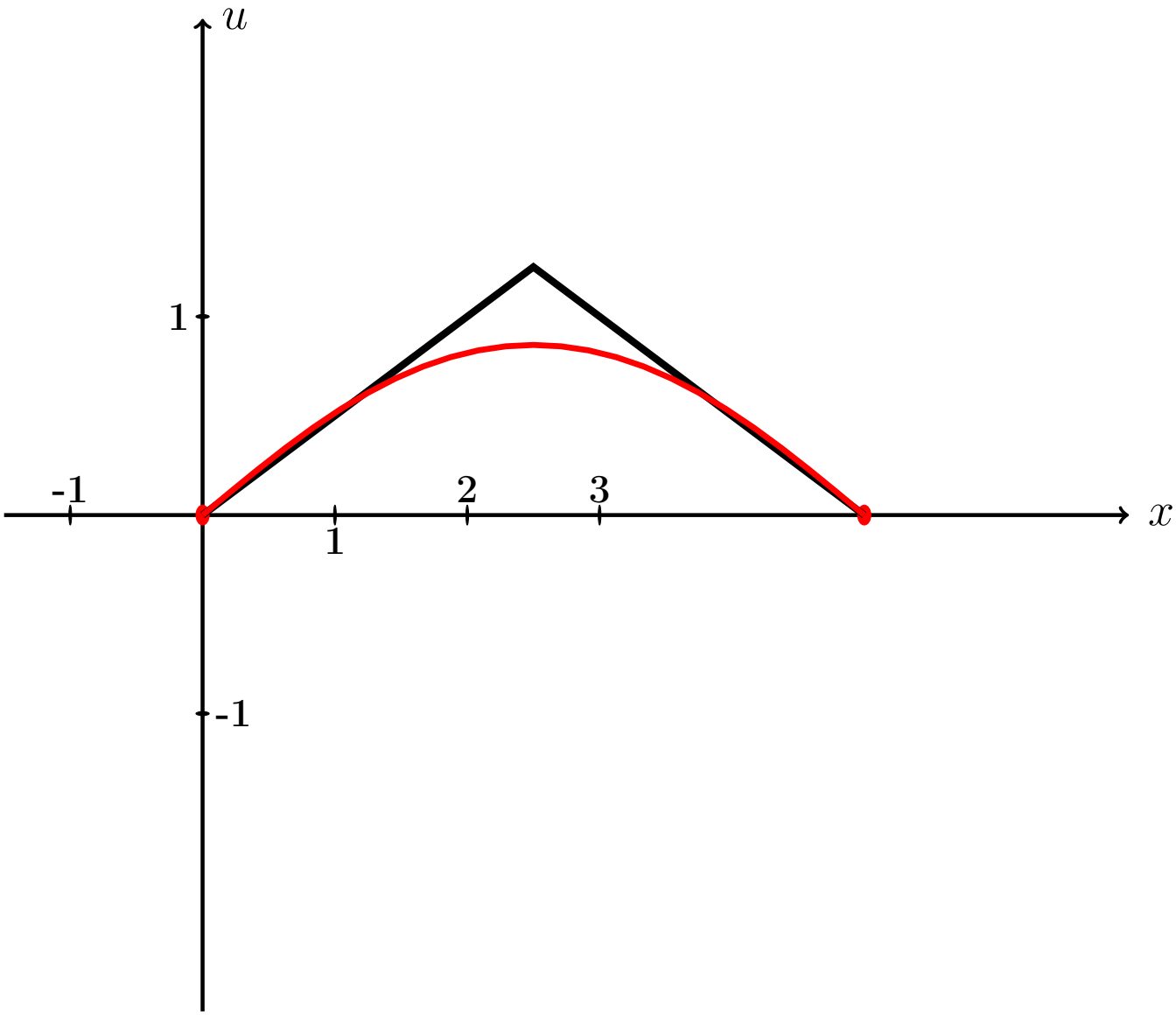


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

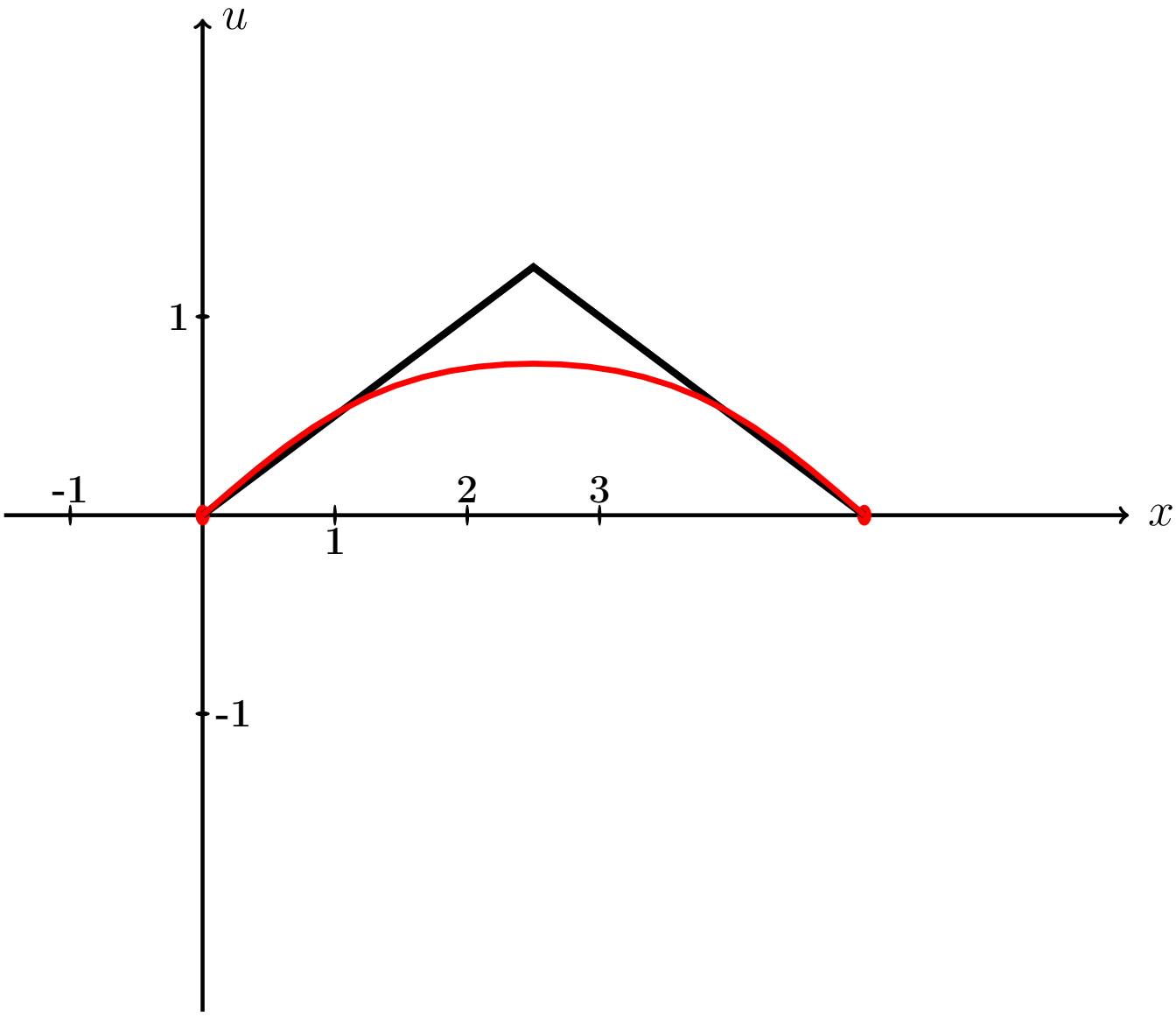


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

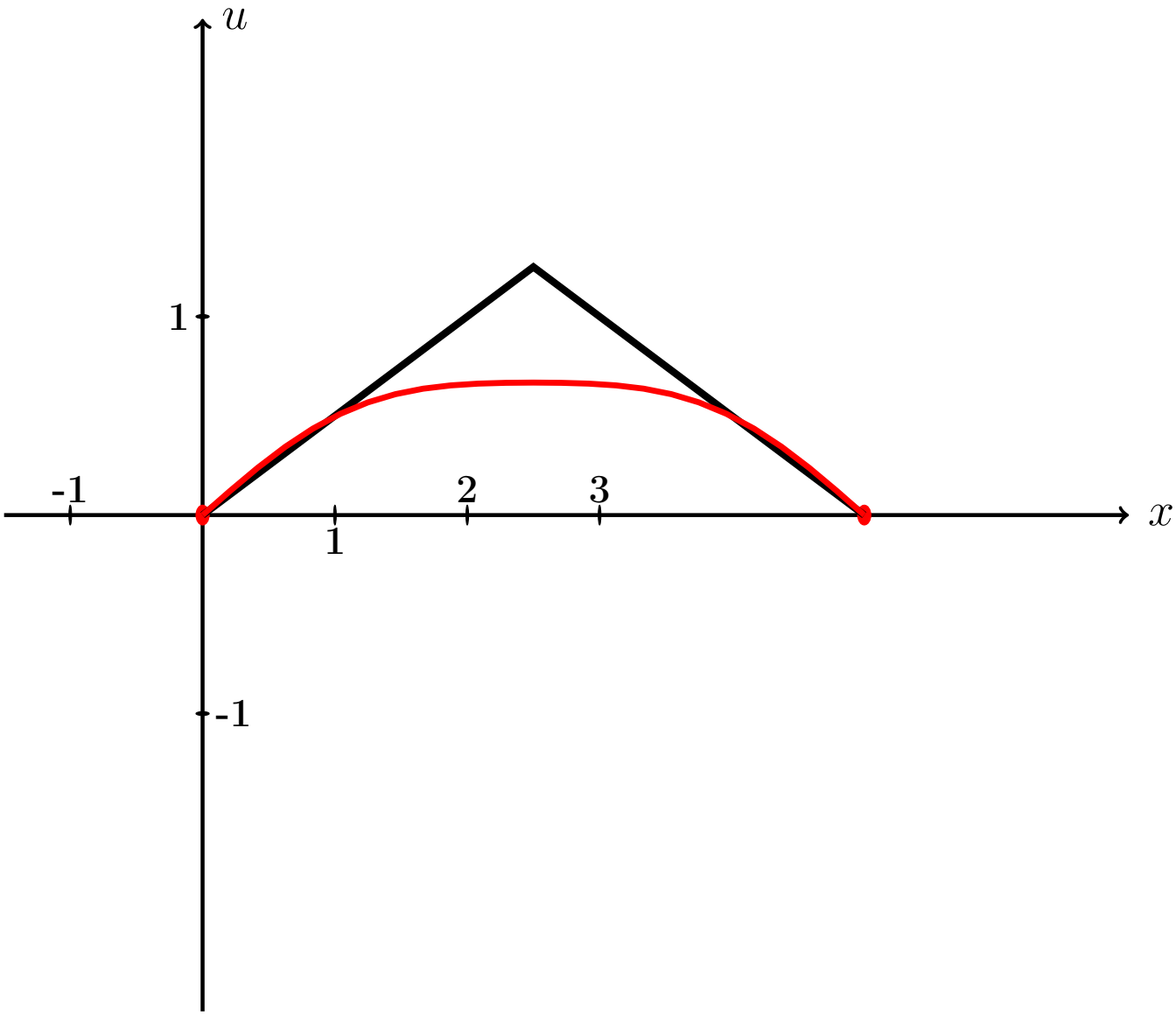


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

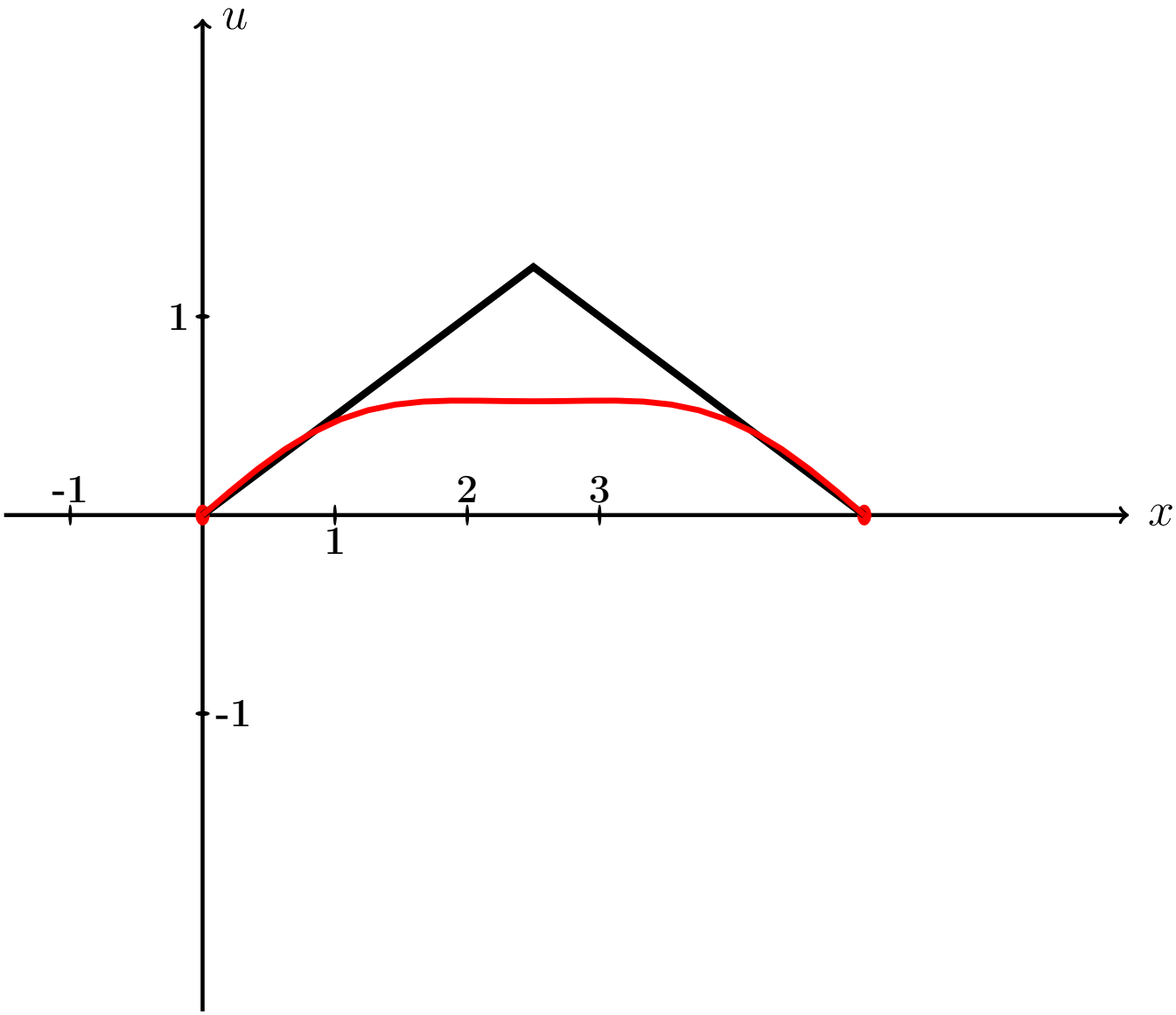


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

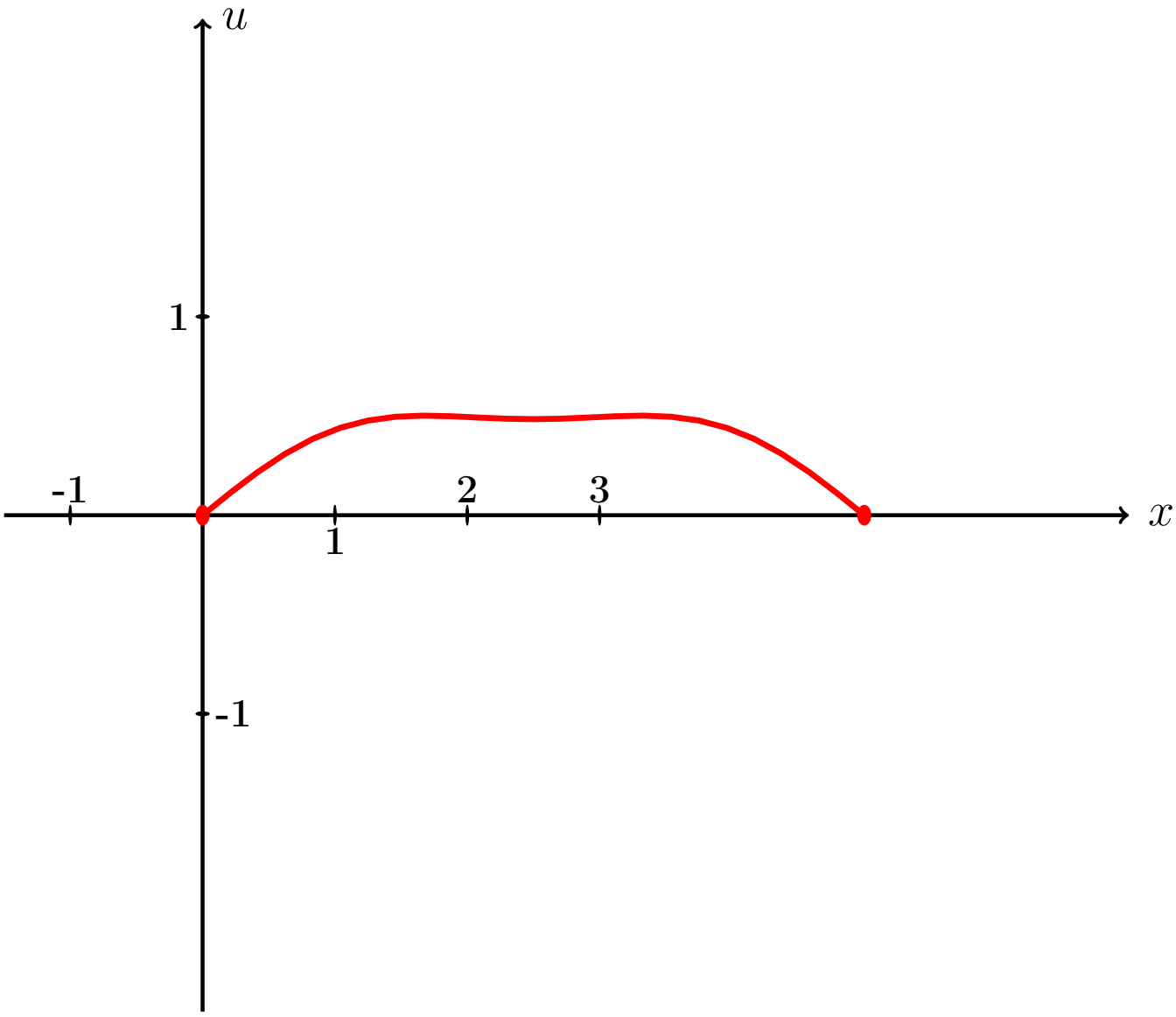


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

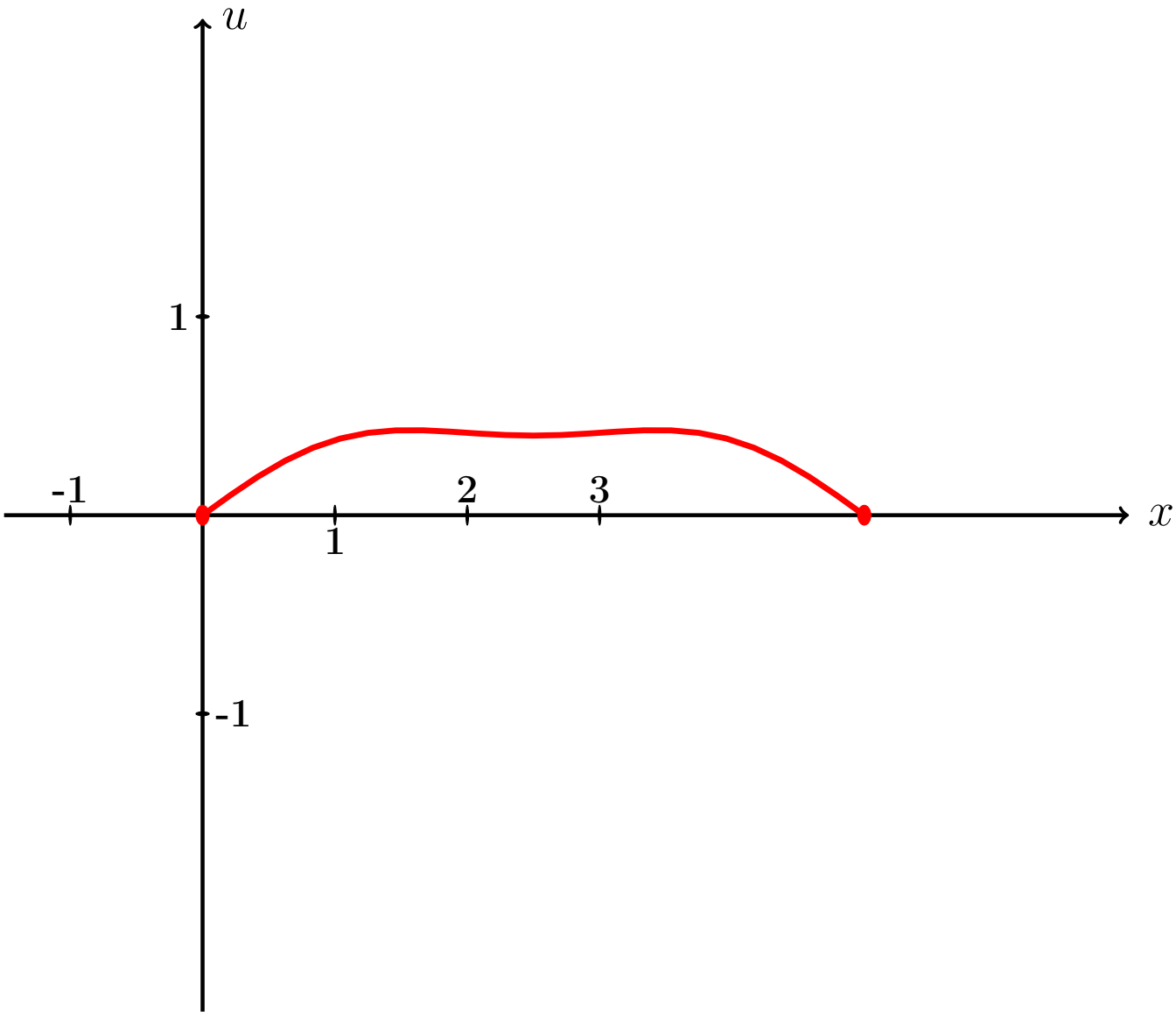


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

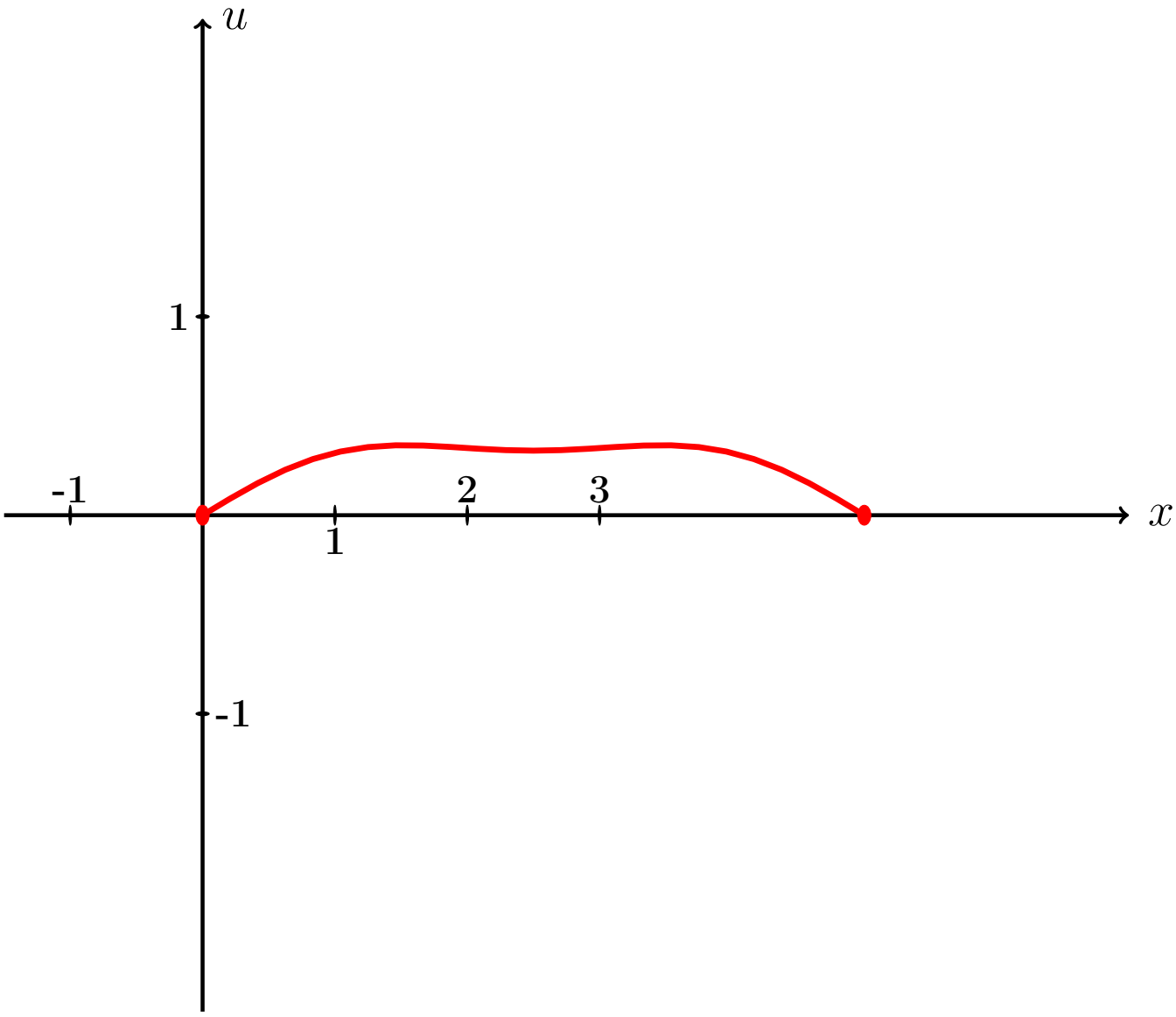


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

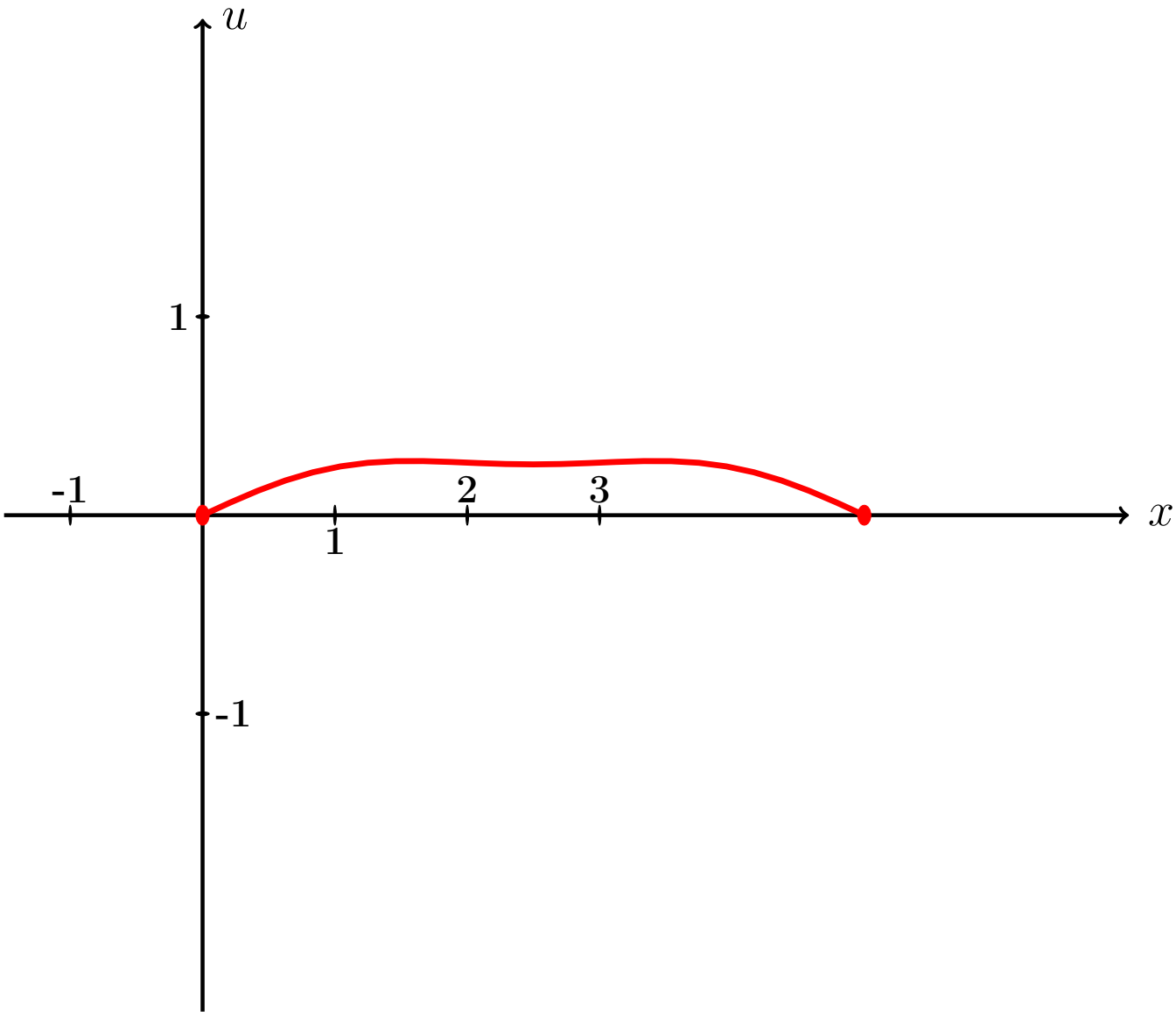


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

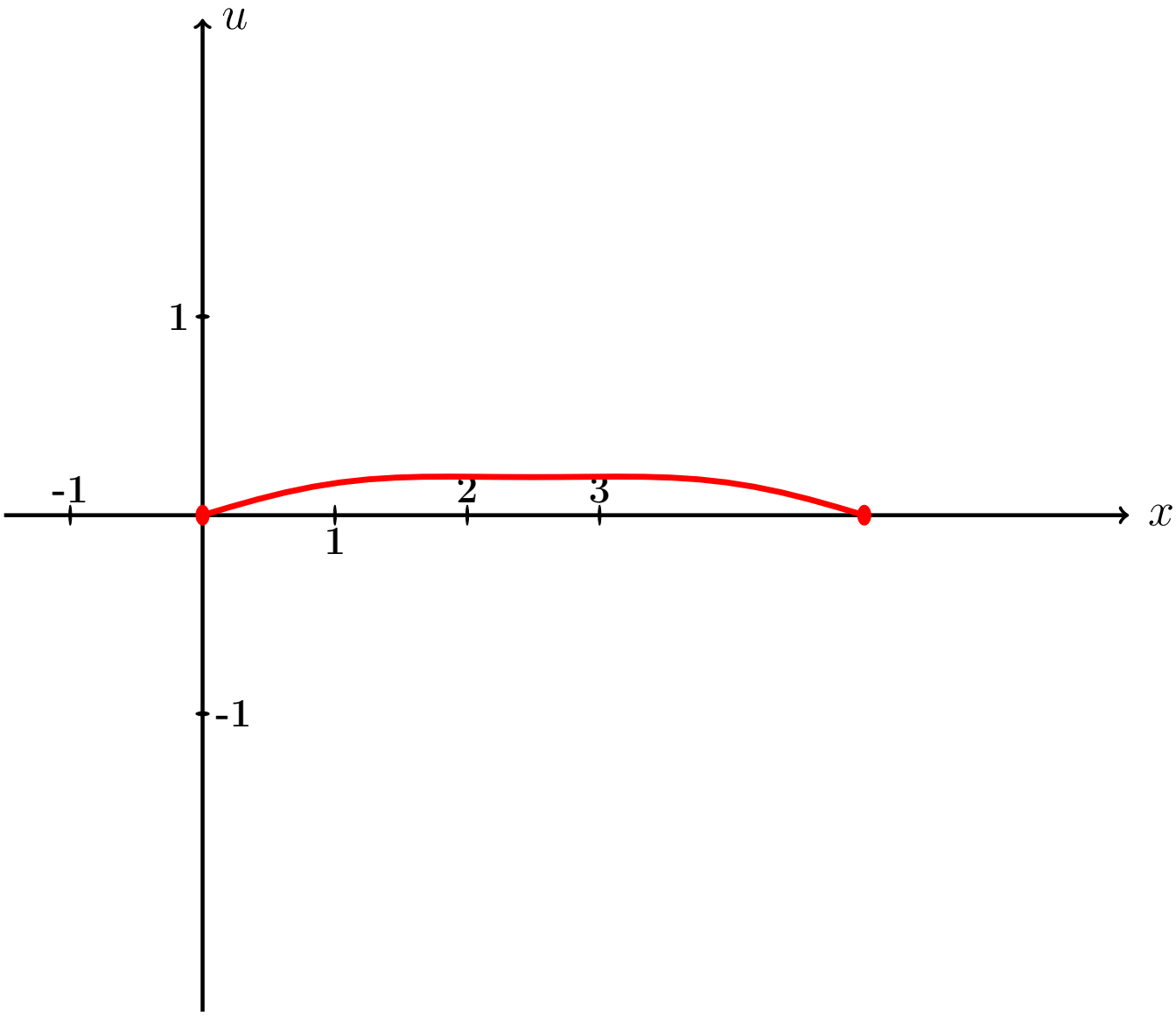


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

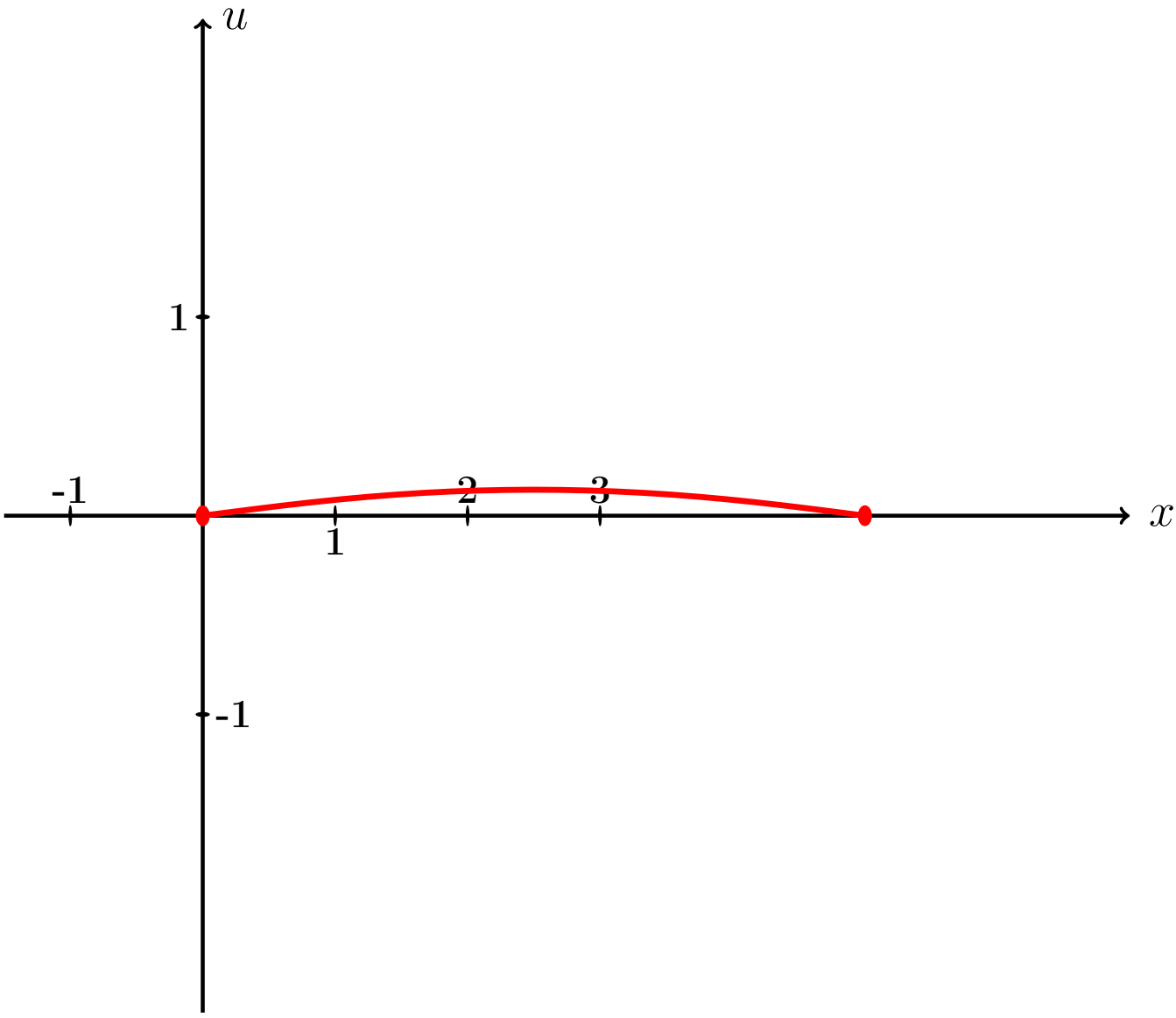


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

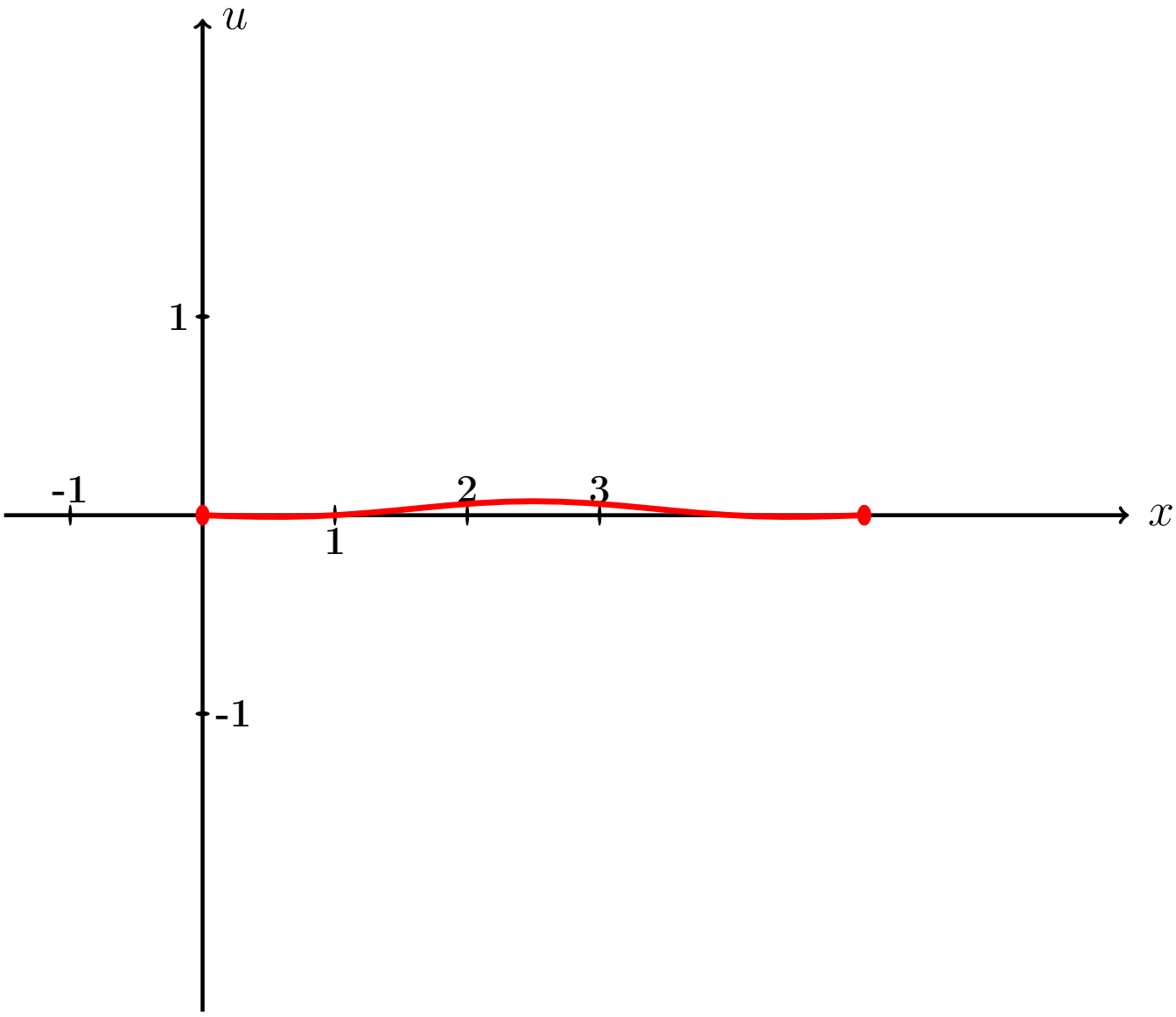


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

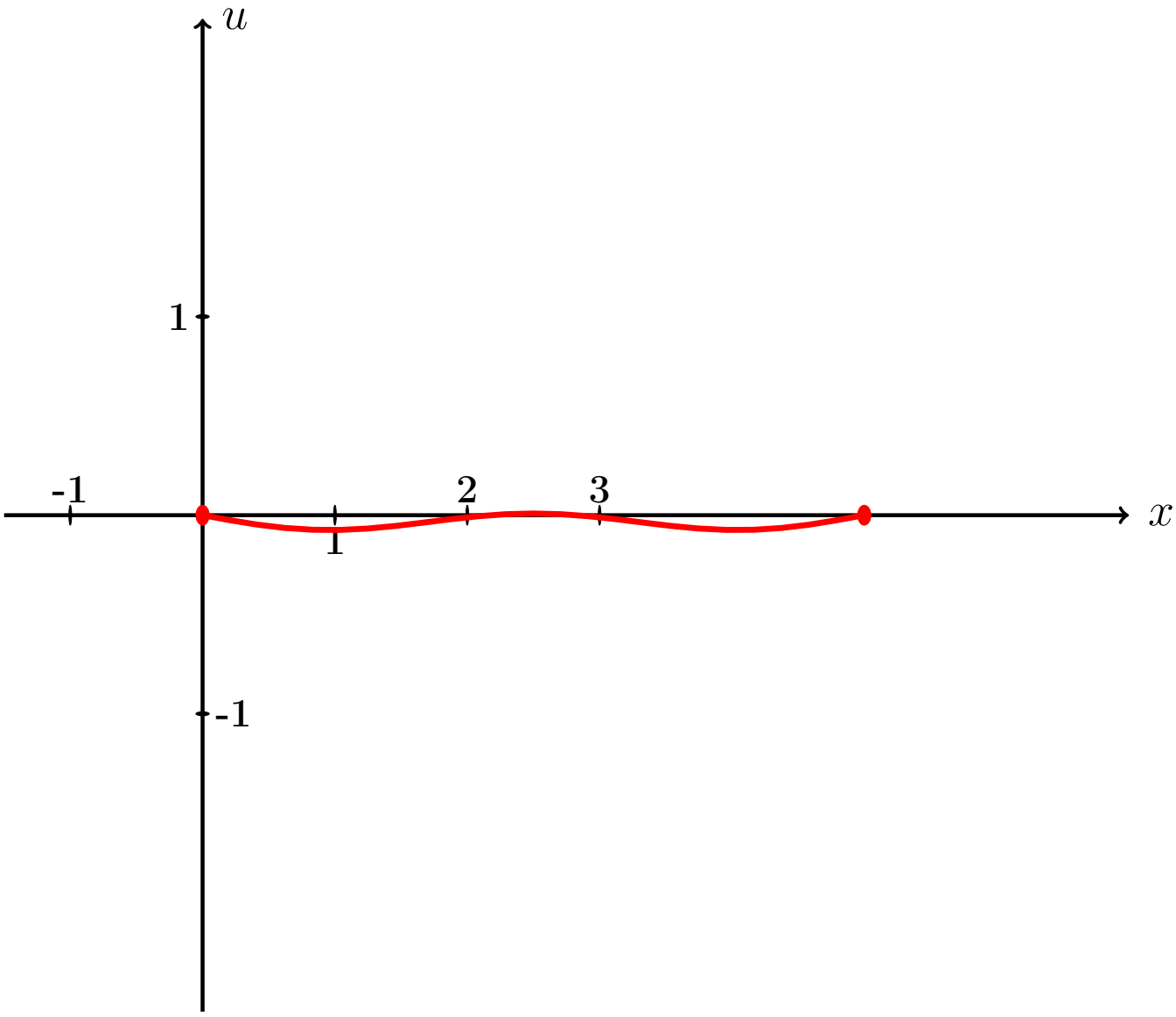


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

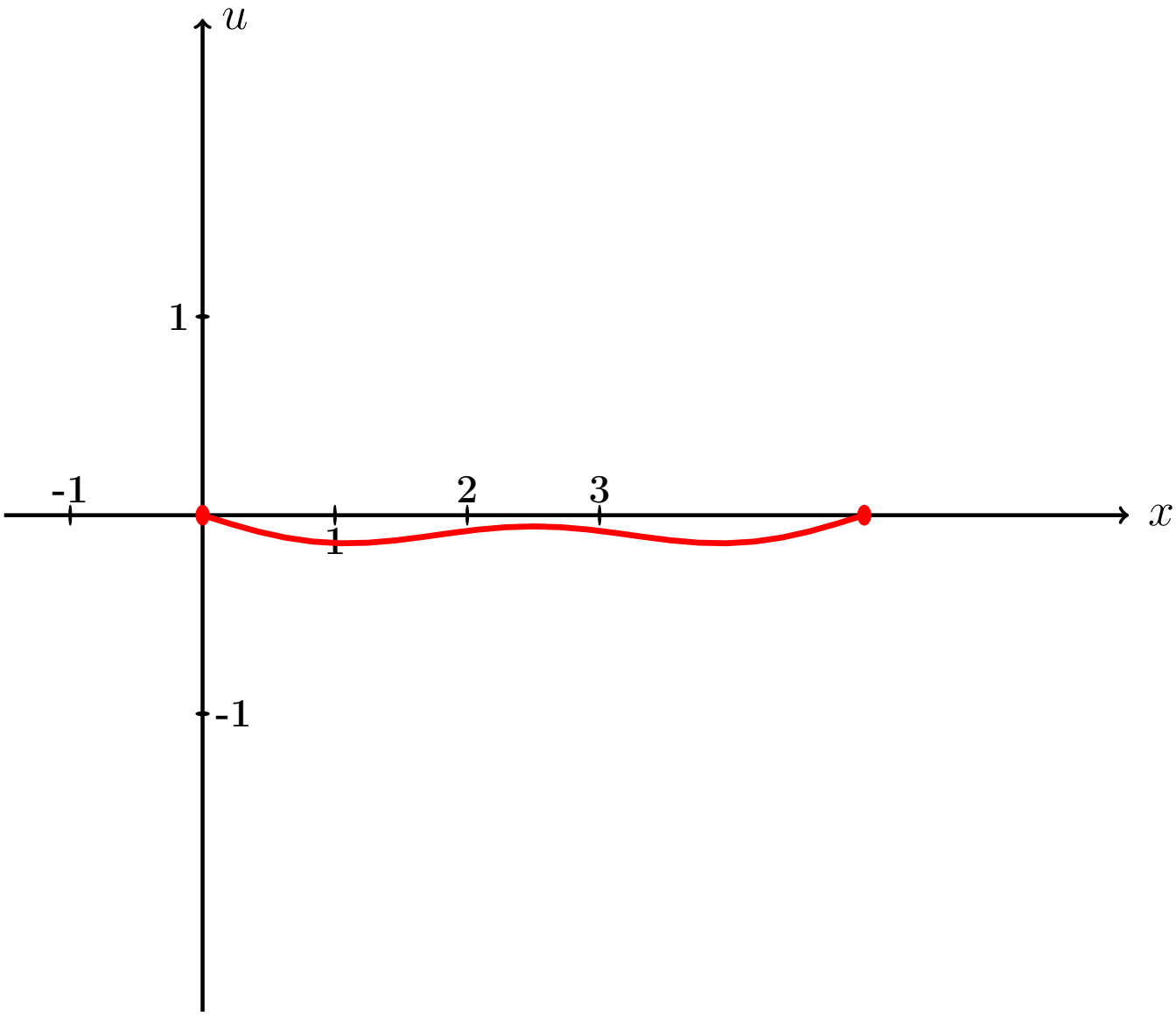


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

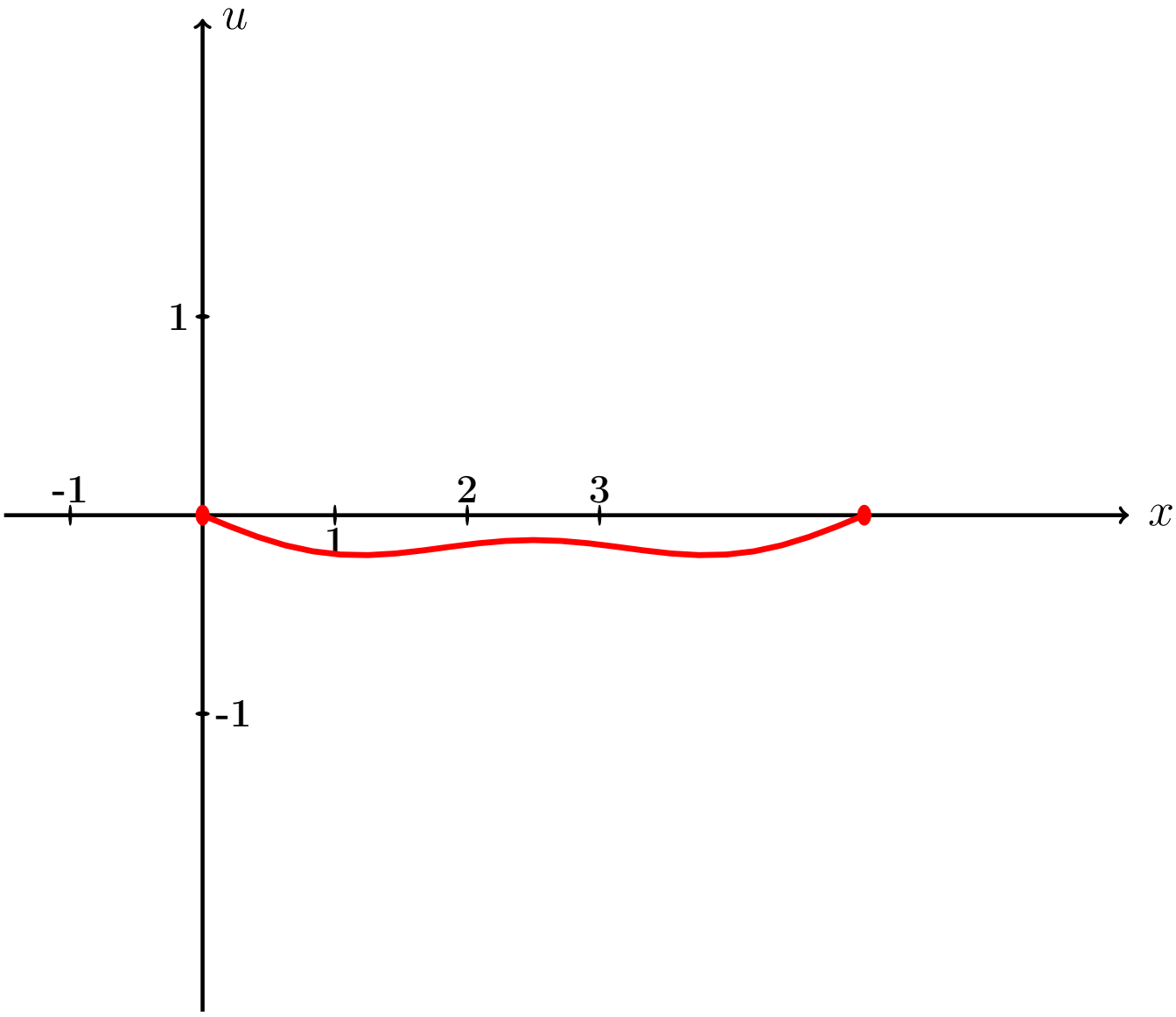


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

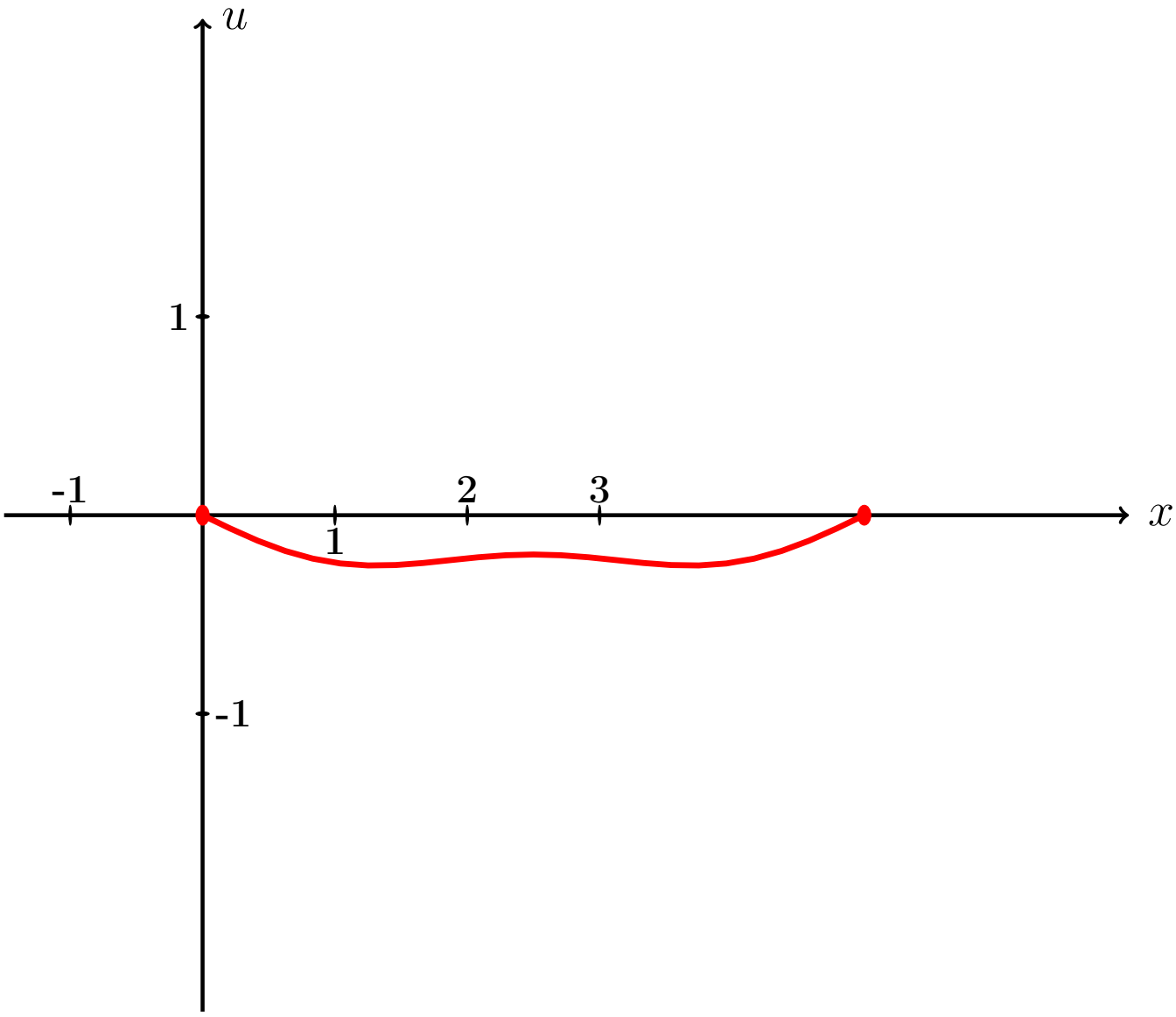


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

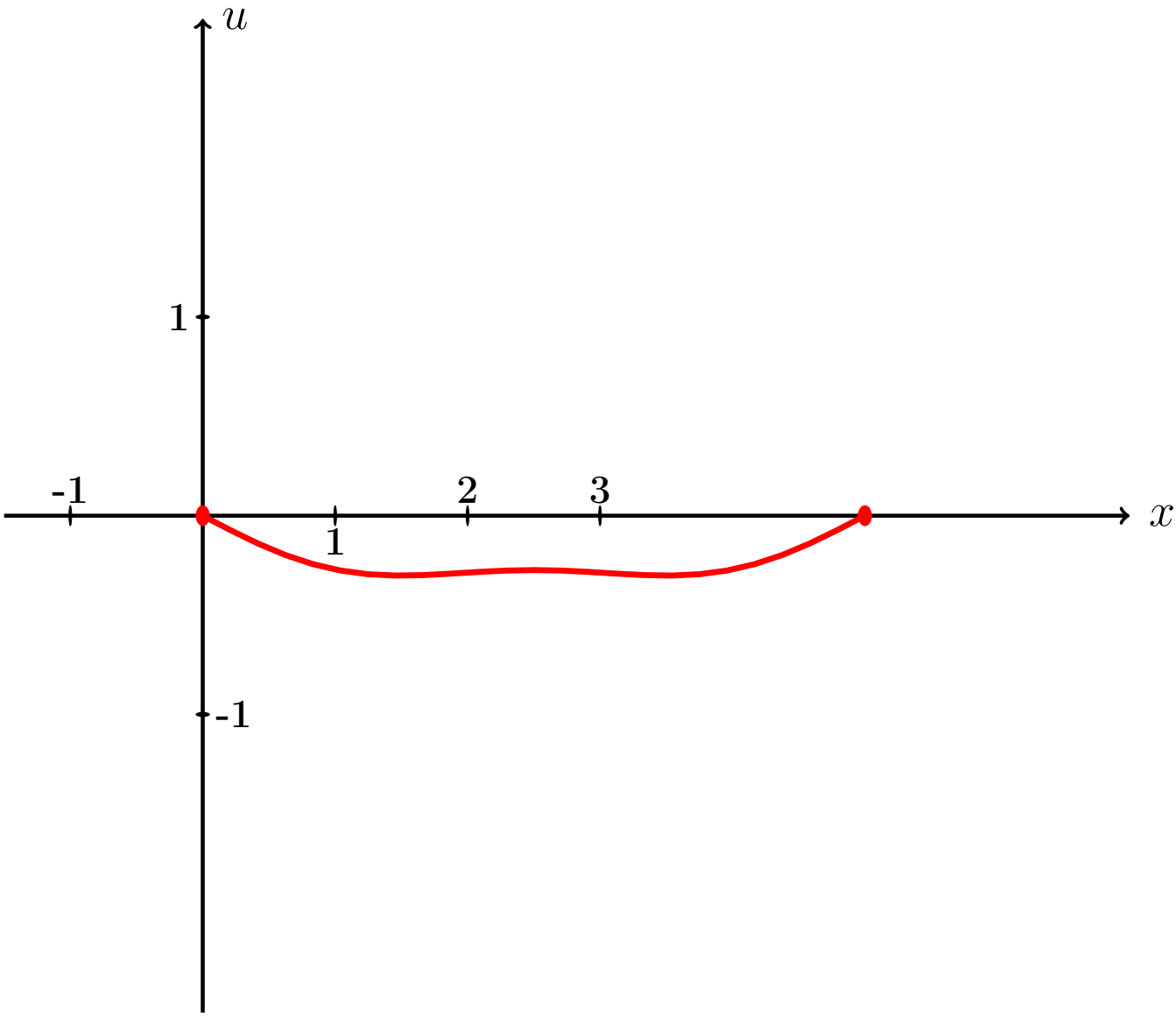


Рис.:

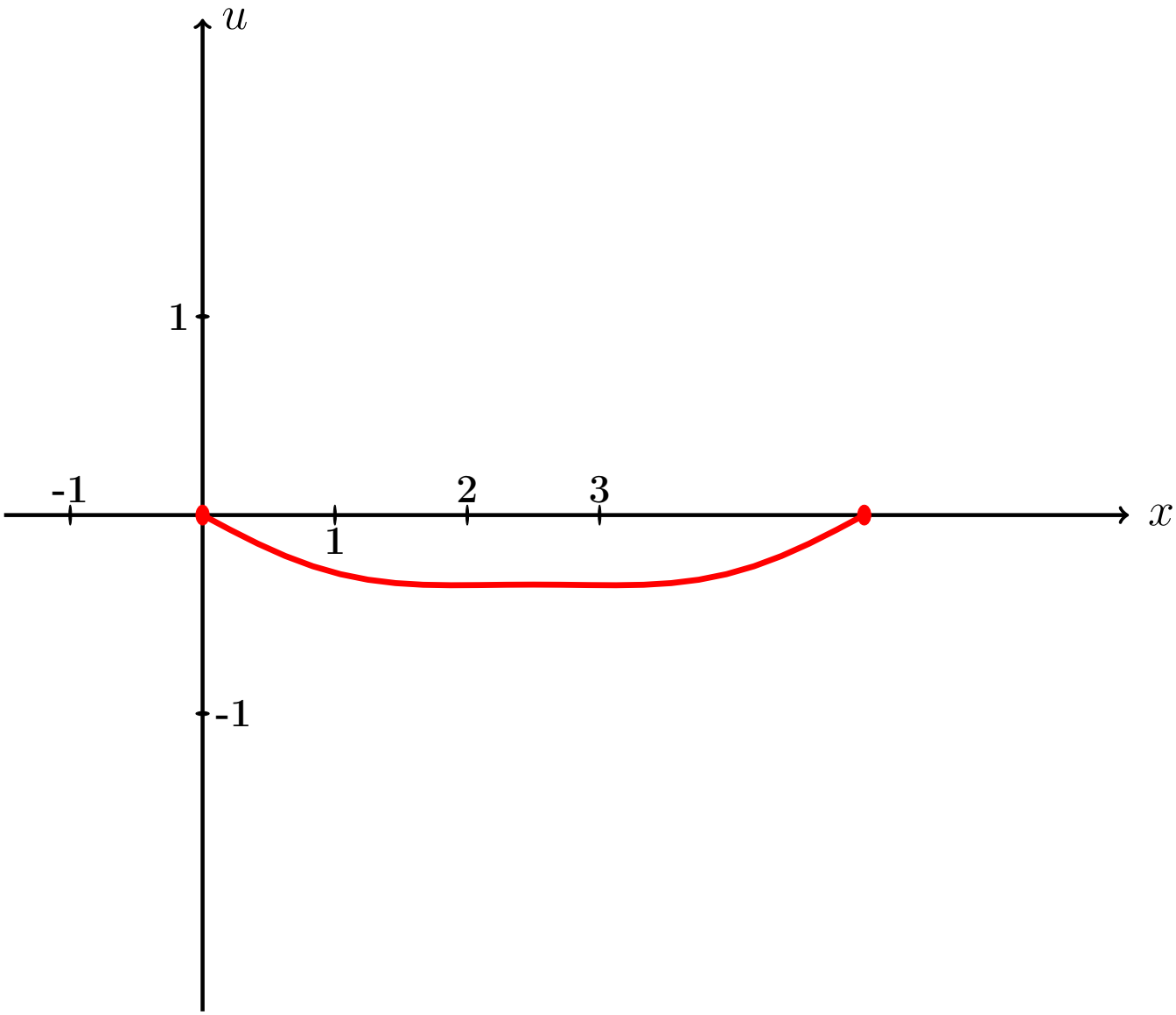


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

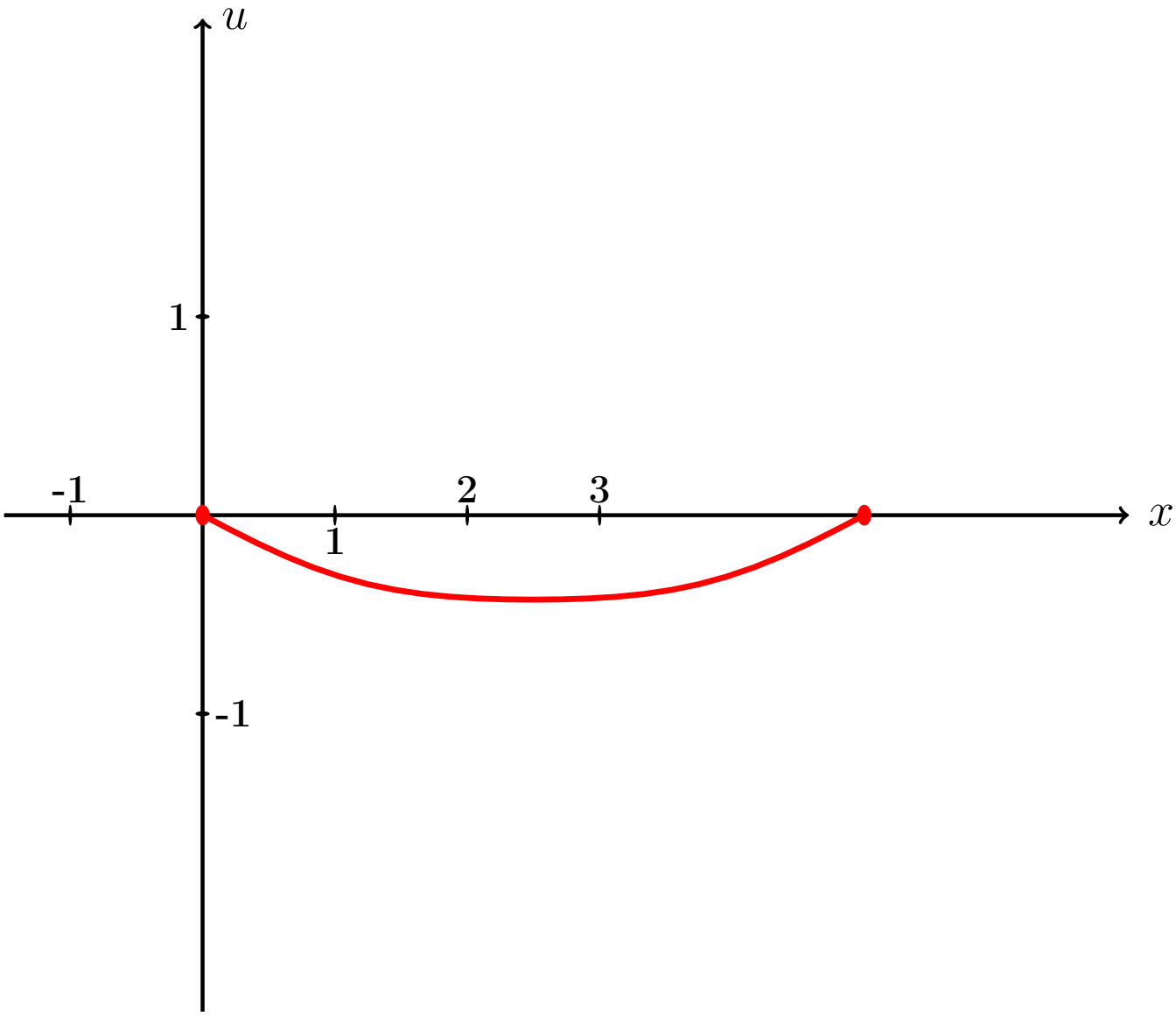


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

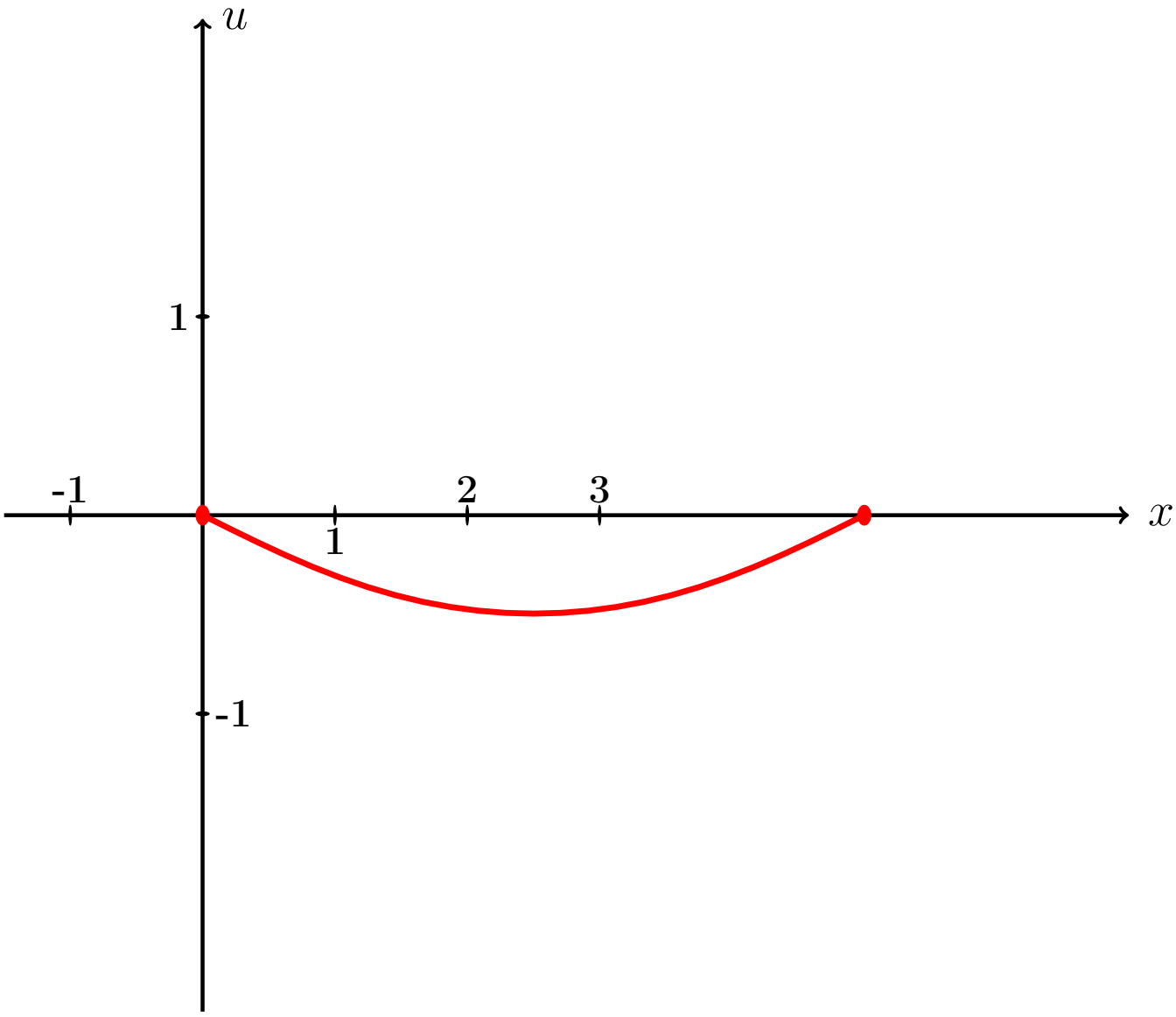


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

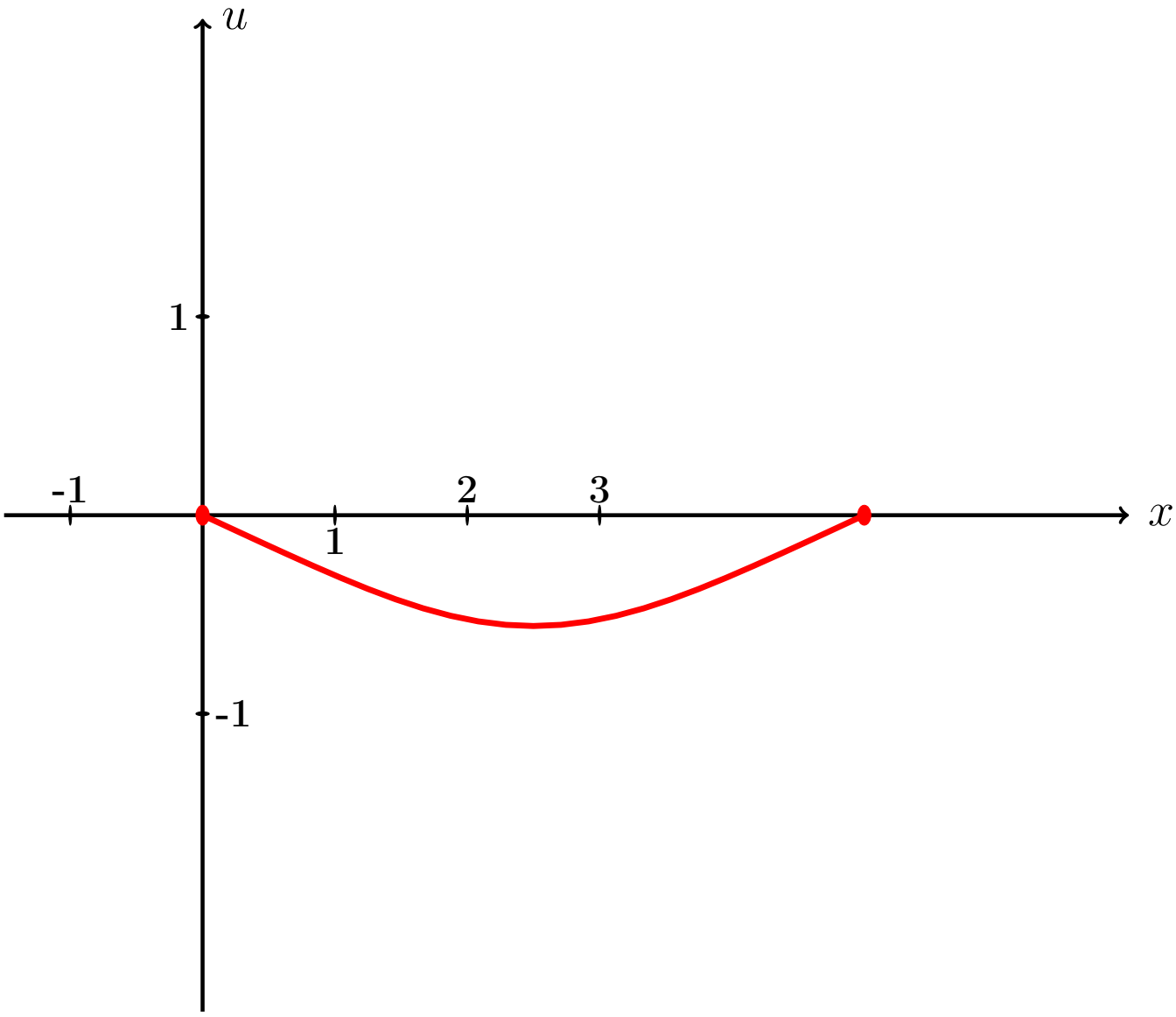


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

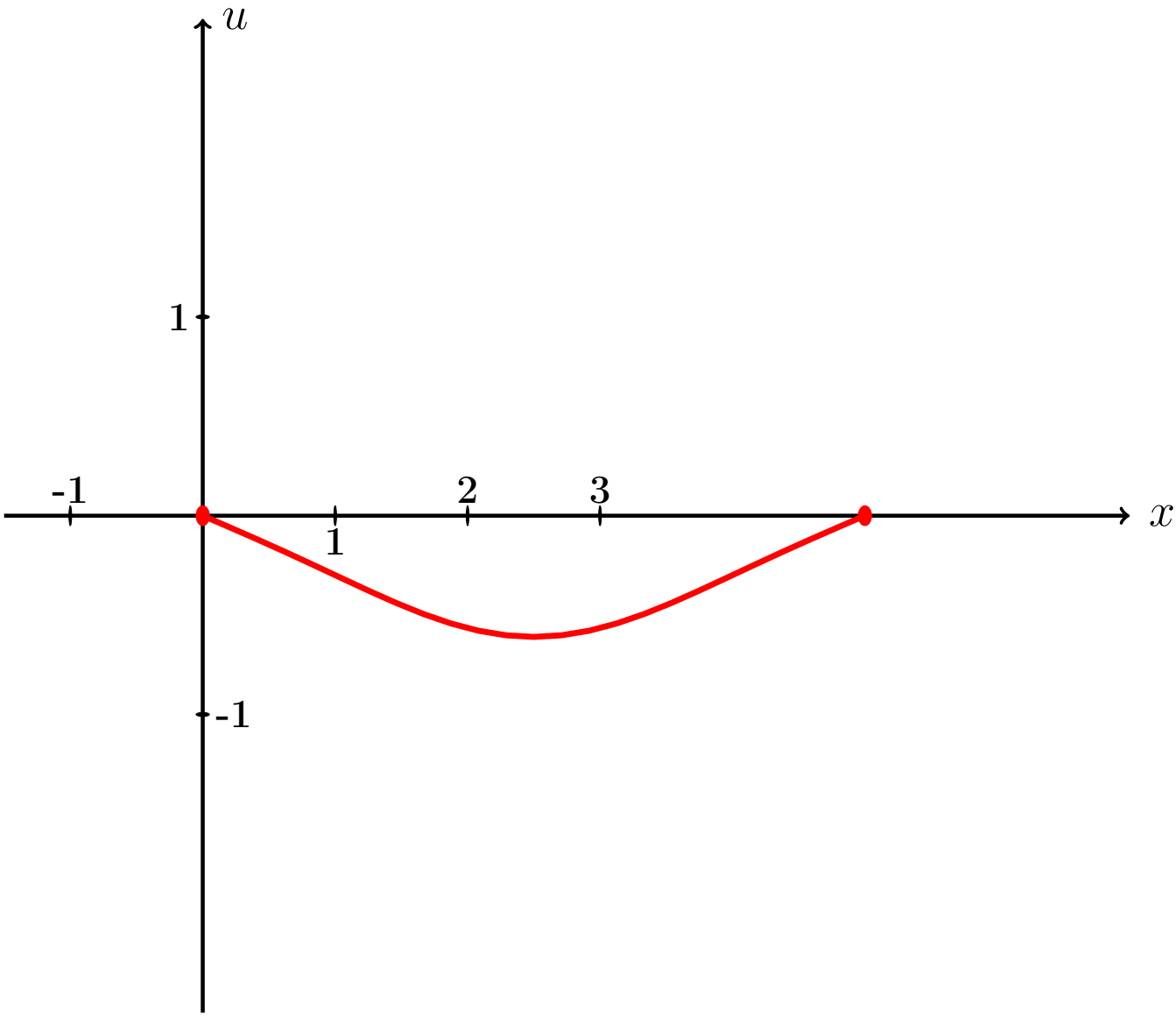


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

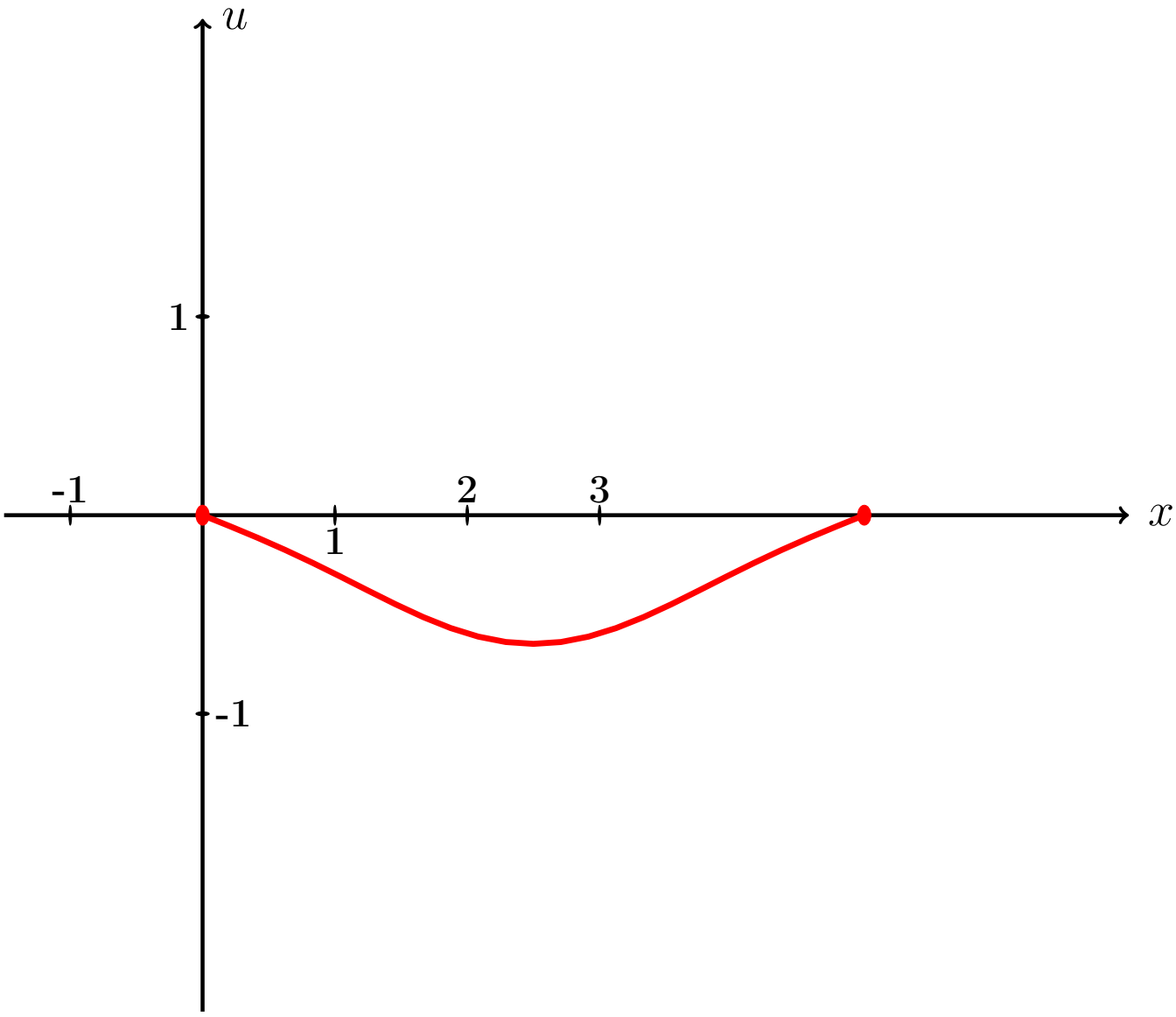


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

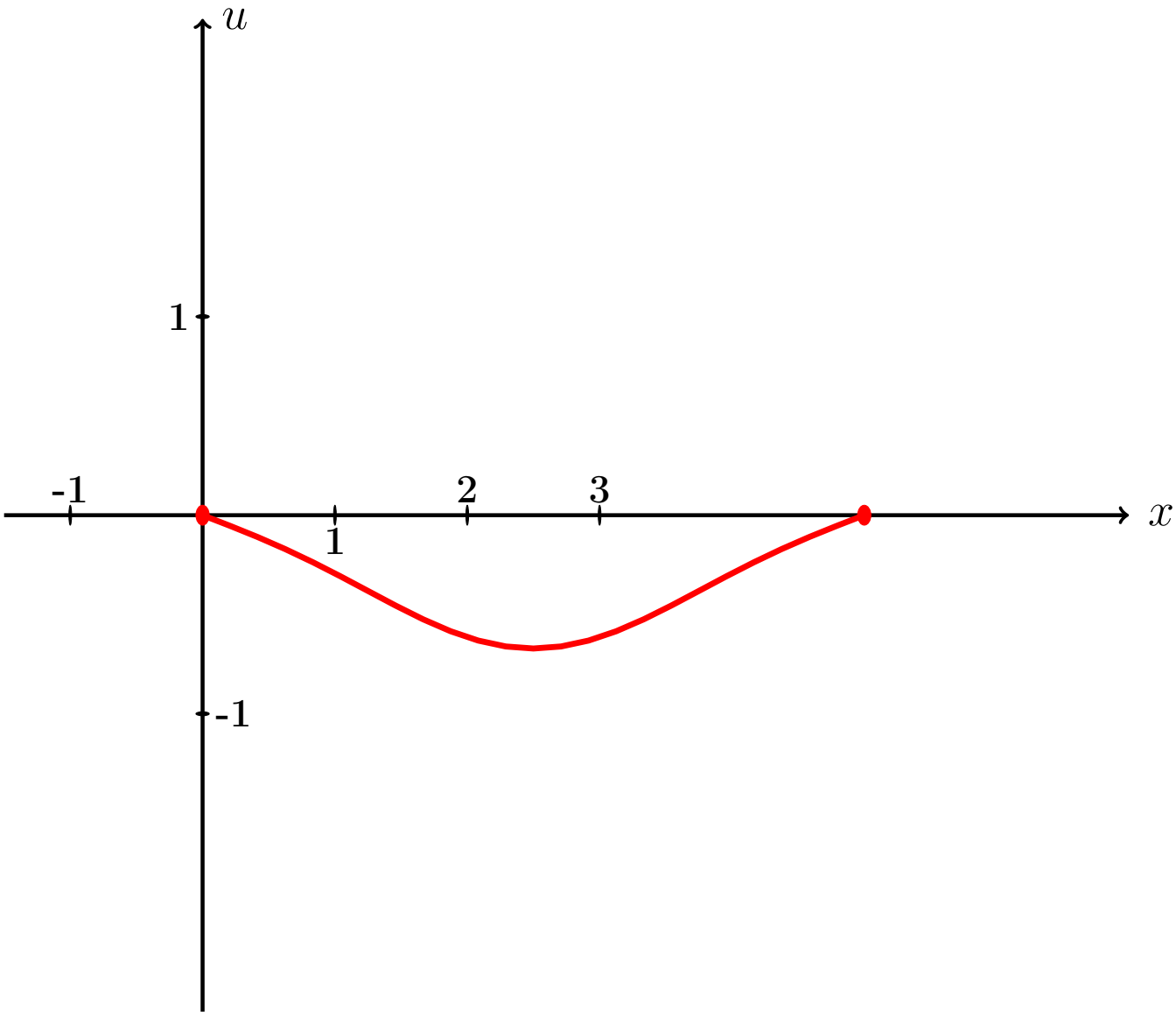


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

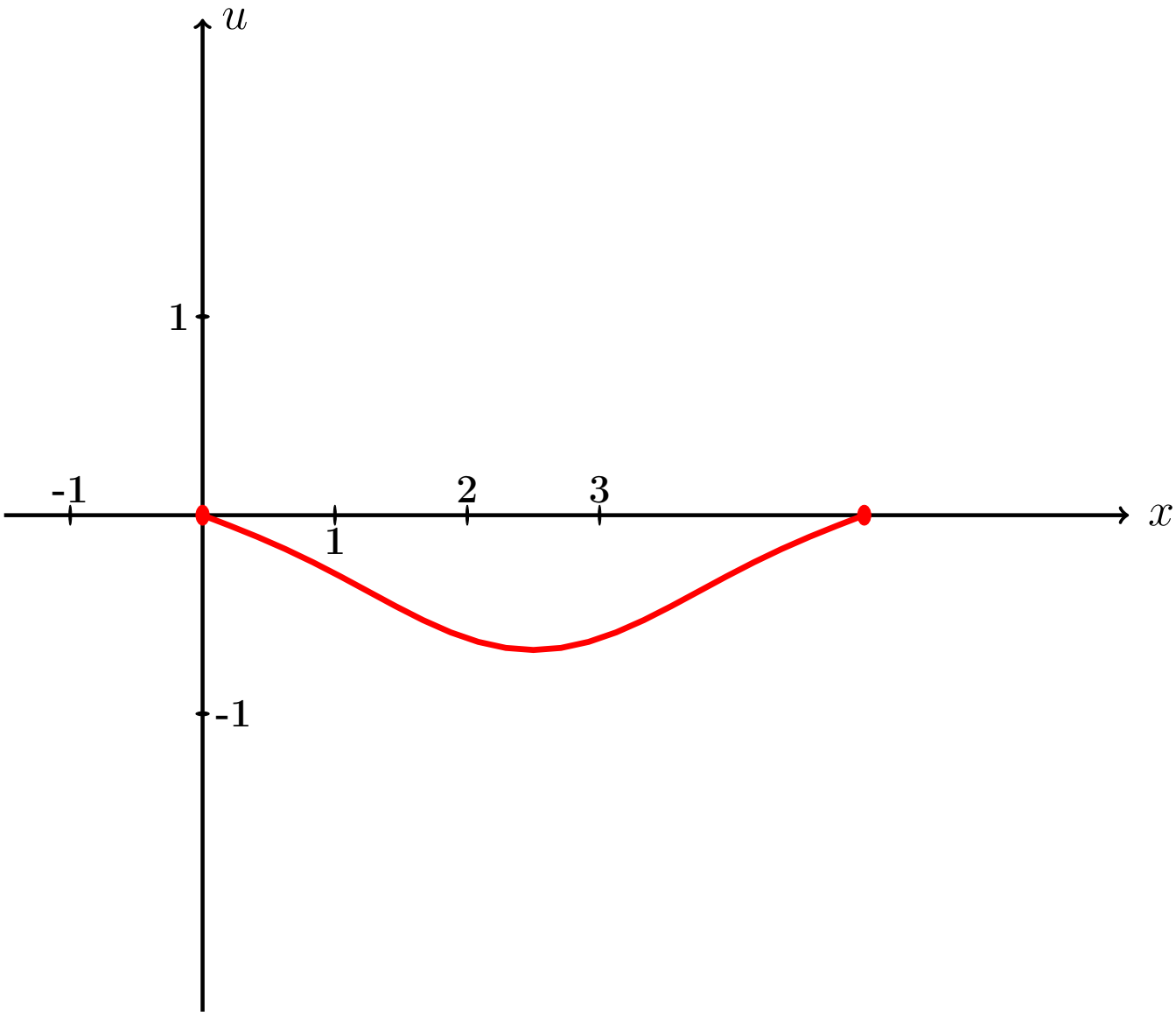


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

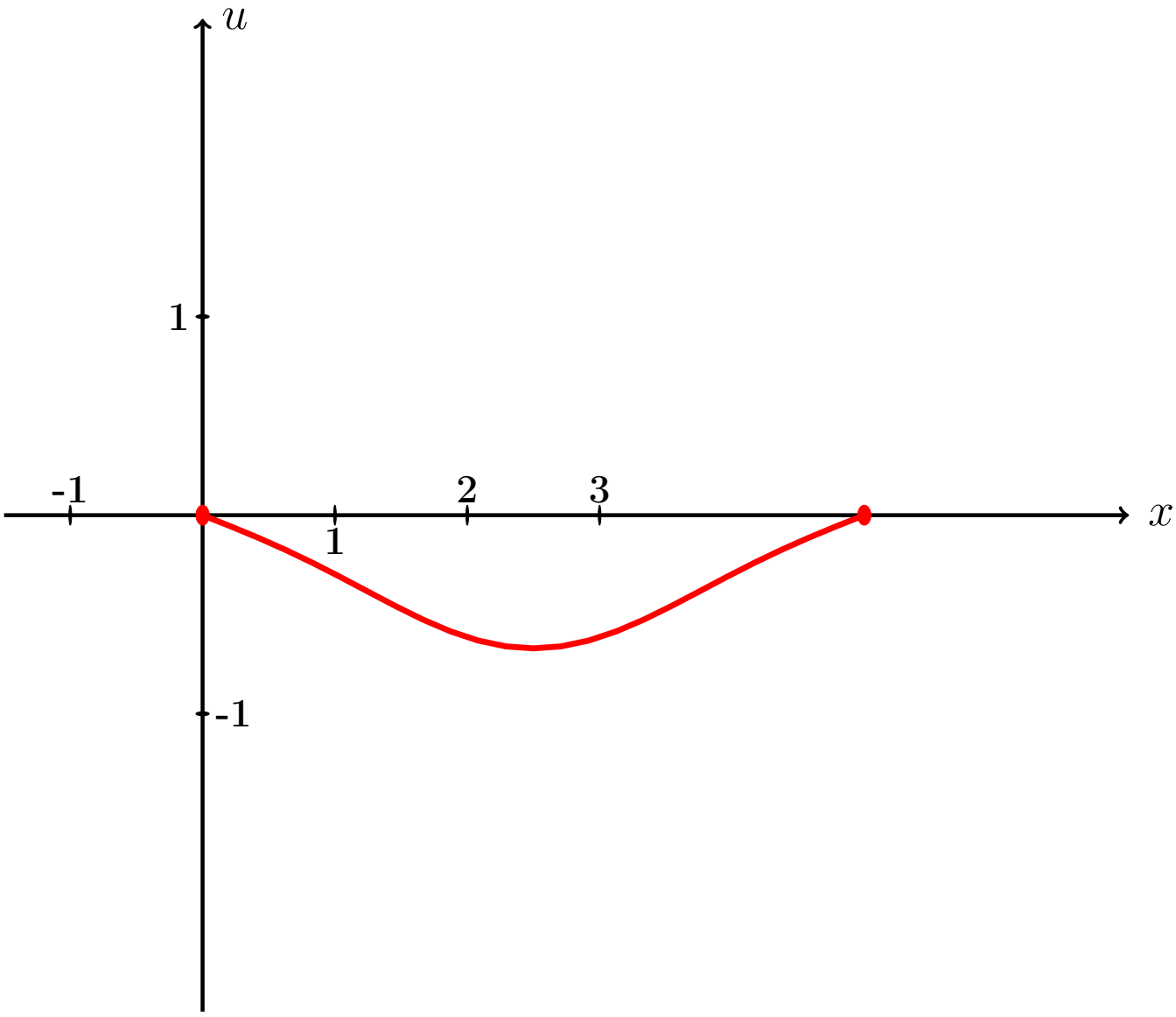


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

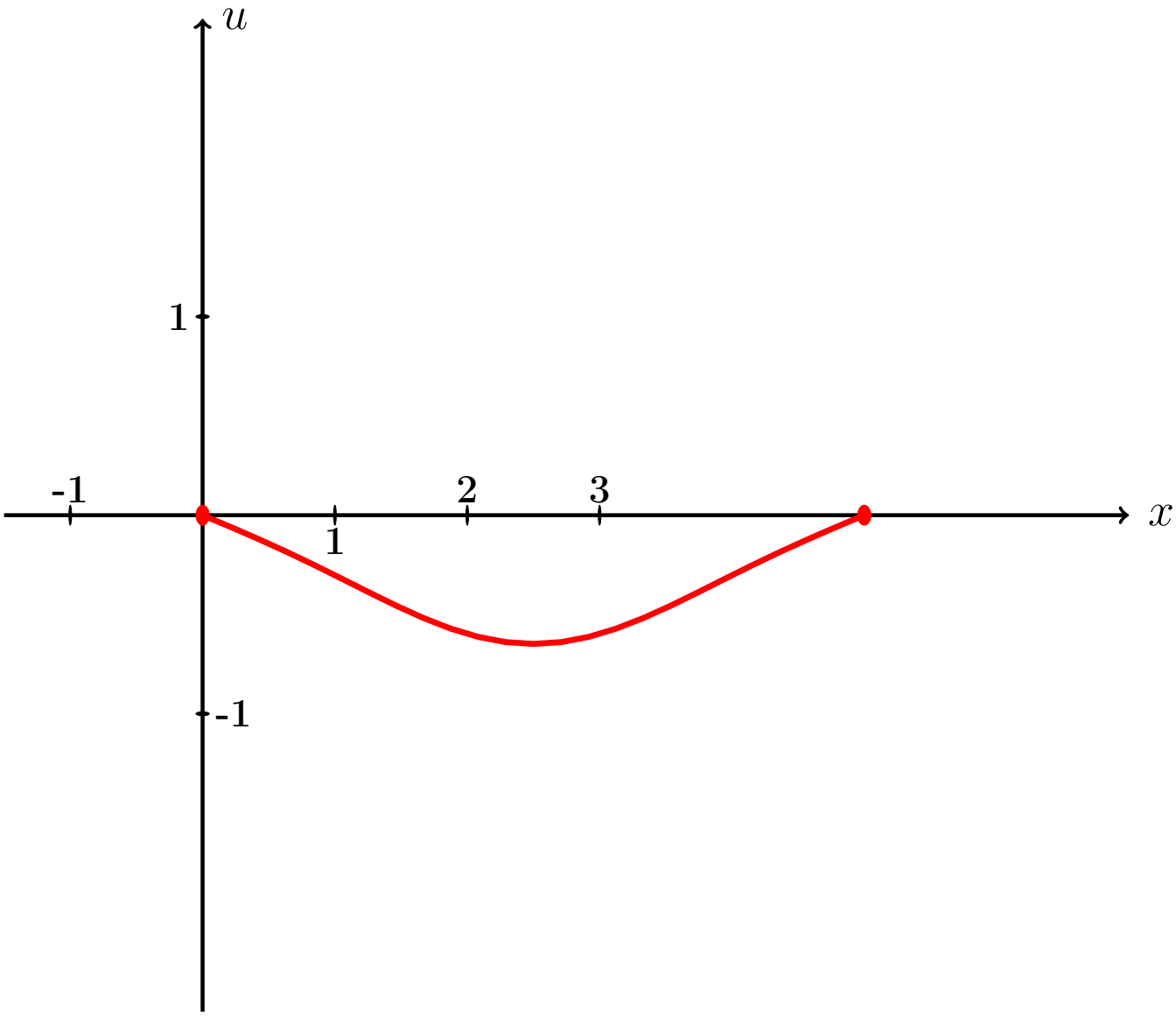


Рис.:

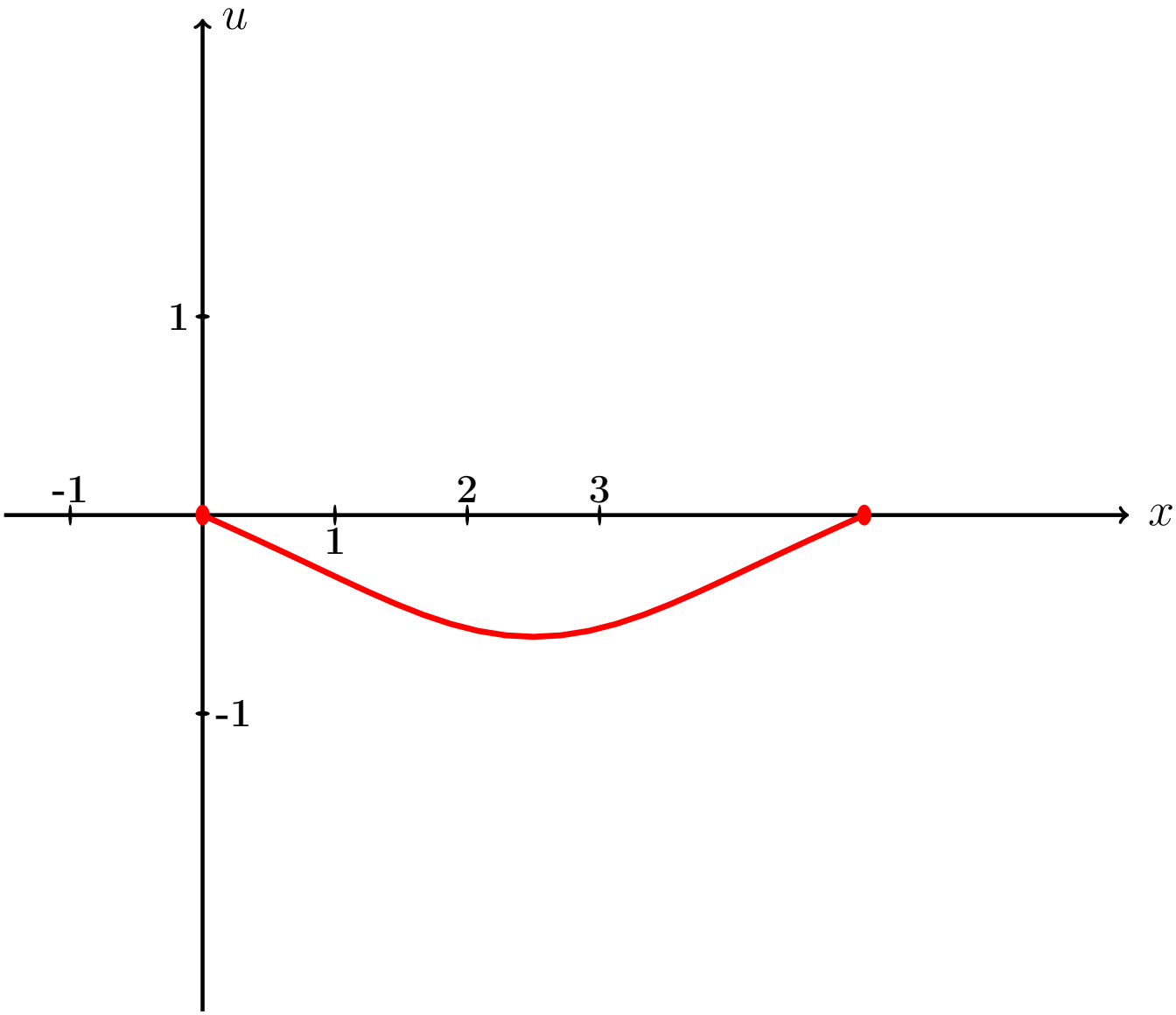


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

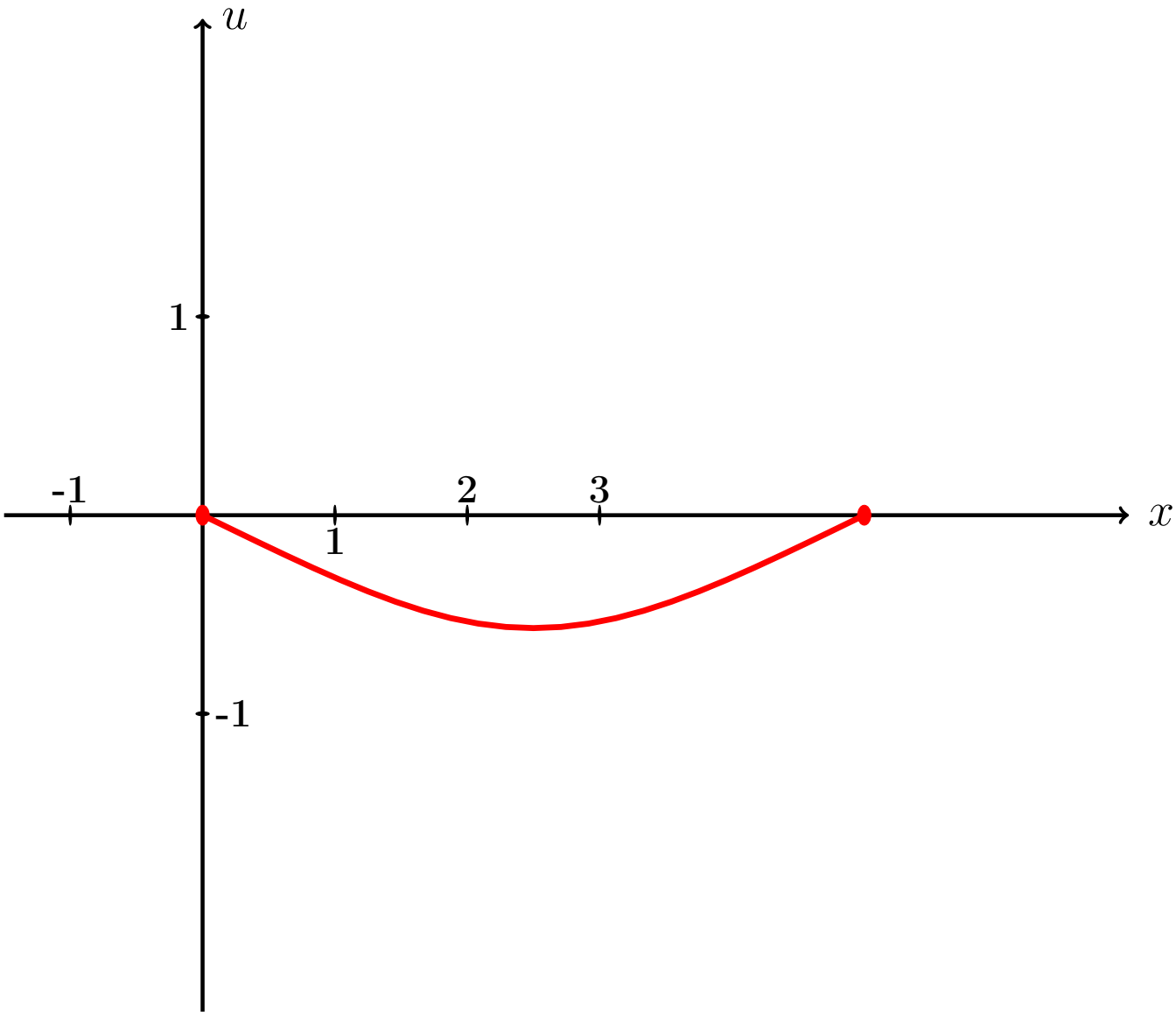


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

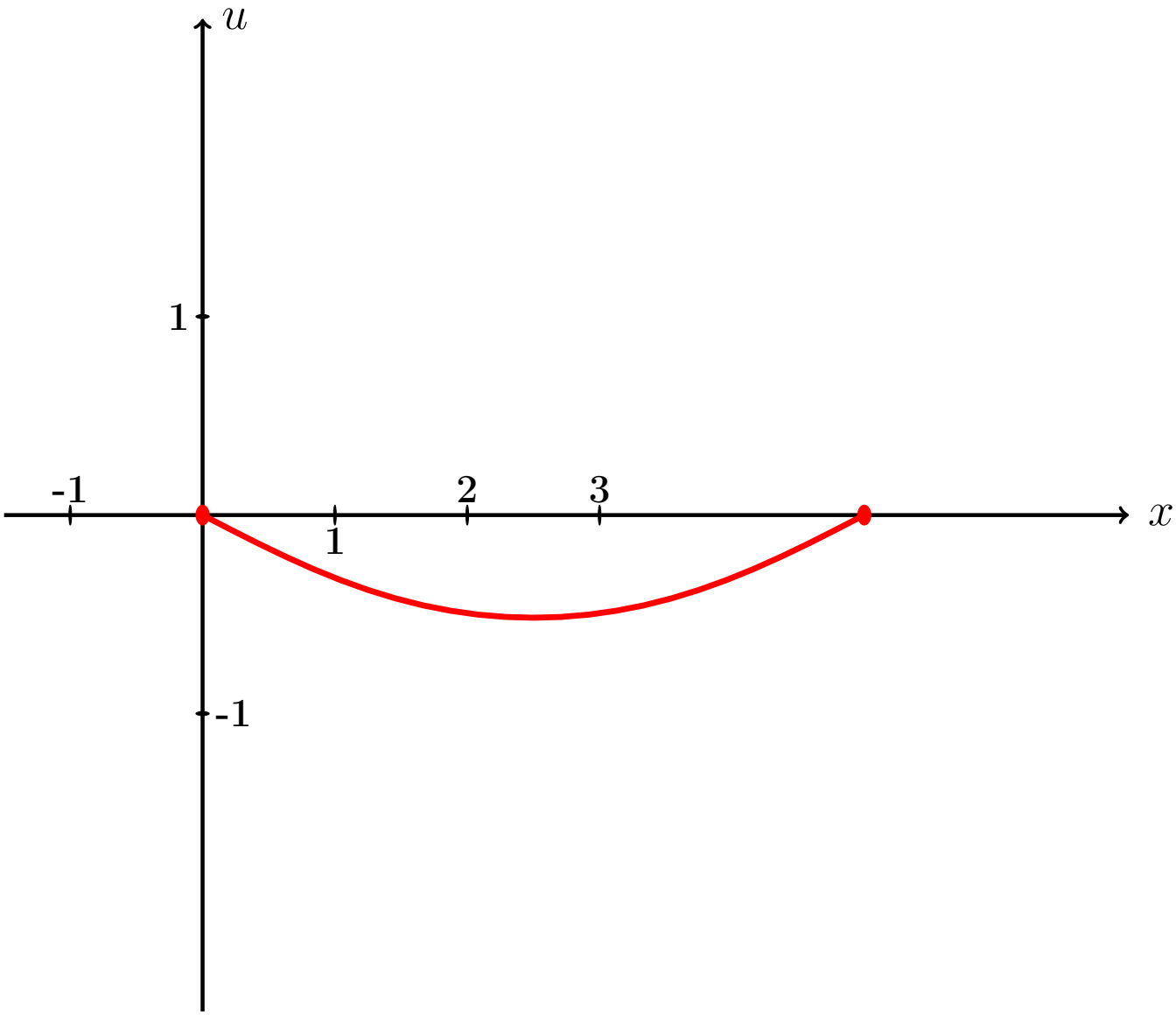


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

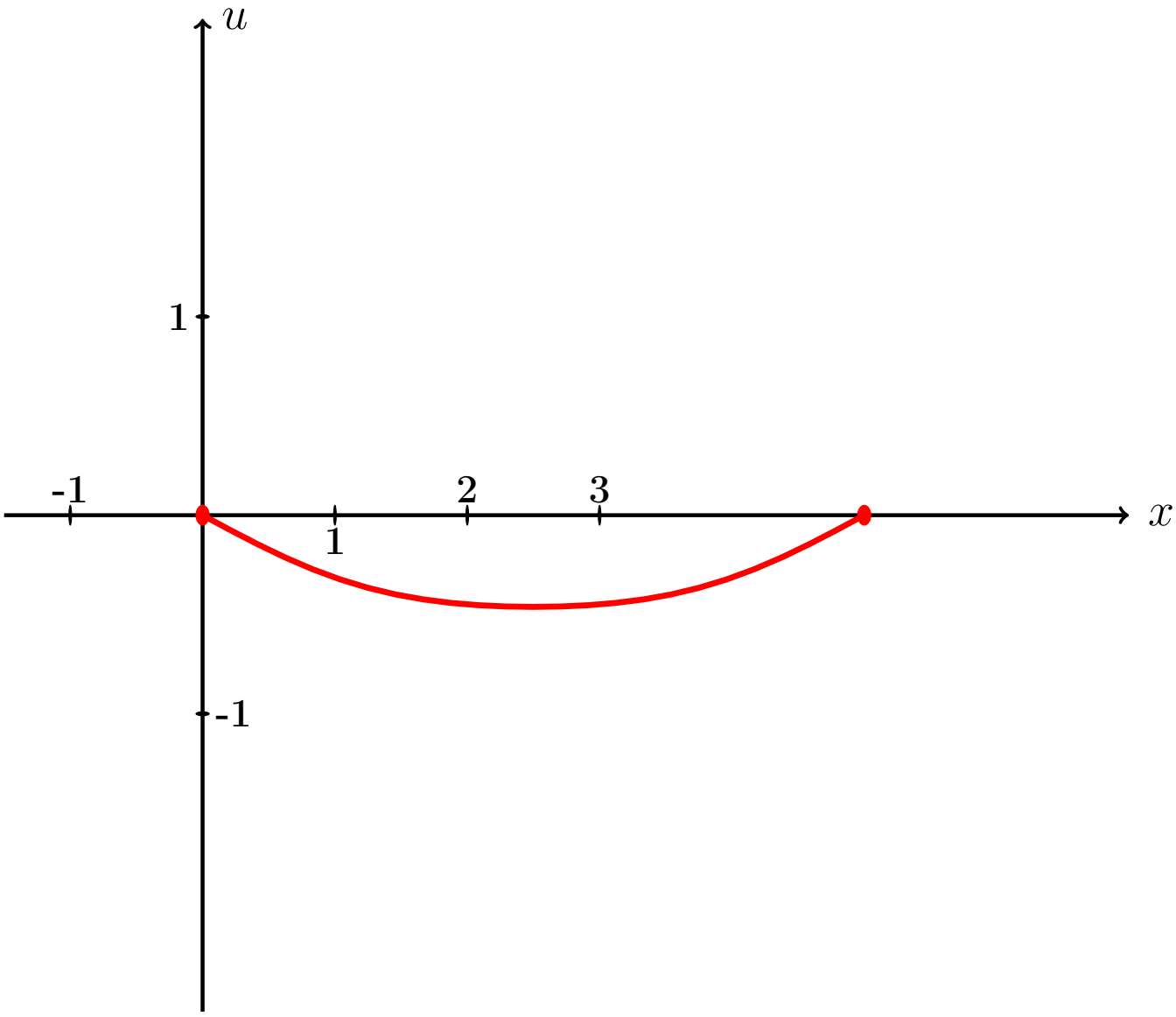


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

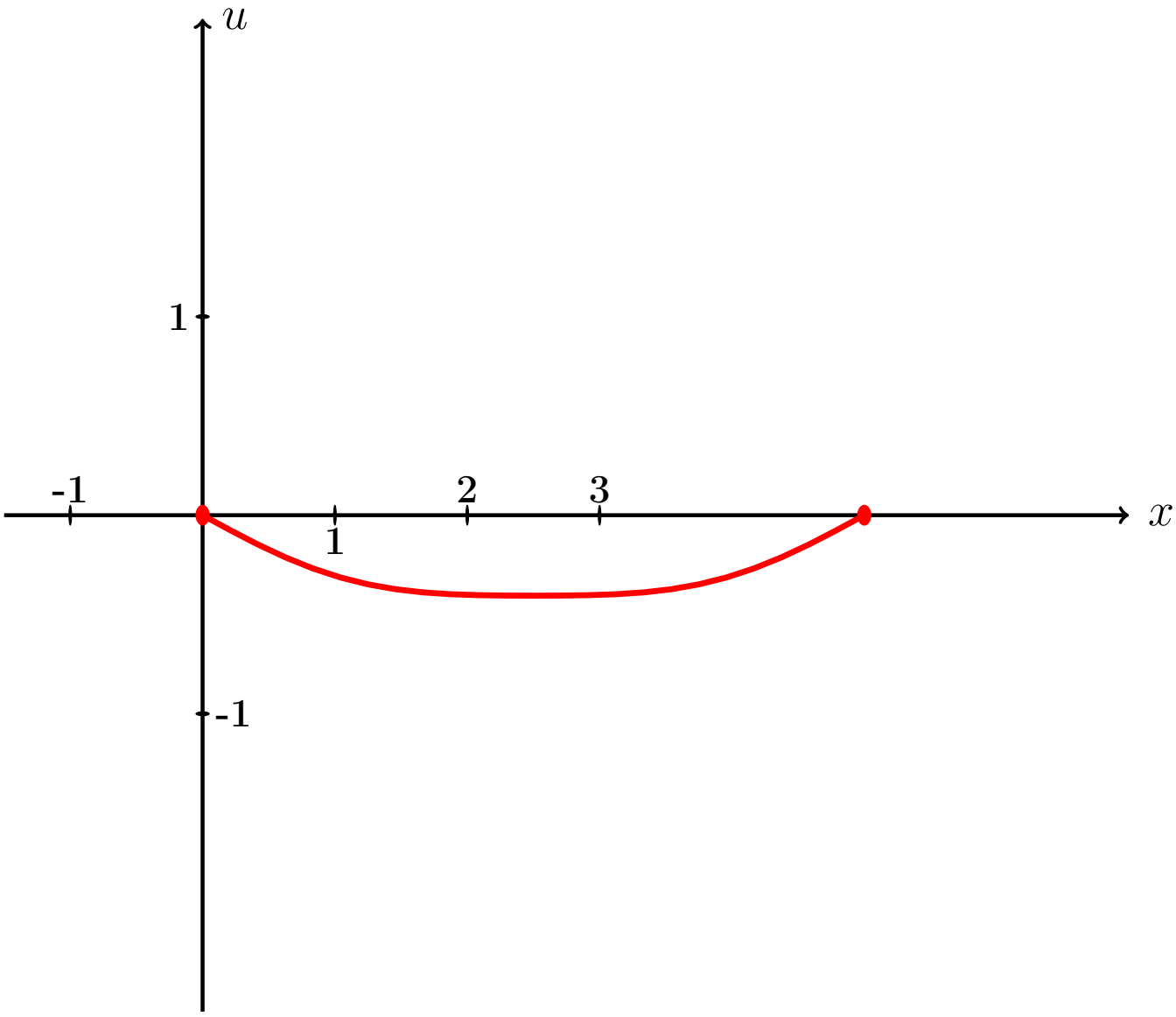


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

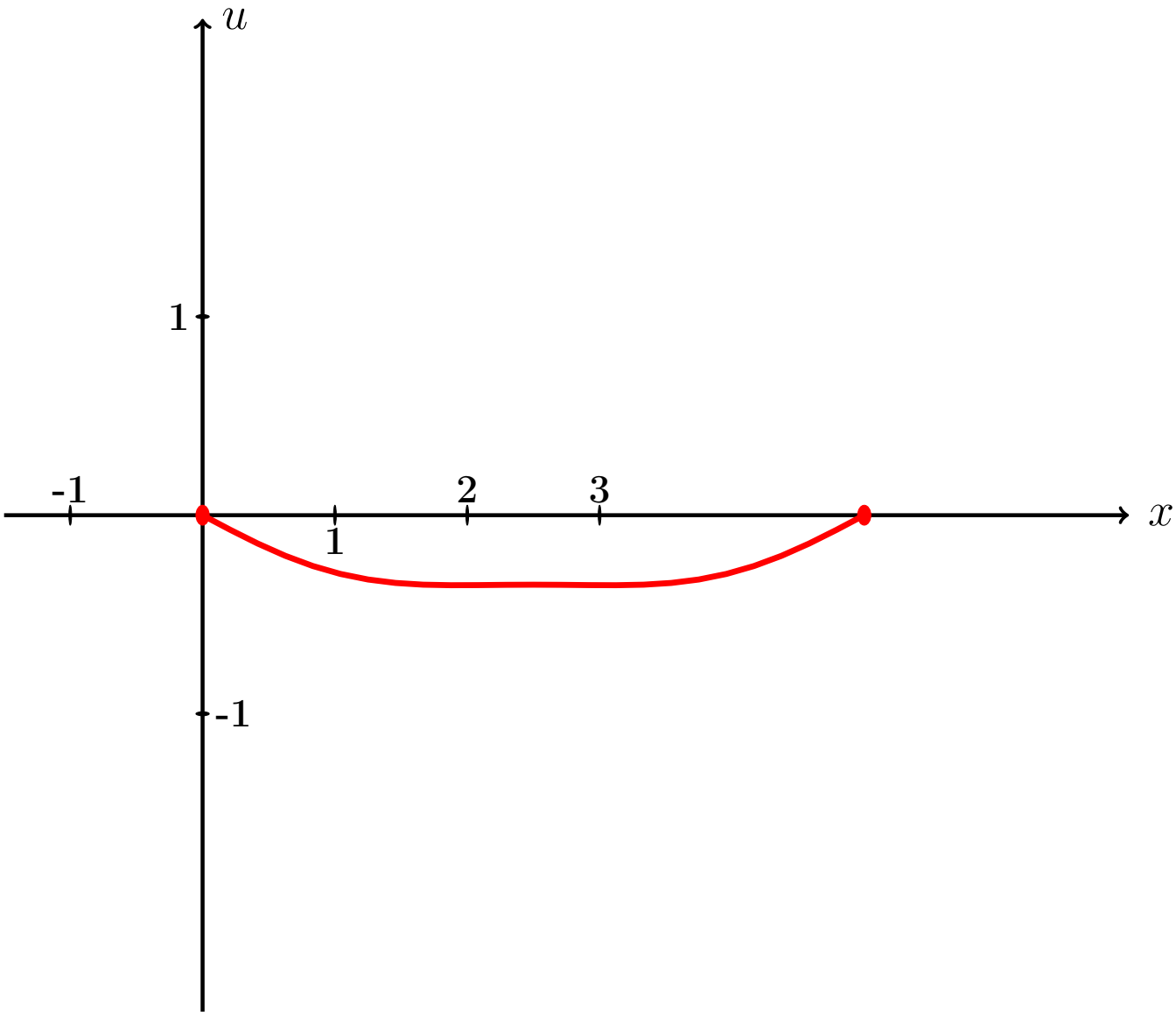


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

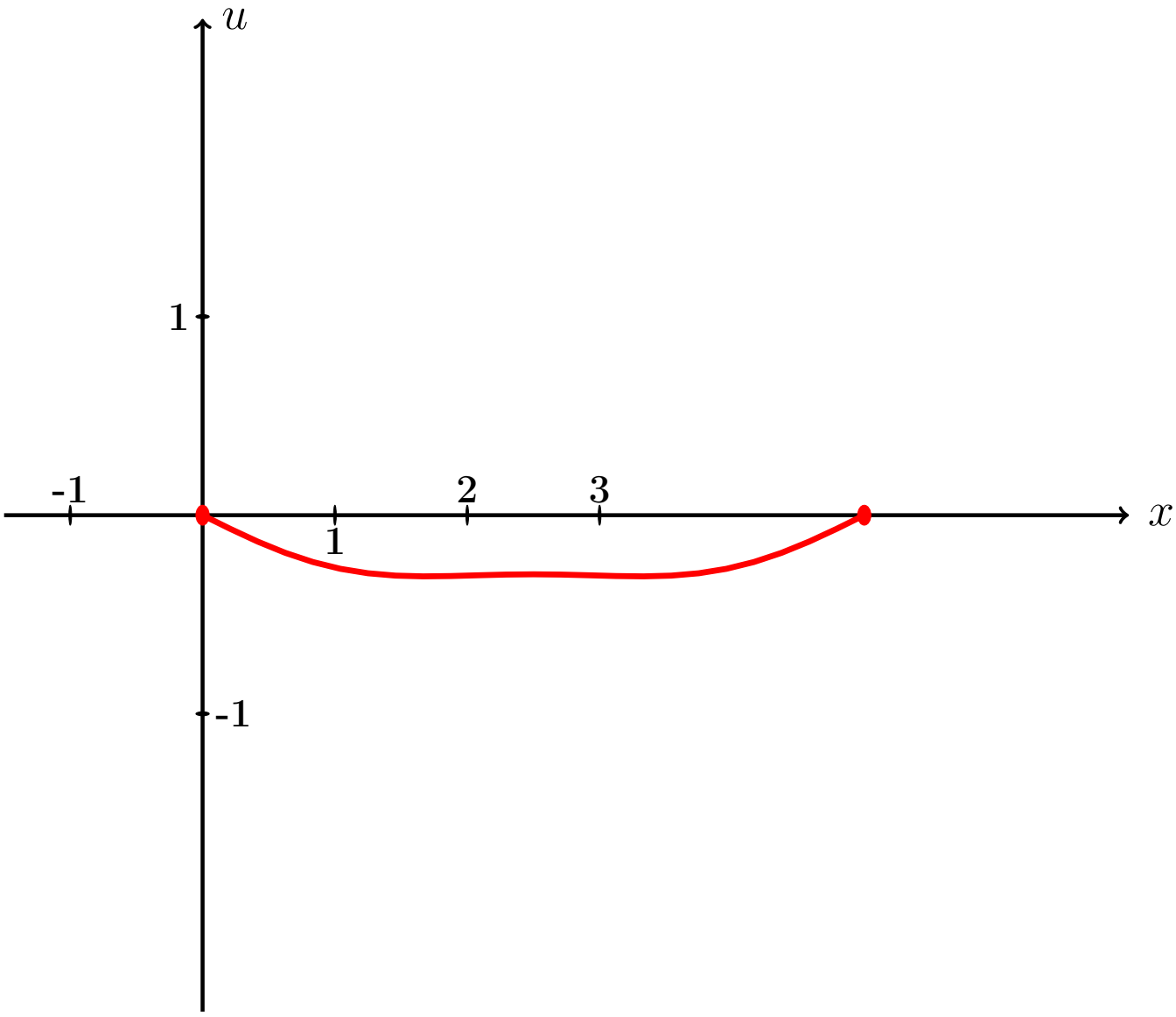


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

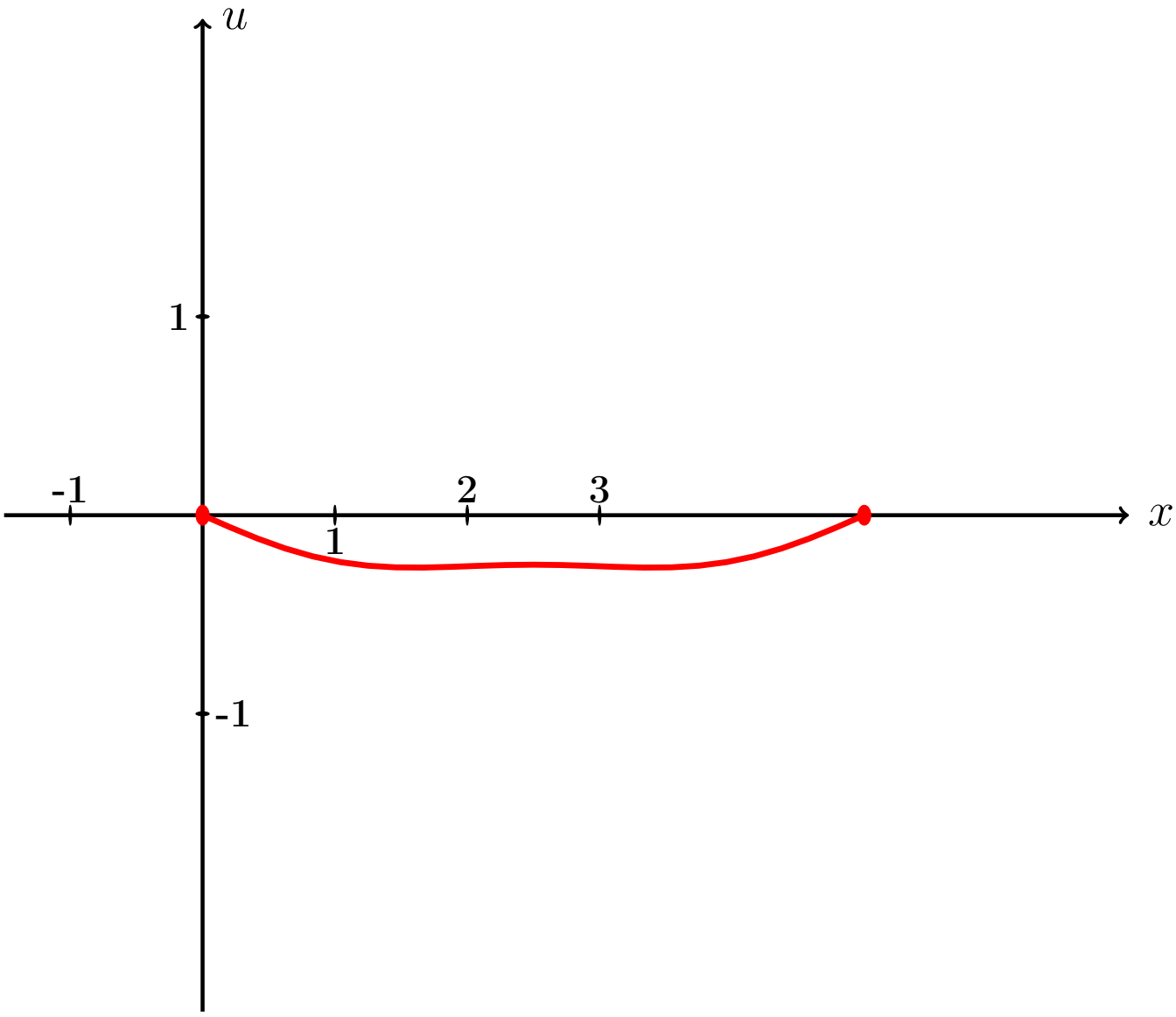


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

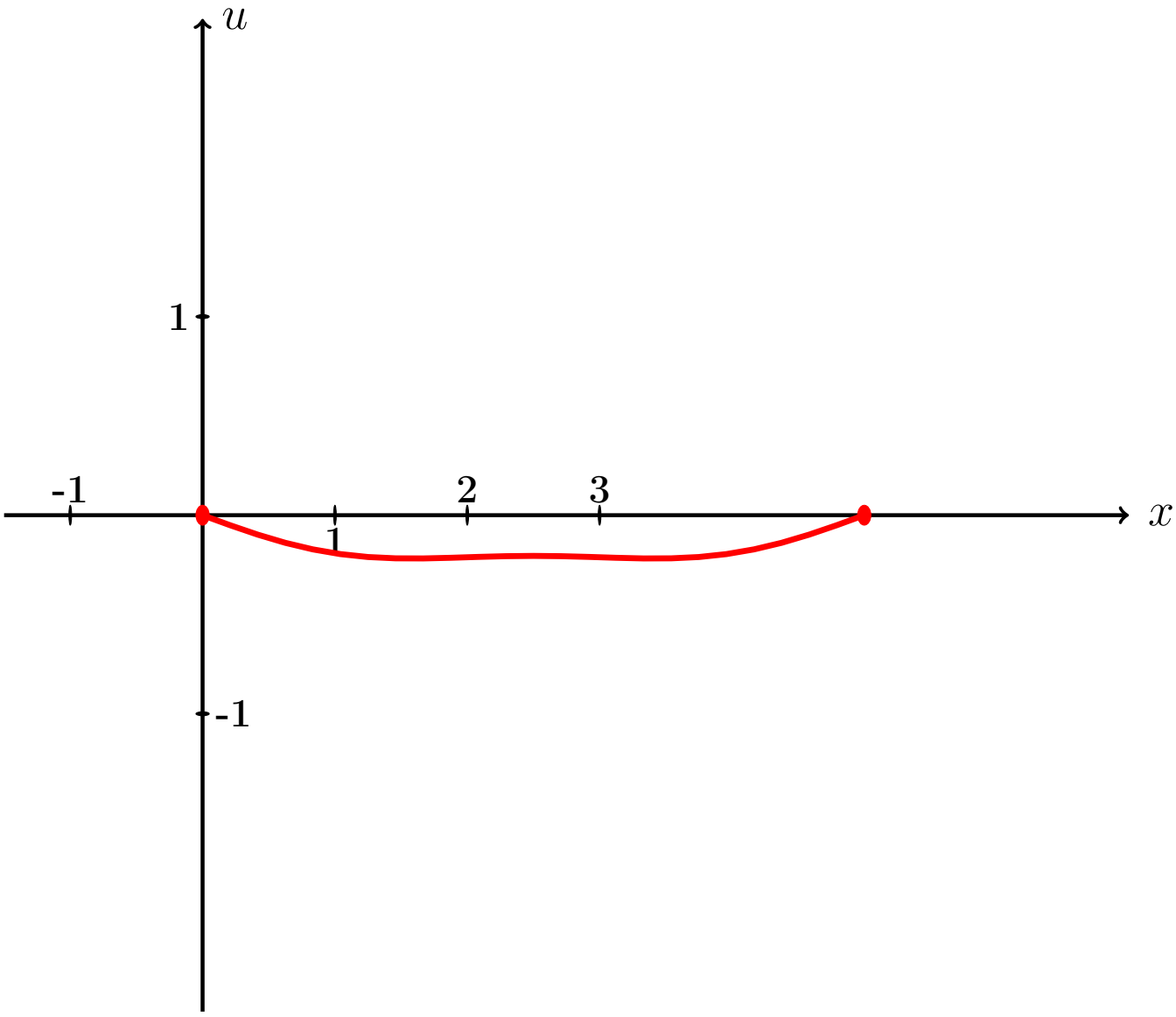


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

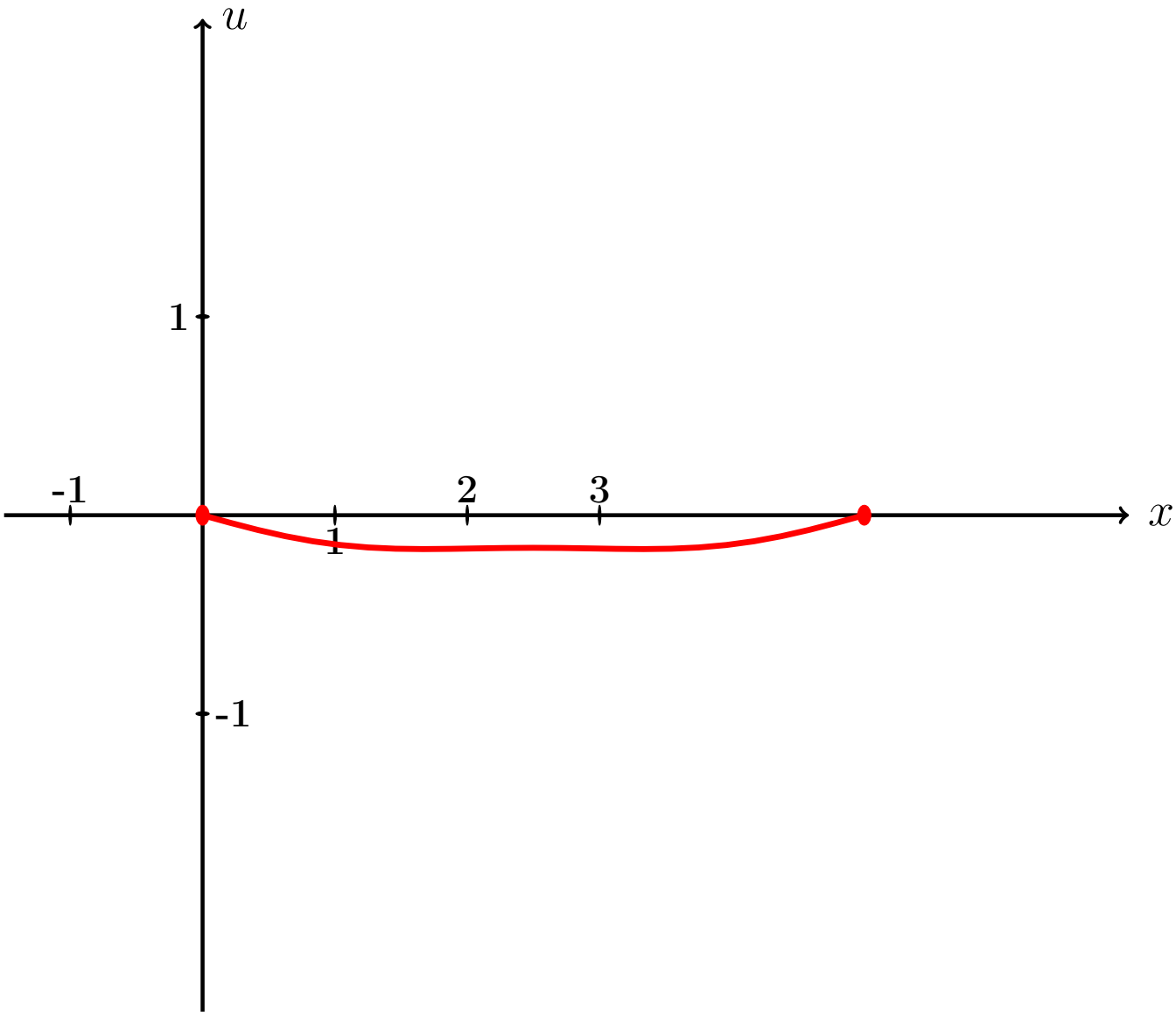


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

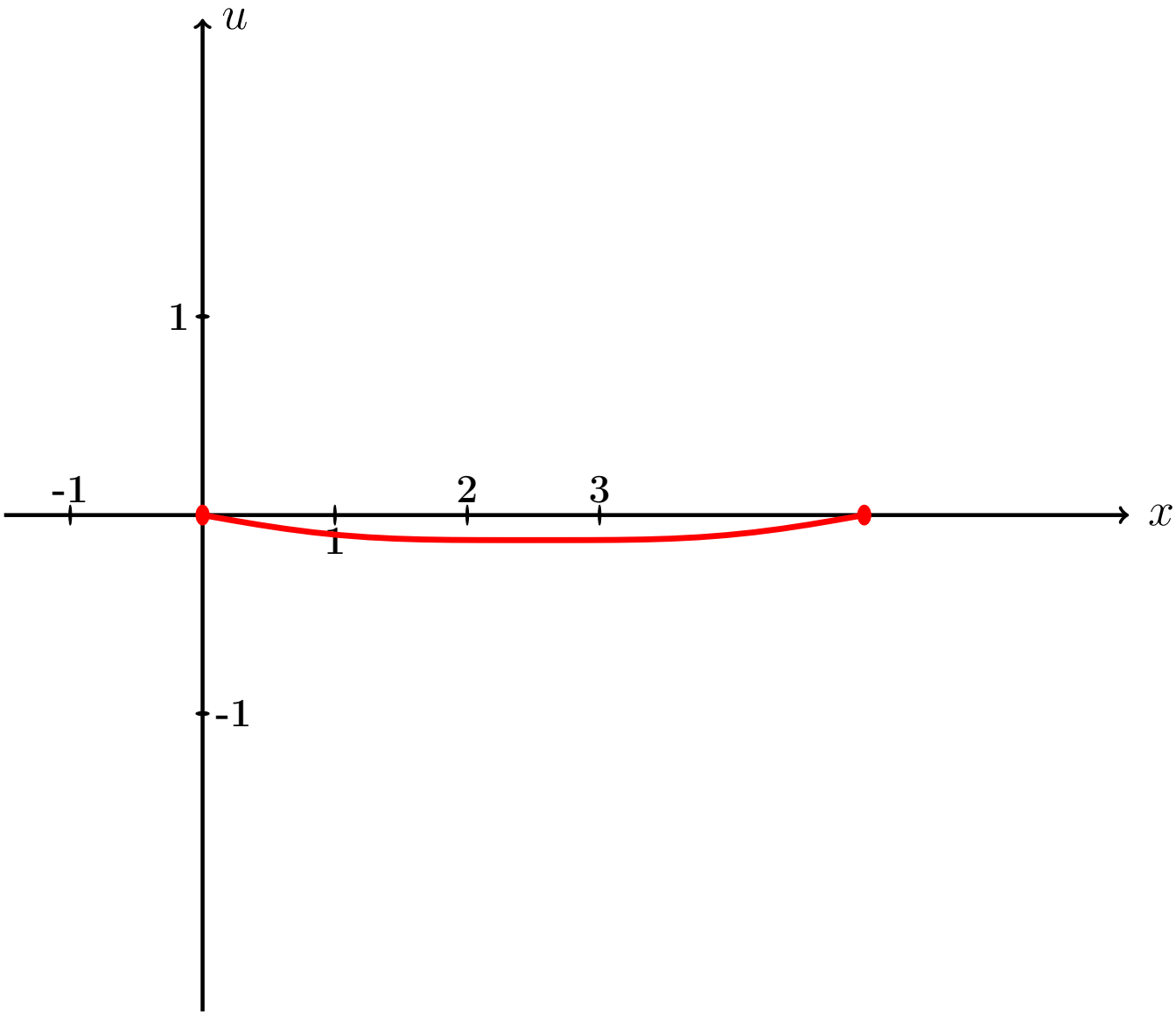


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

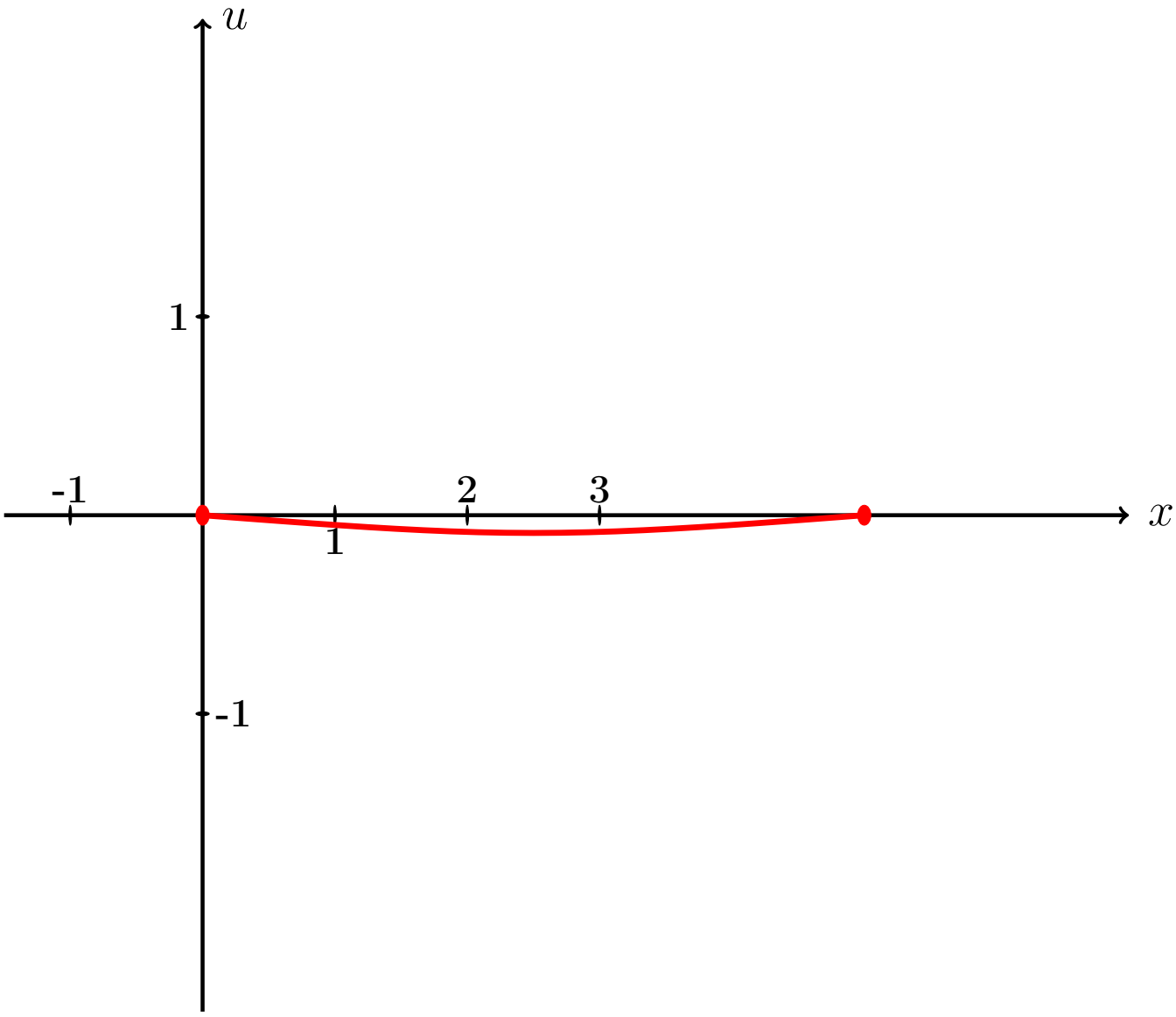


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

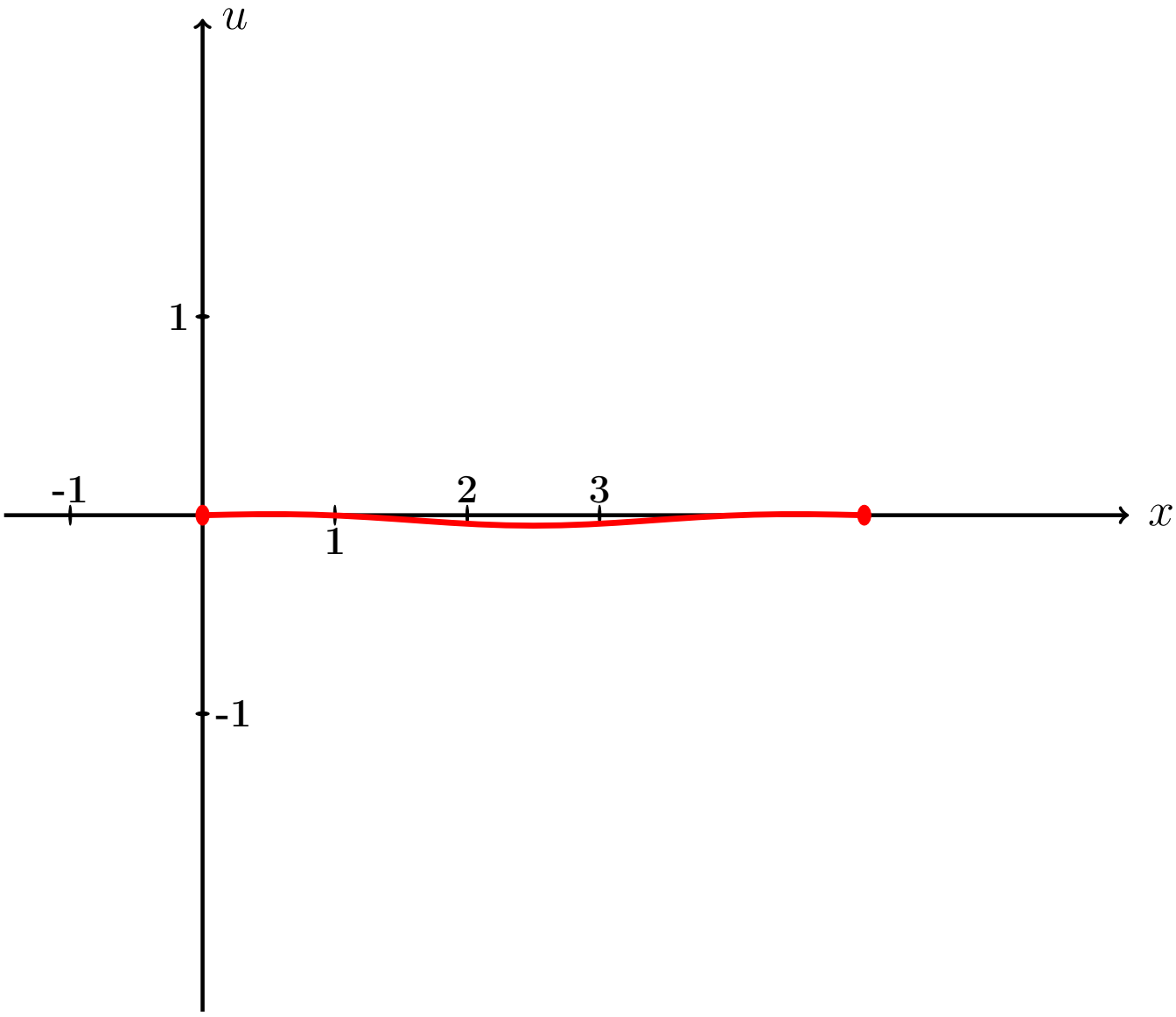


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

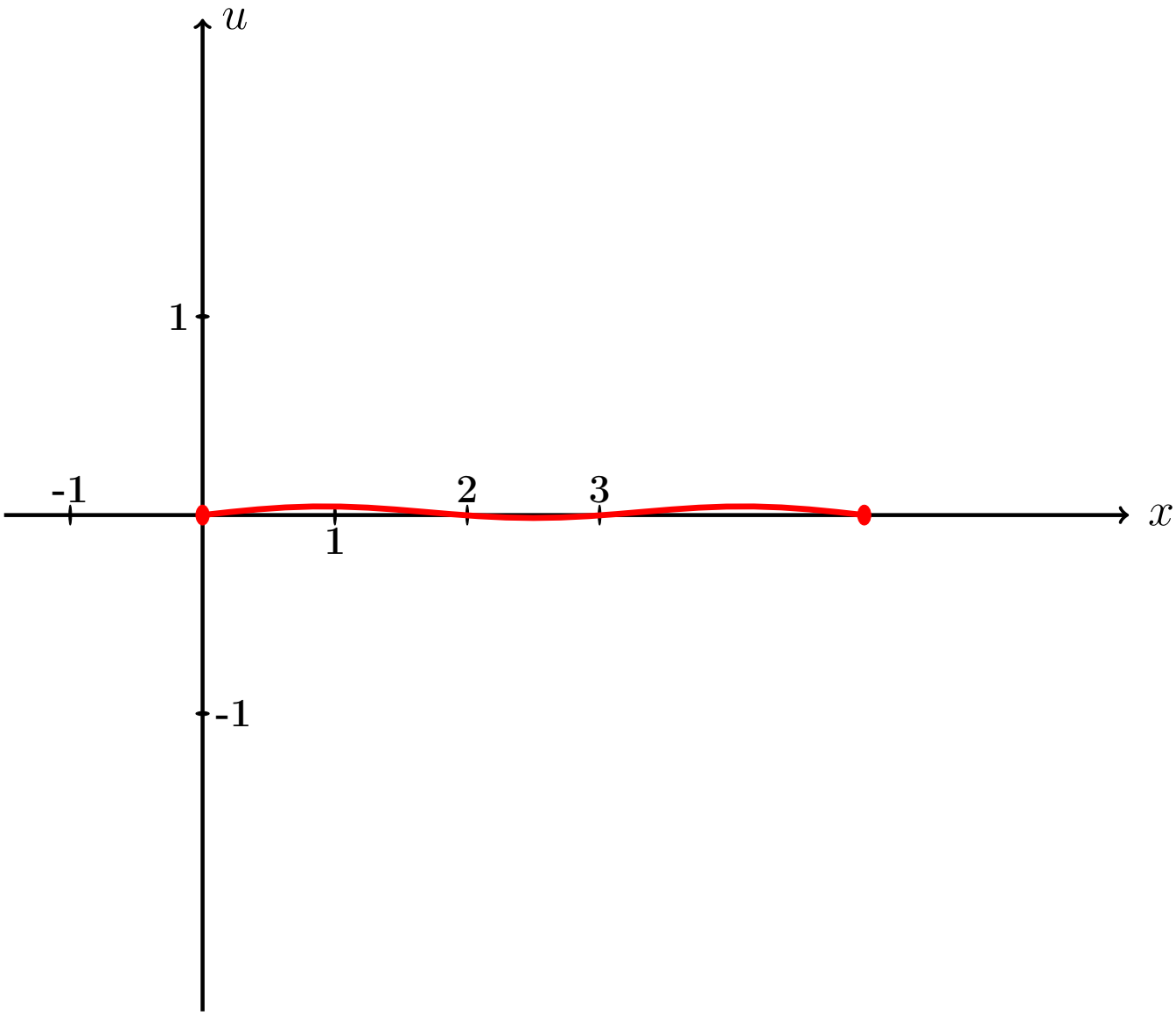


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

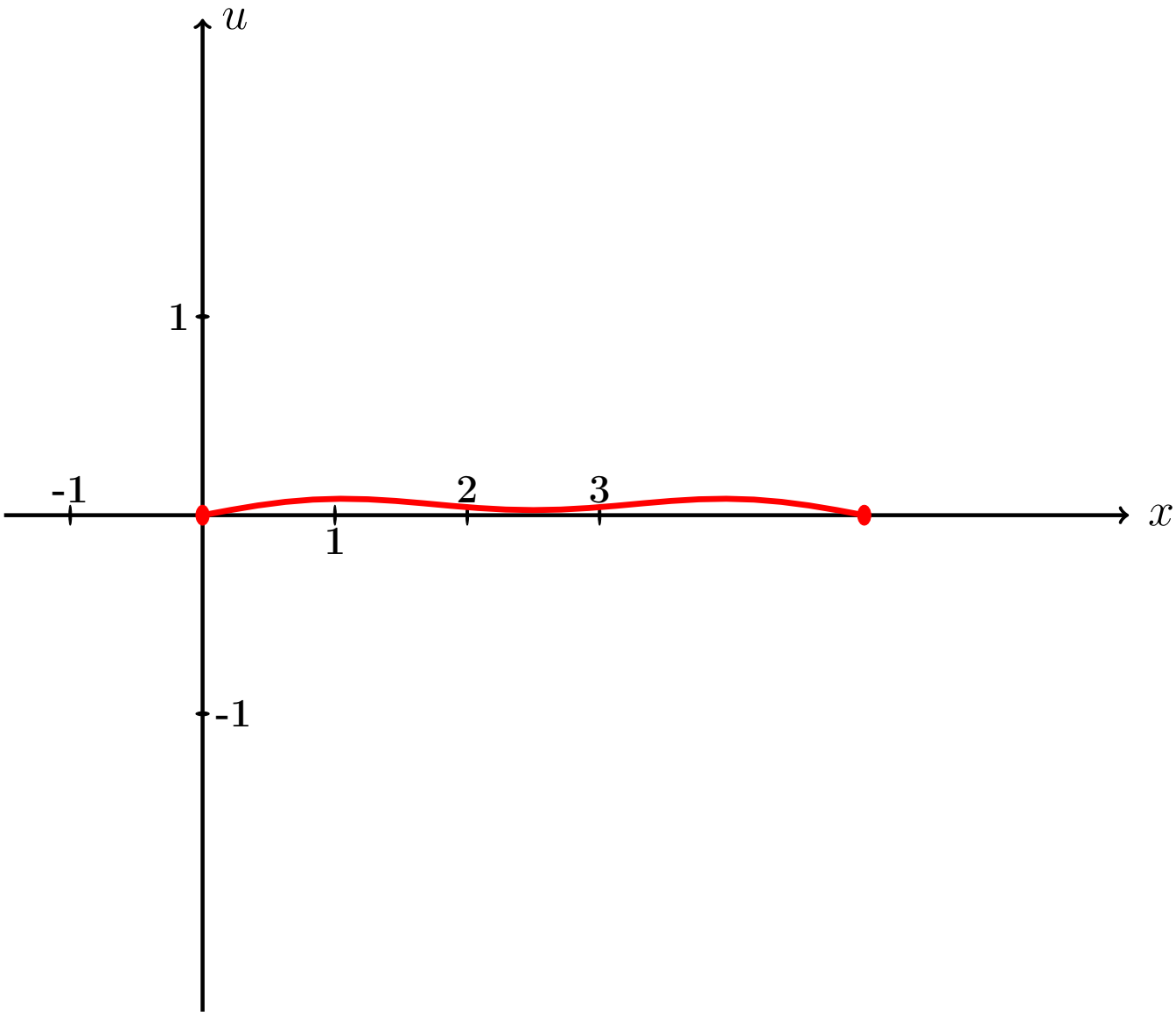


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

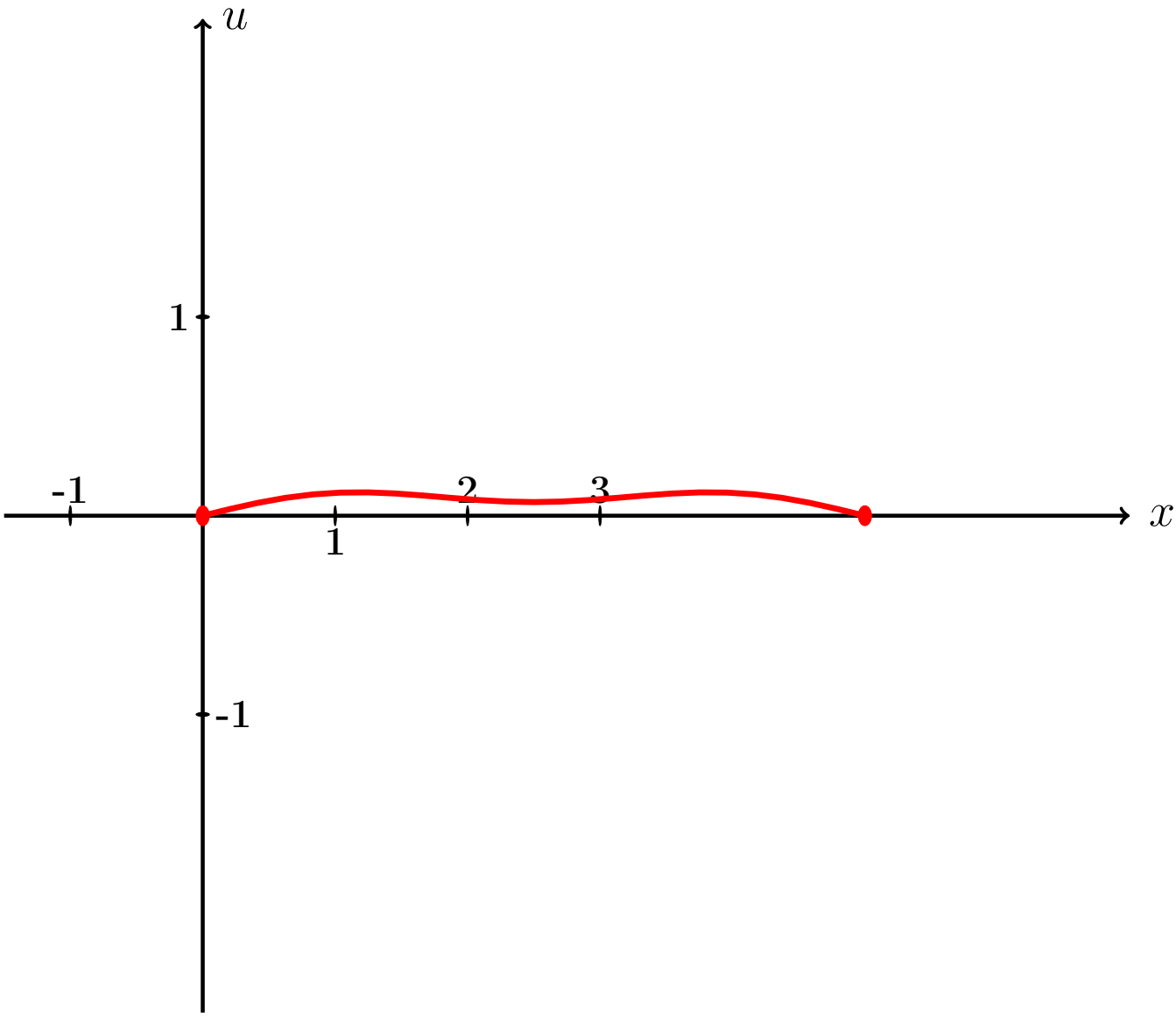


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

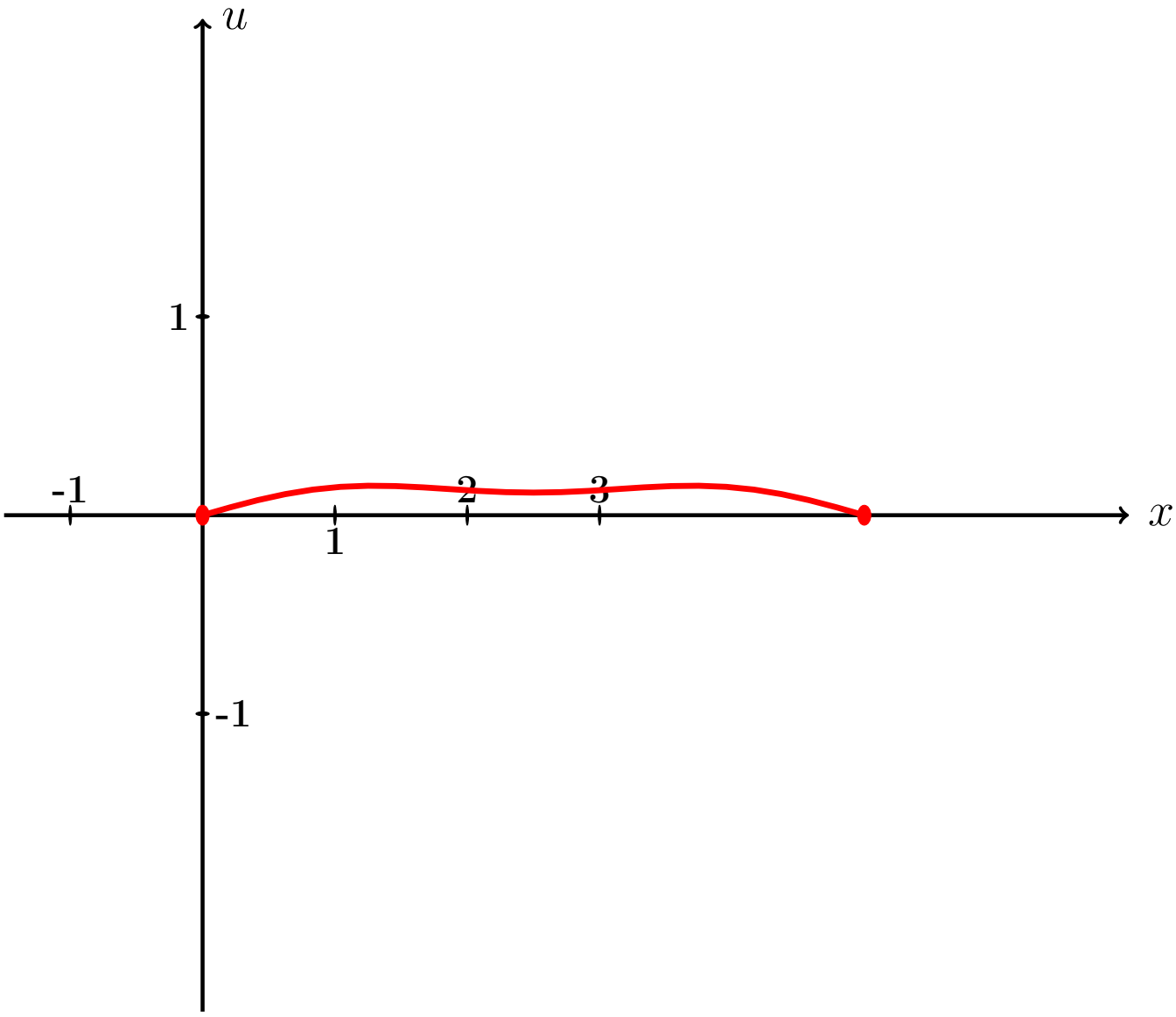


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

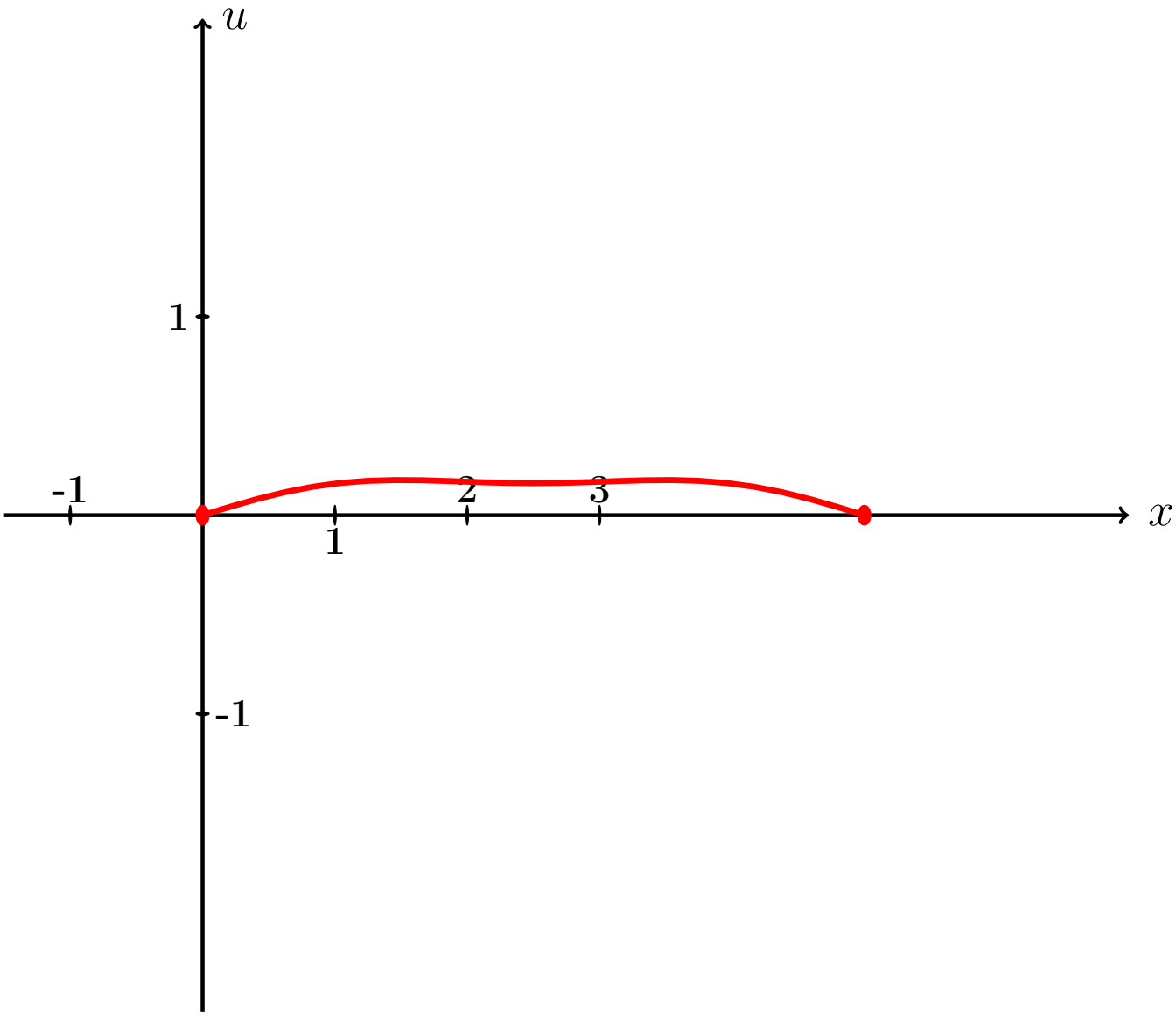


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

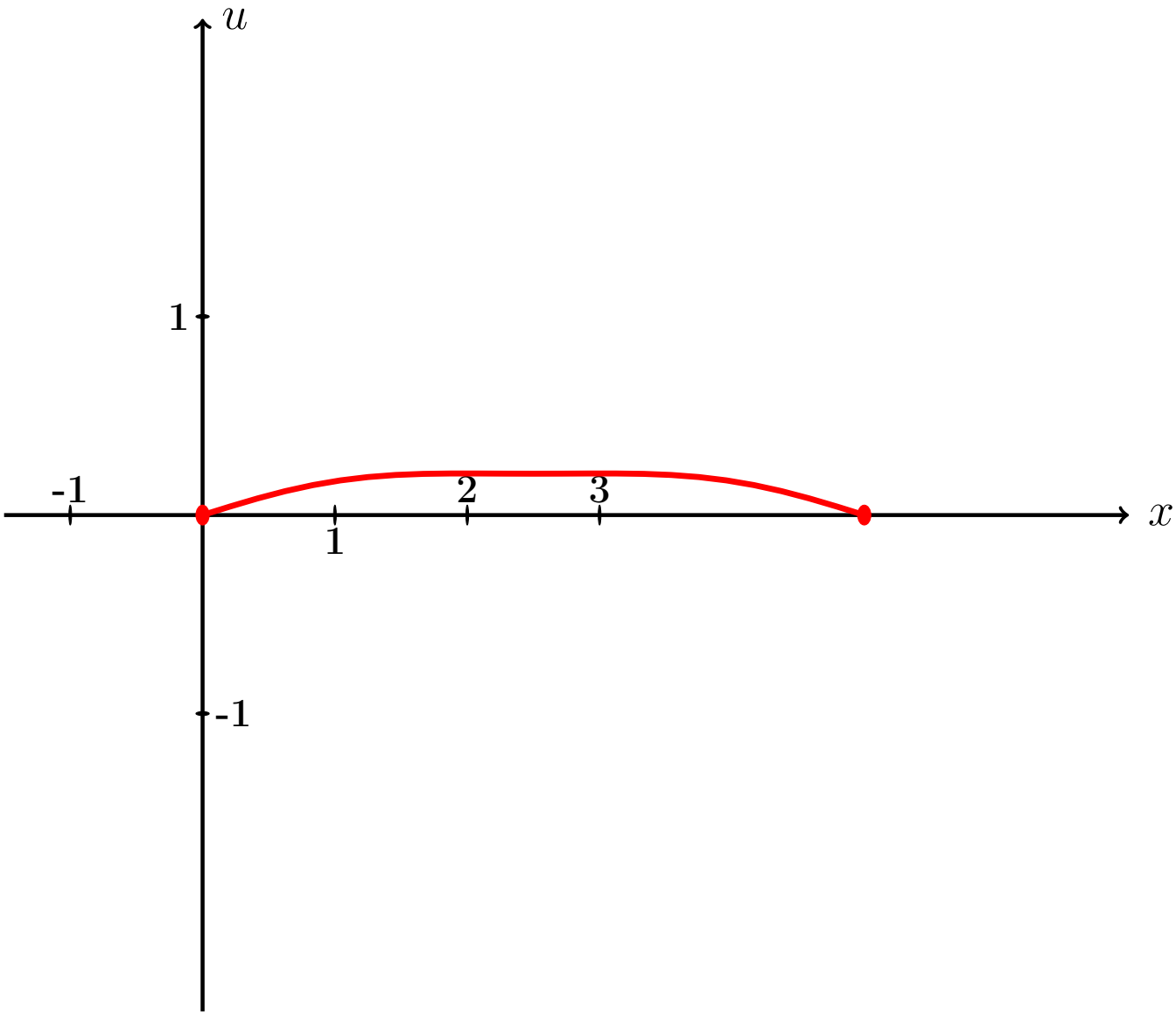


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

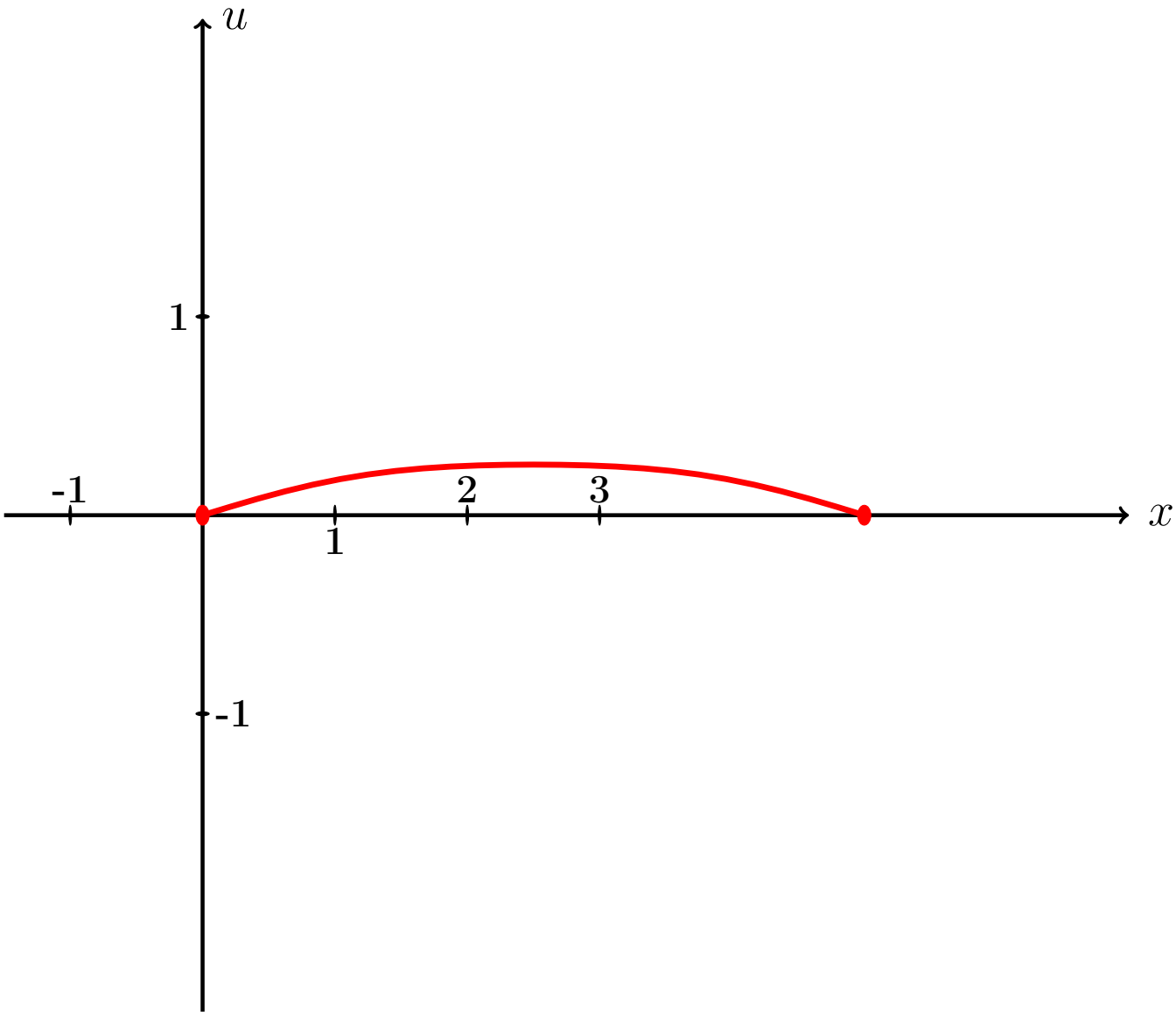


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

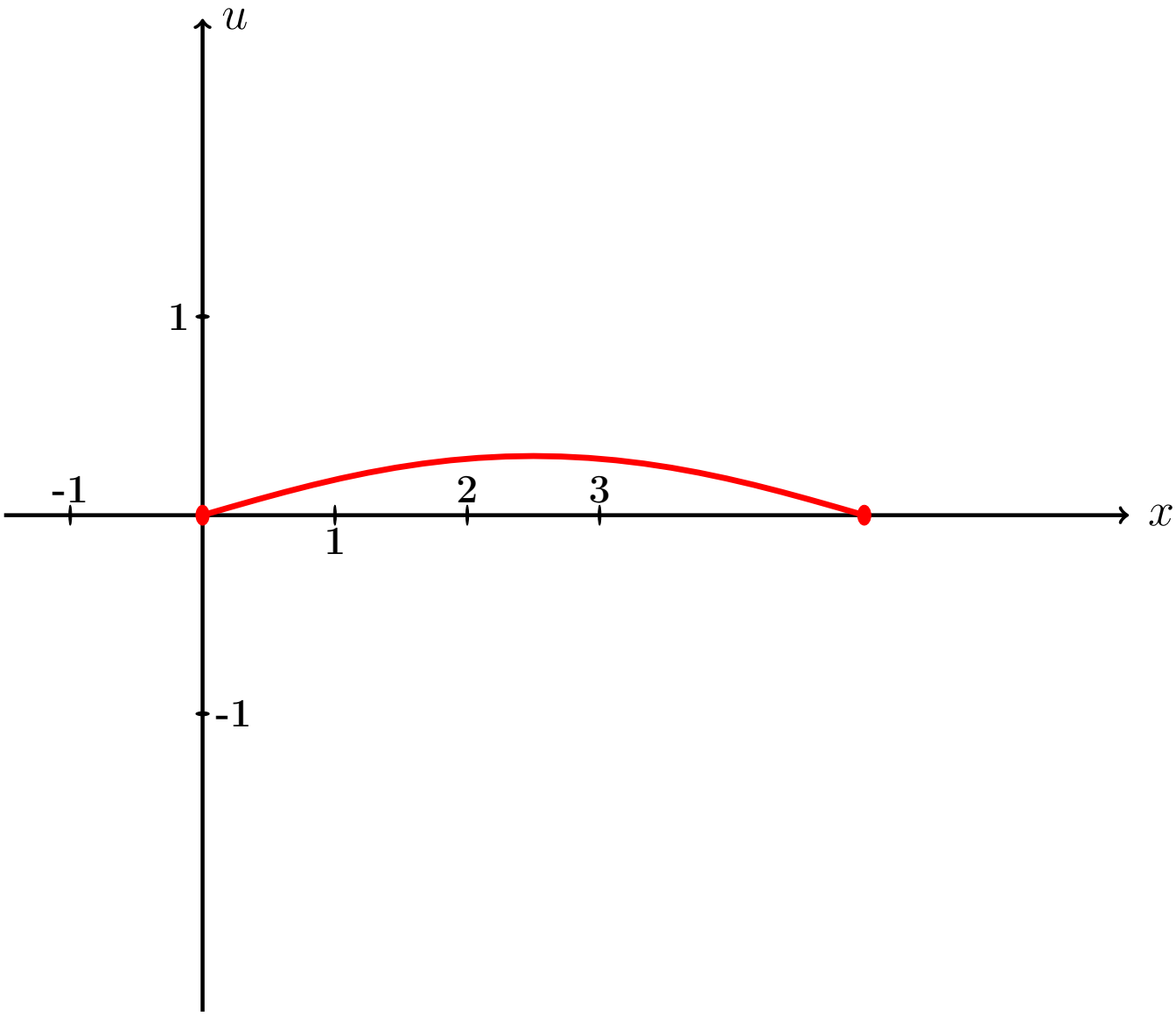


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

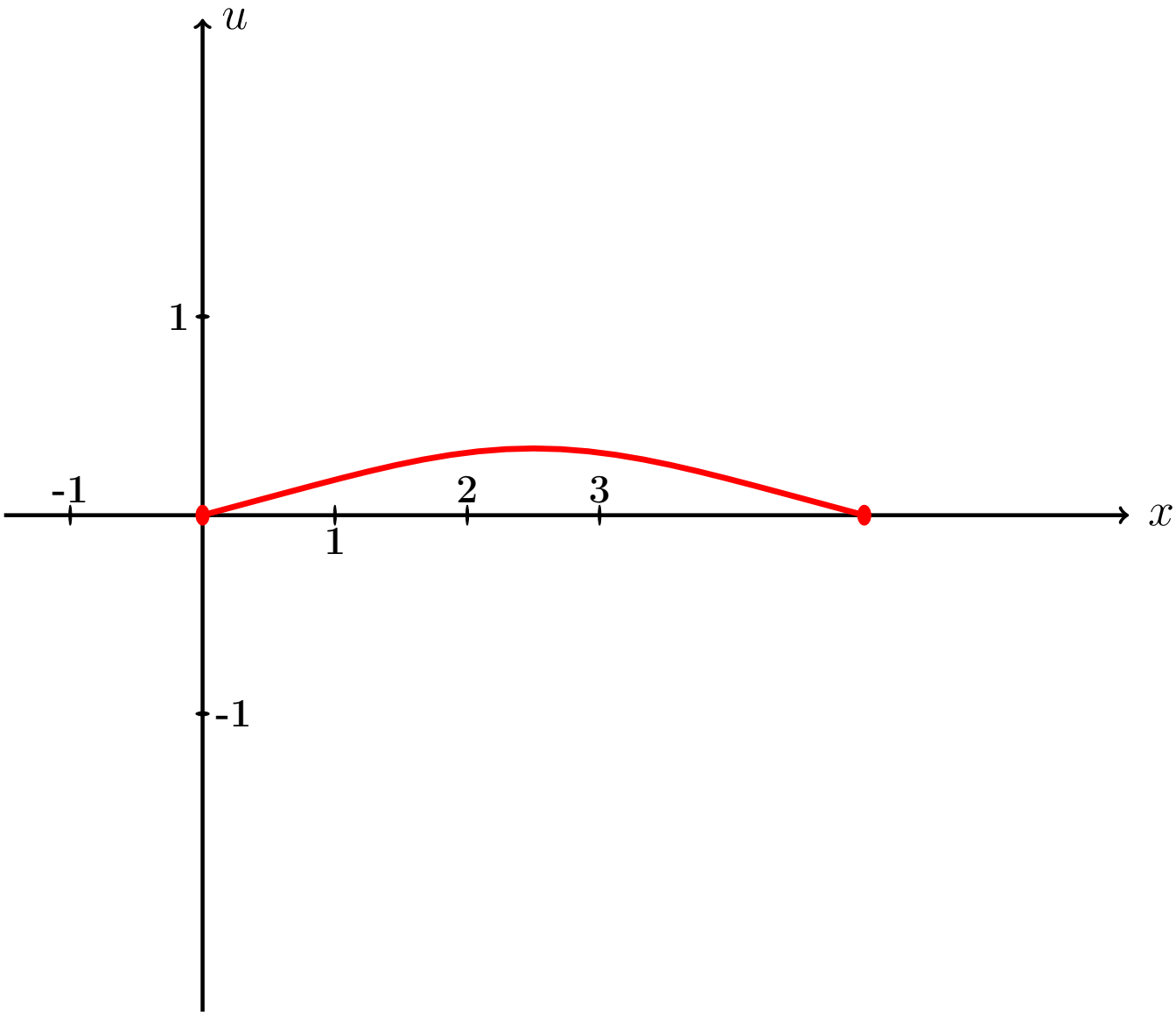


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

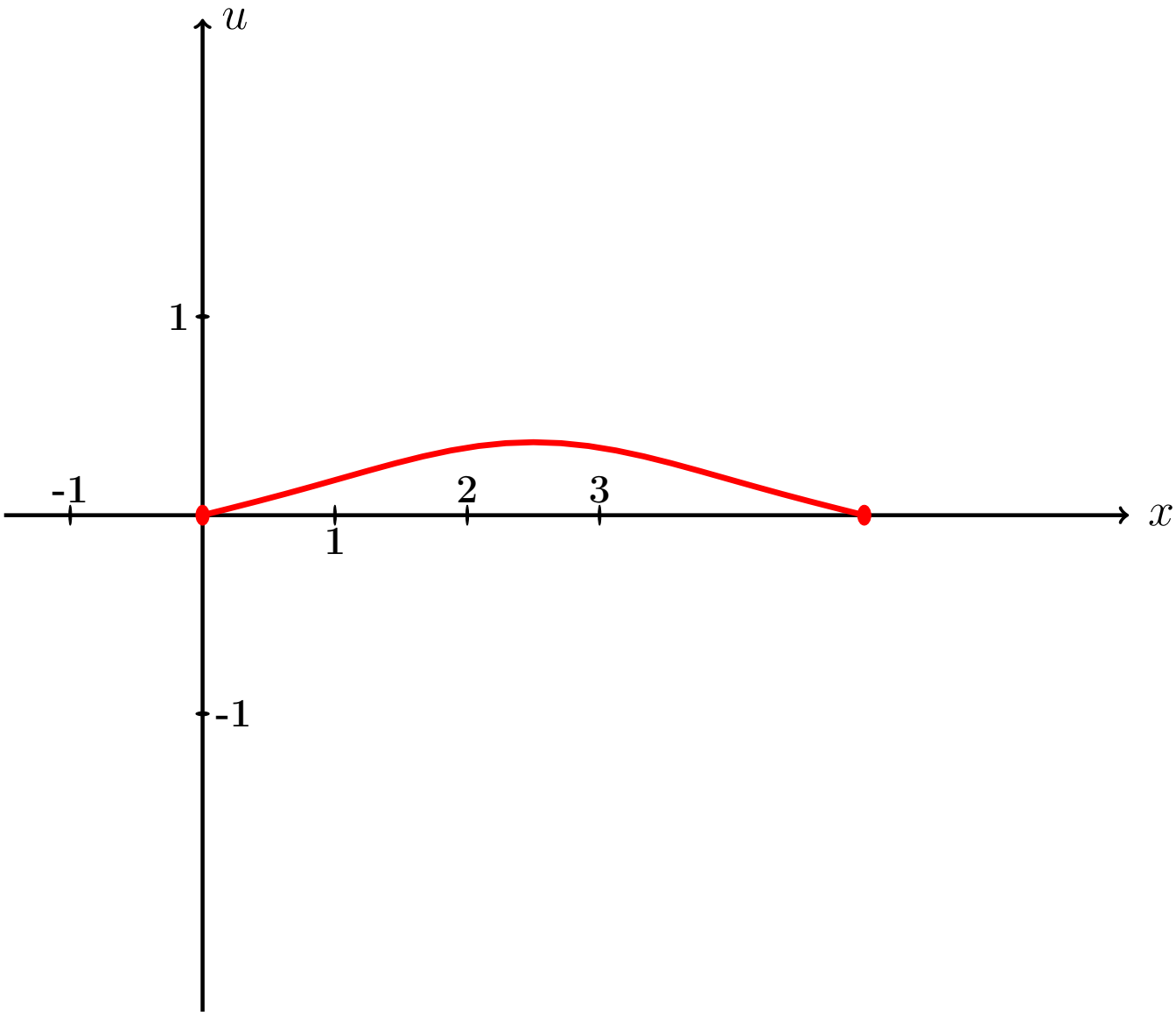


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

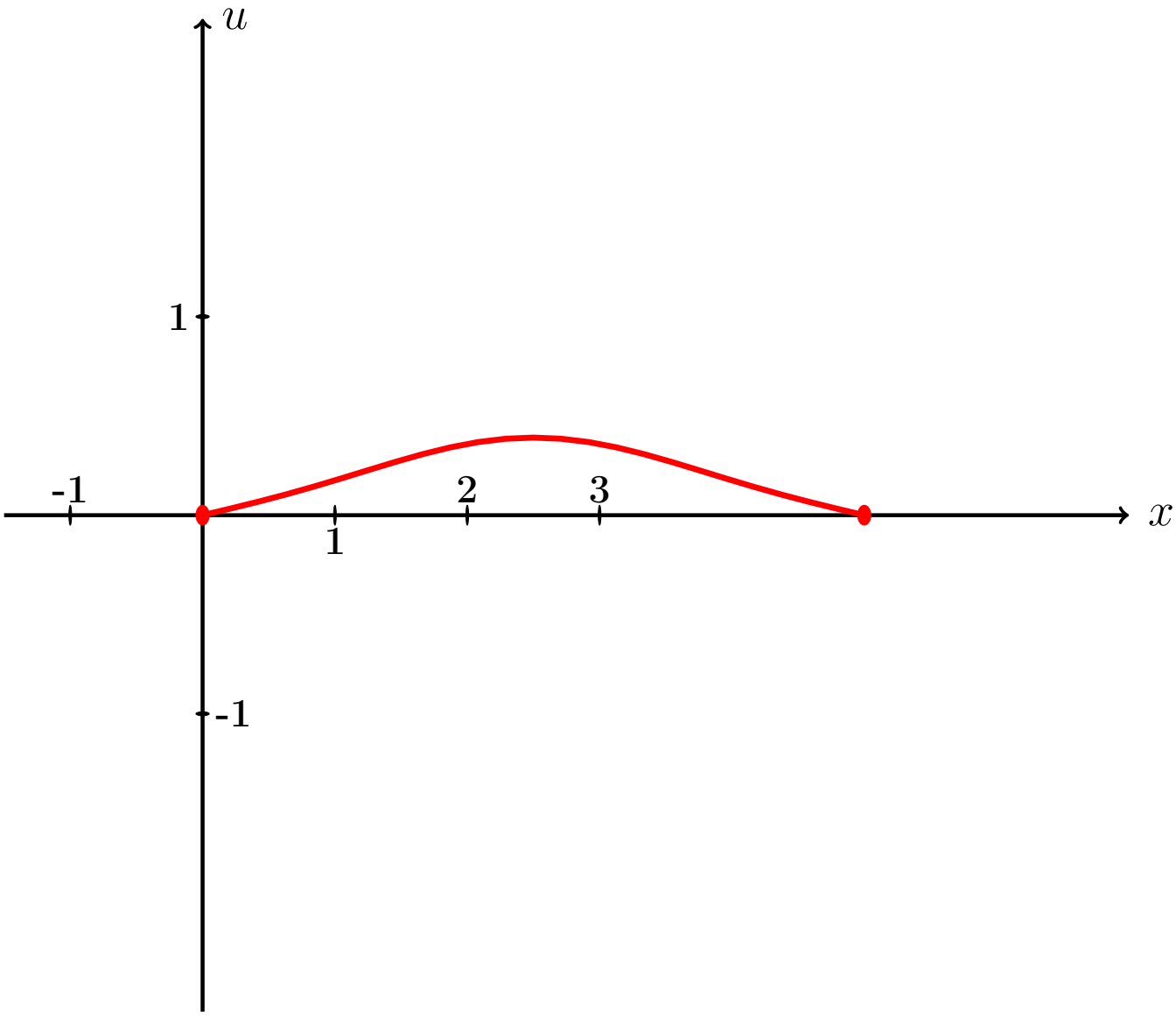


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

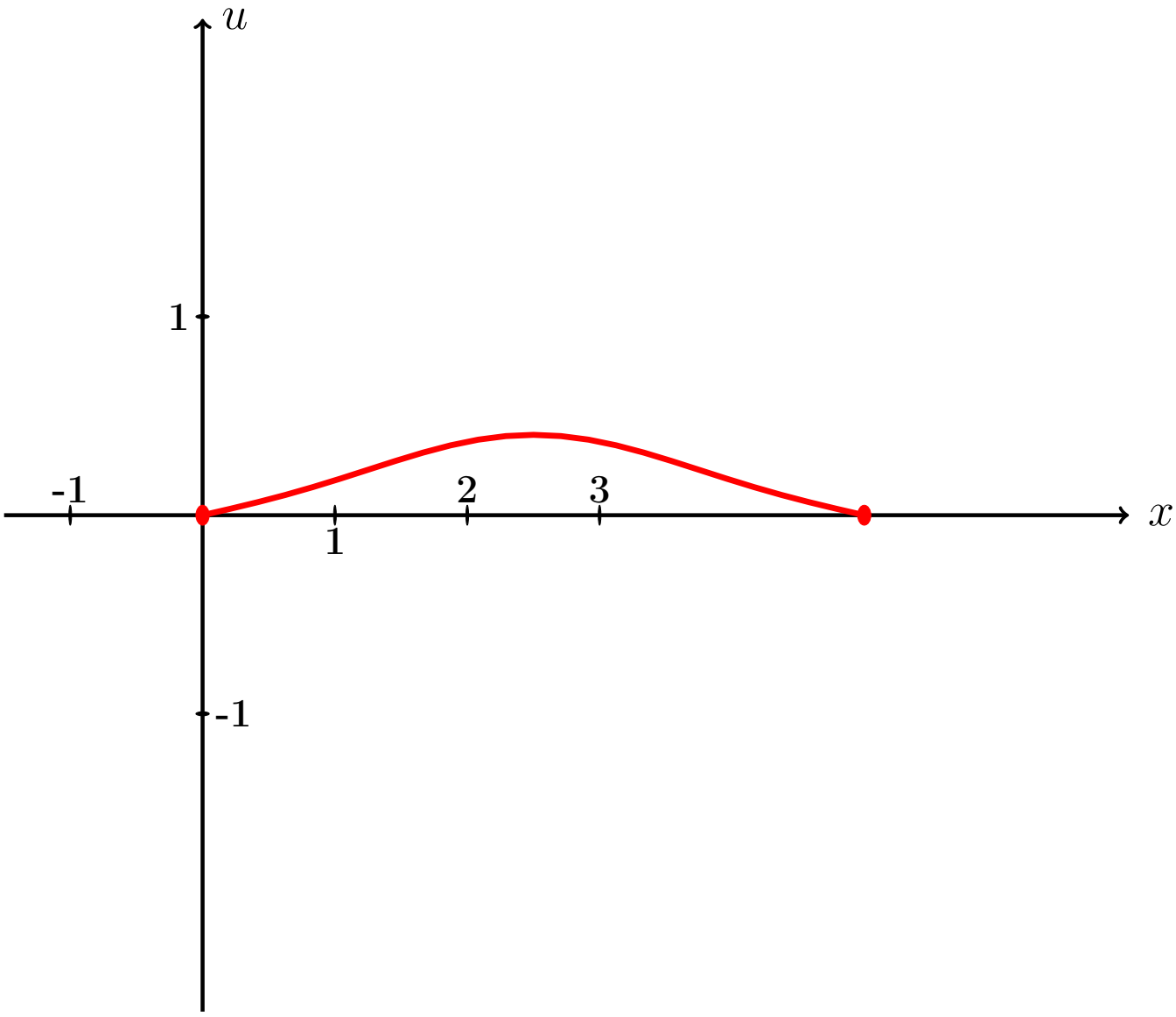


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

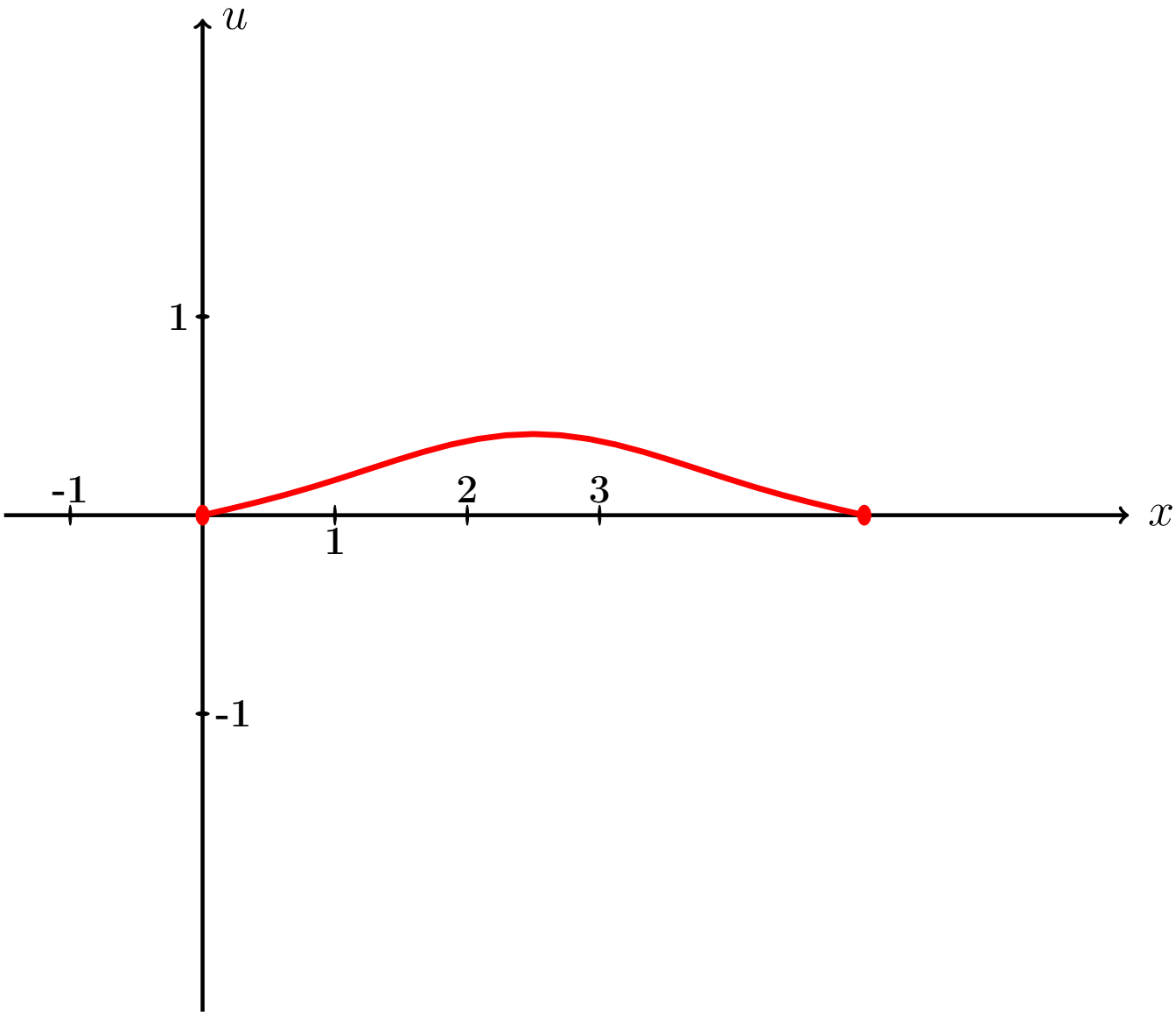


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

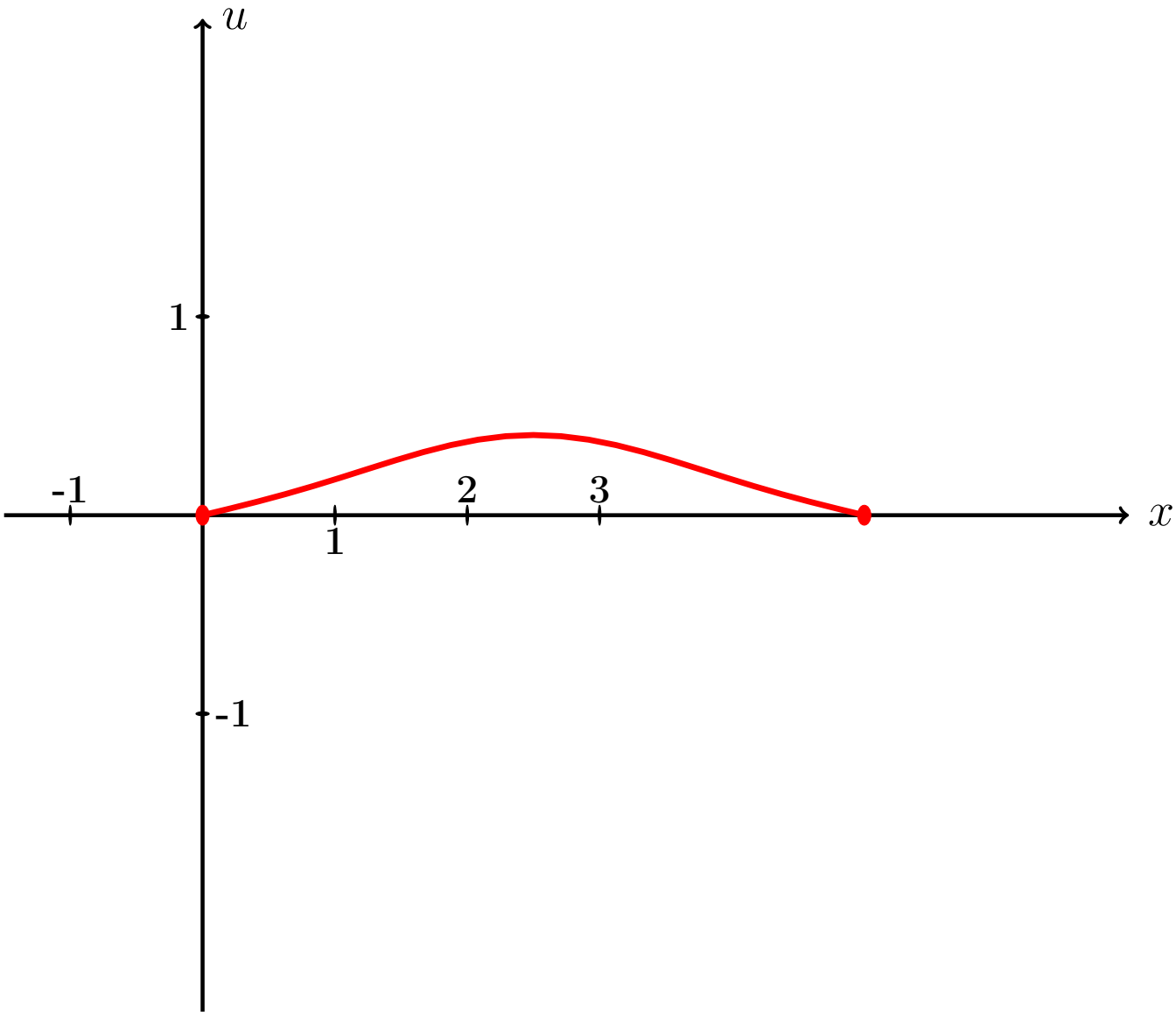


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

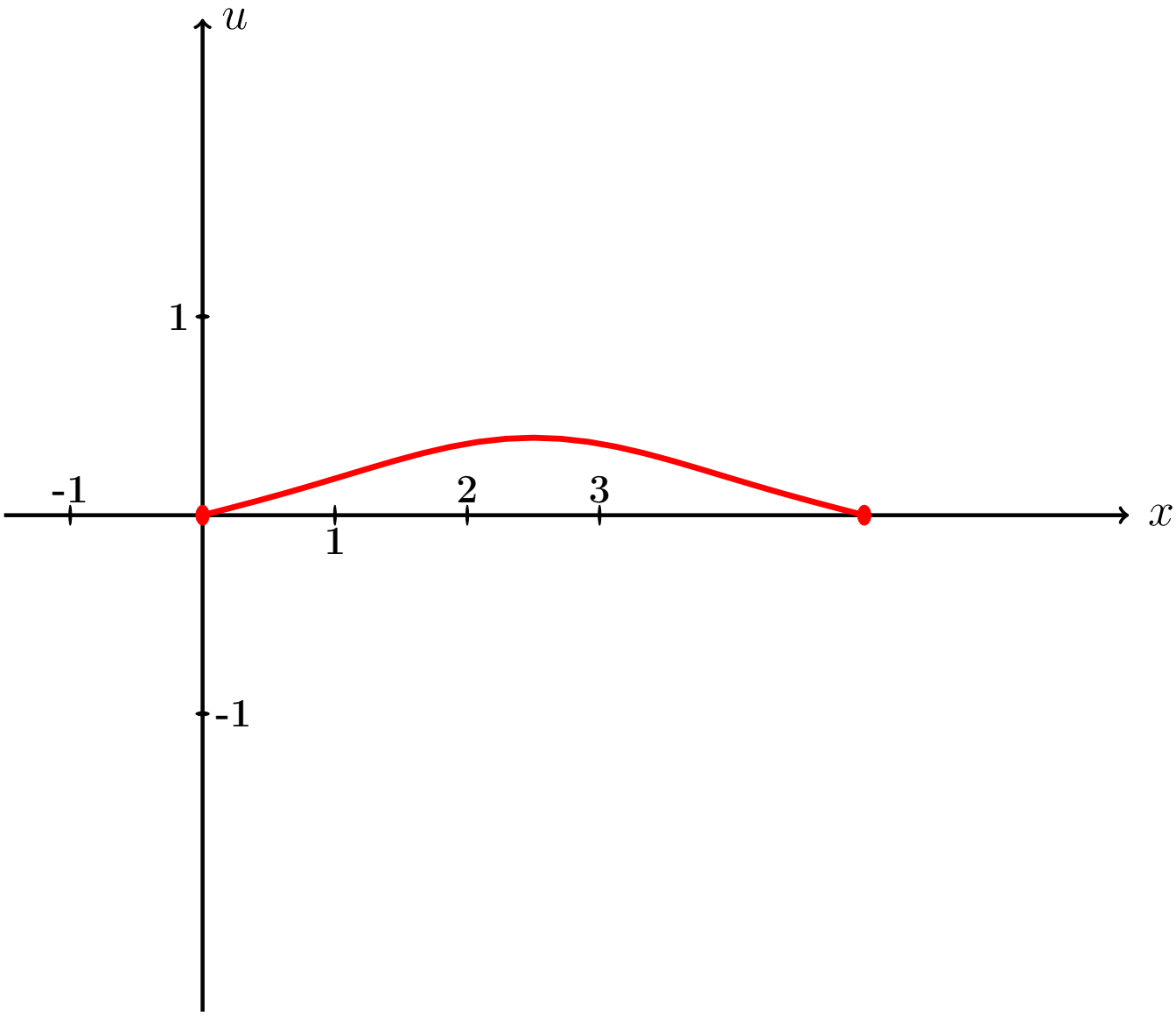


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

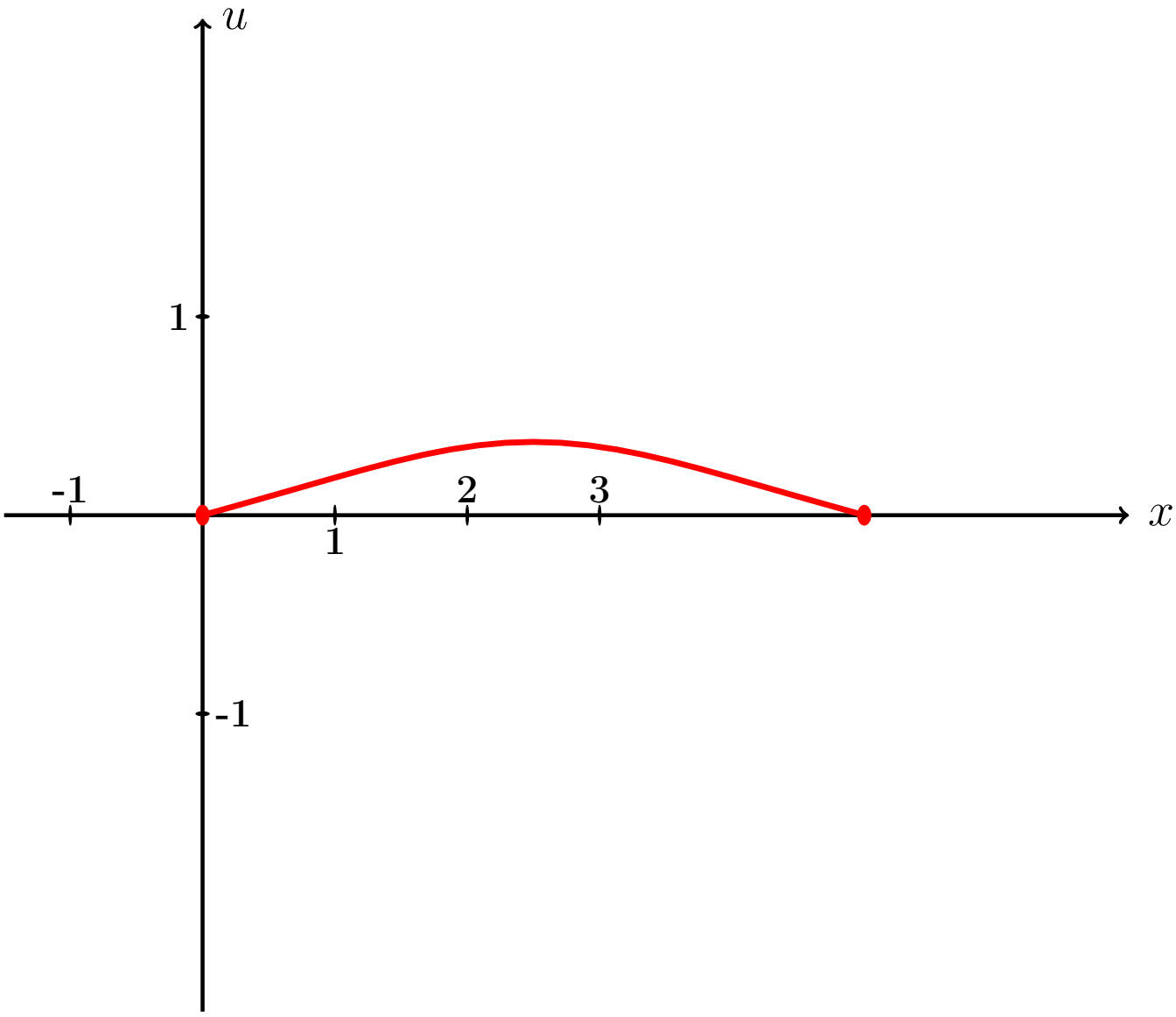


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

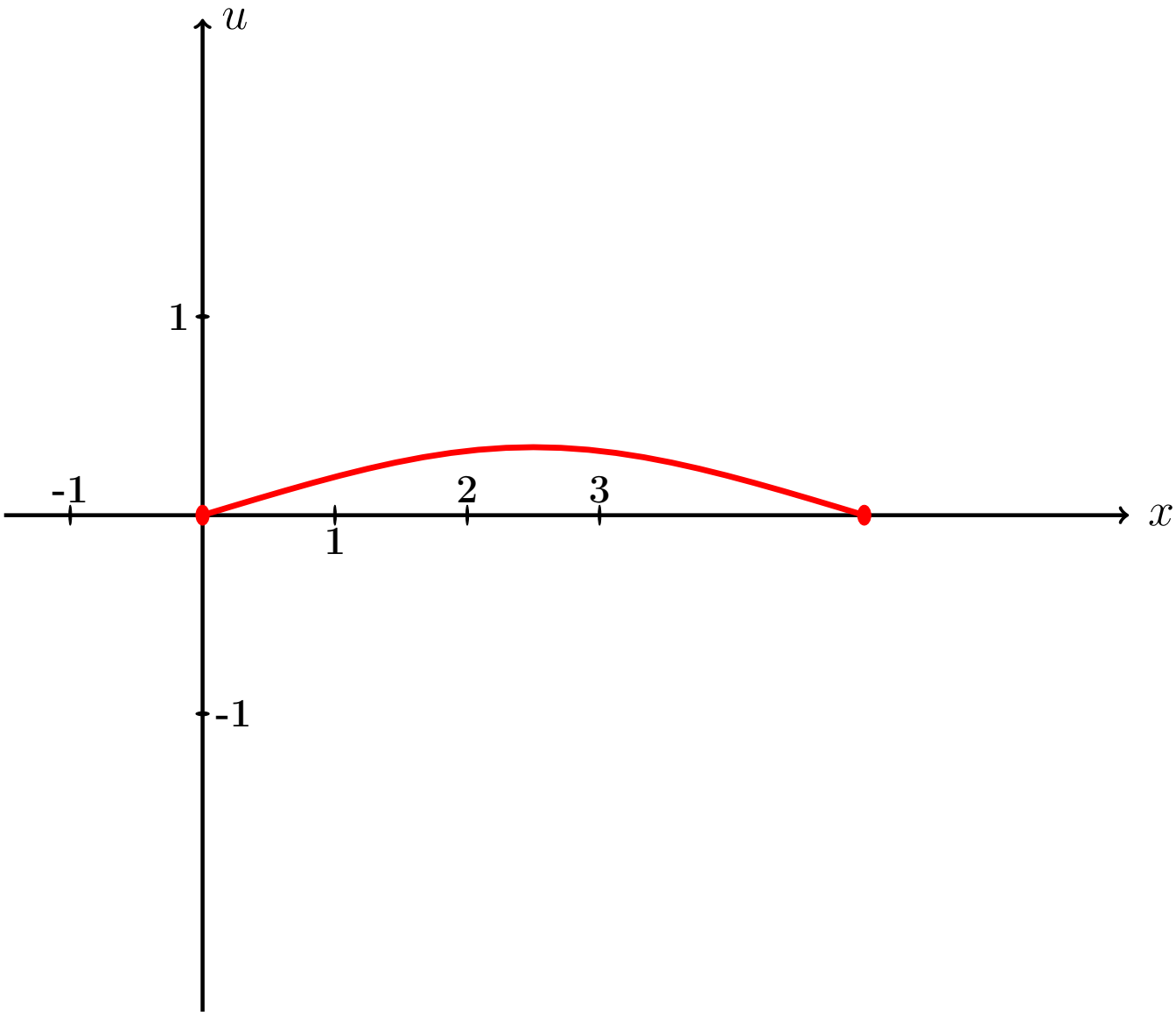


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

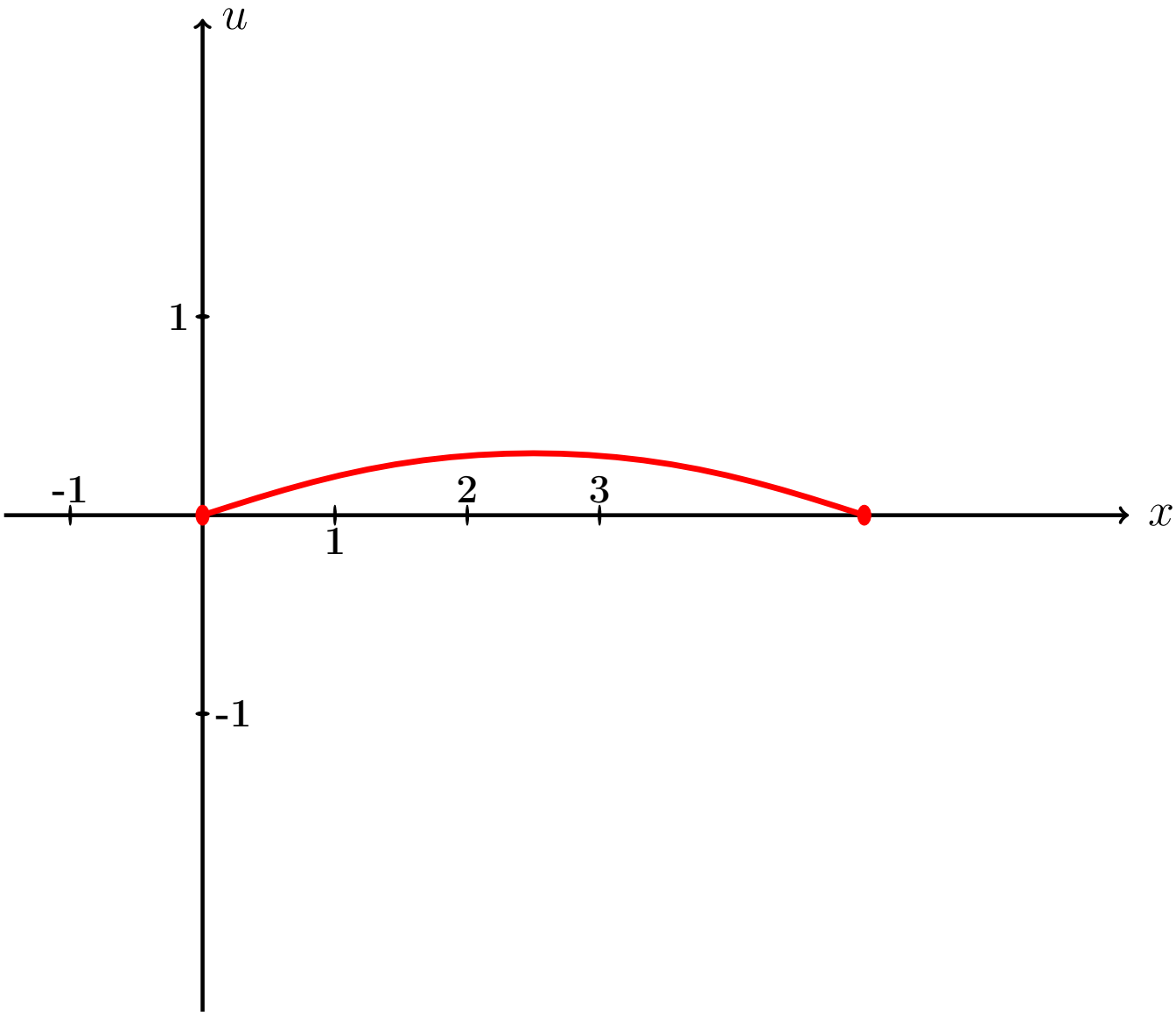


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

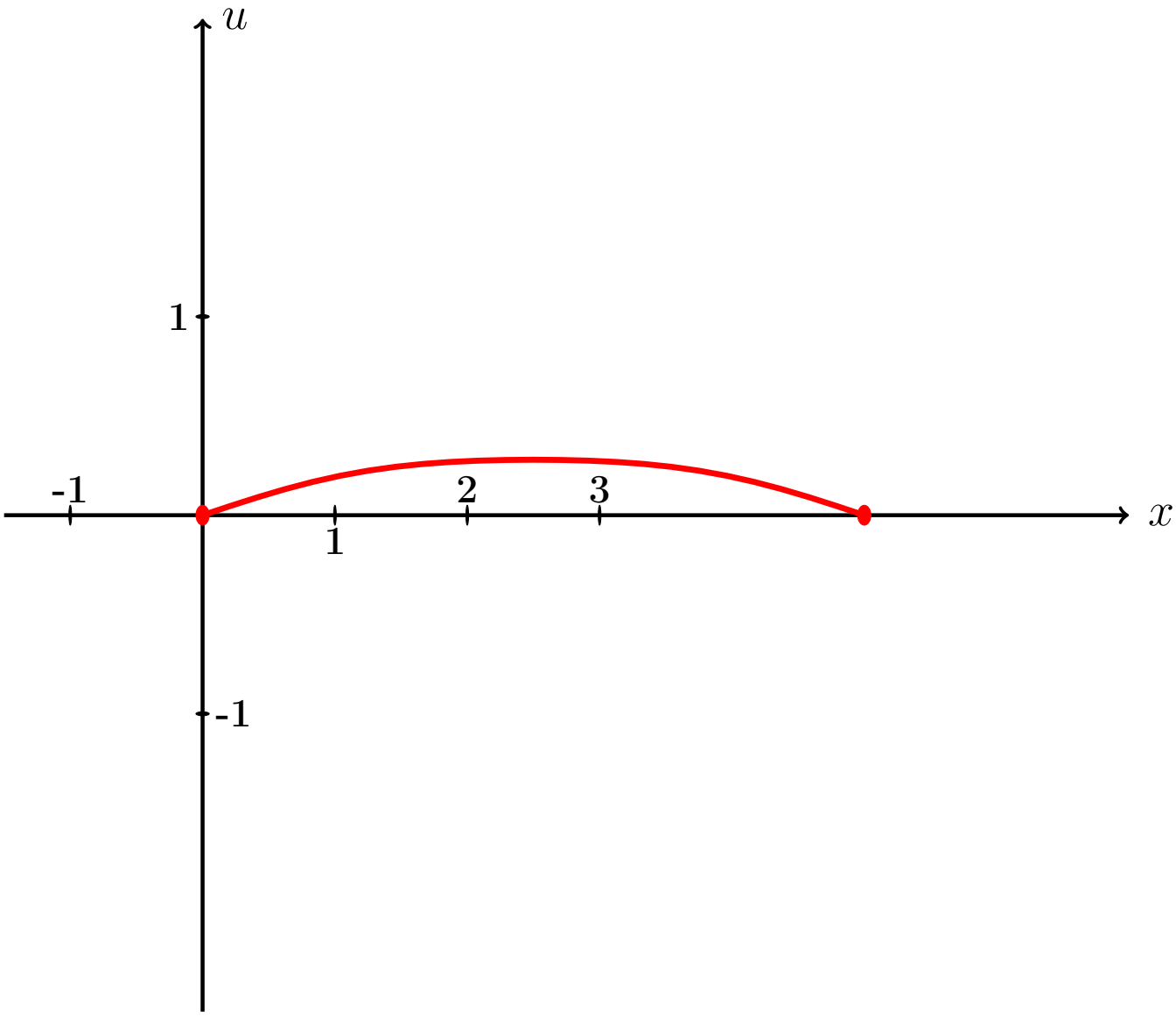


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

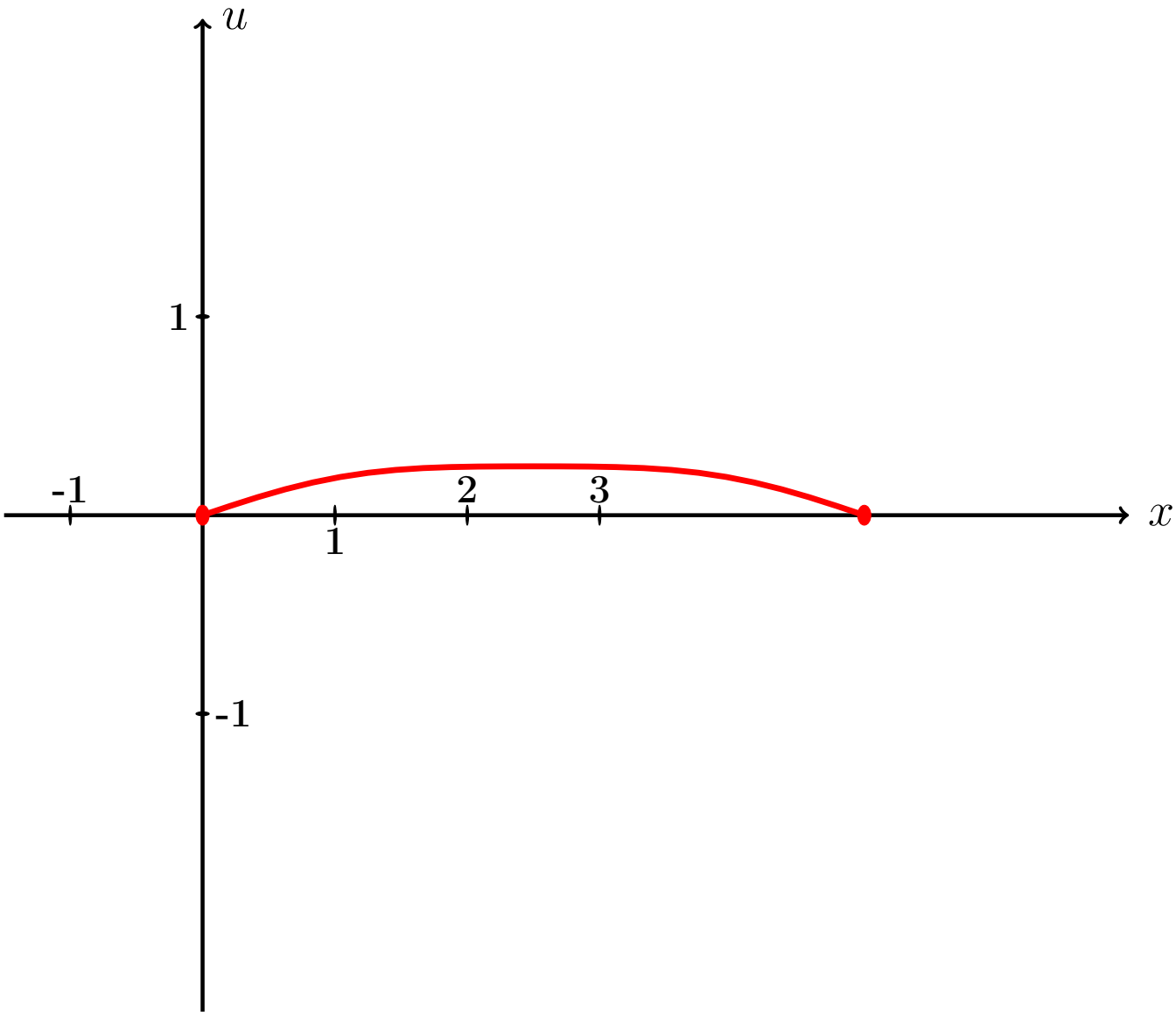


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

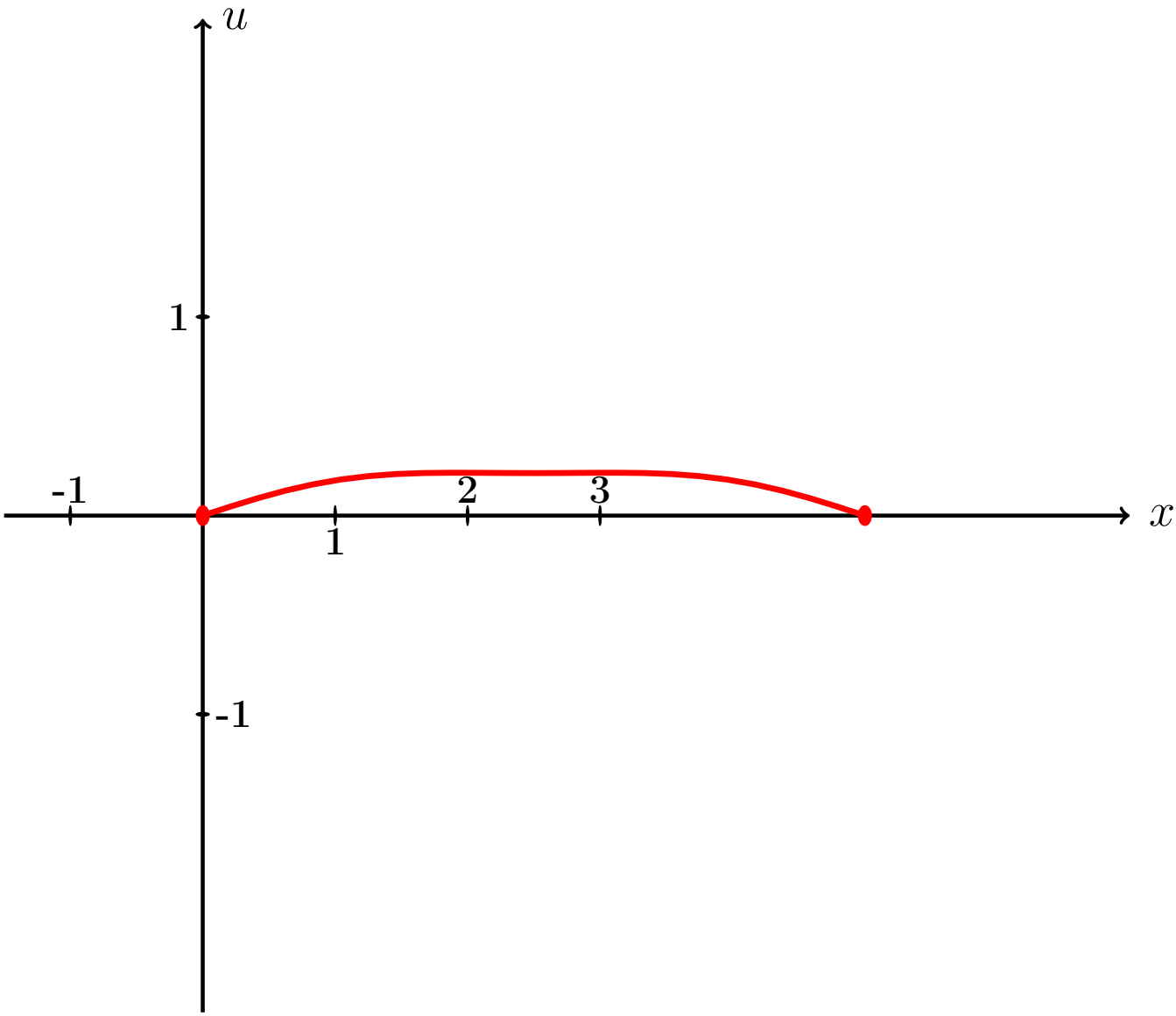


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

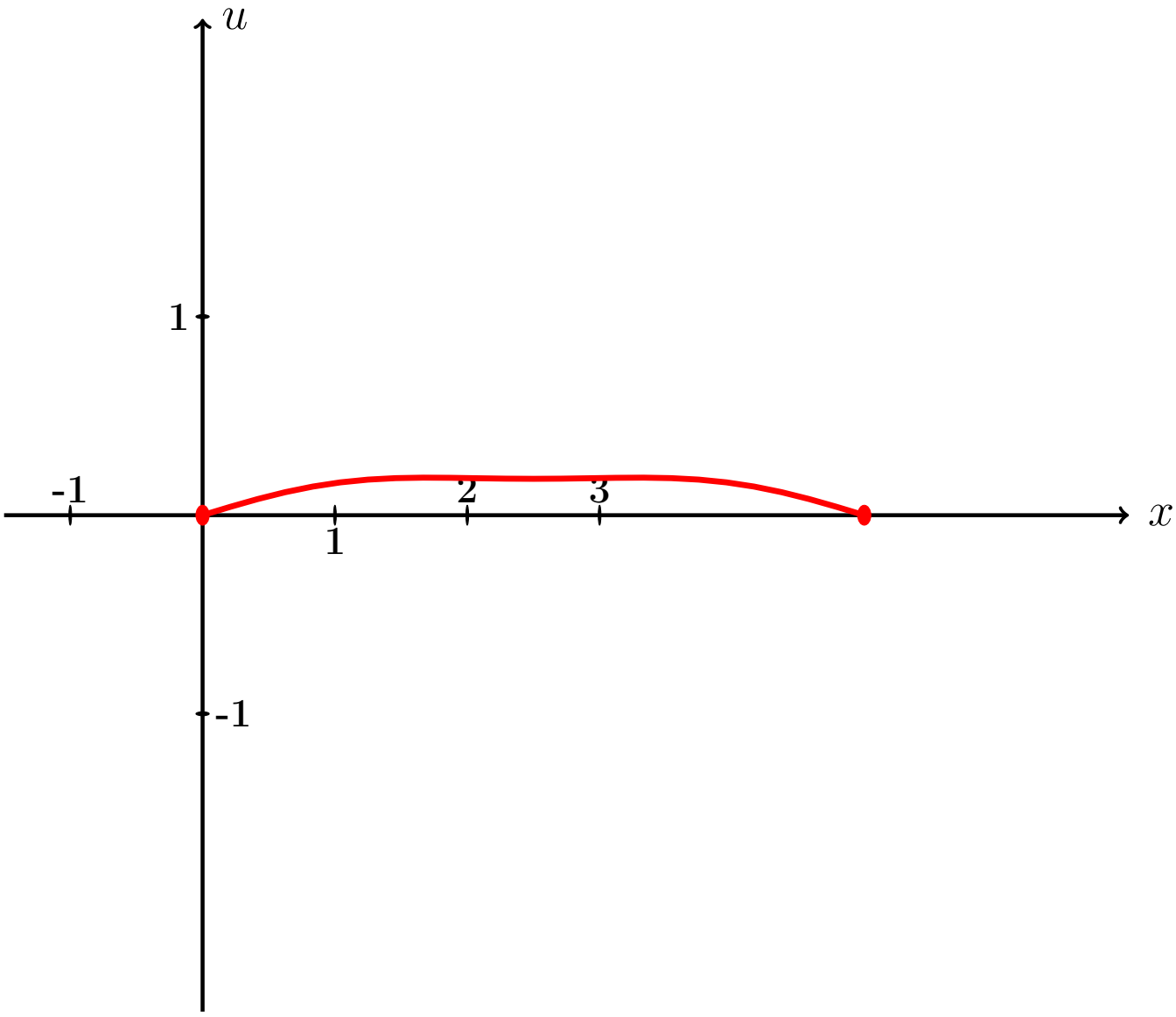


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

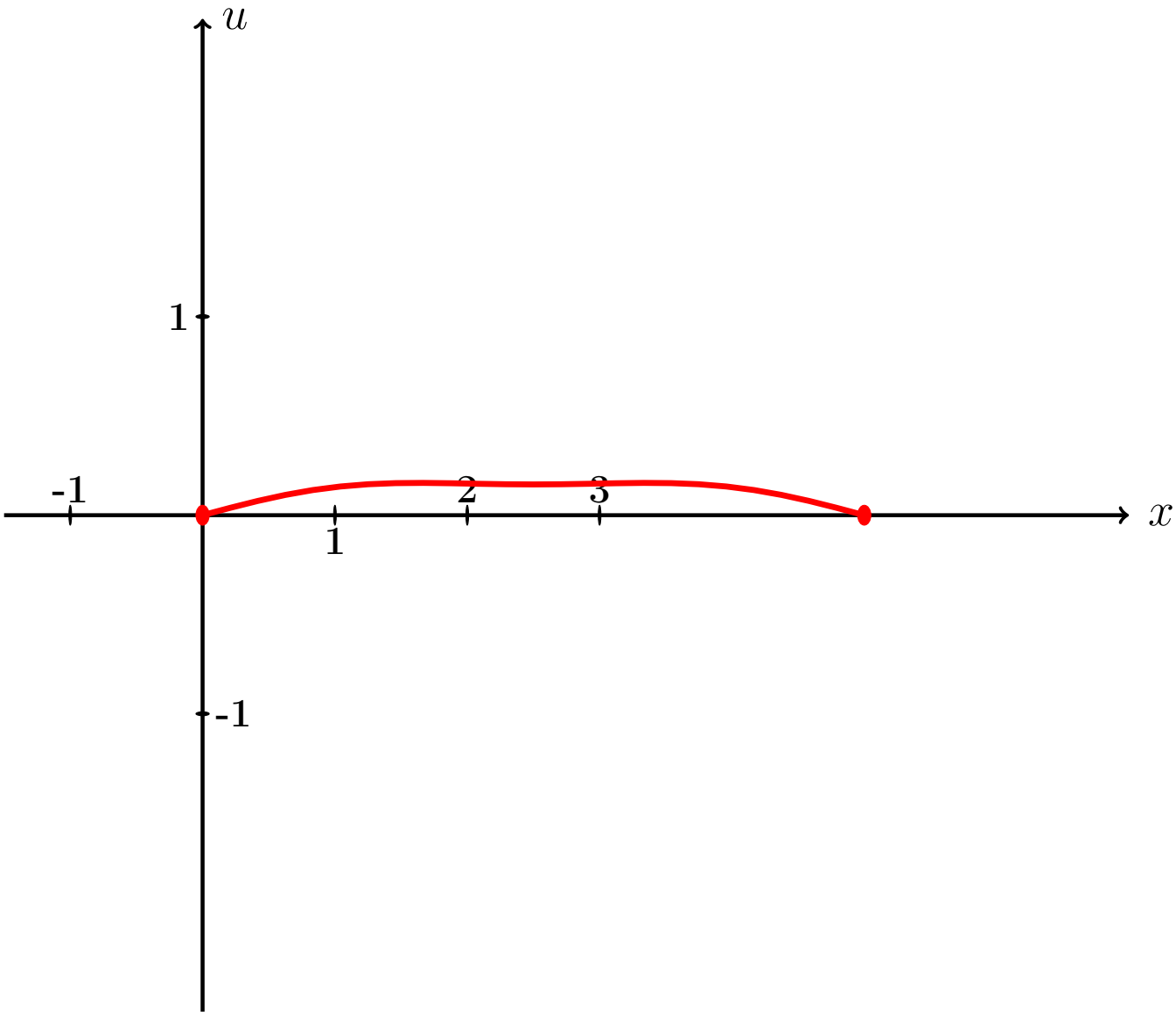


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

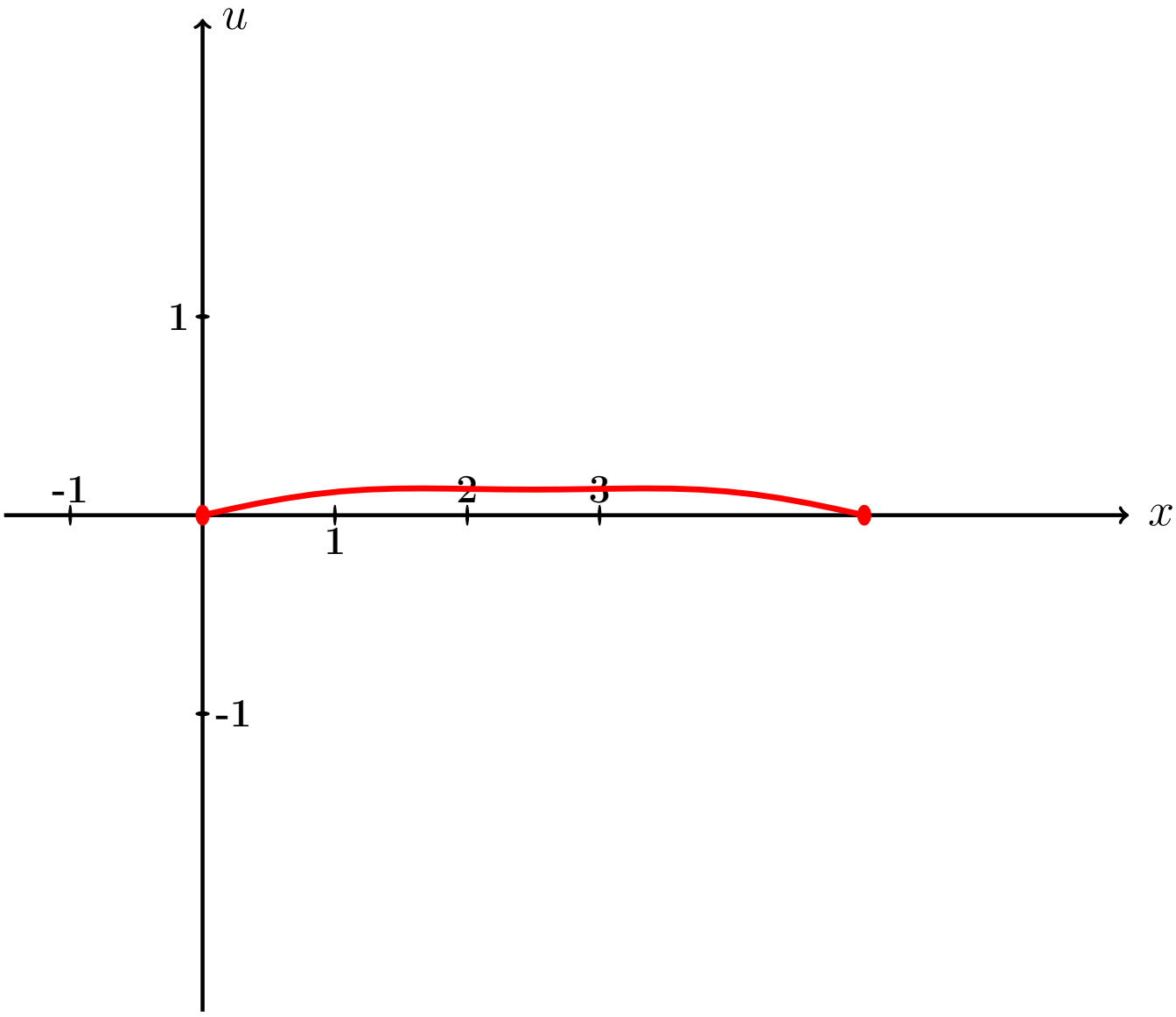


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

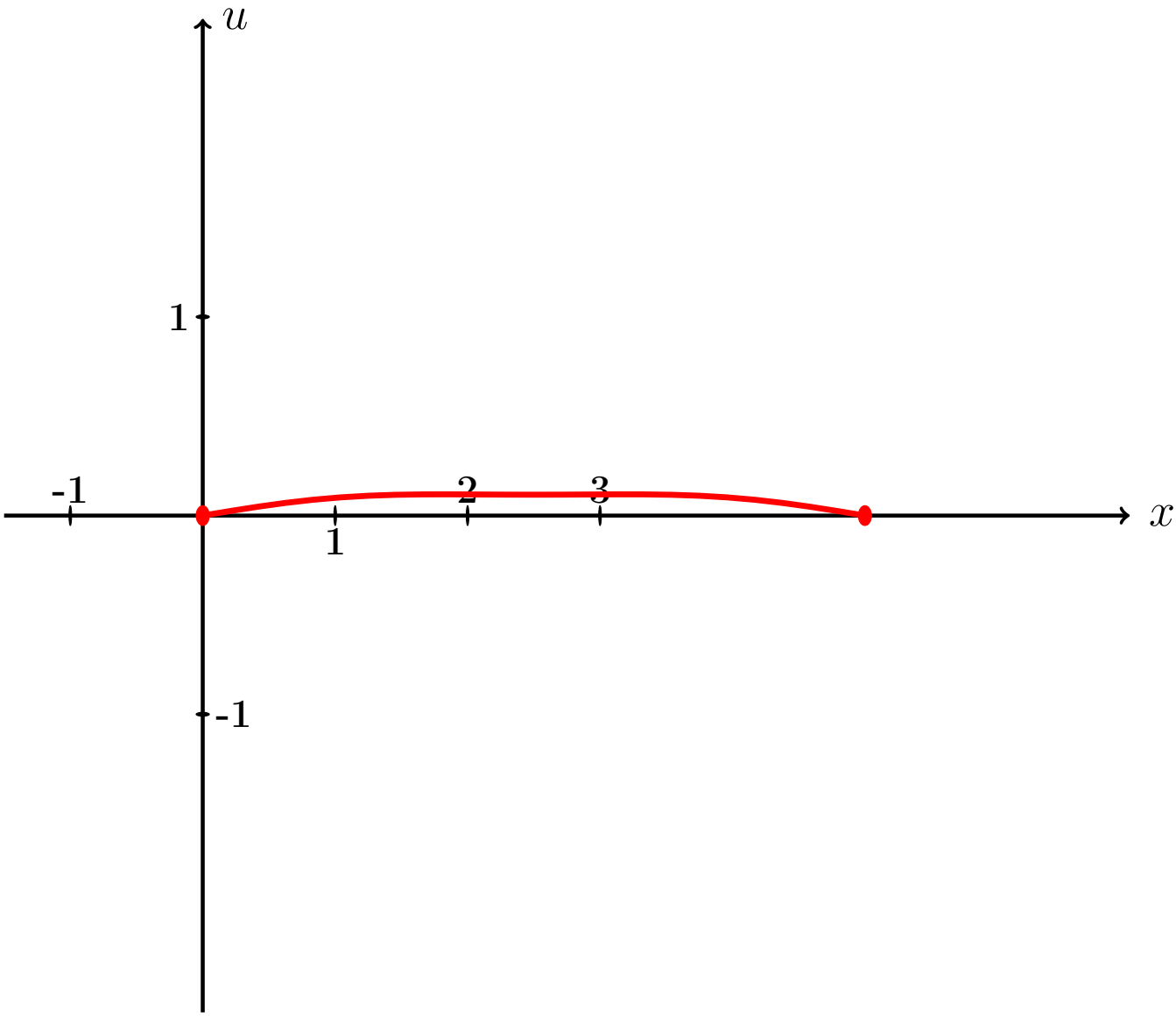


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

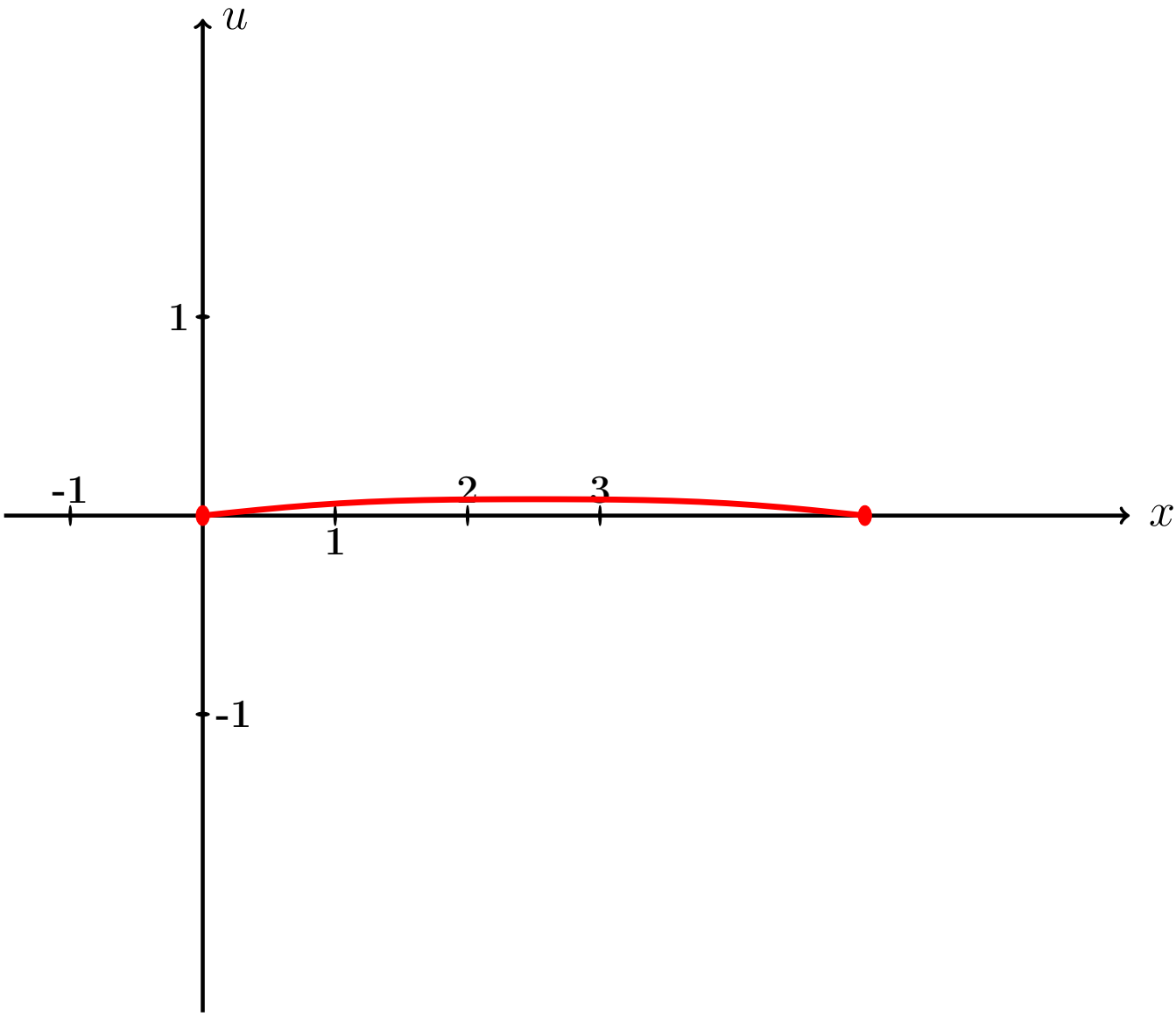


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

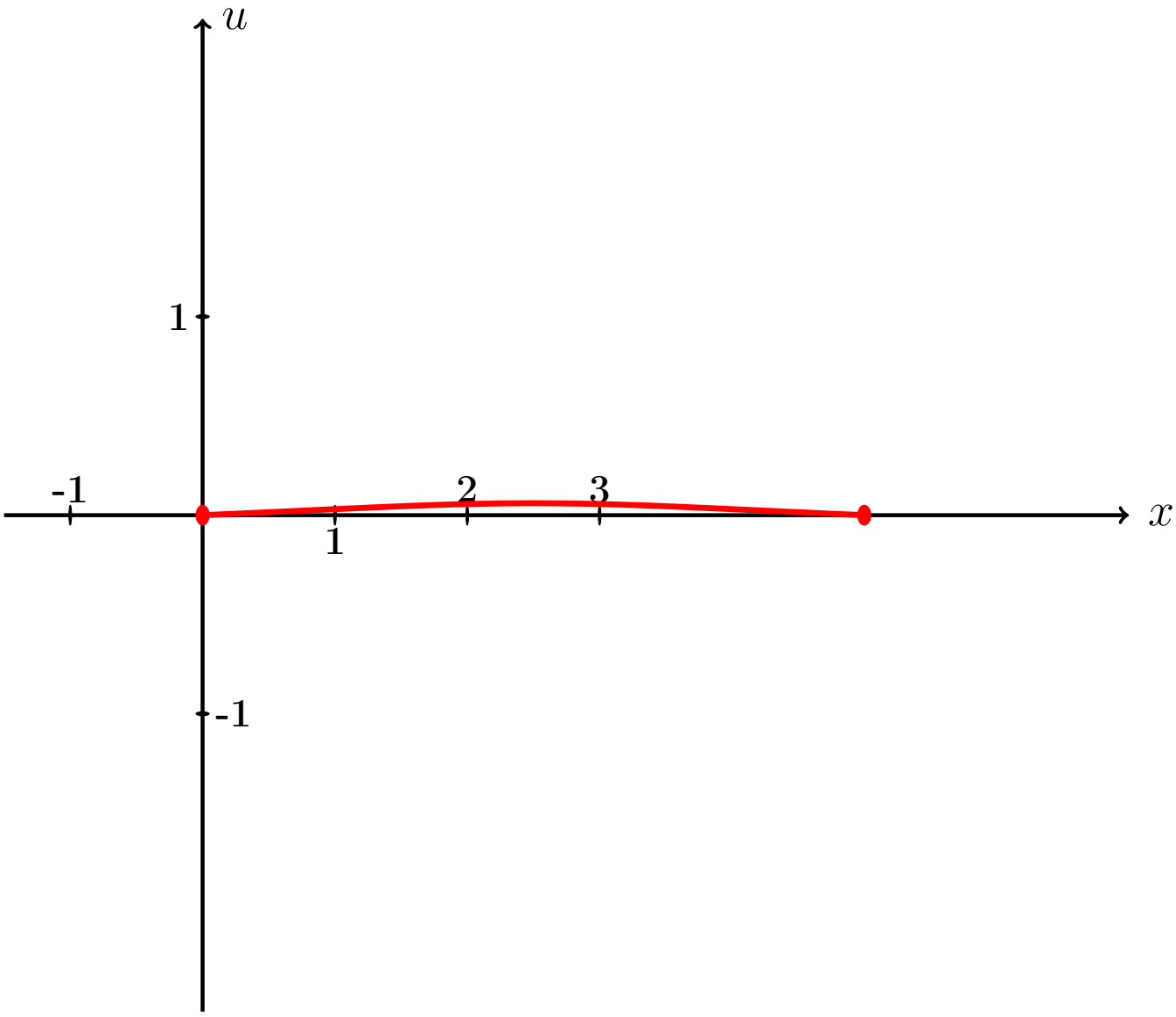


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

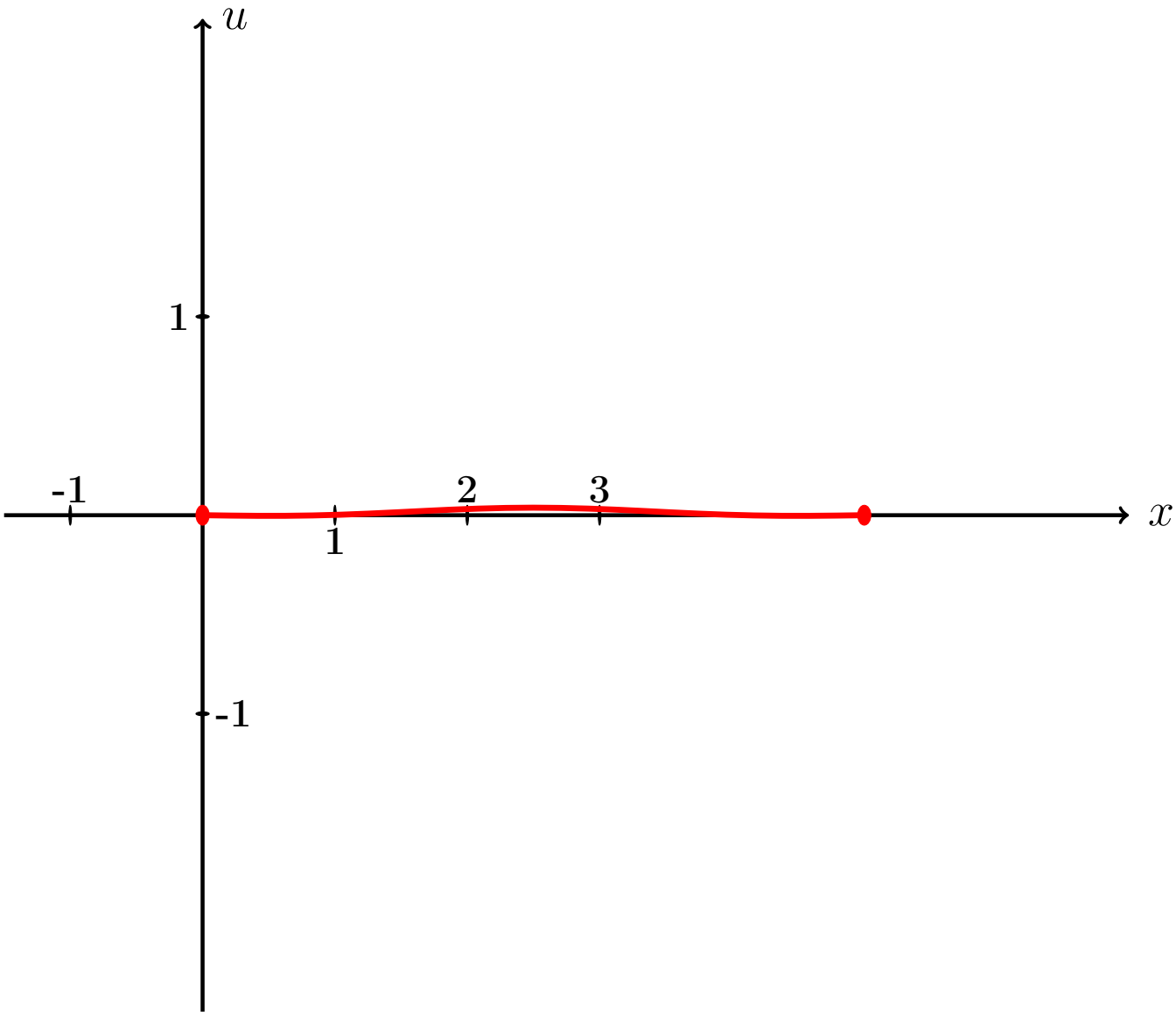


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

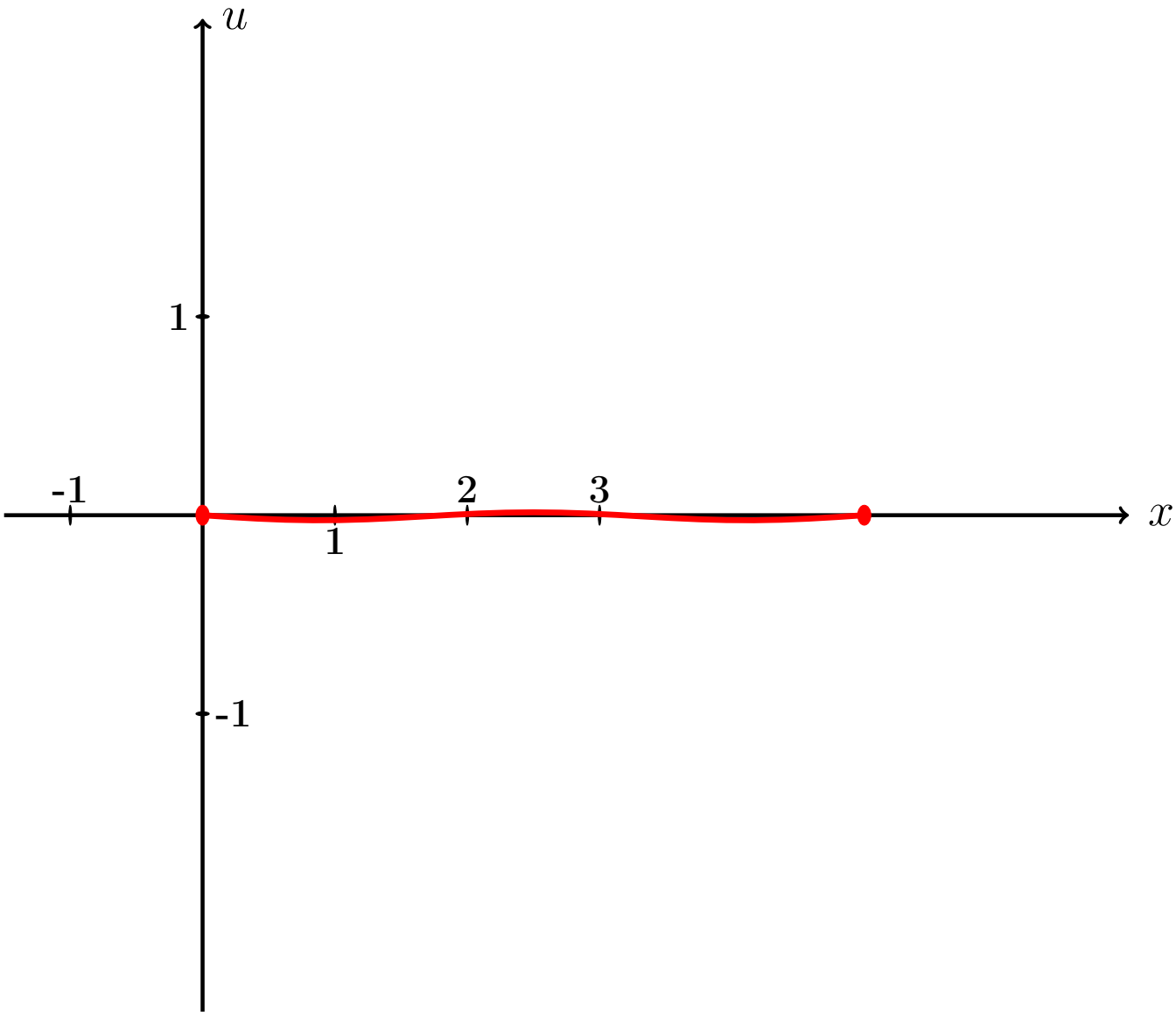


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

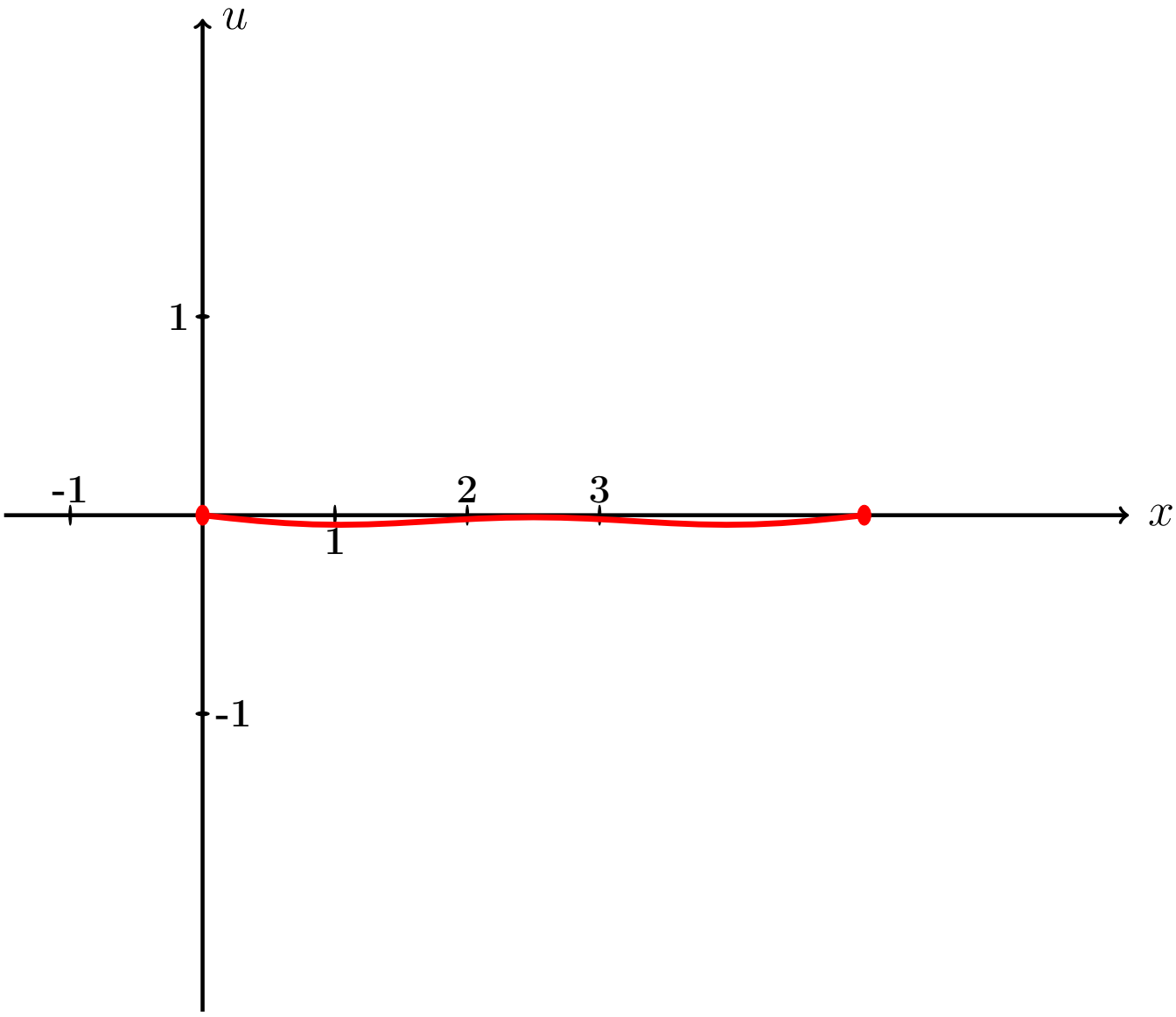


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

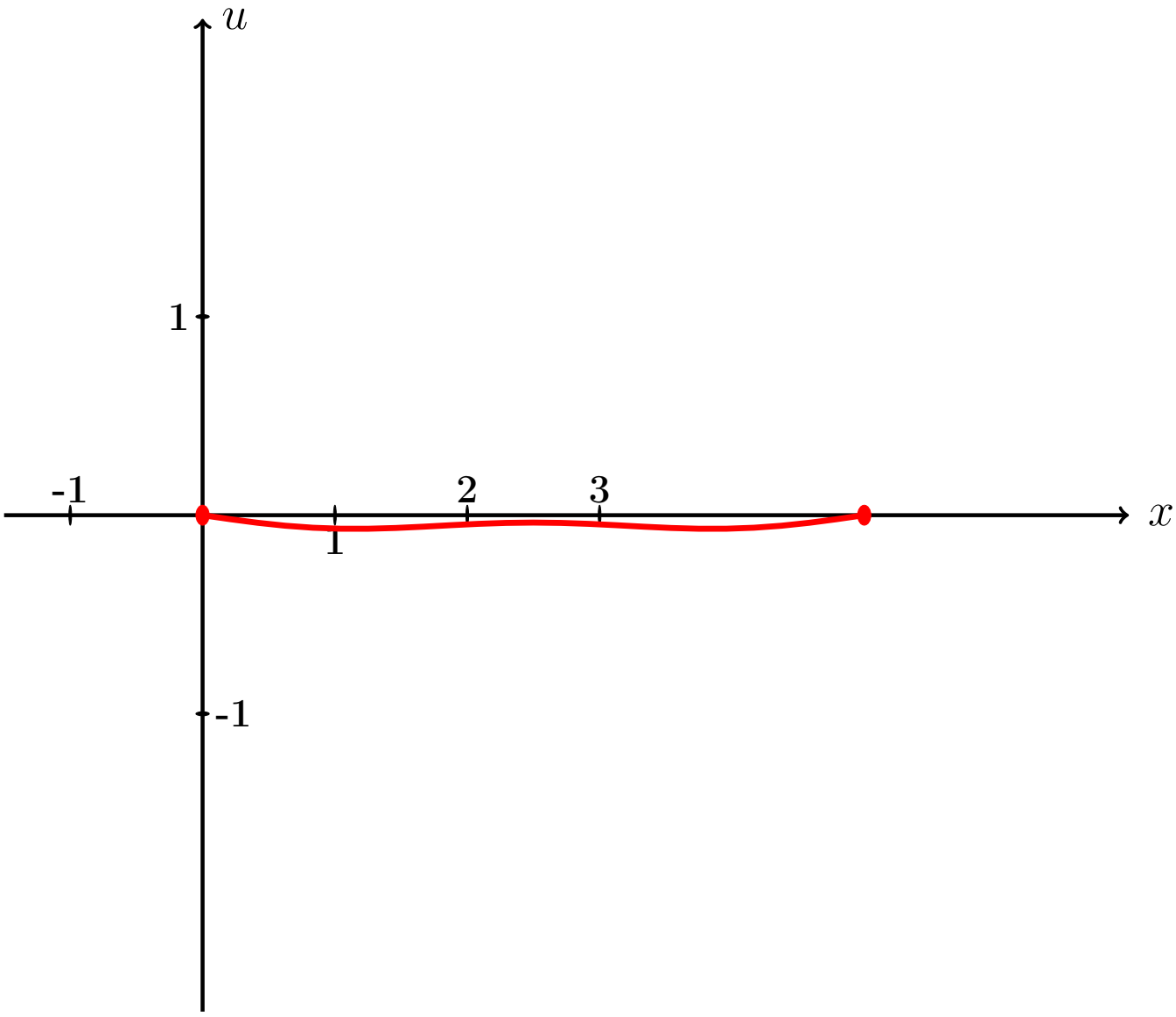


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

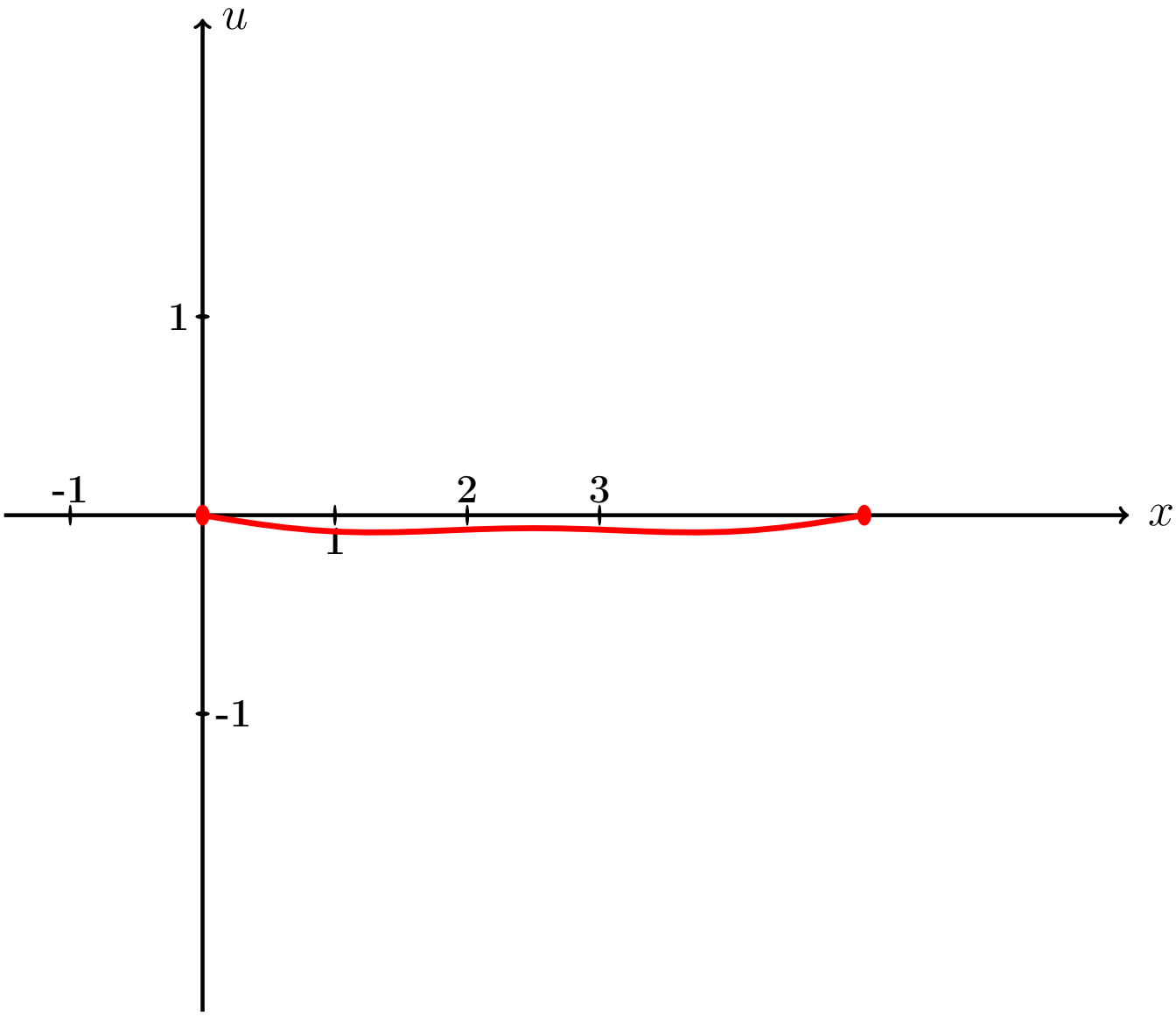


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

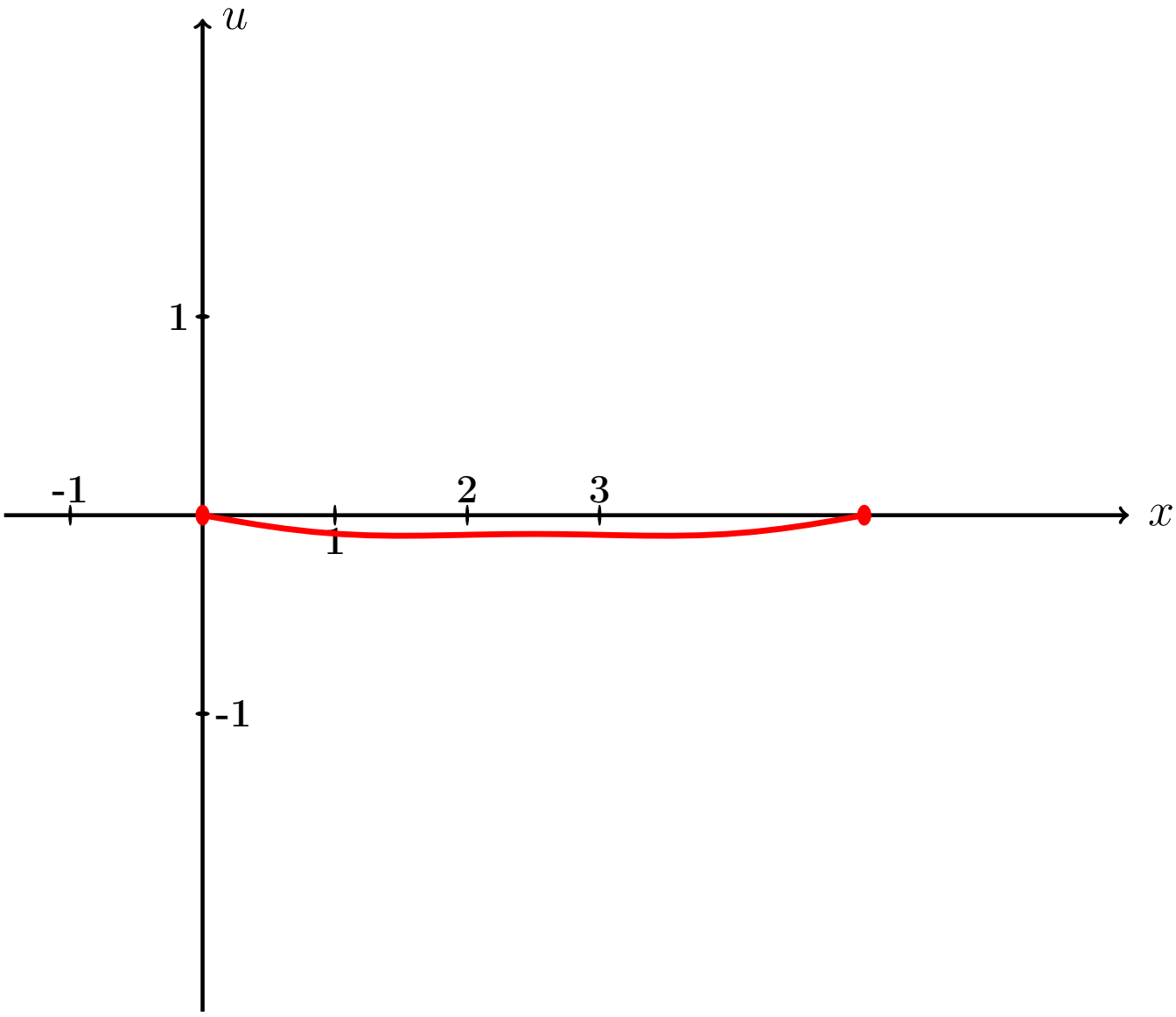


Рис.:

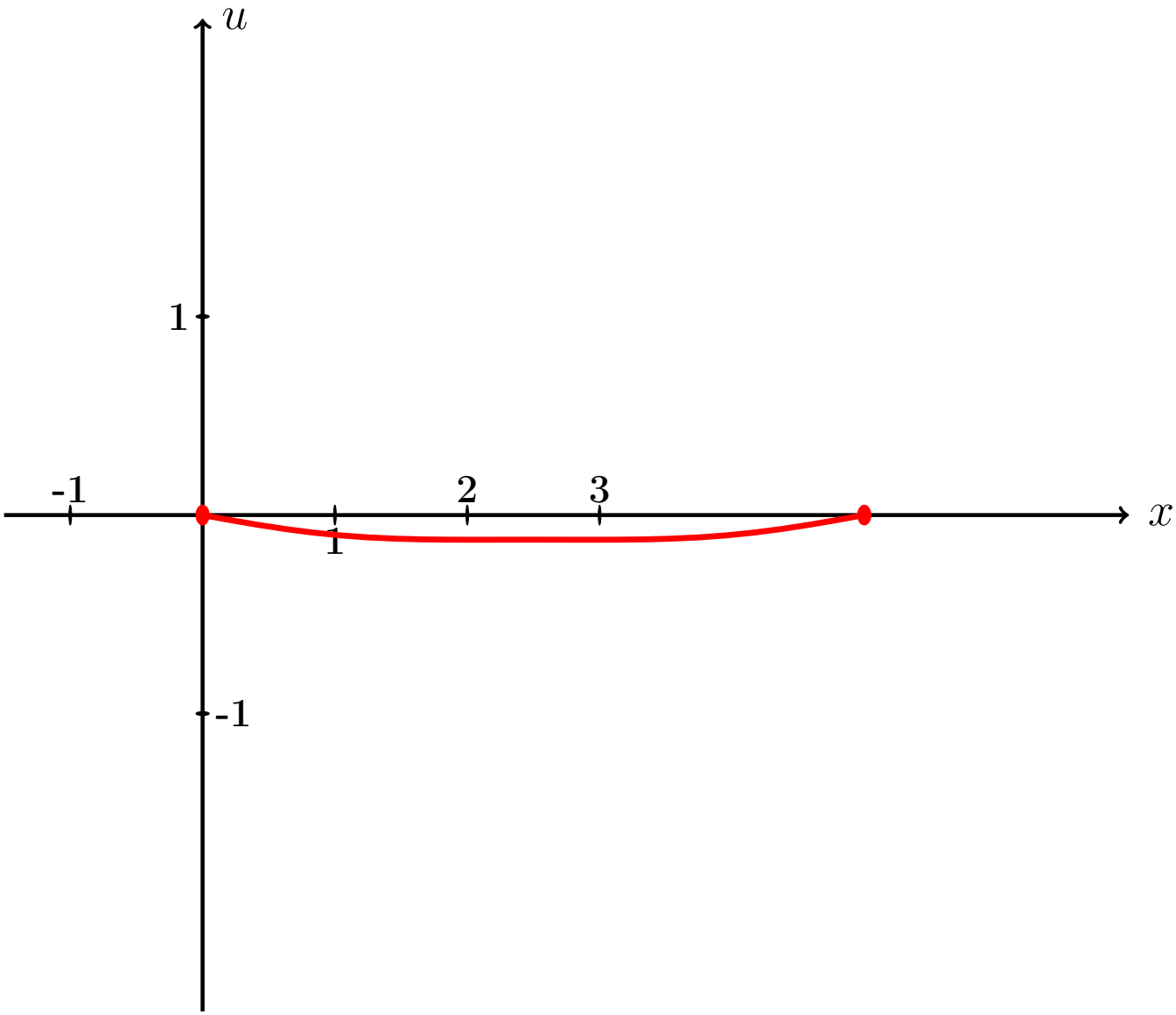


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

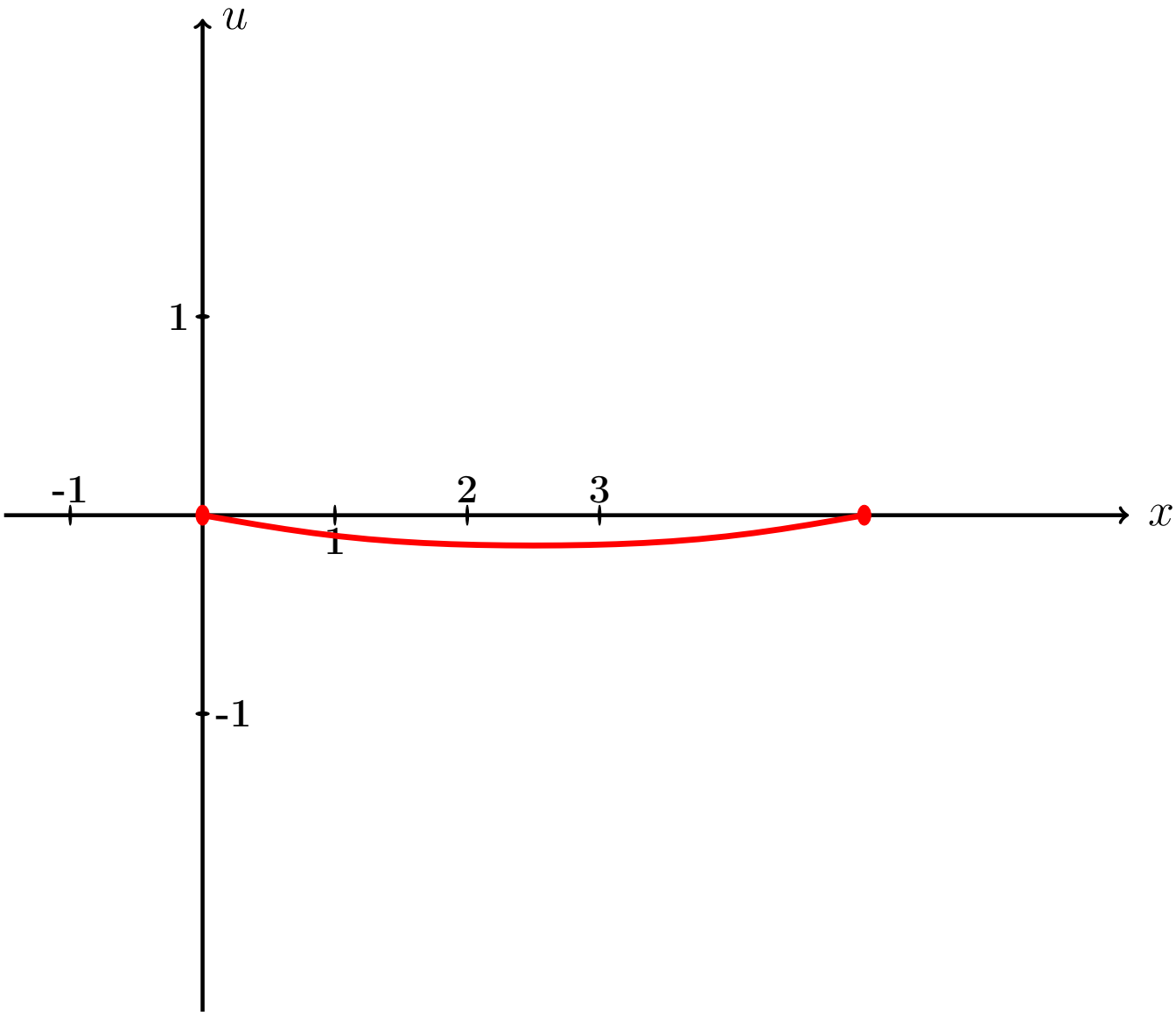


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

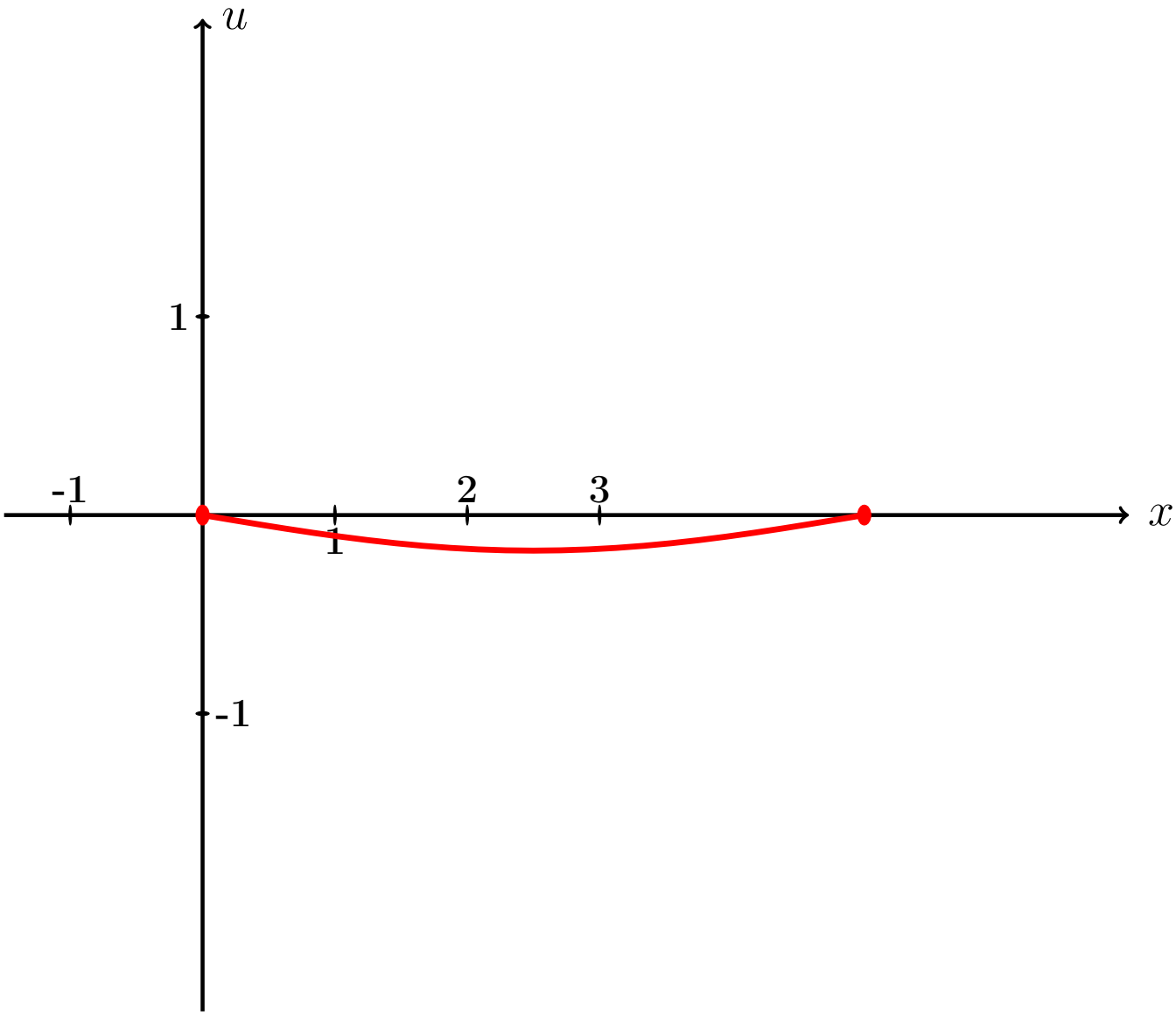


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

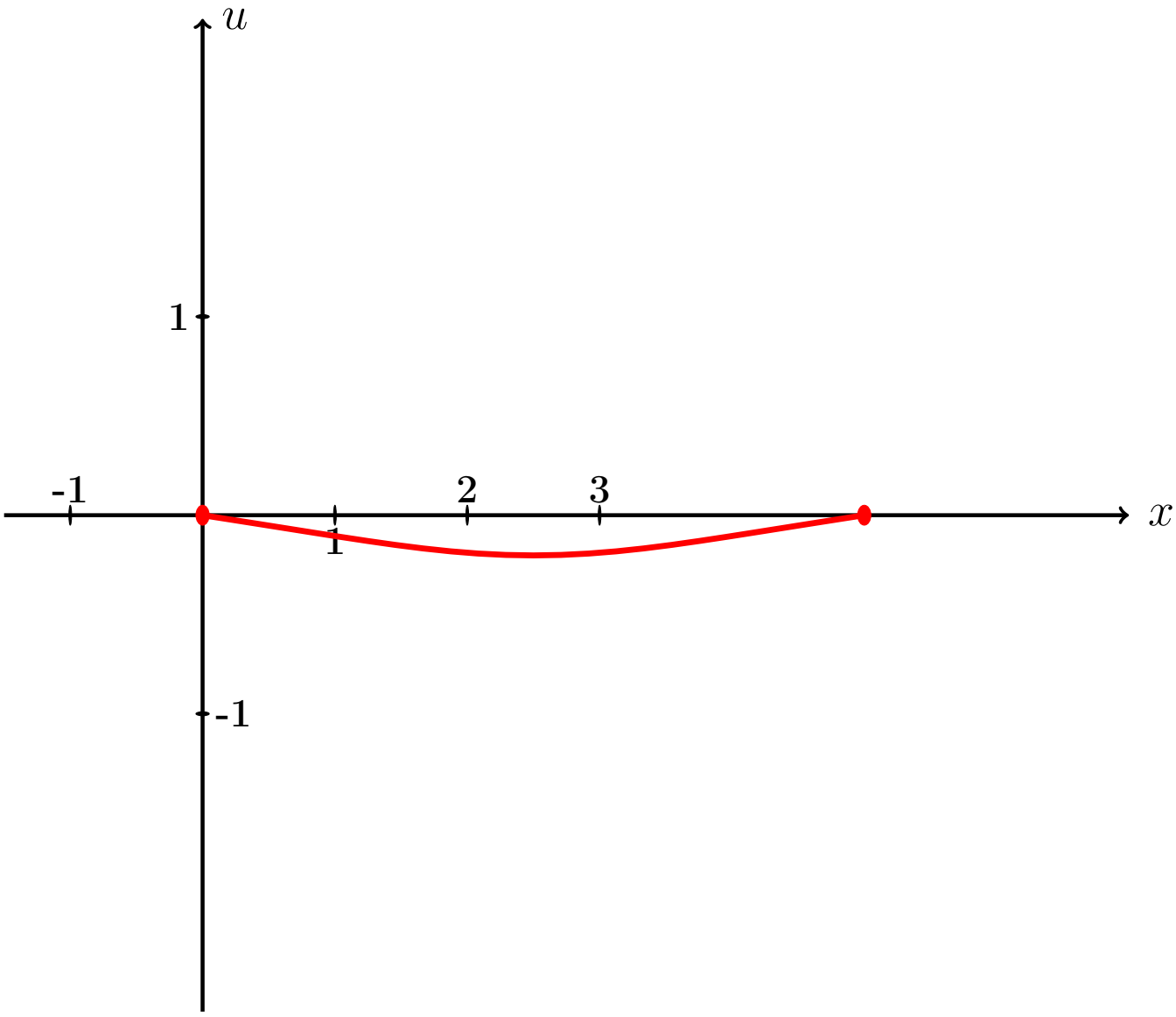


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

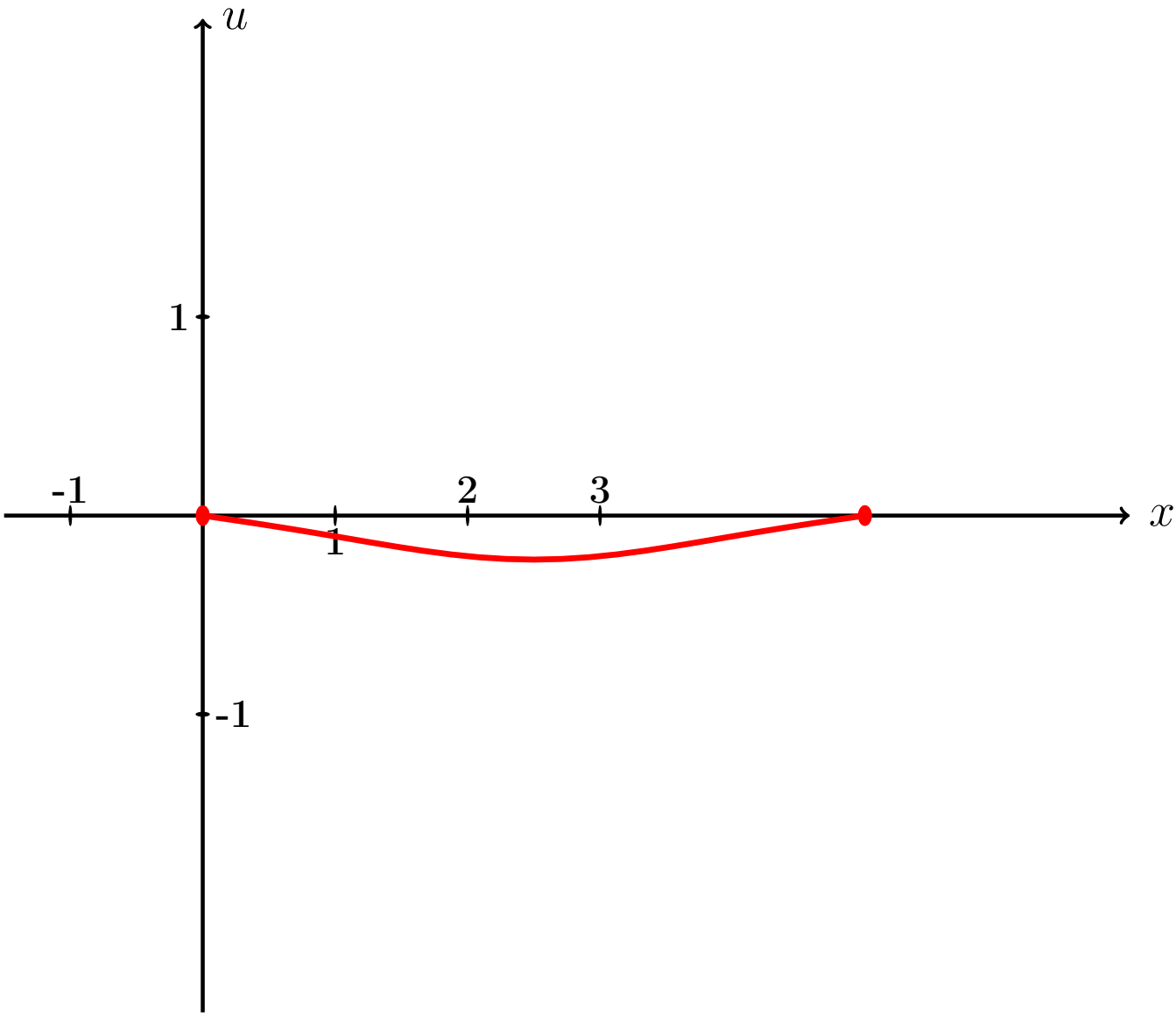


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

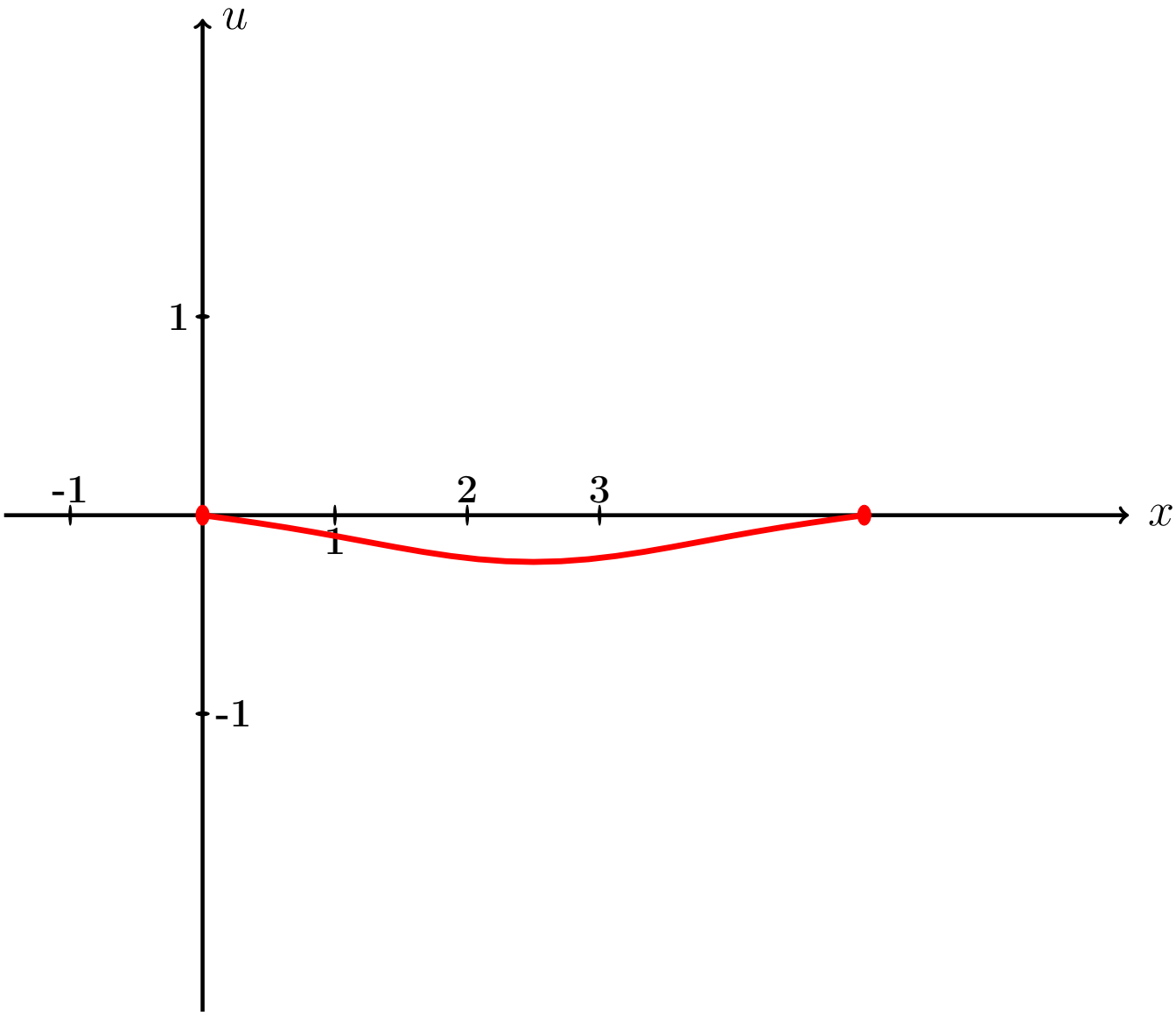


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

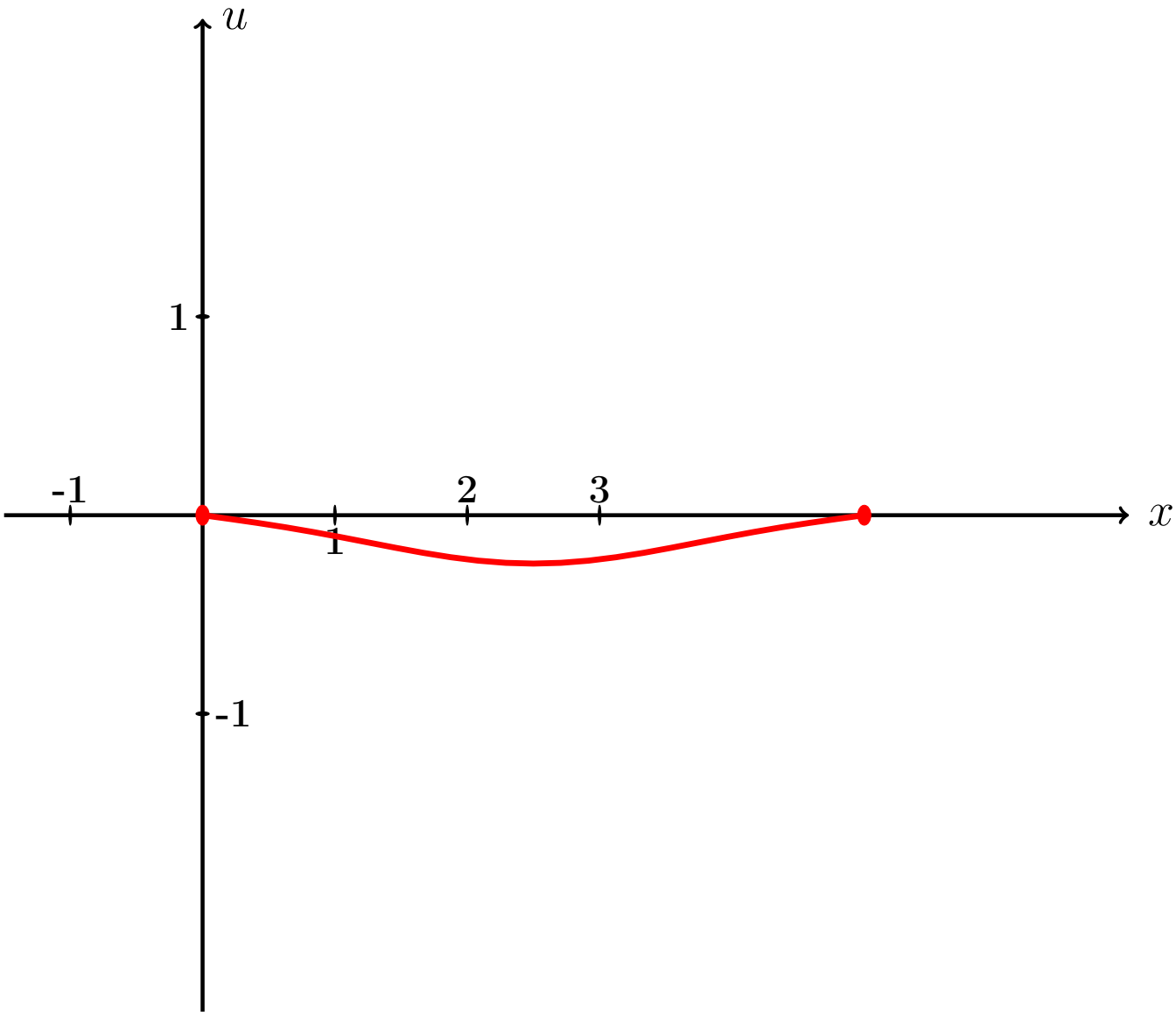


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

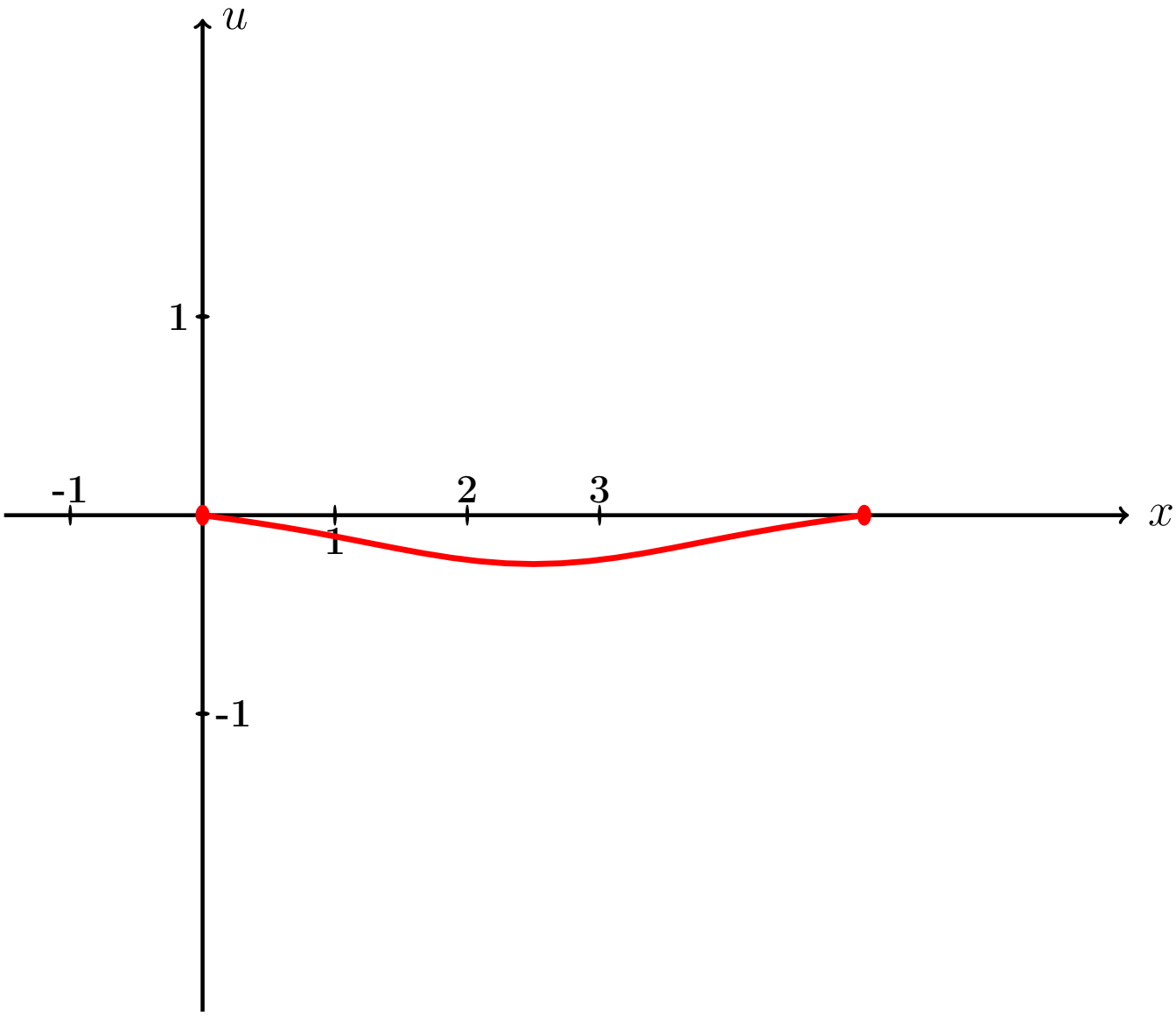


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

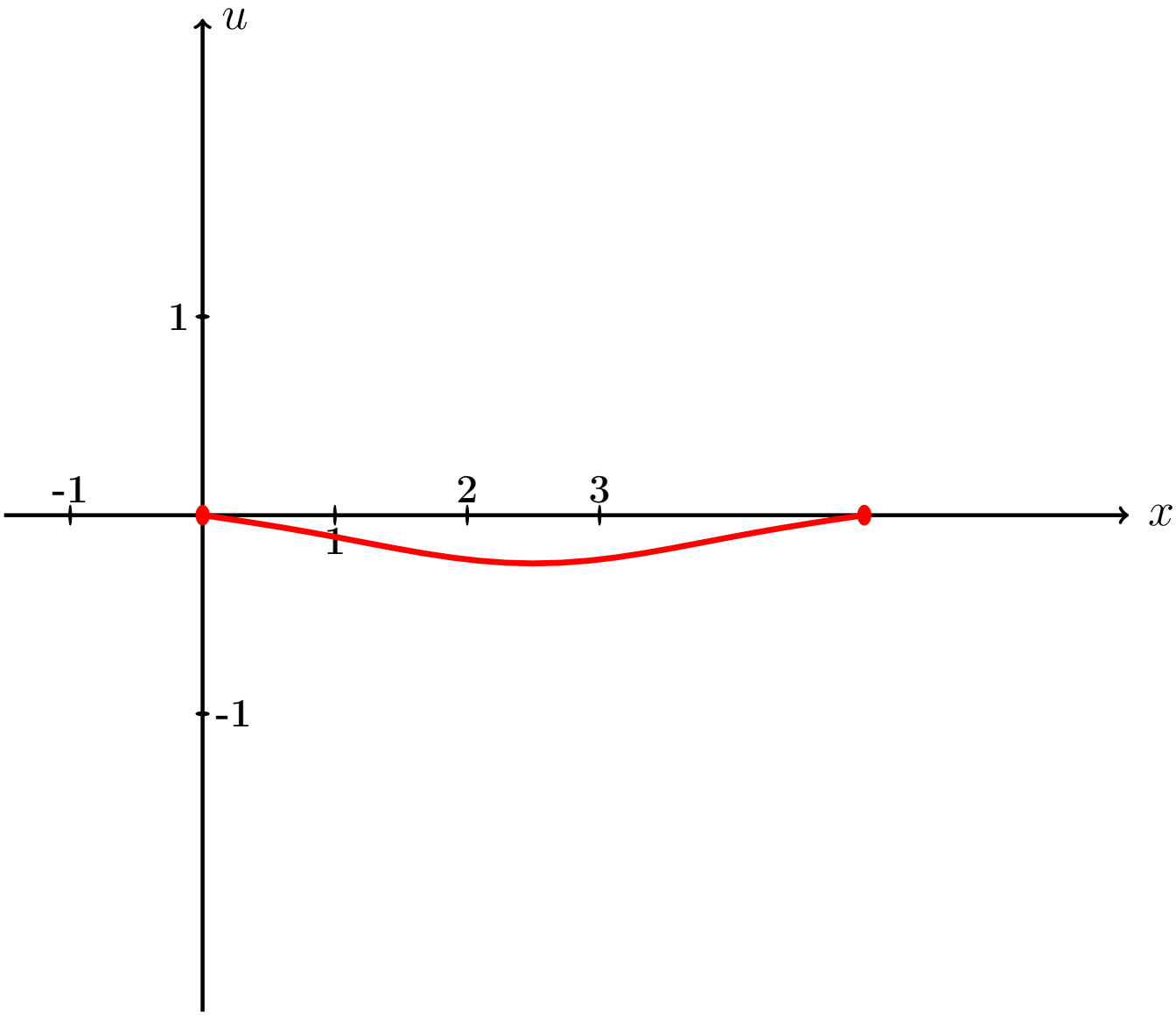


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

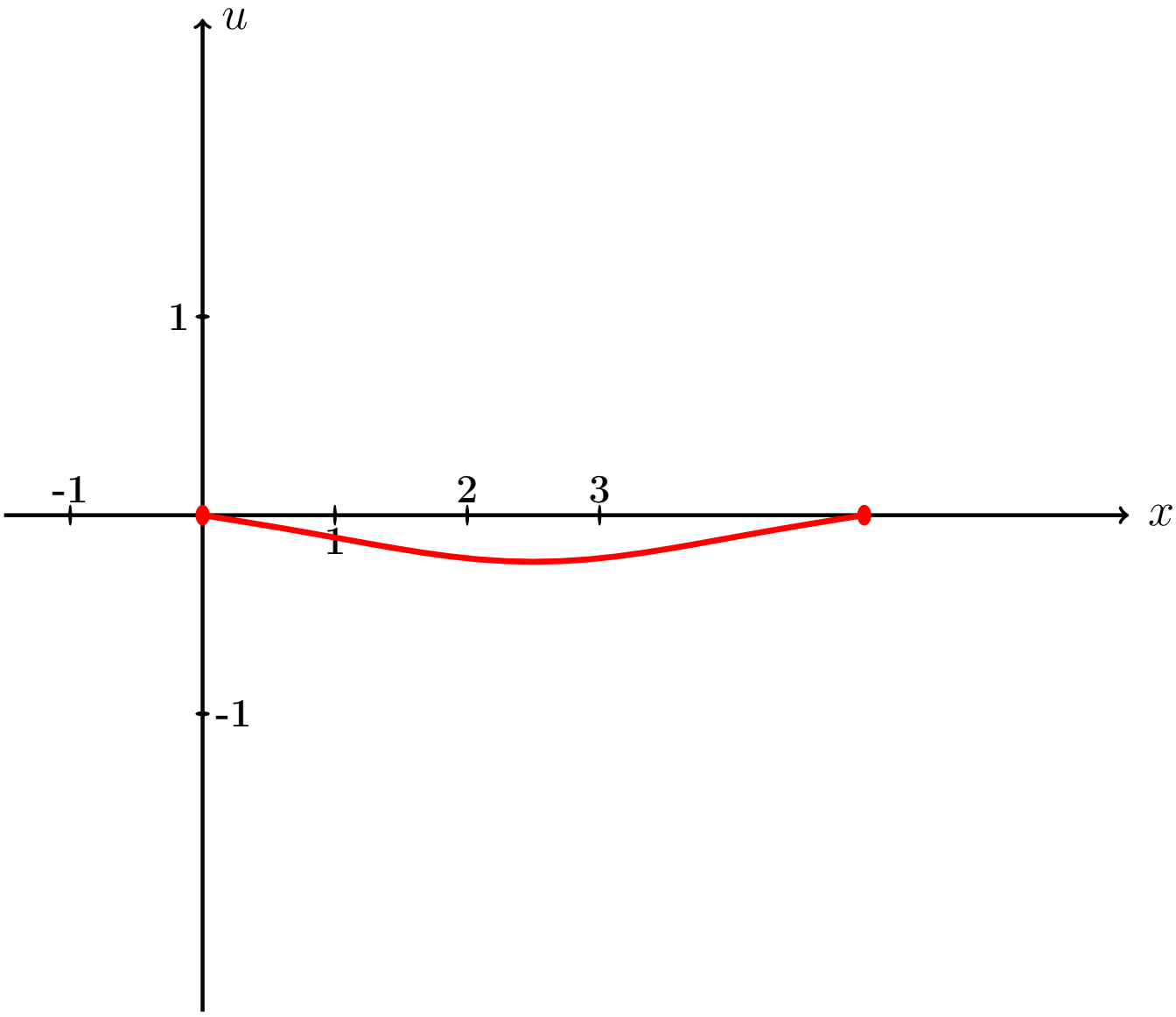


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

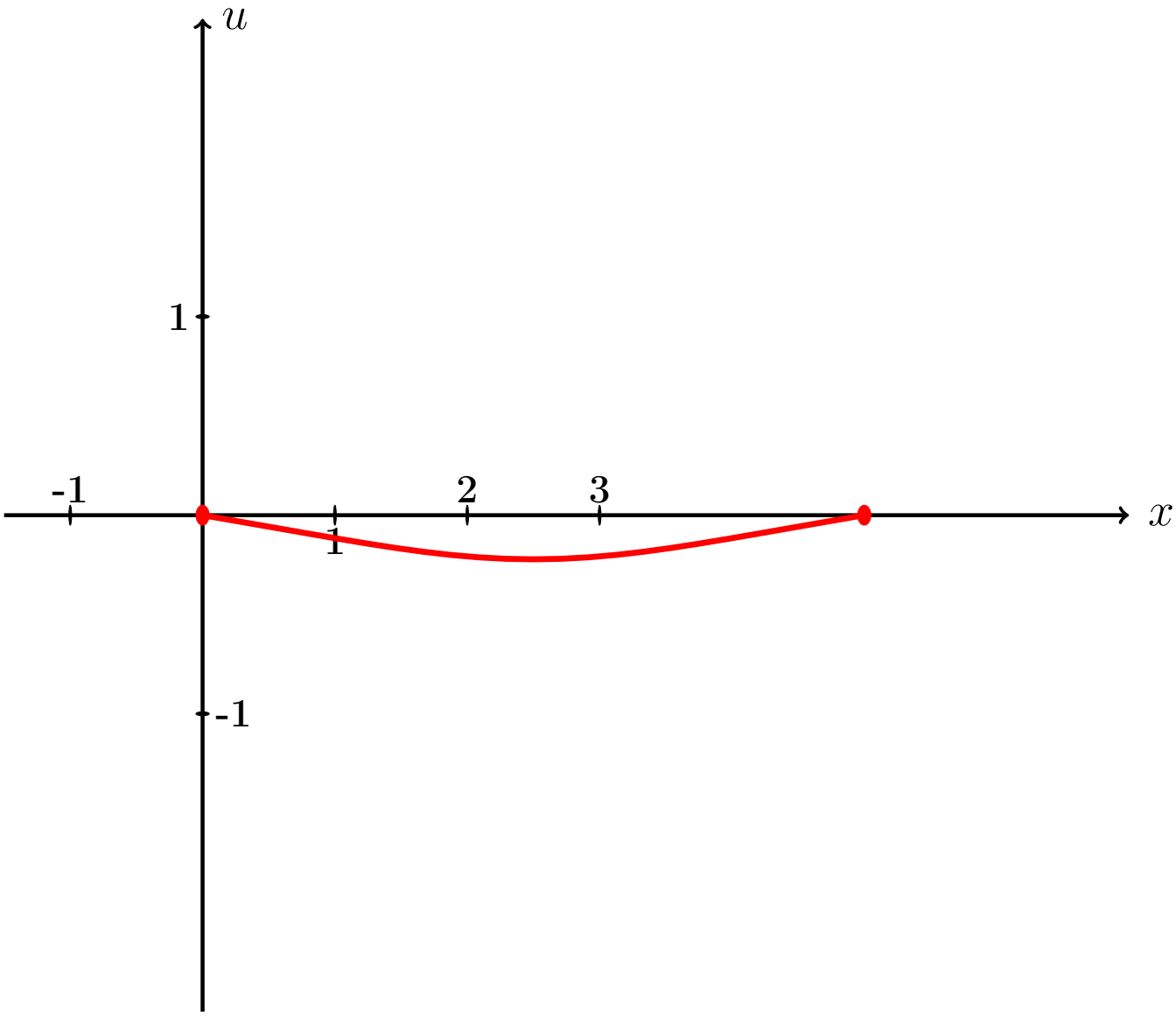


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

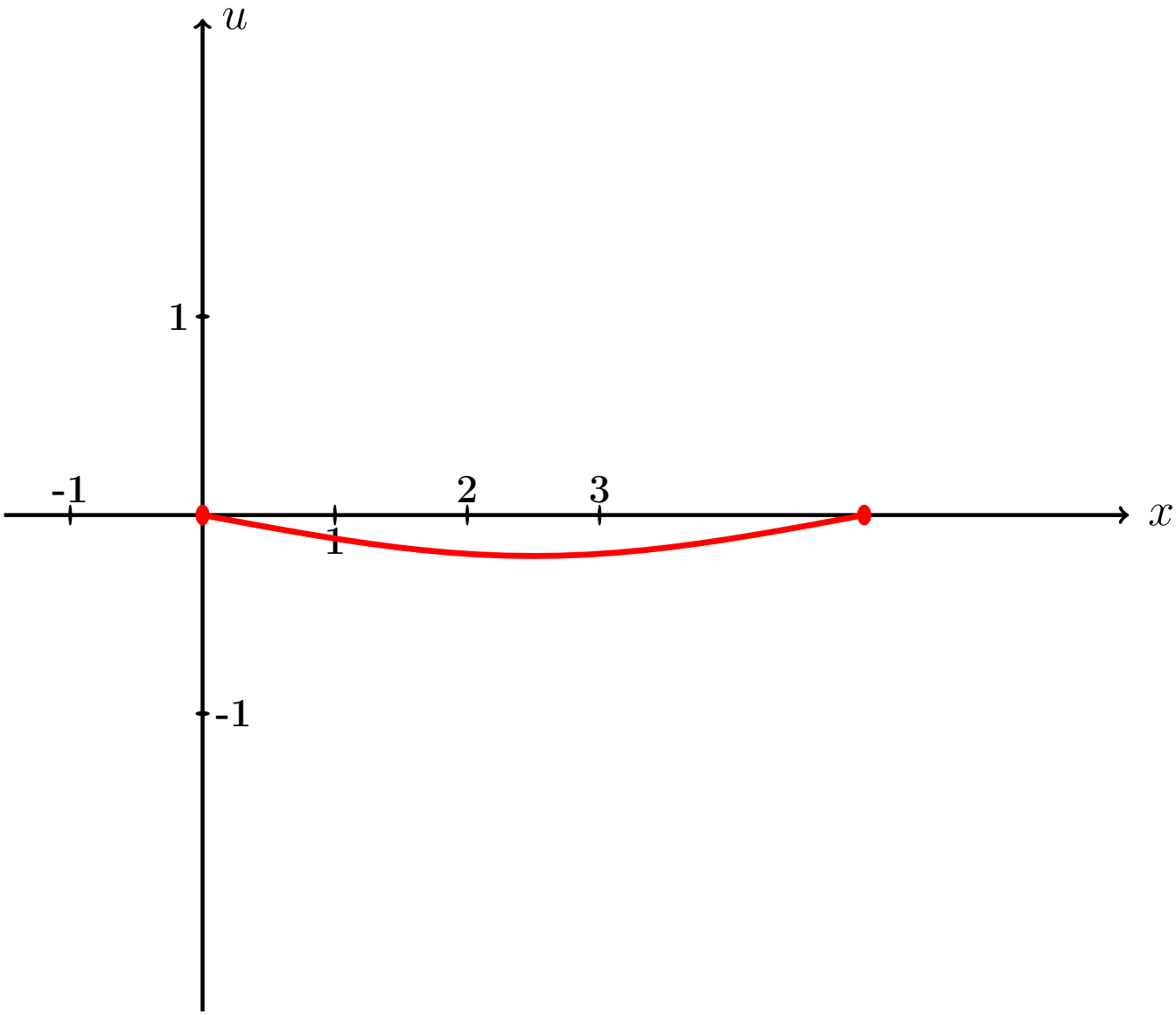


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

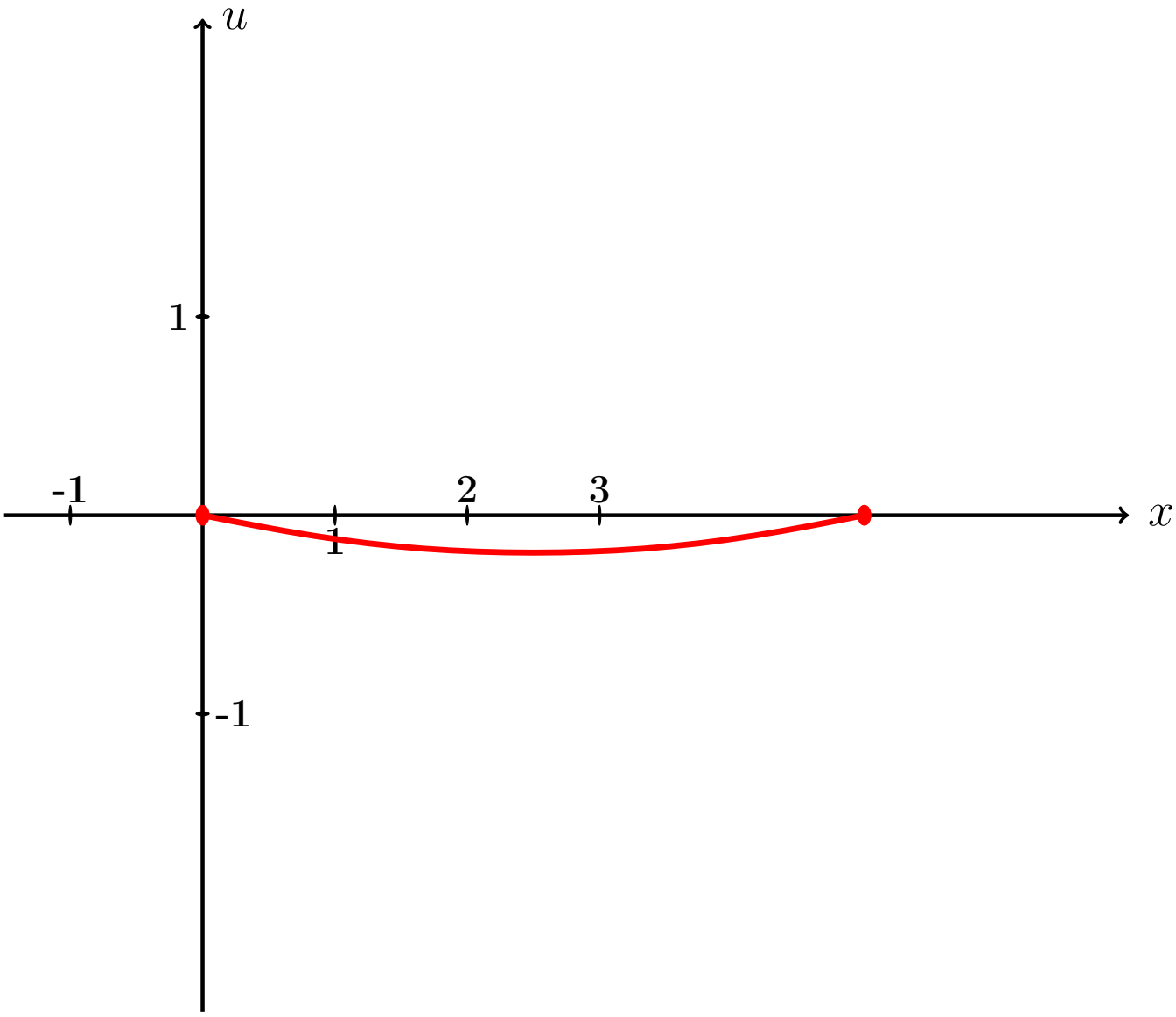


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

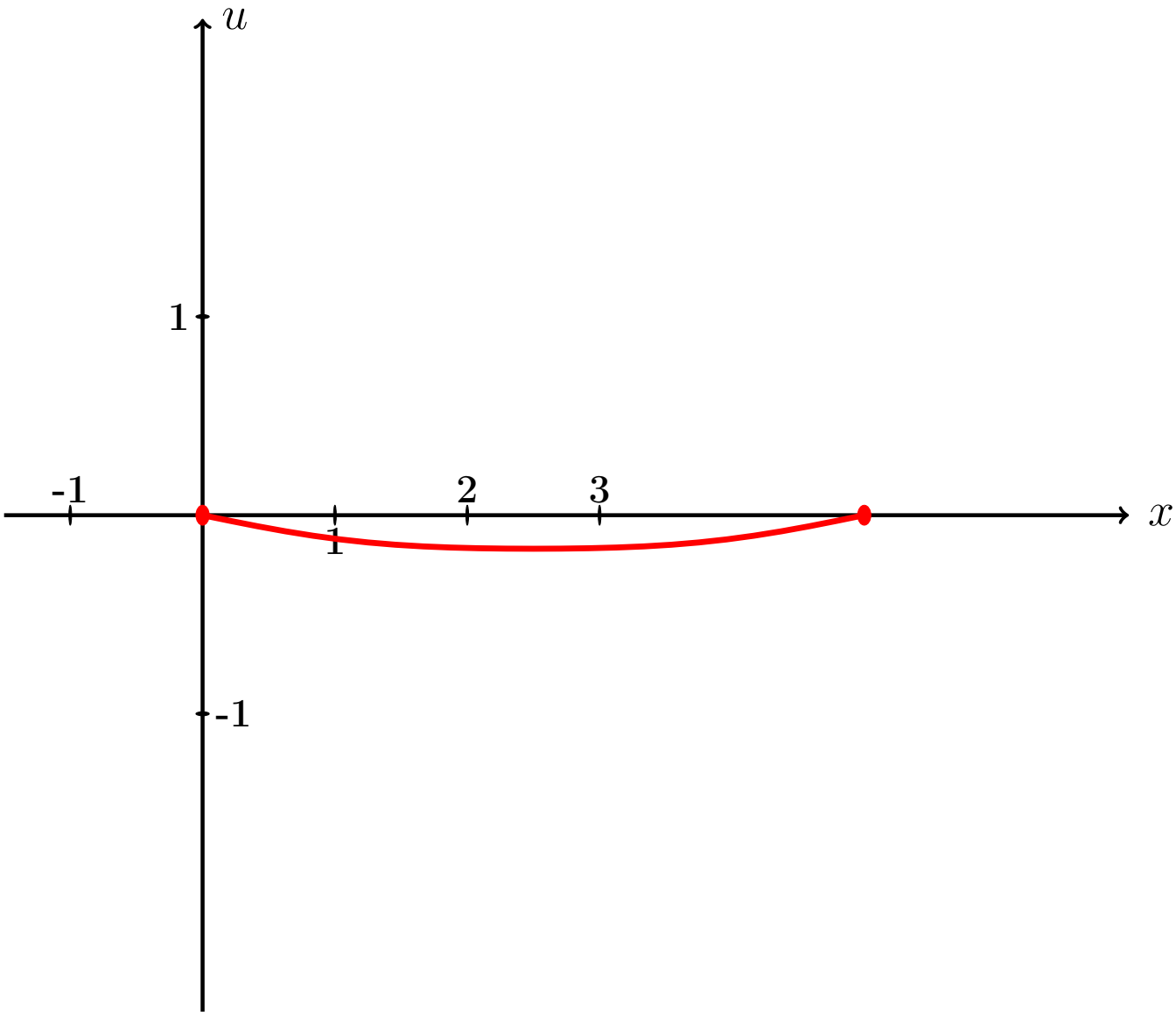


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

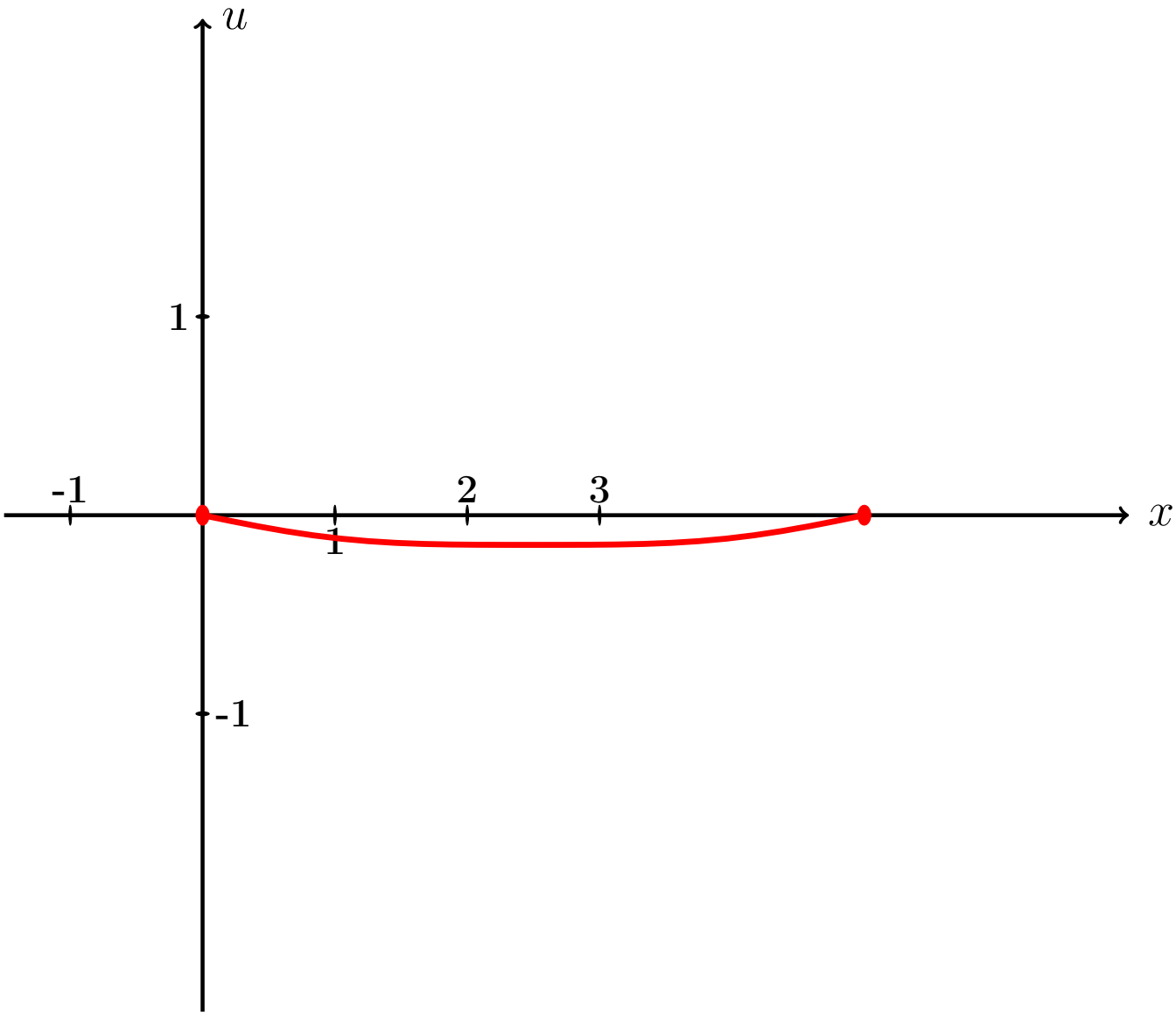


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

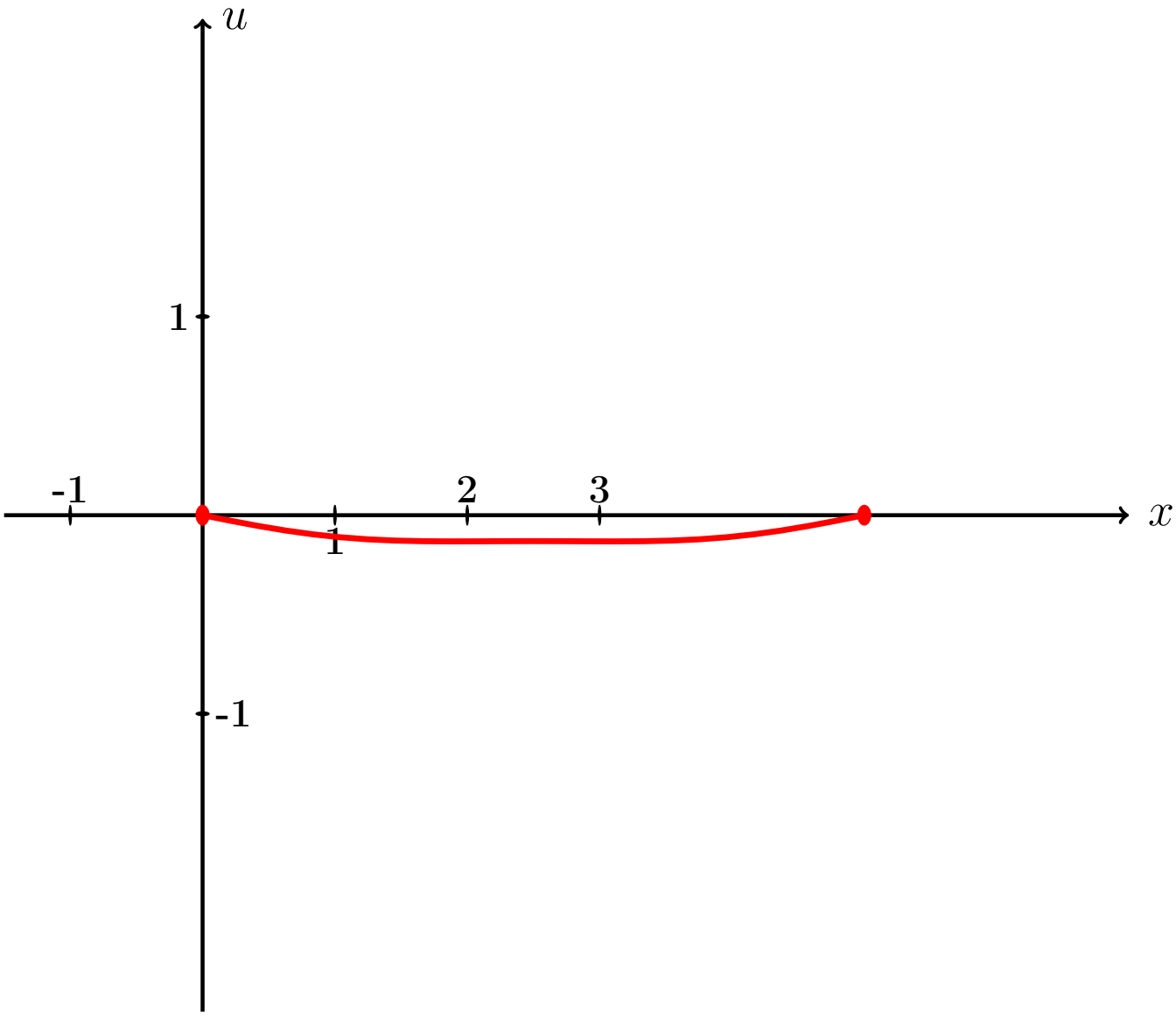


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

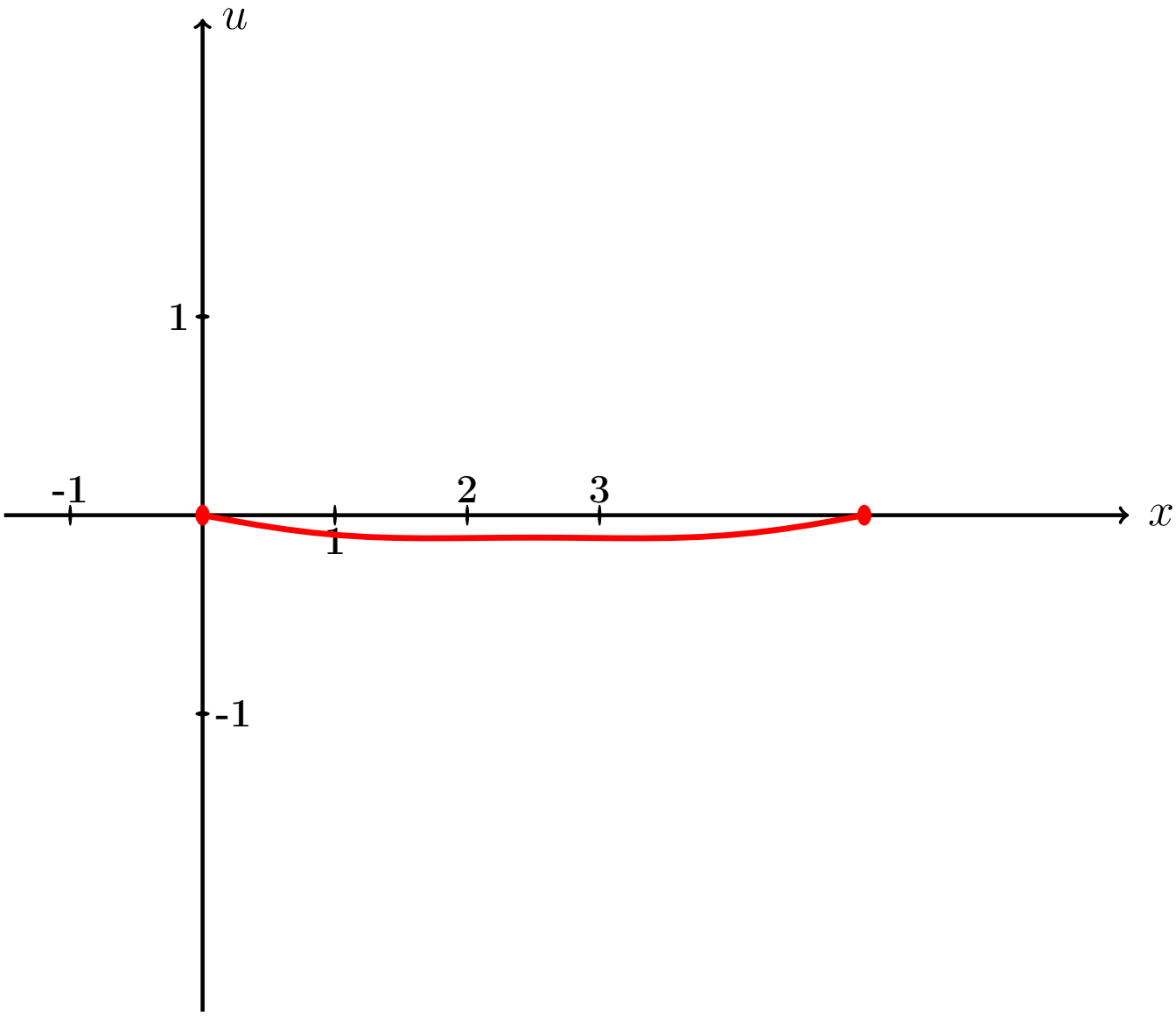


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

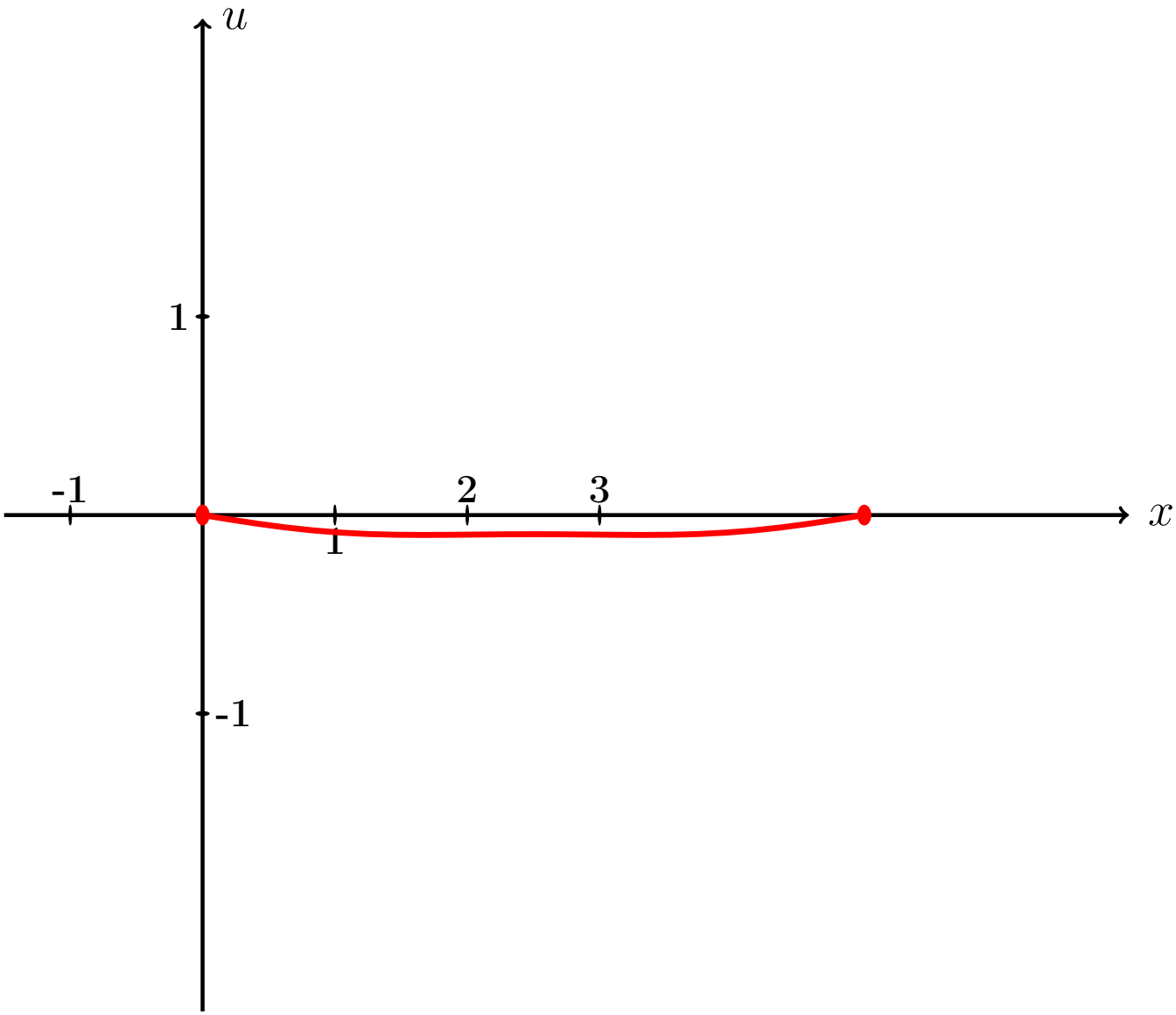


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

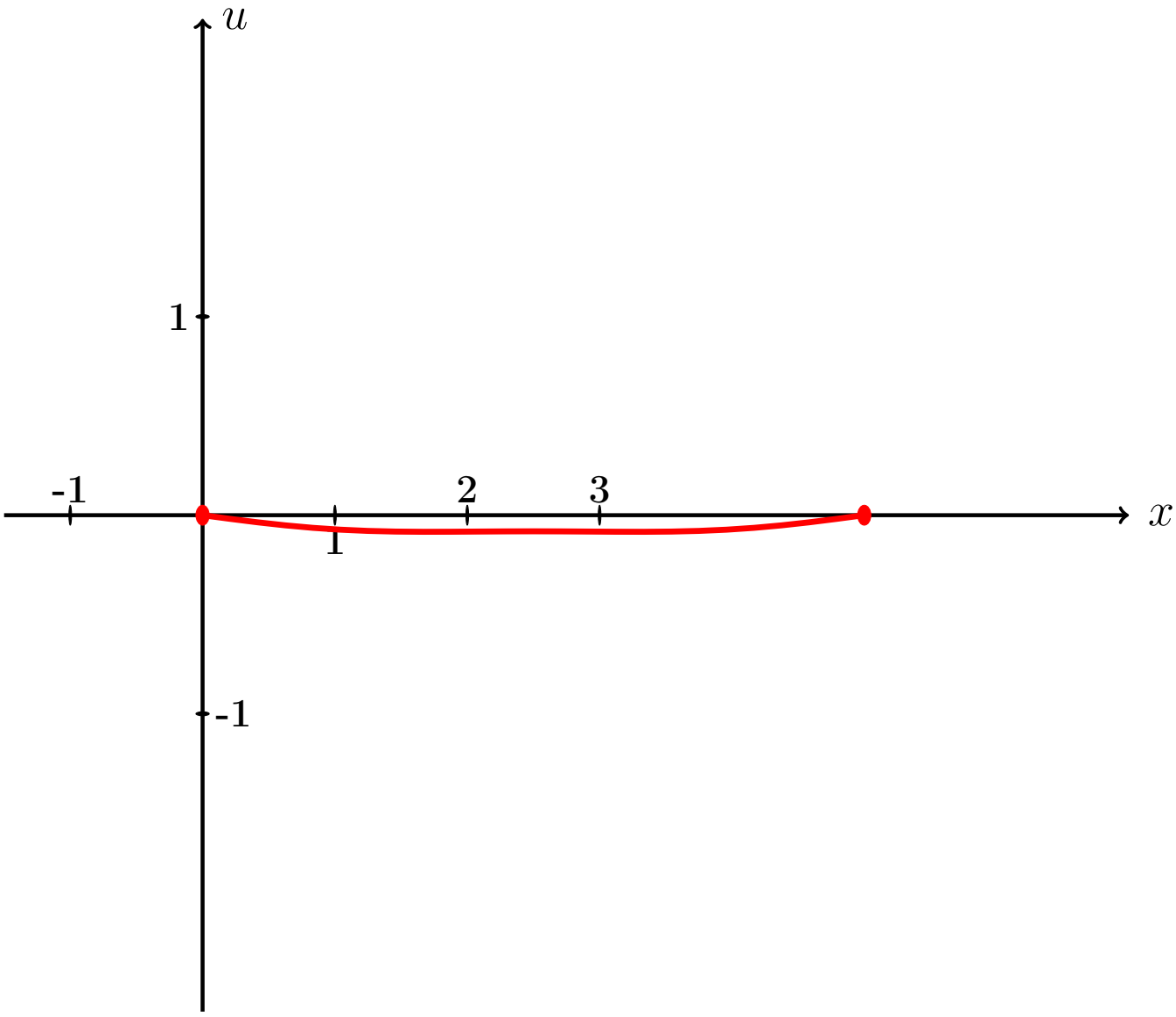


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

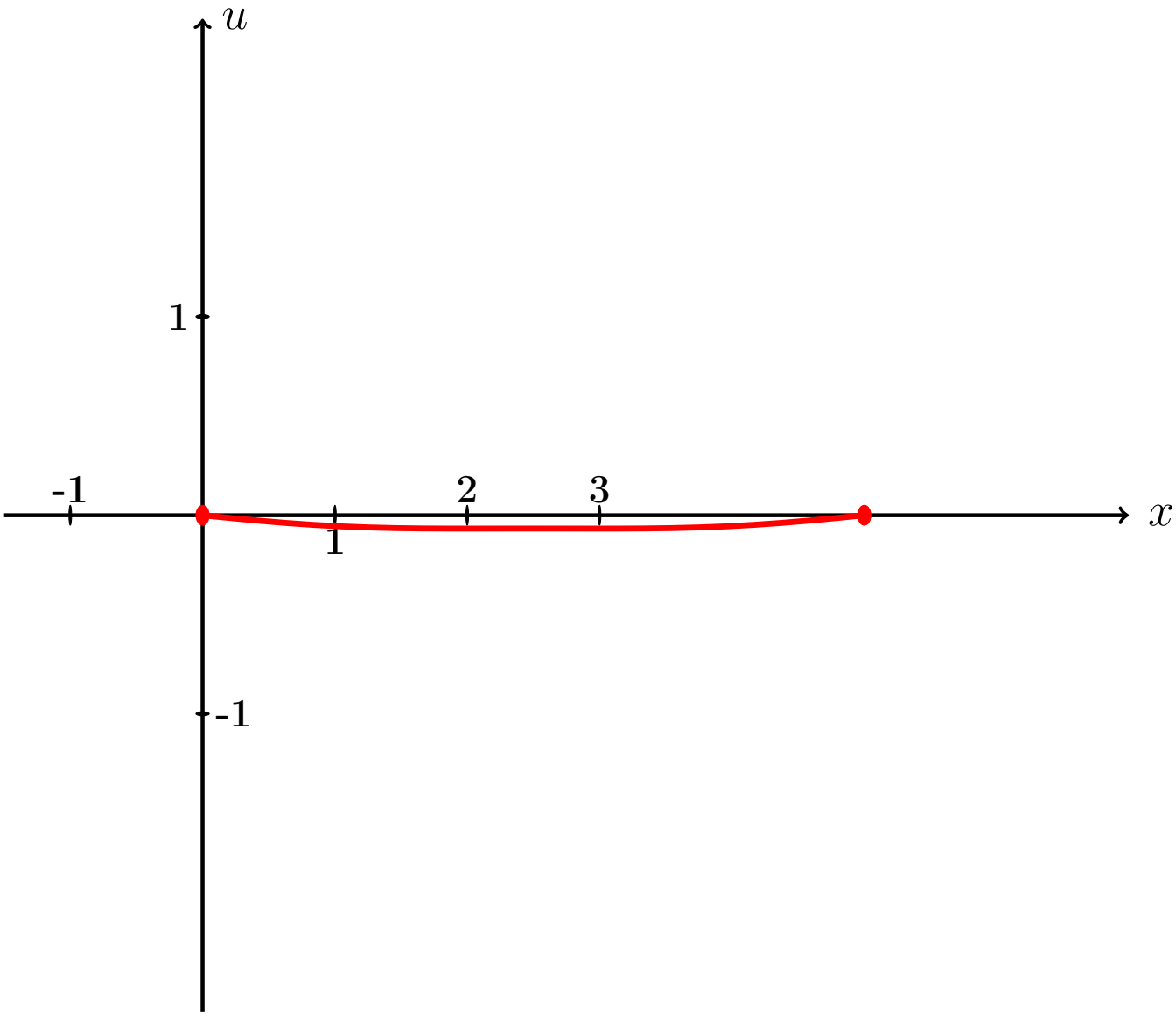


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

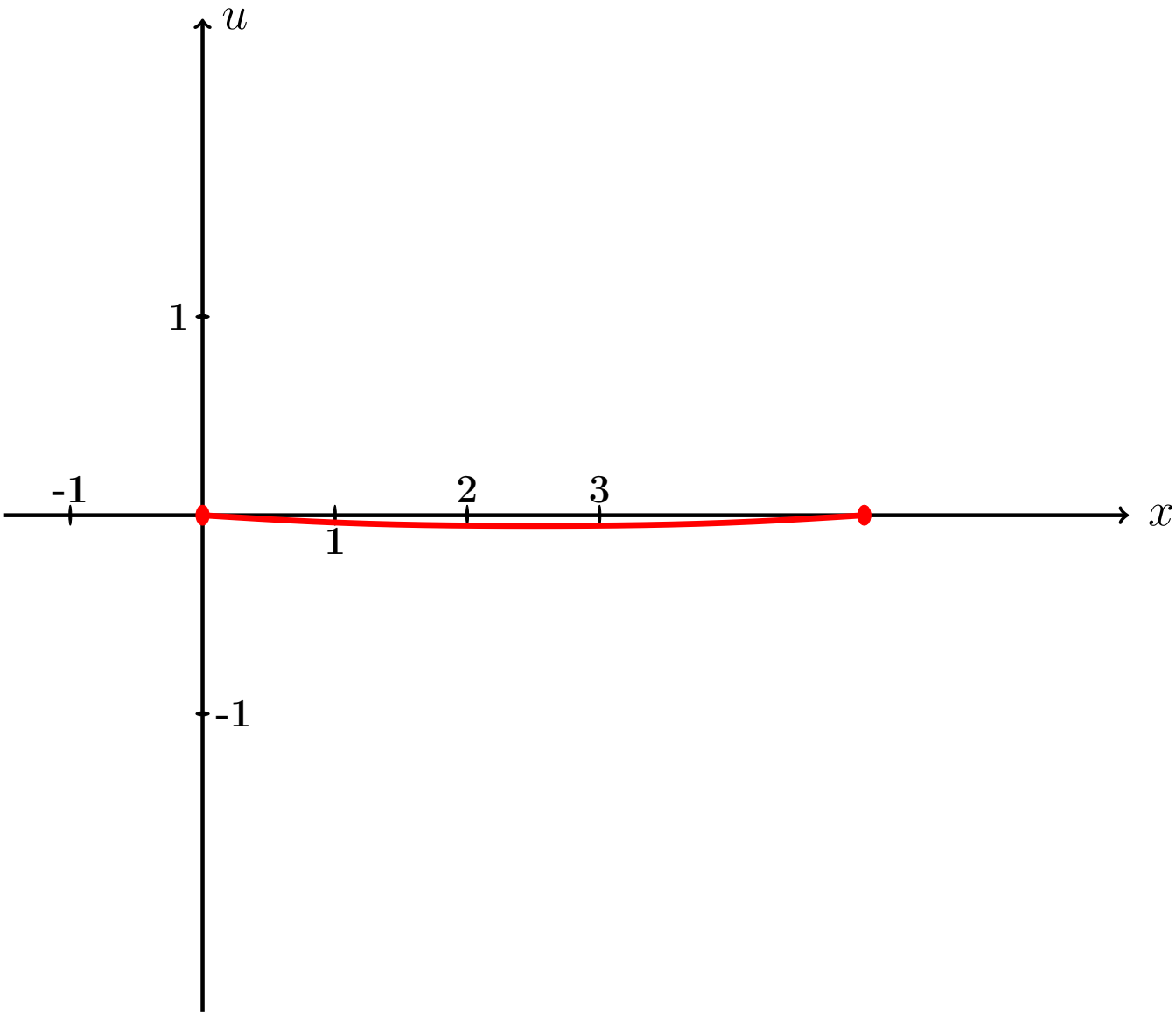


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

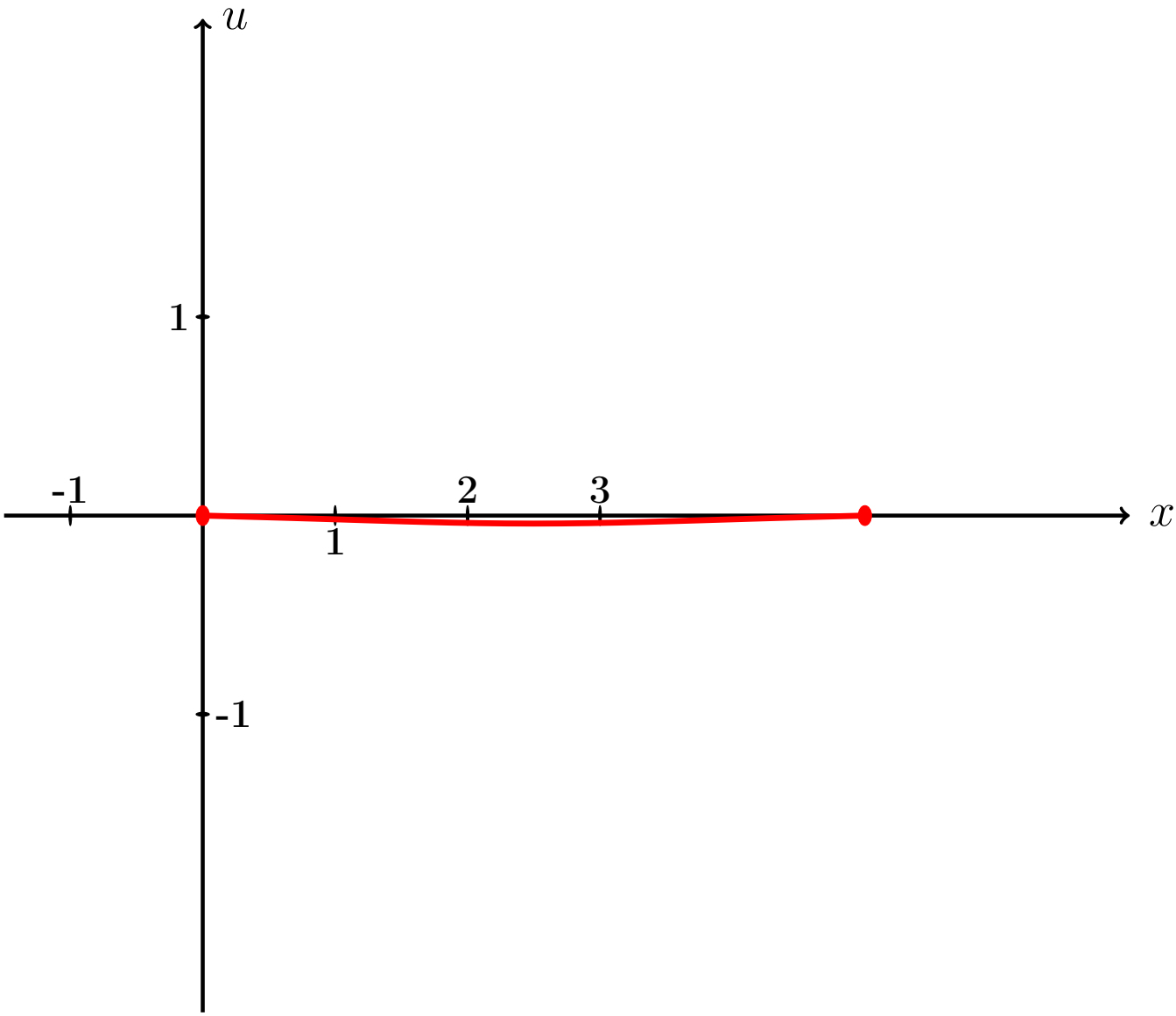


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

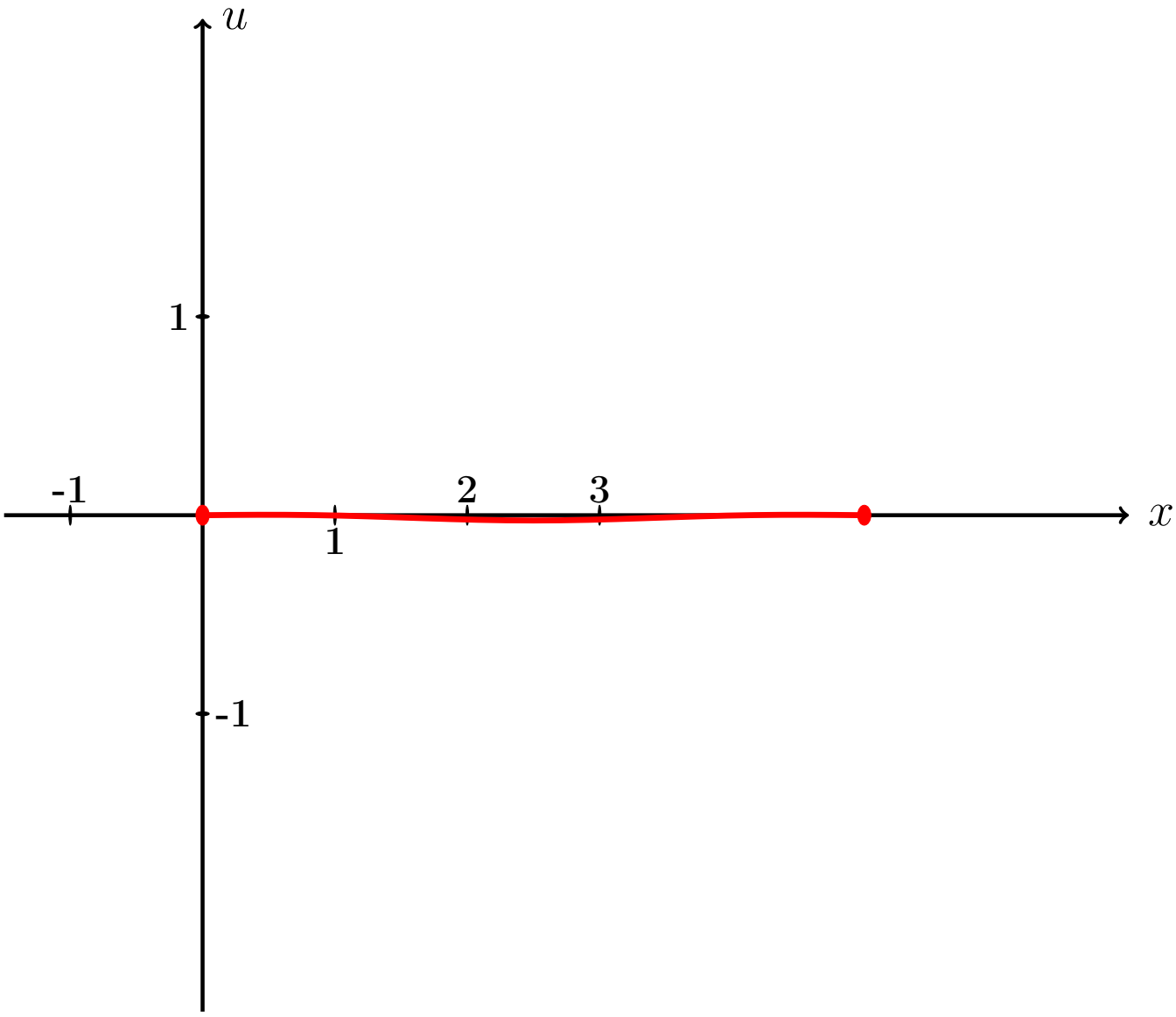


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

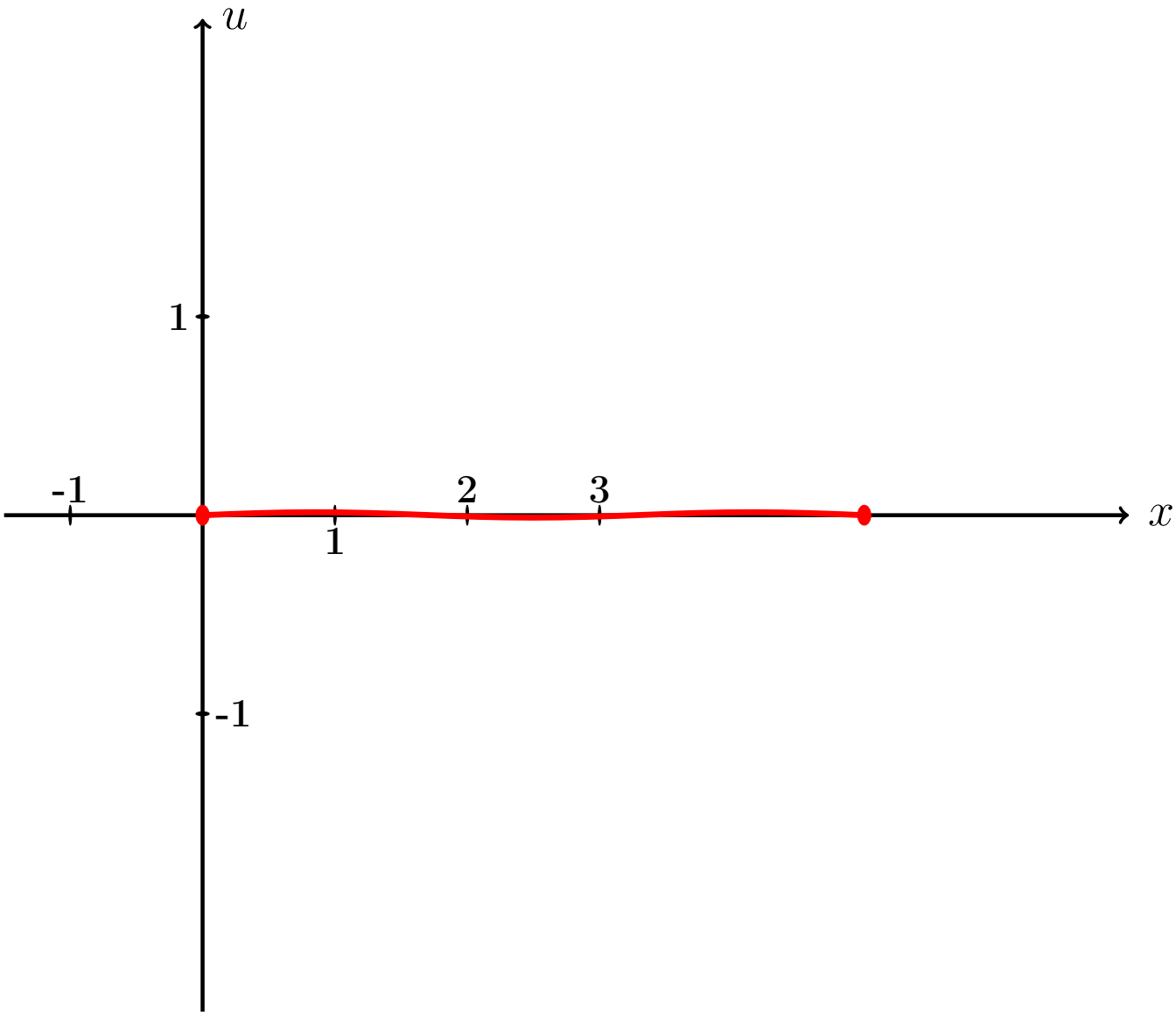


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

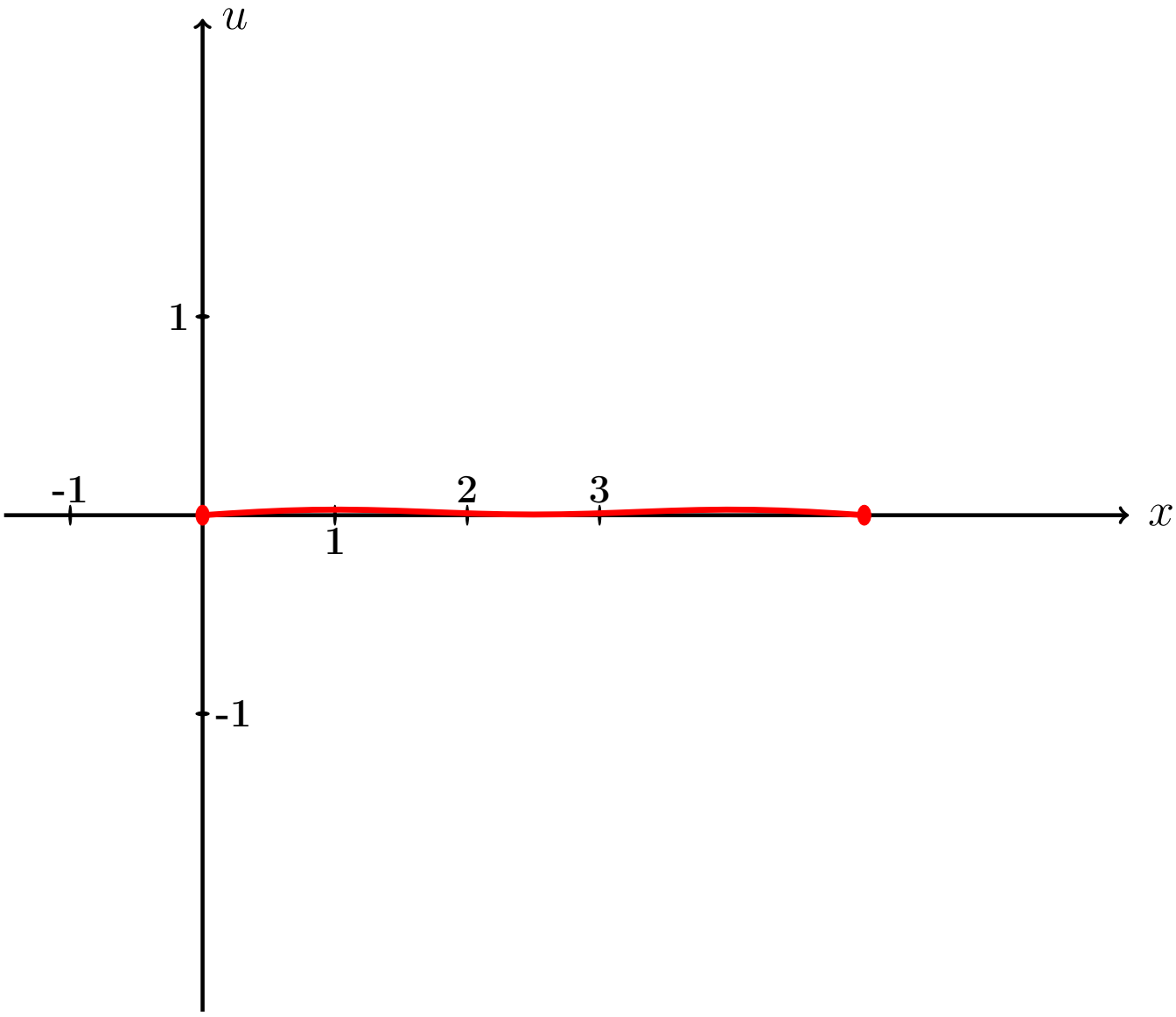


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

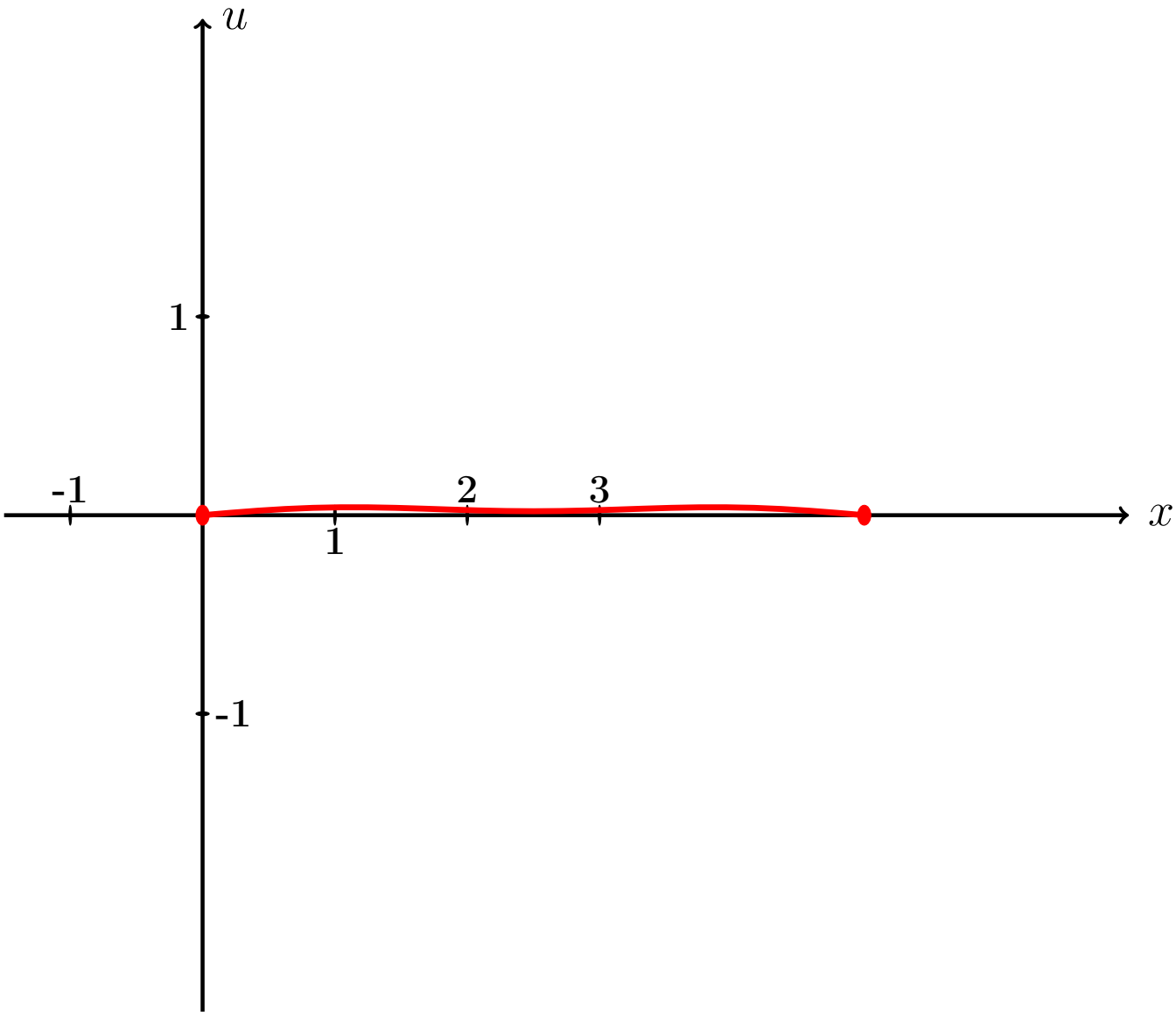


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

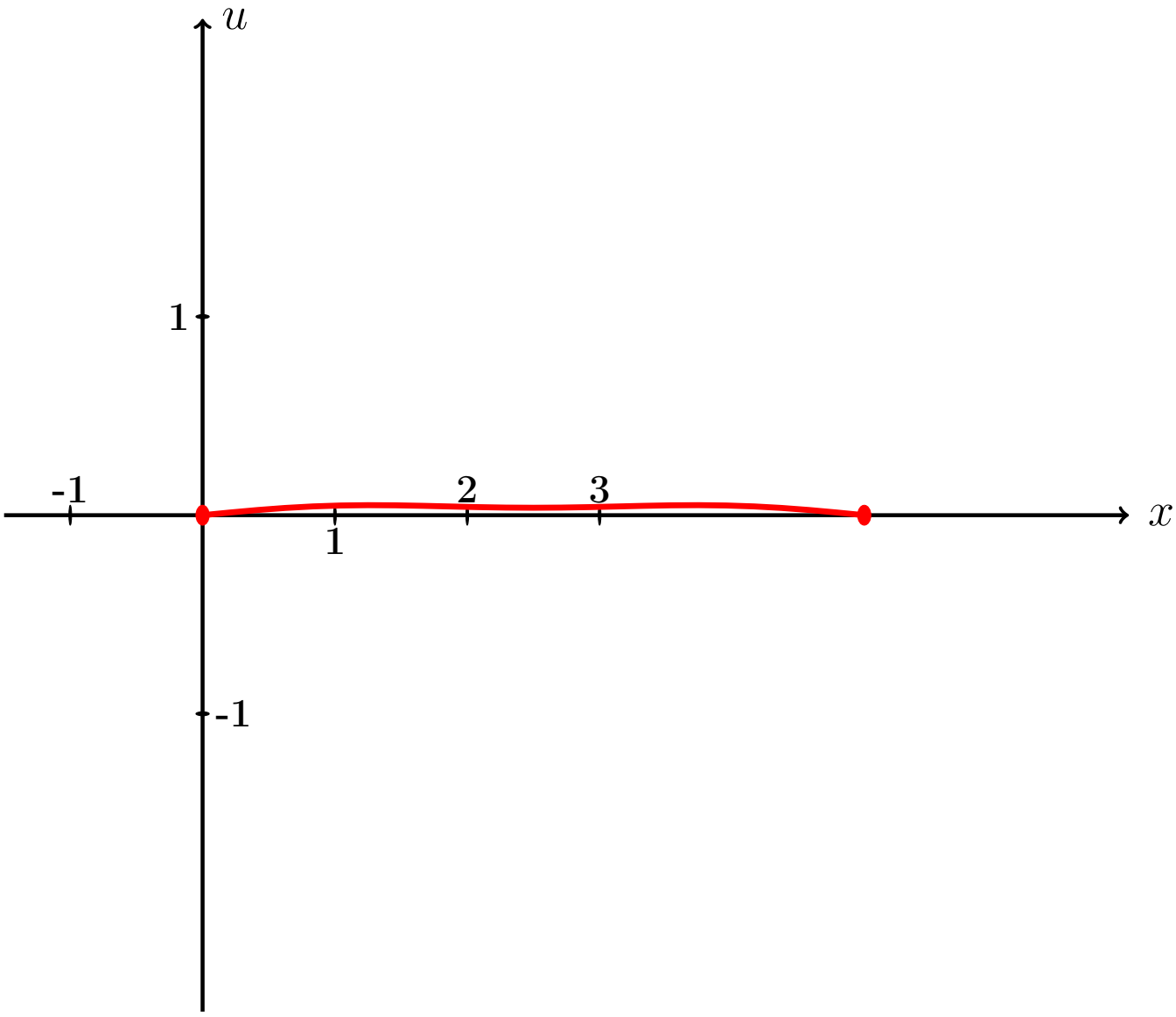


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

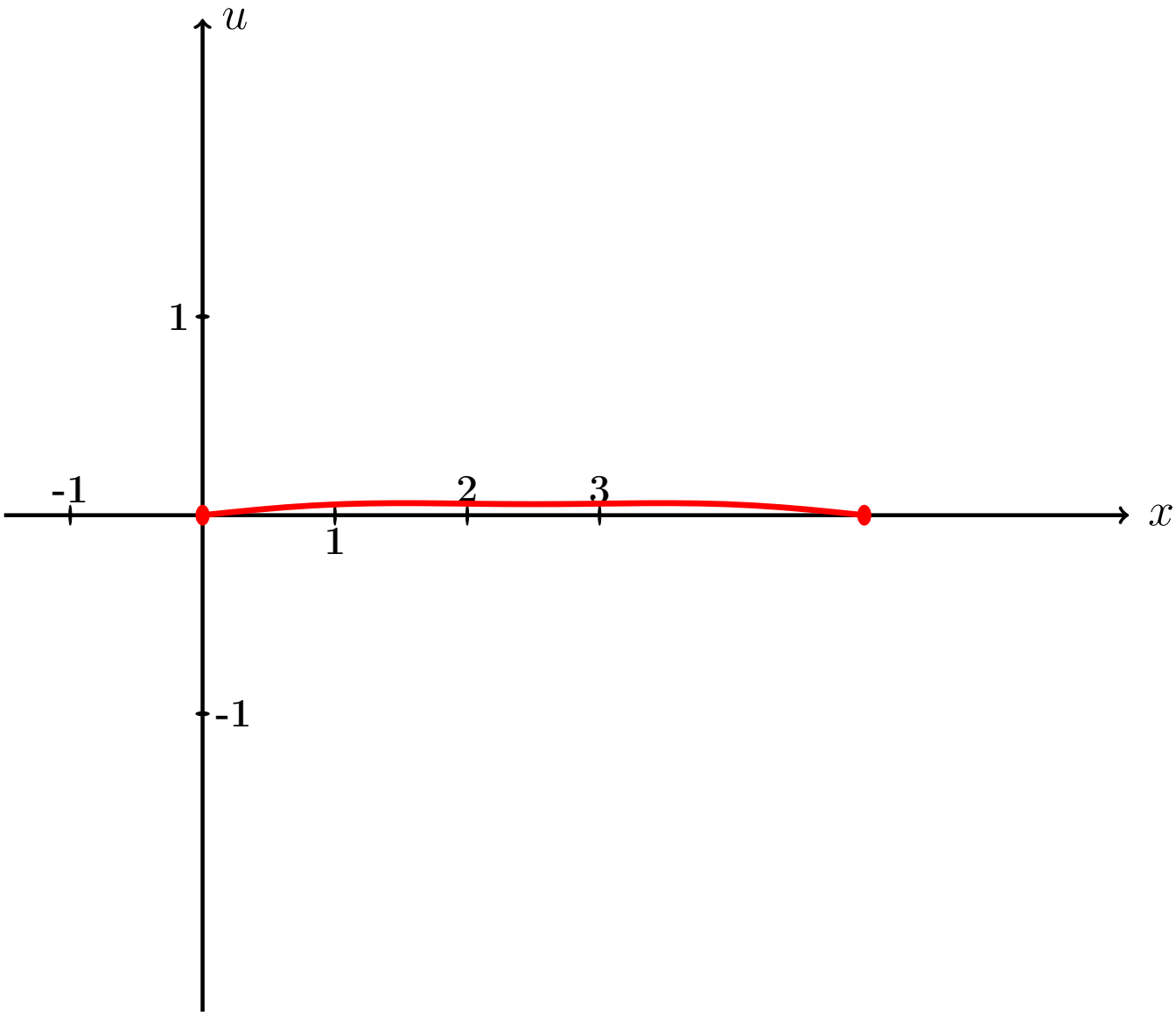


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

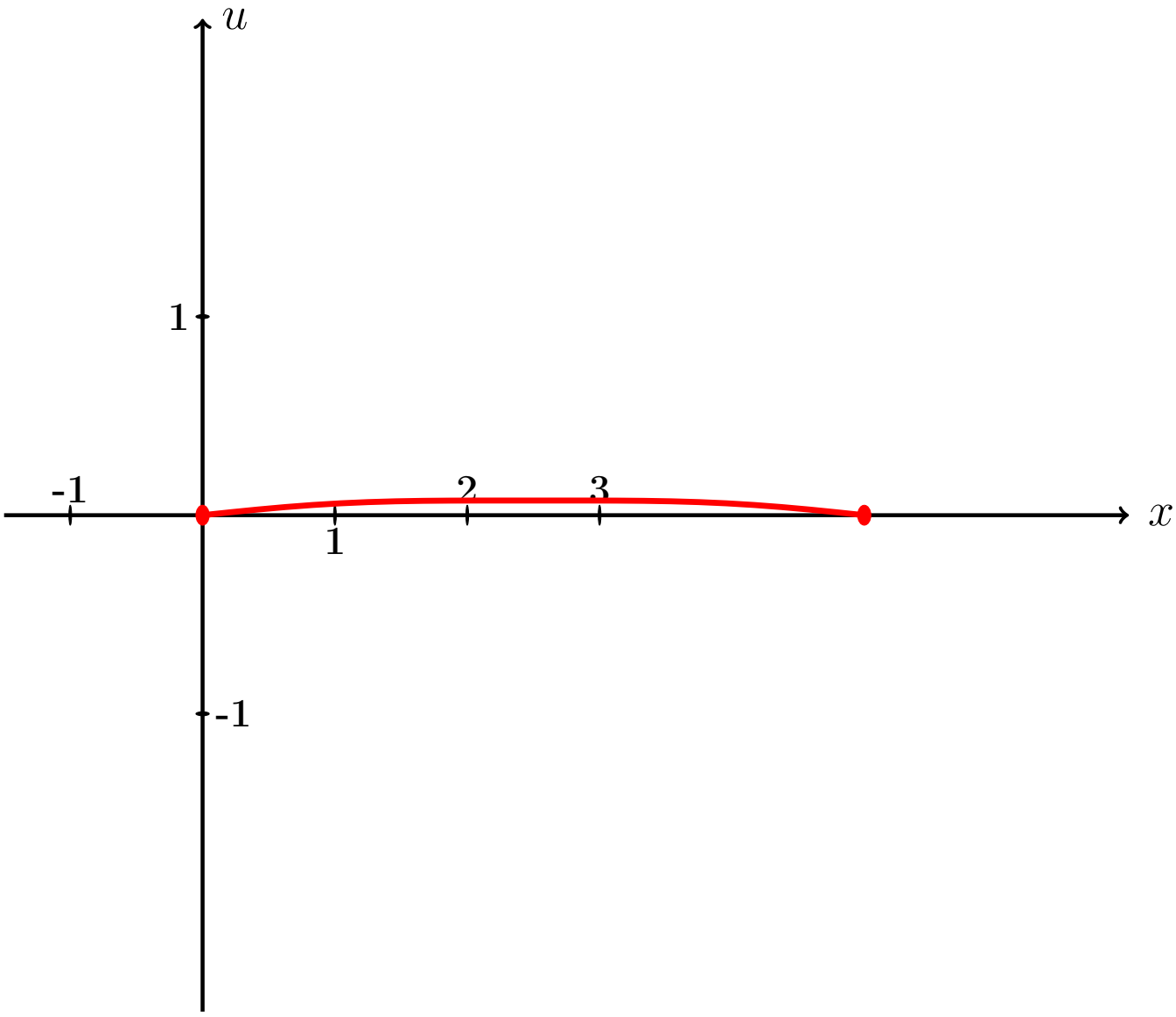


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

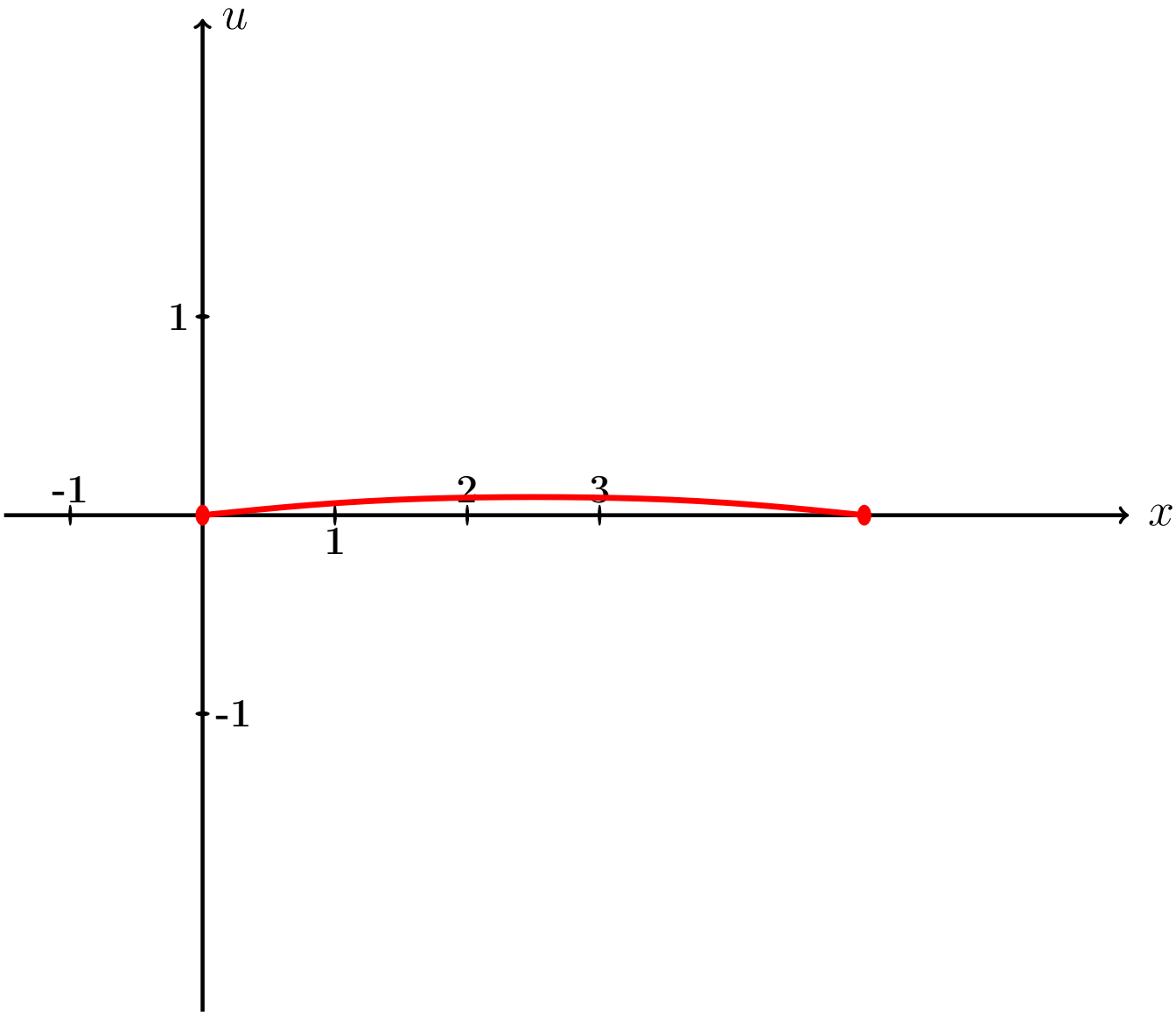


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

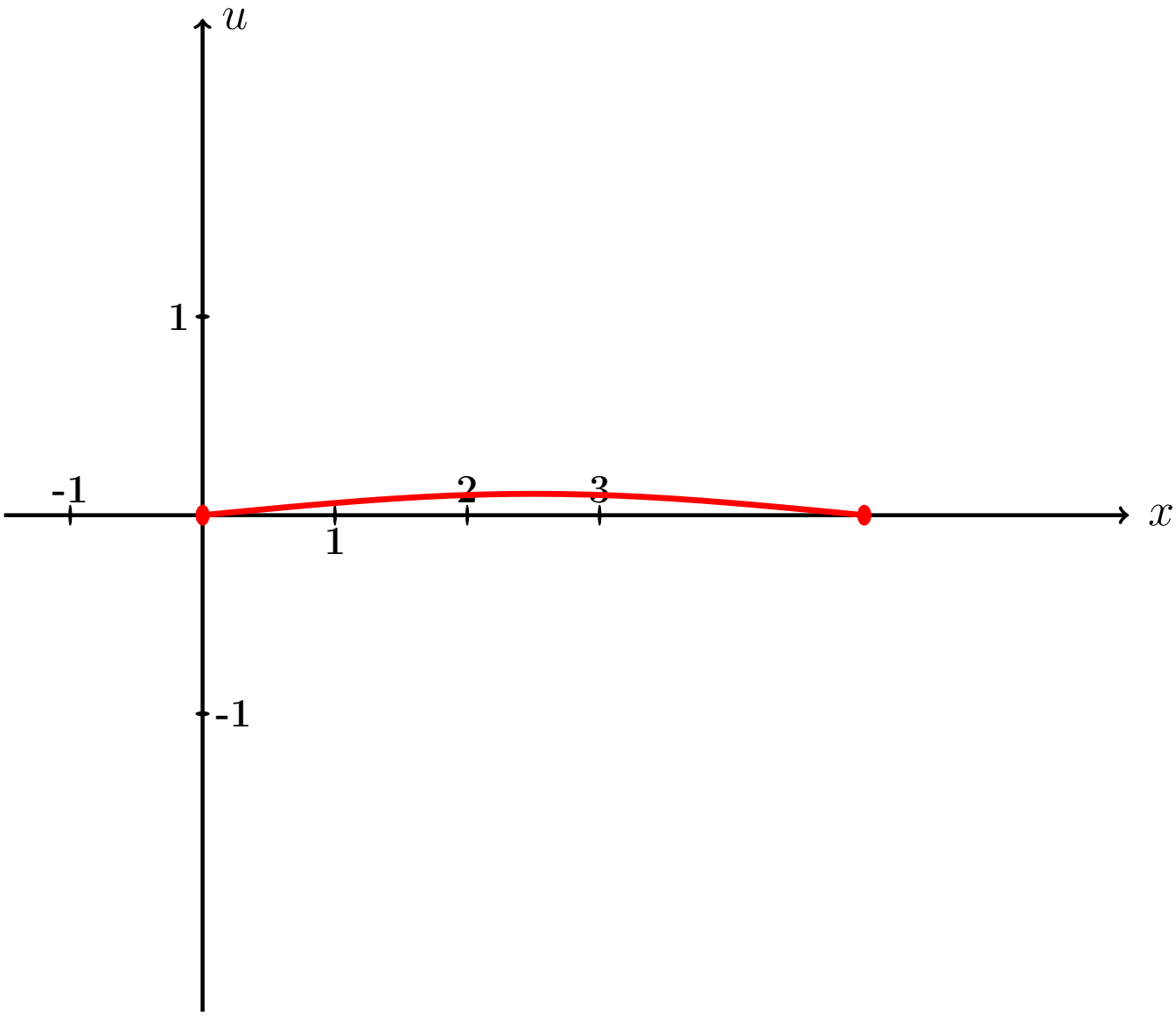


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

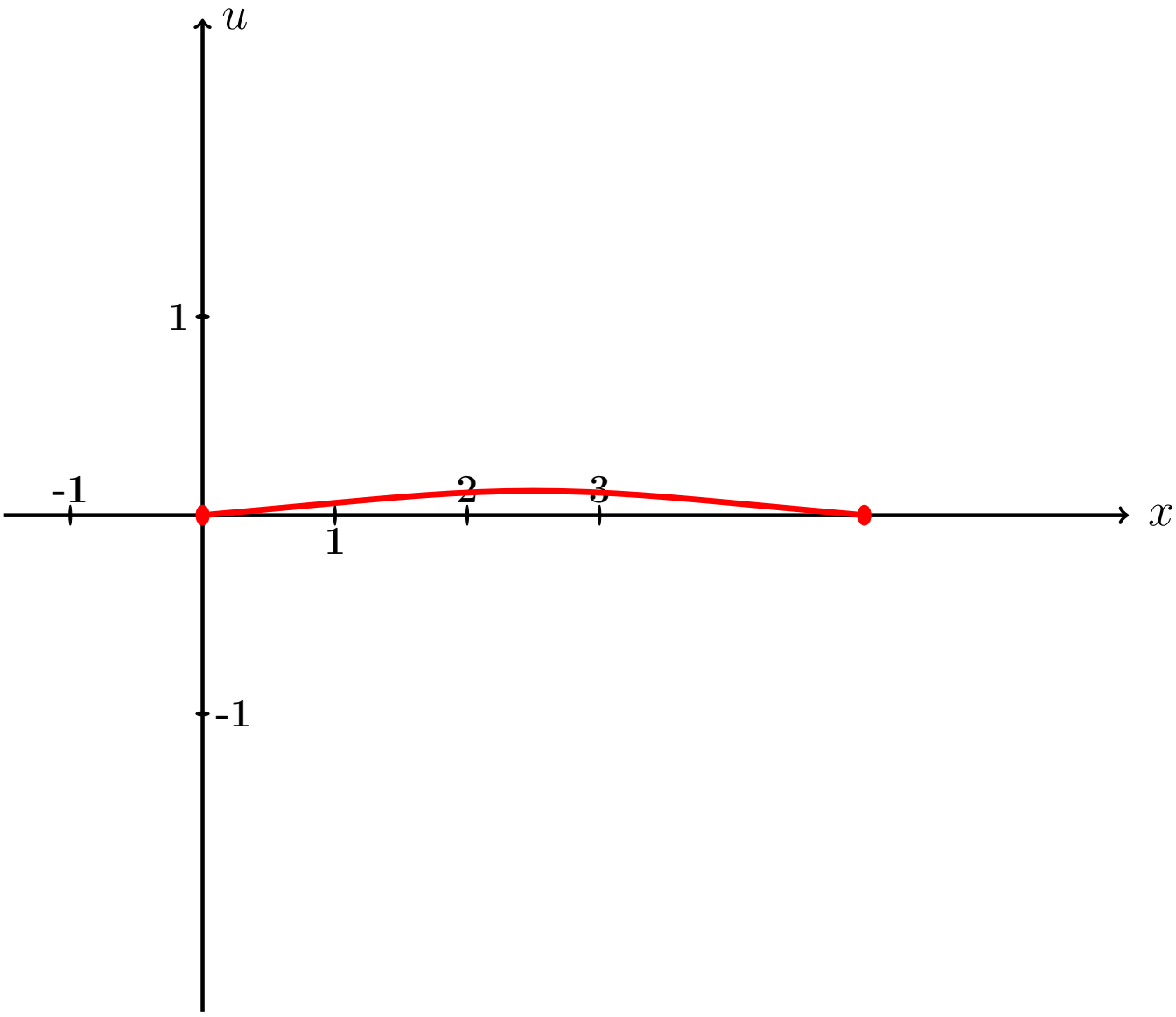


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

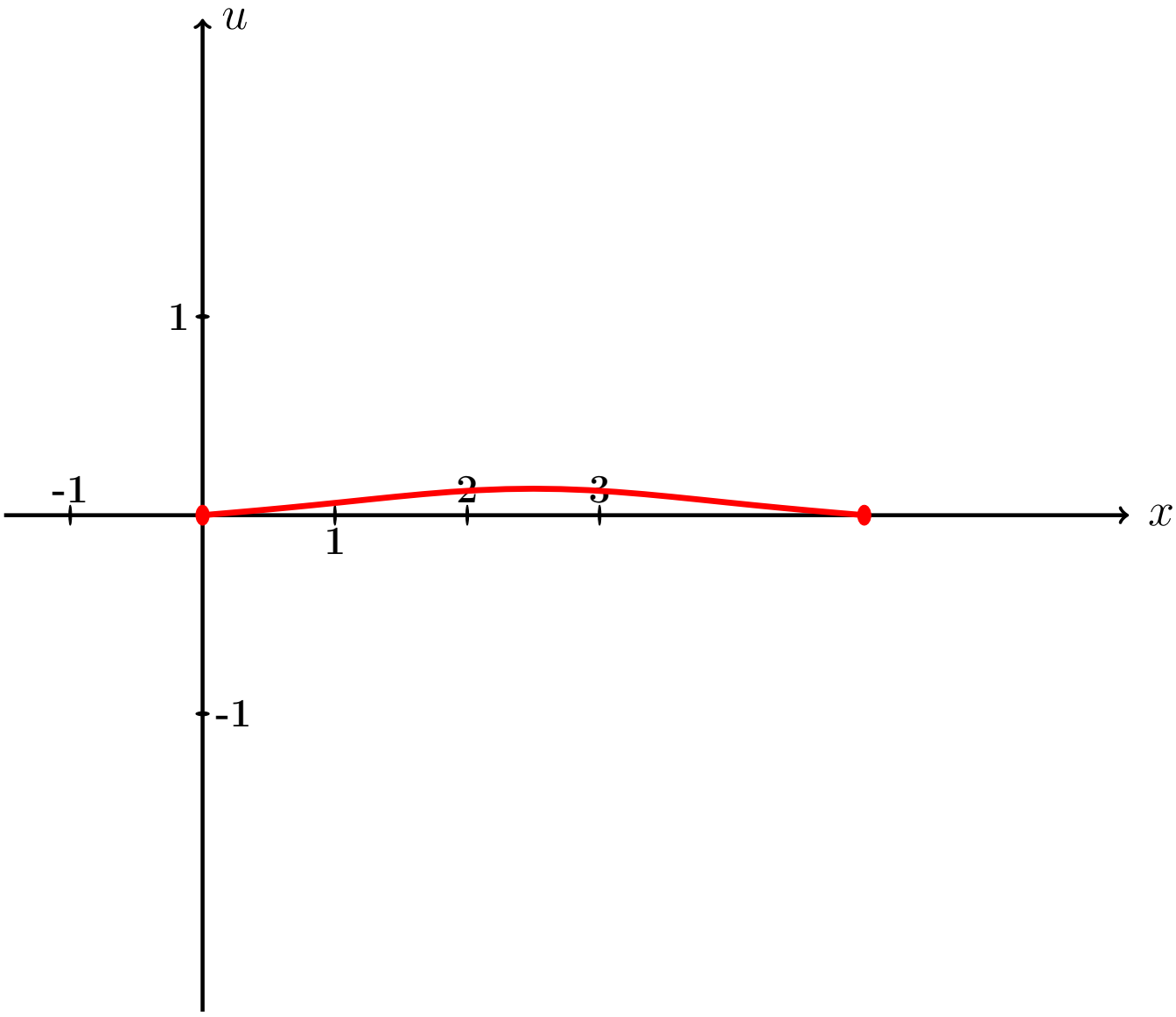


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

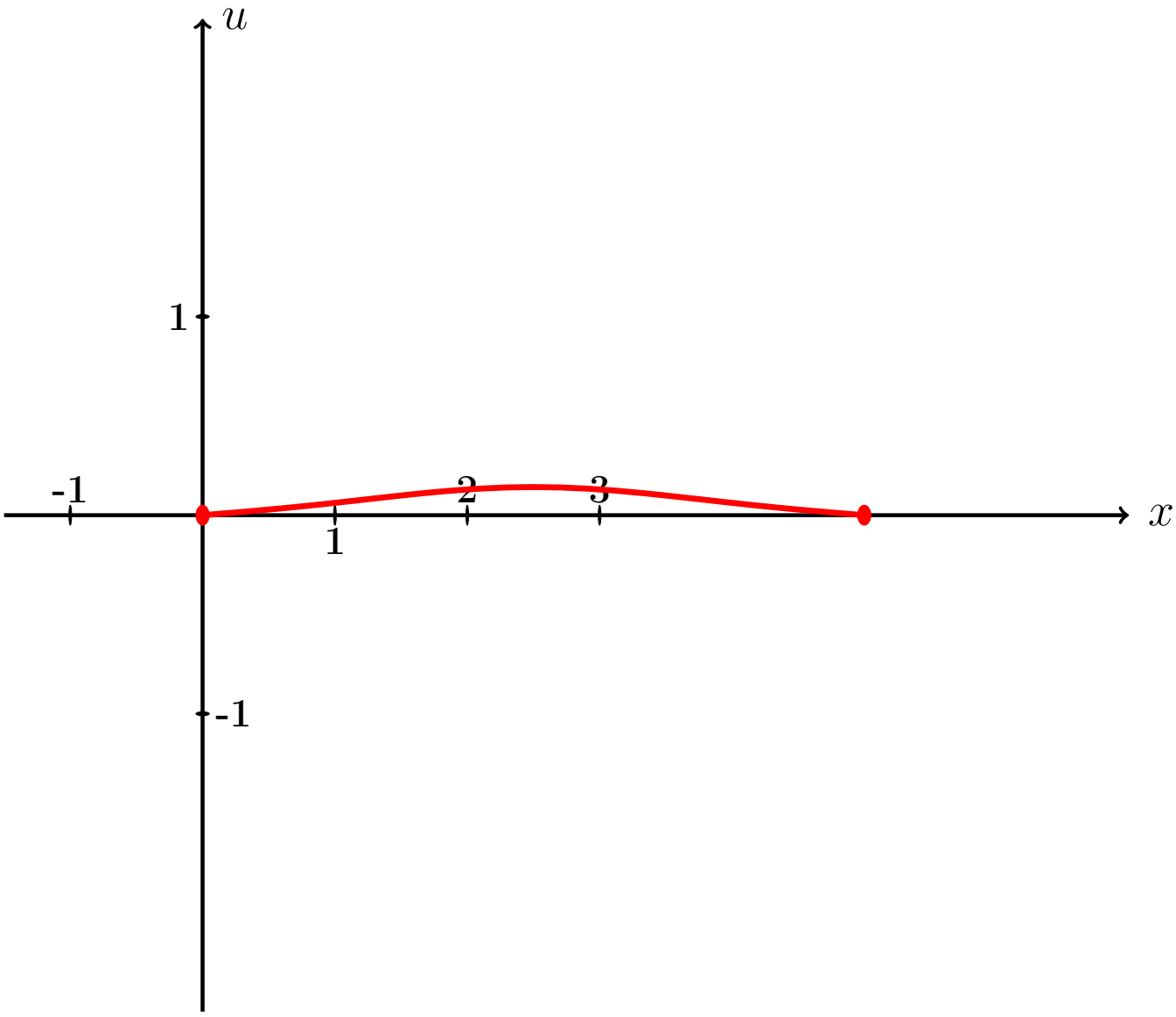


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

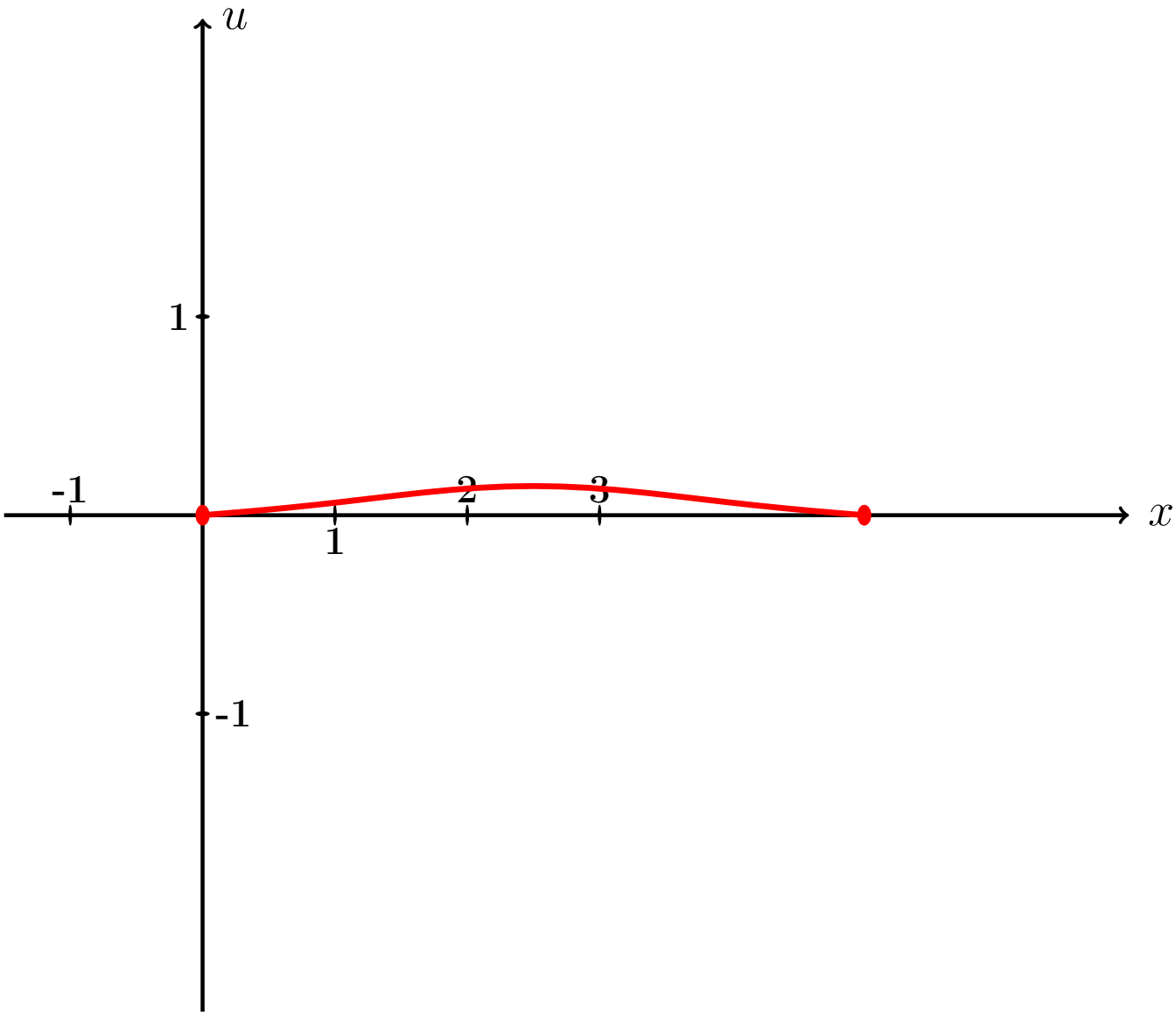


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

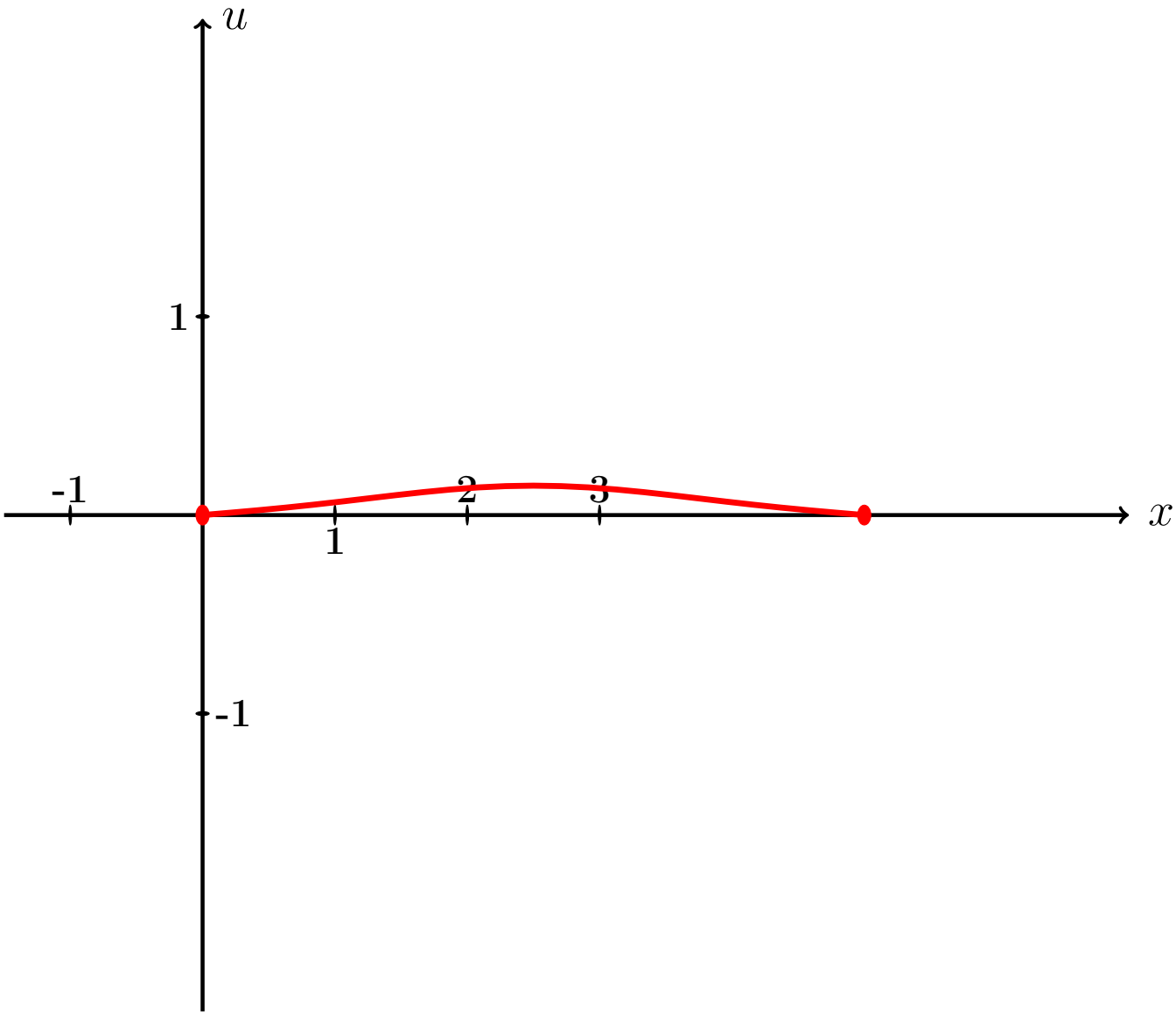


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

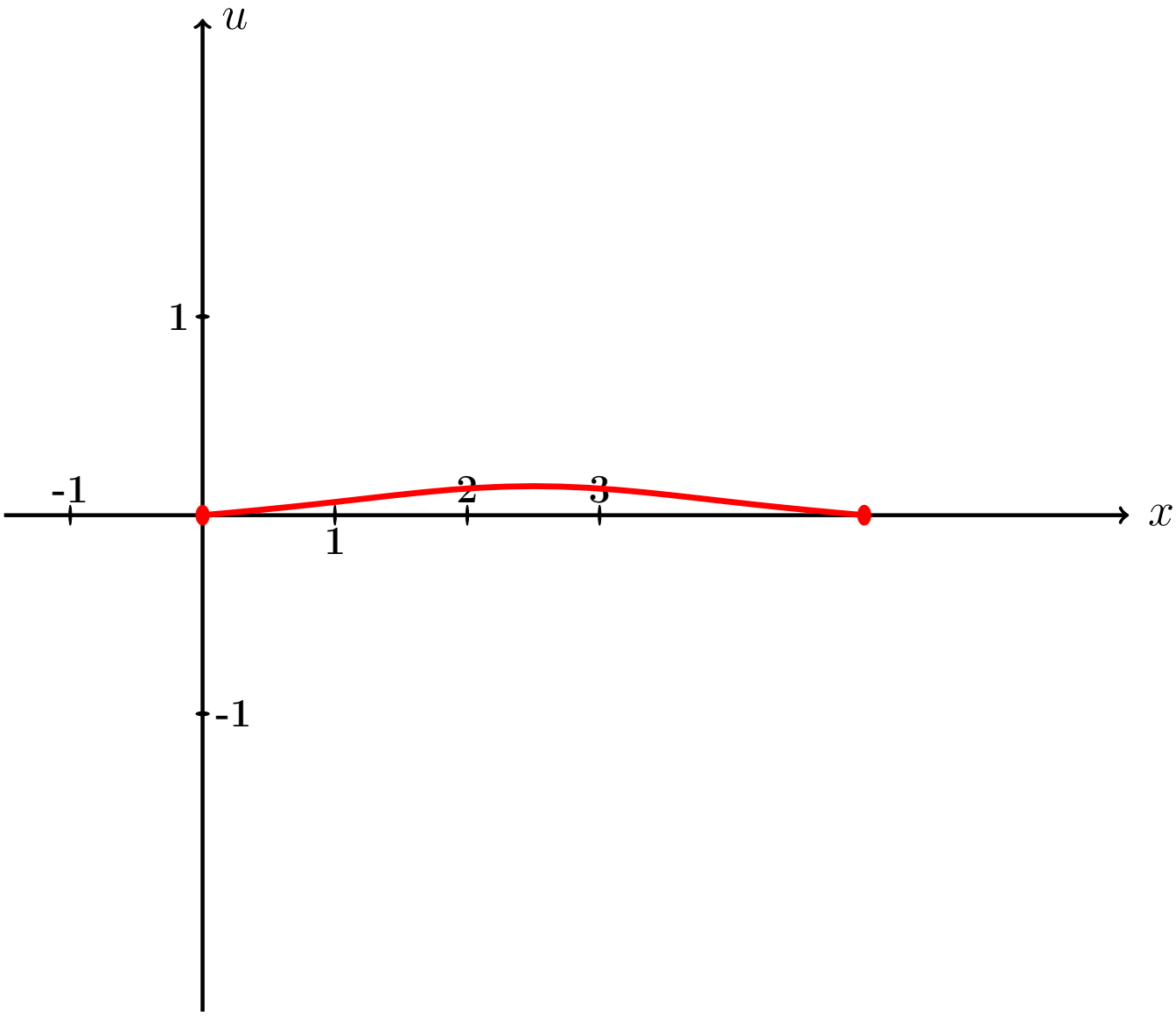


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

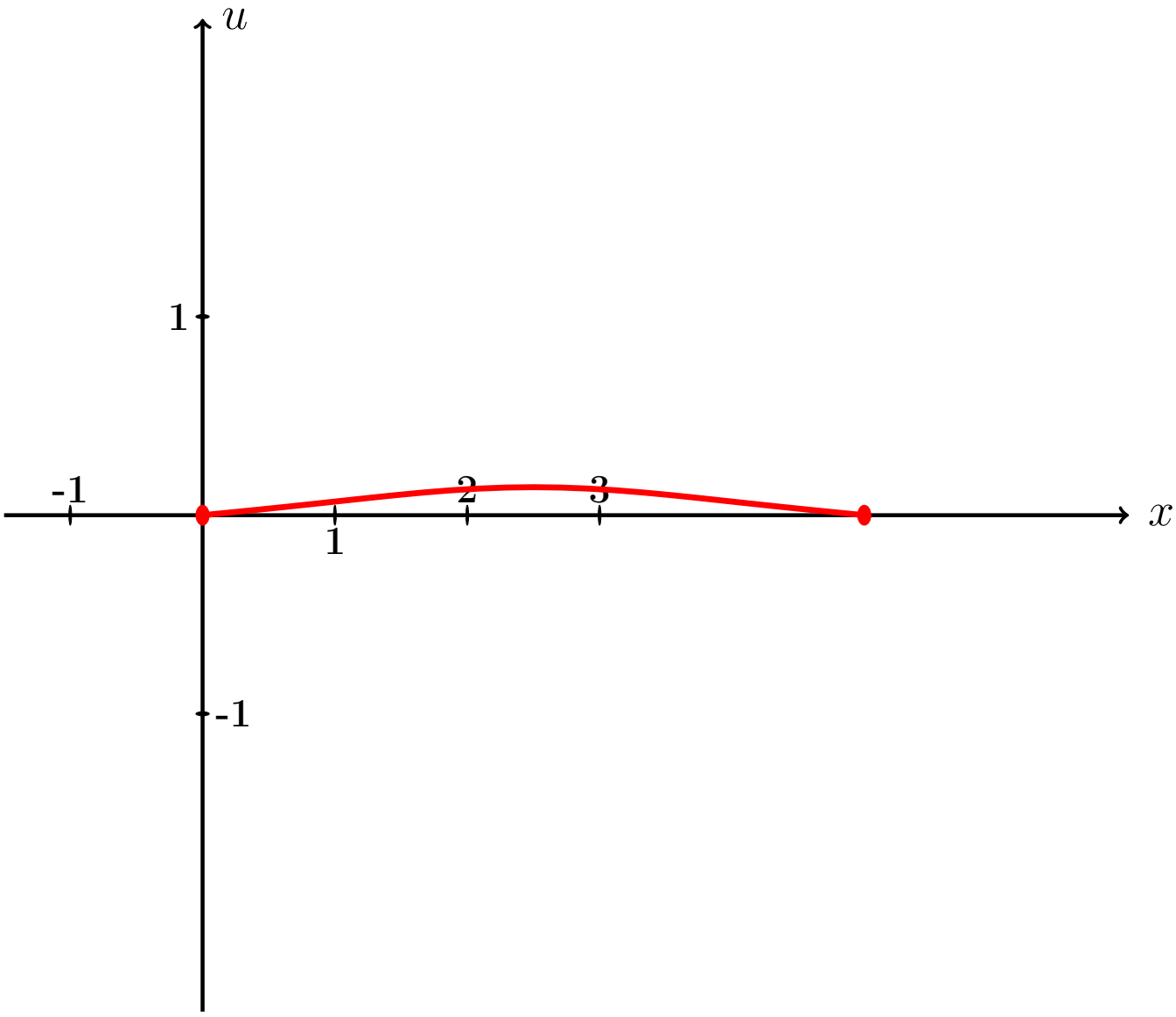


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

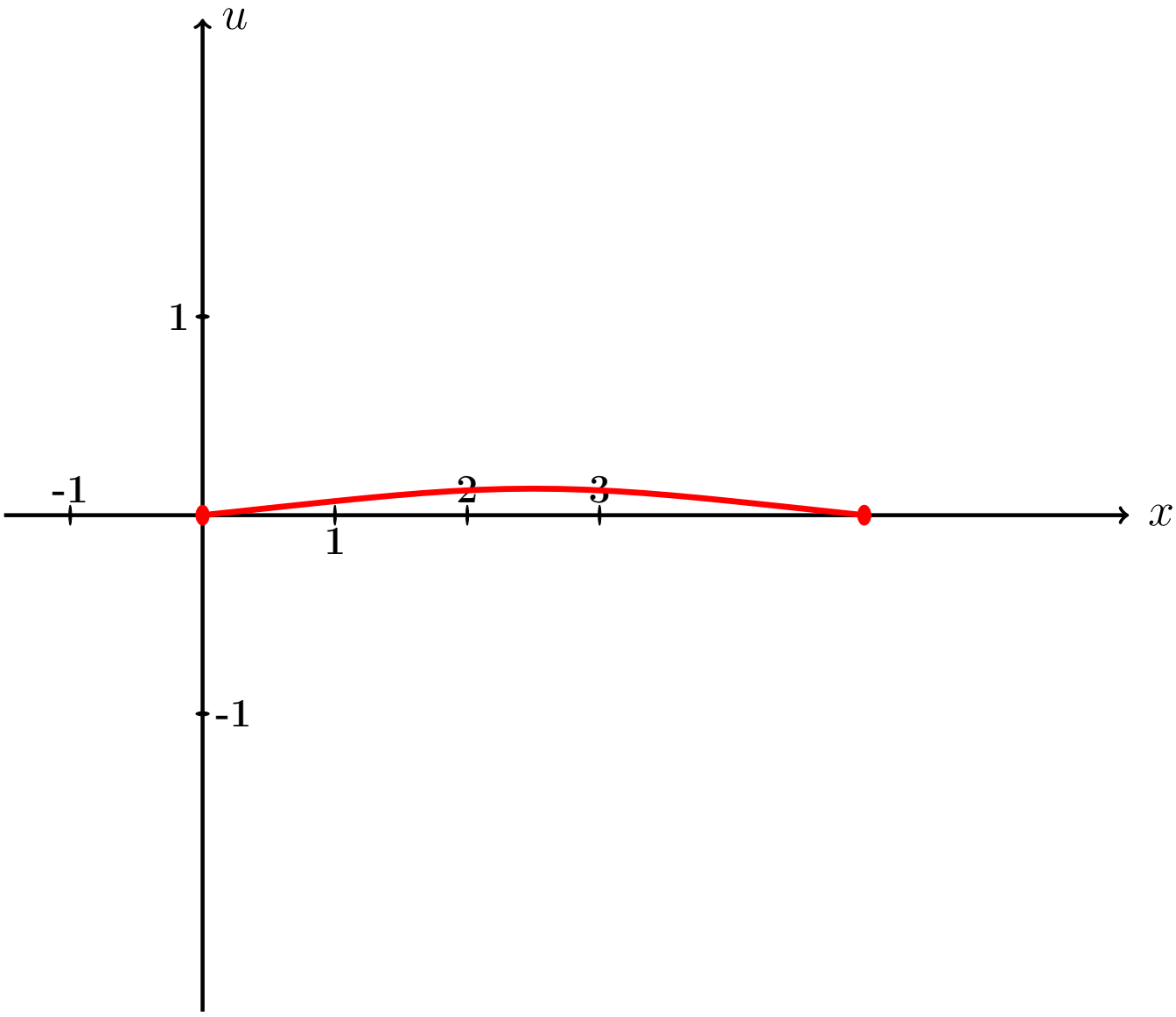


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

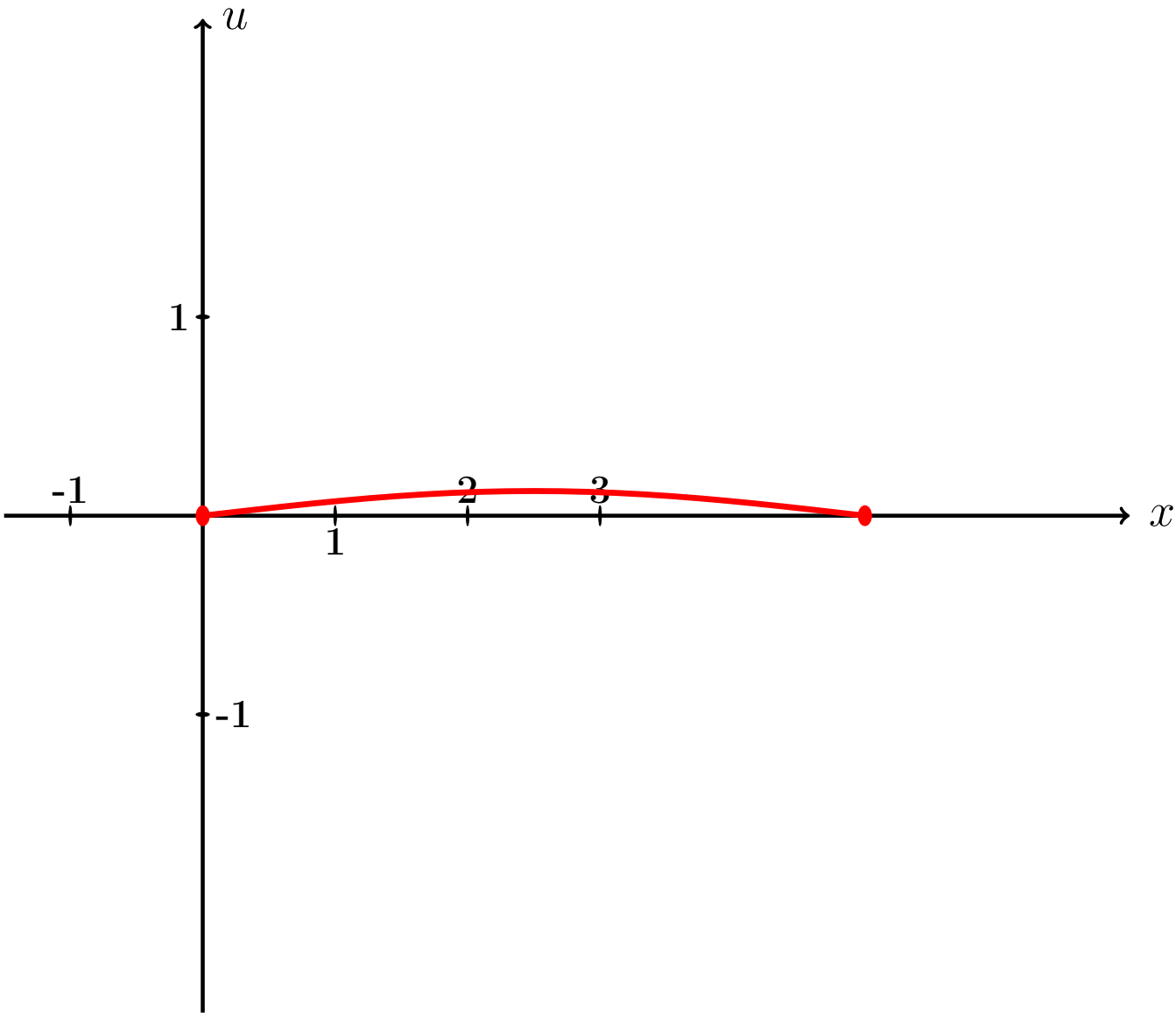


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

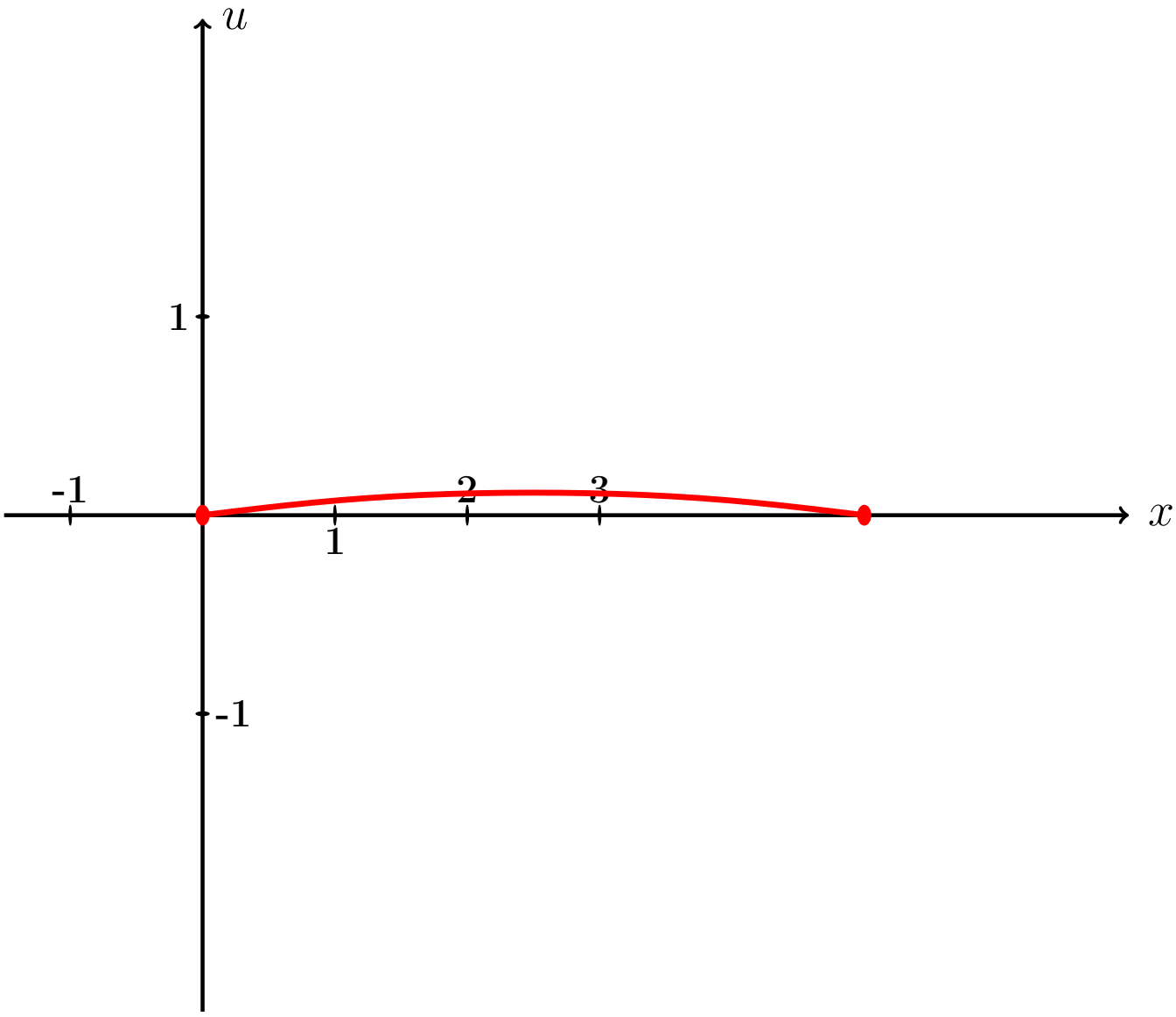


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

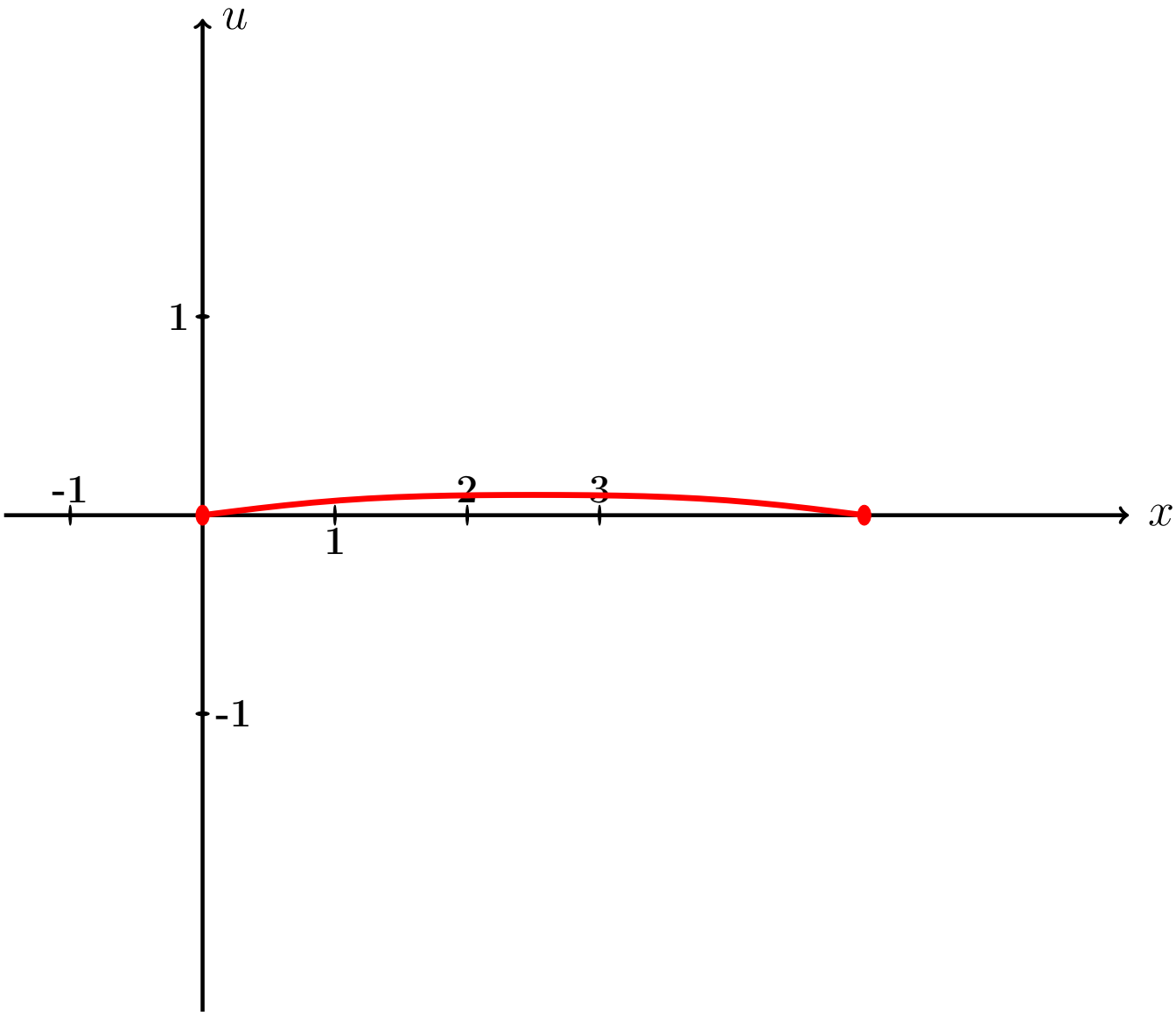


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

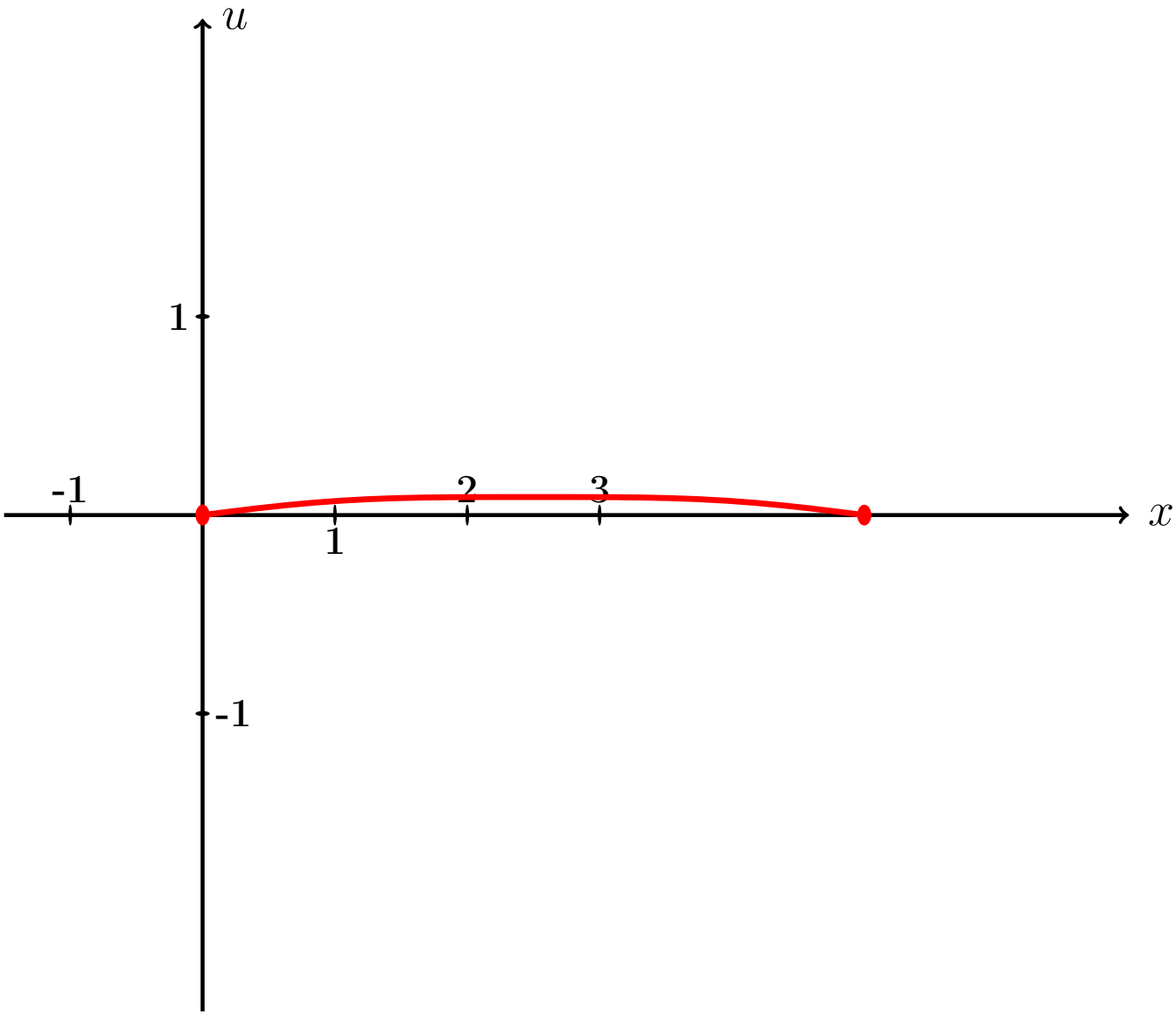


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

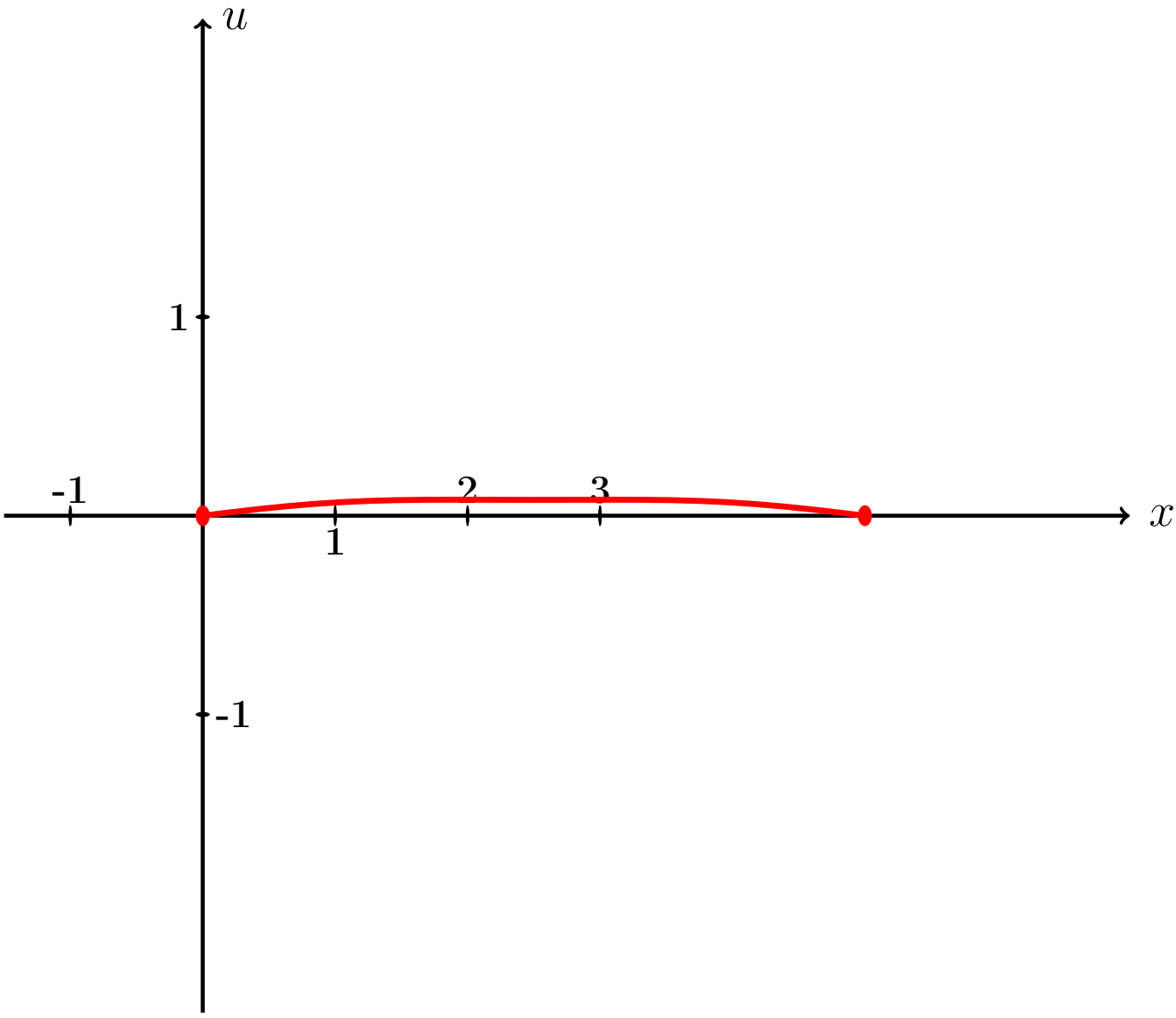


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

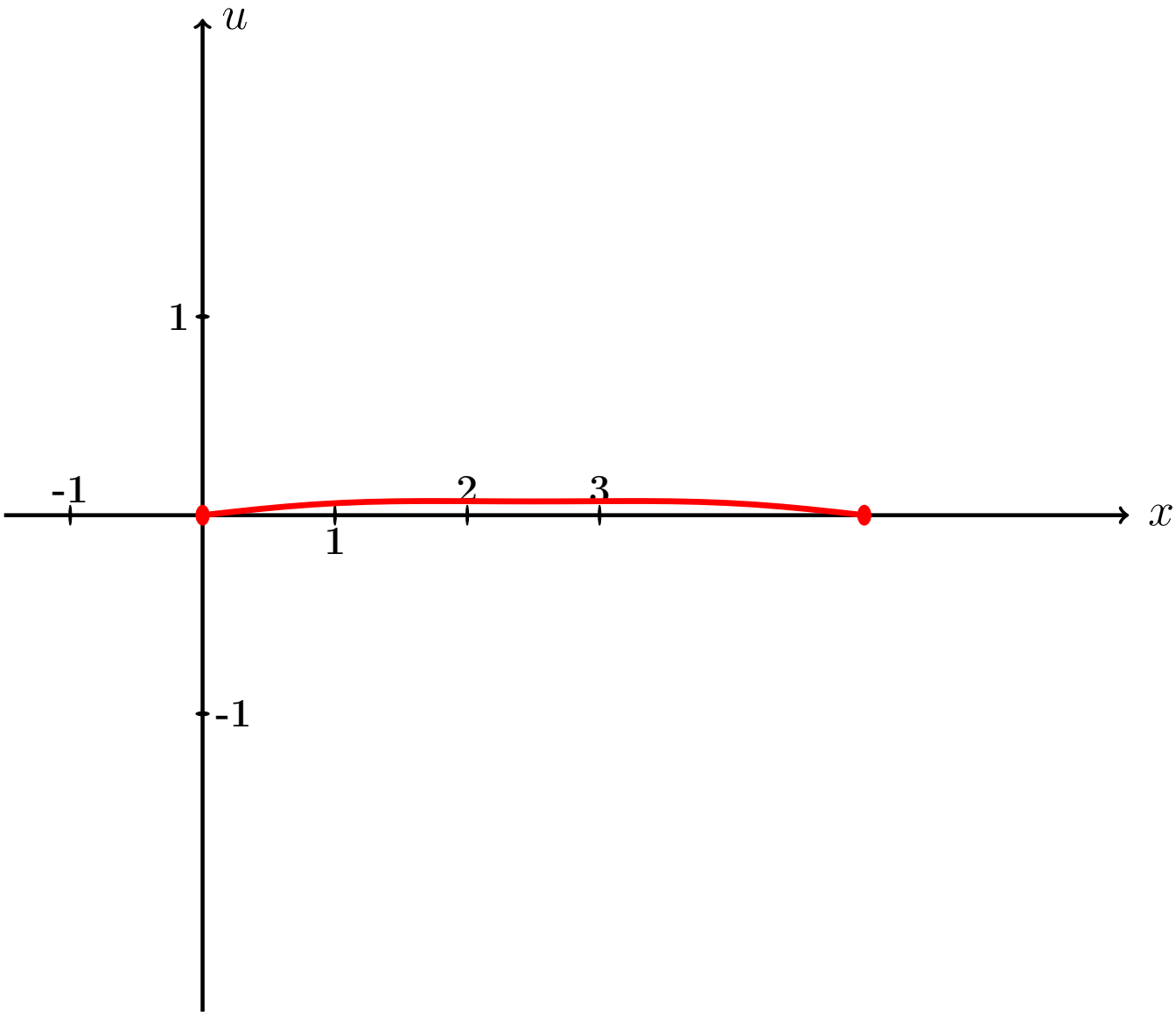


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

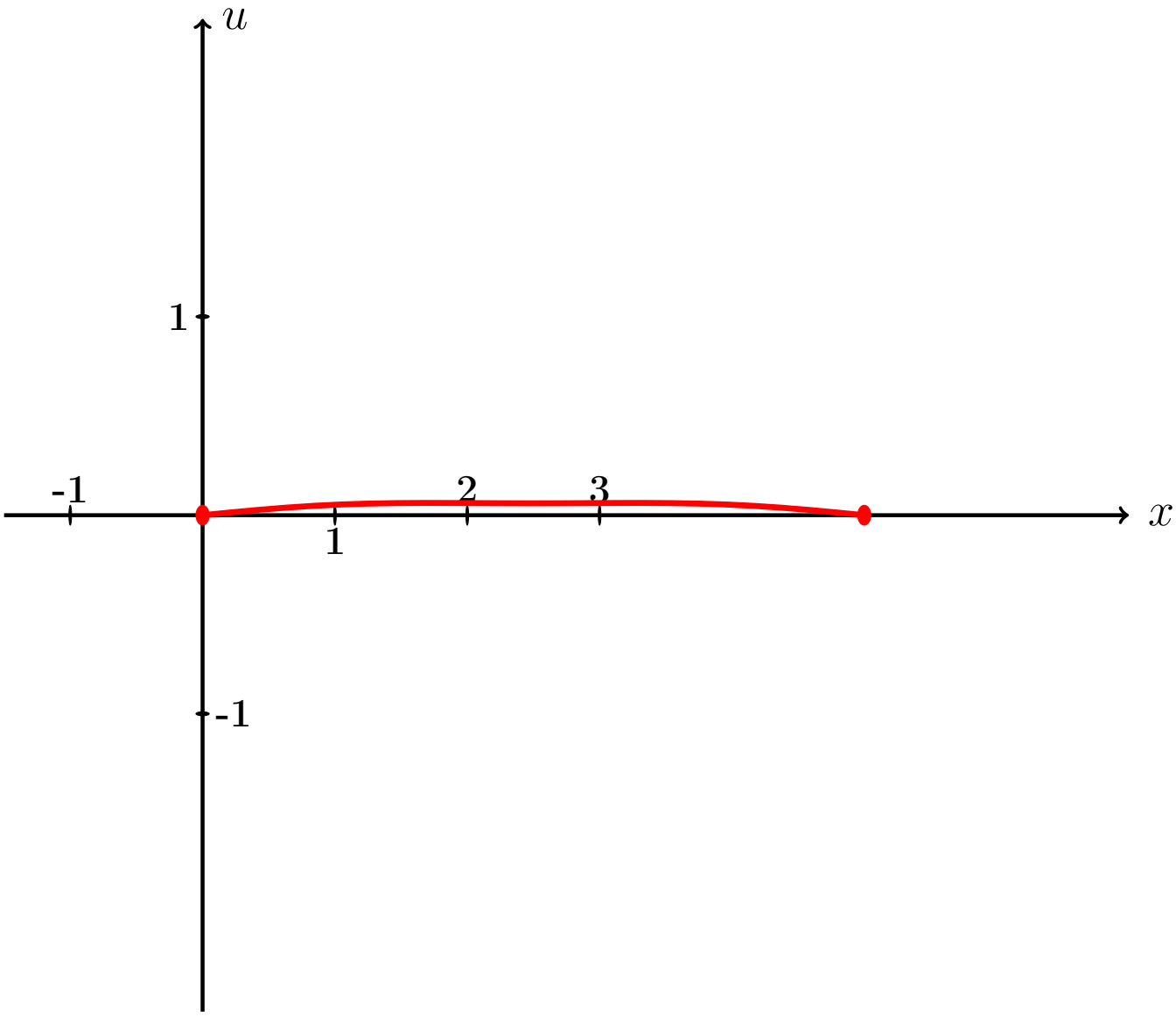


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

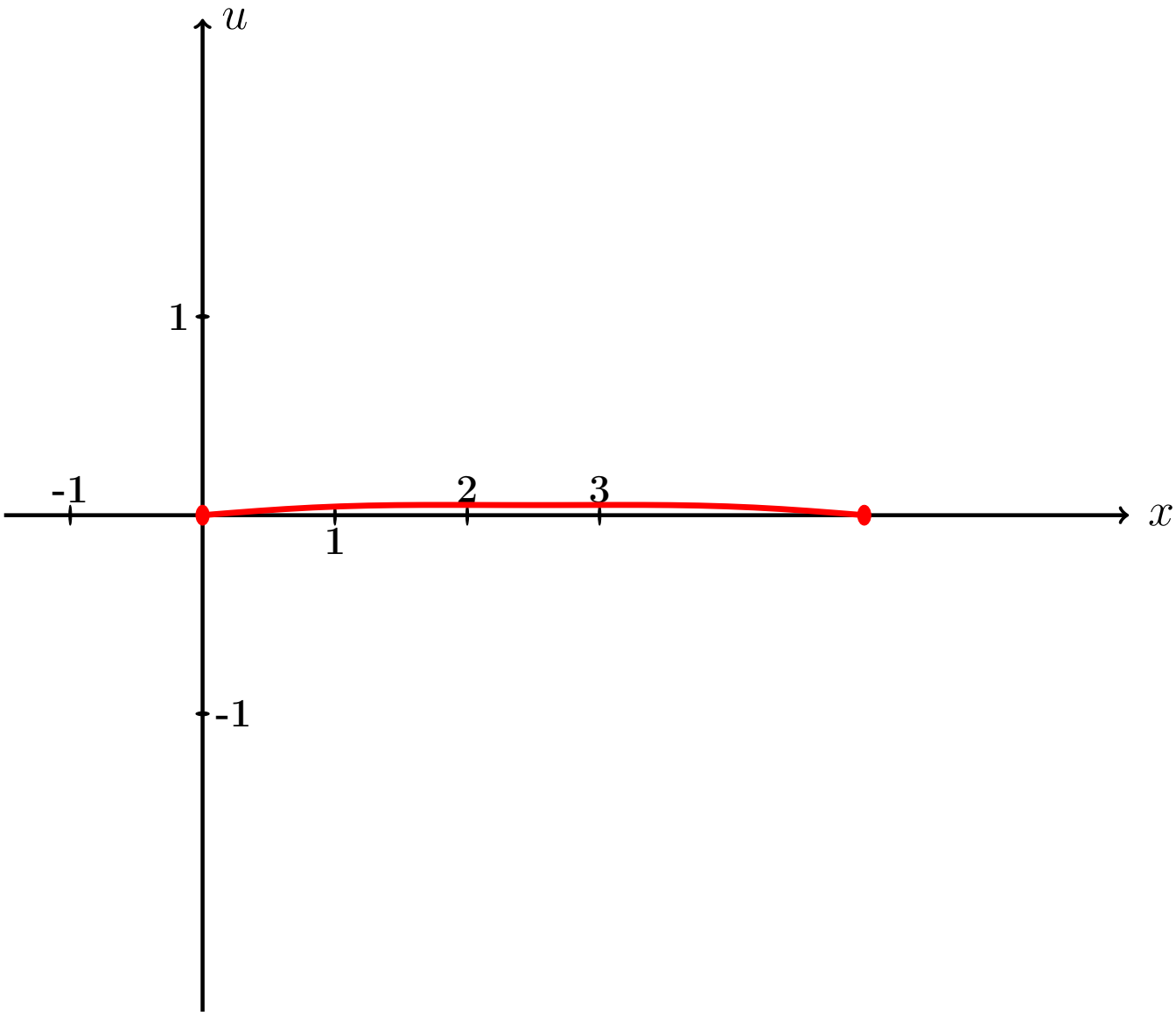


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

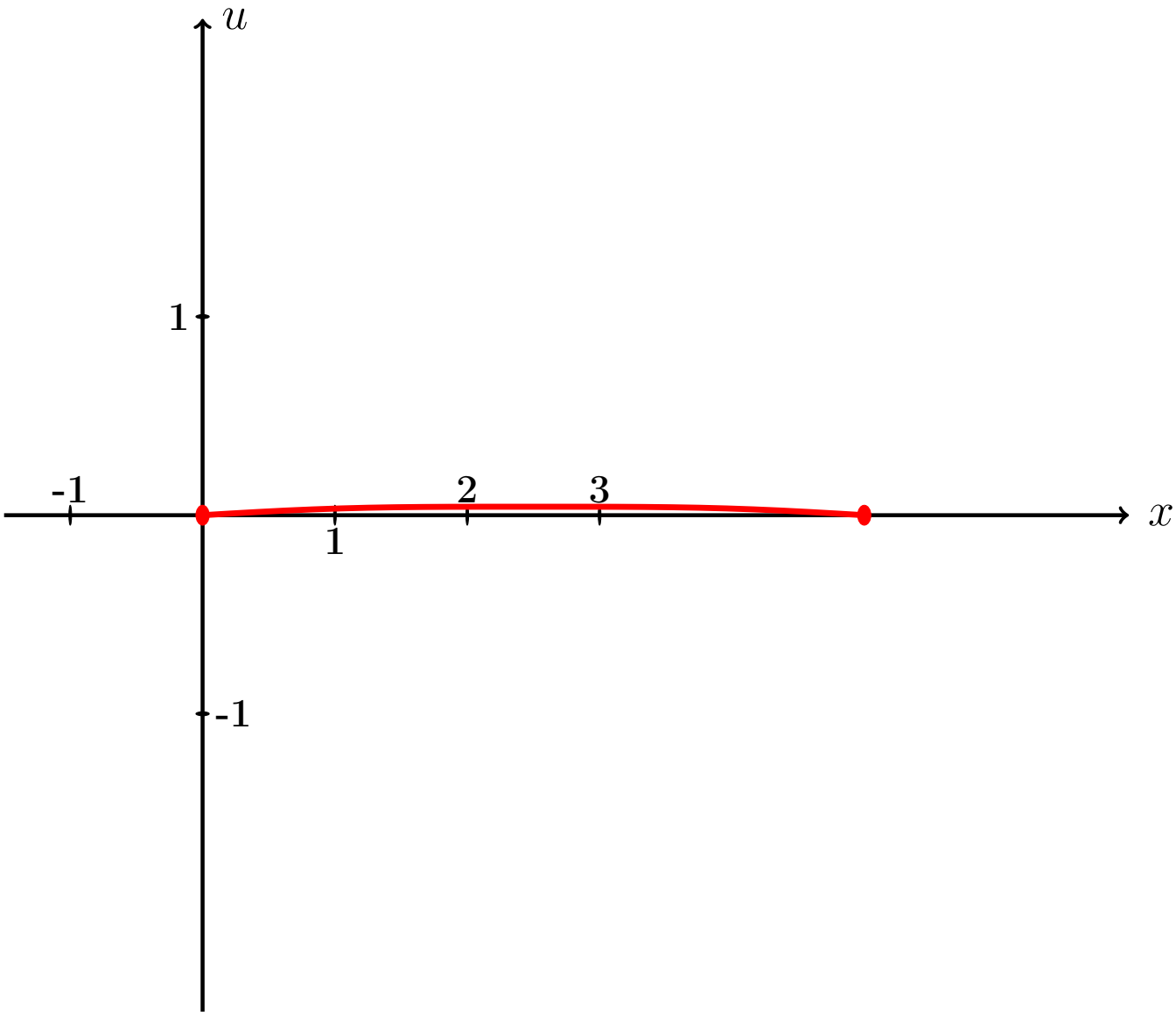


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

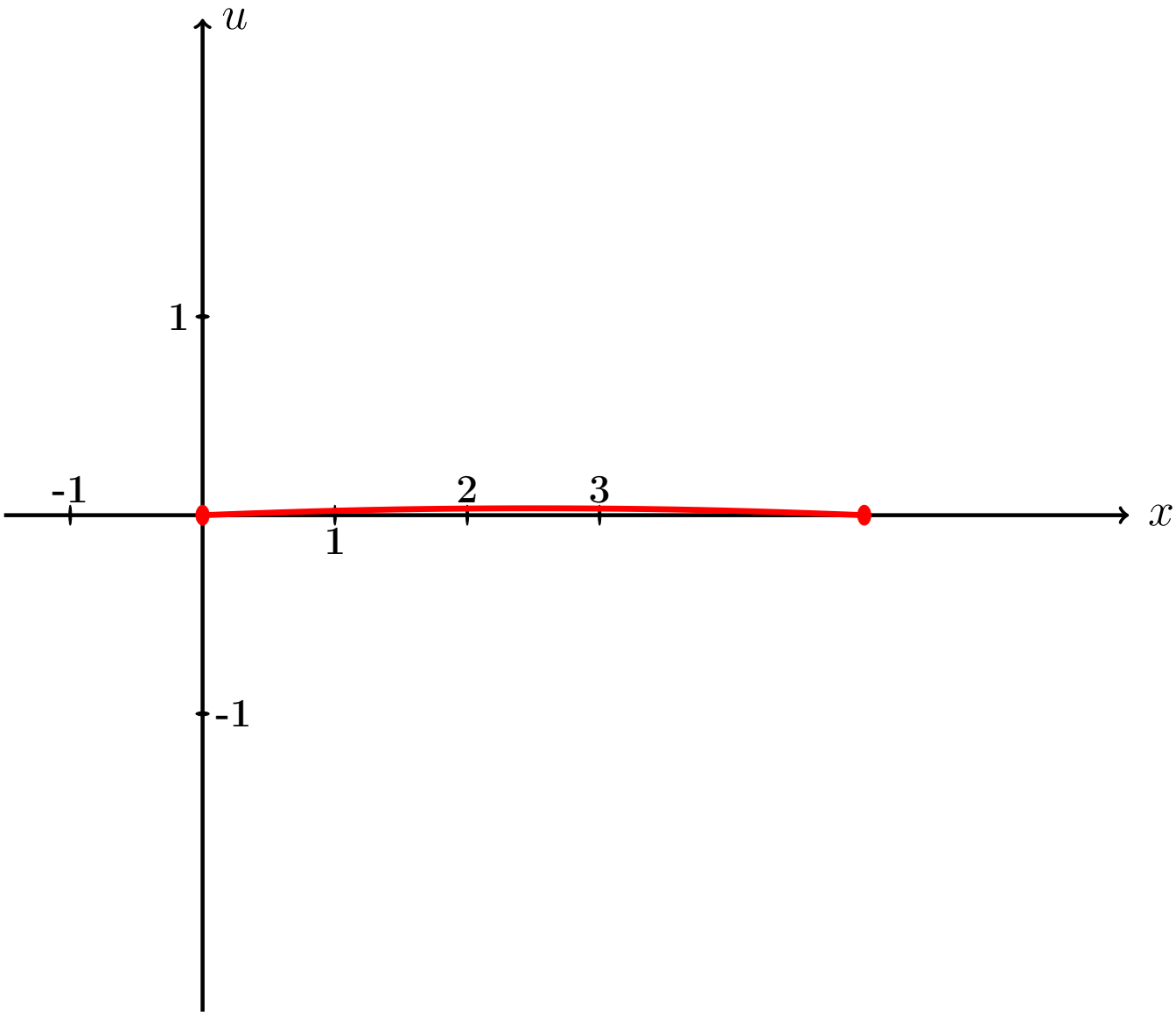


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

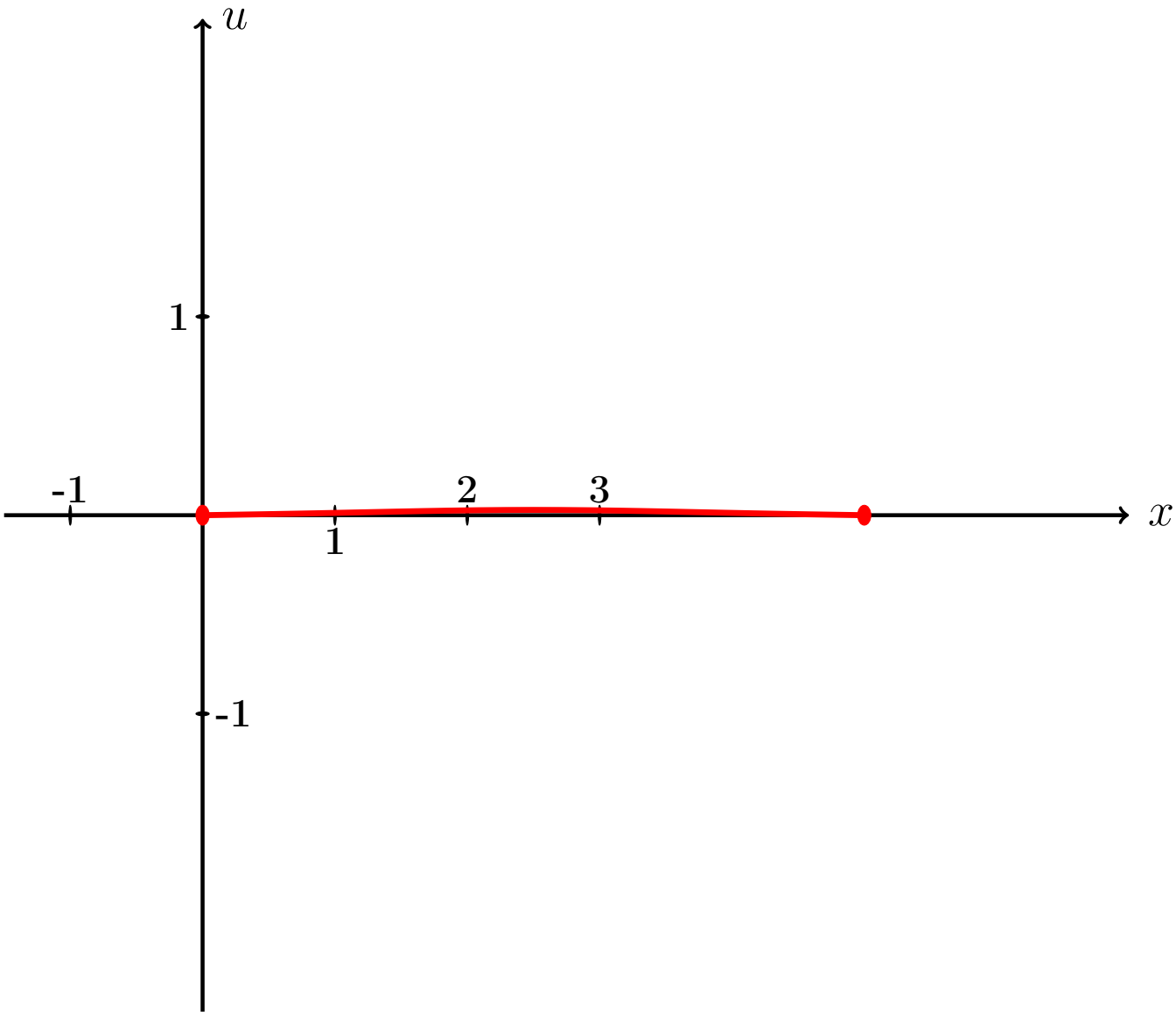


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

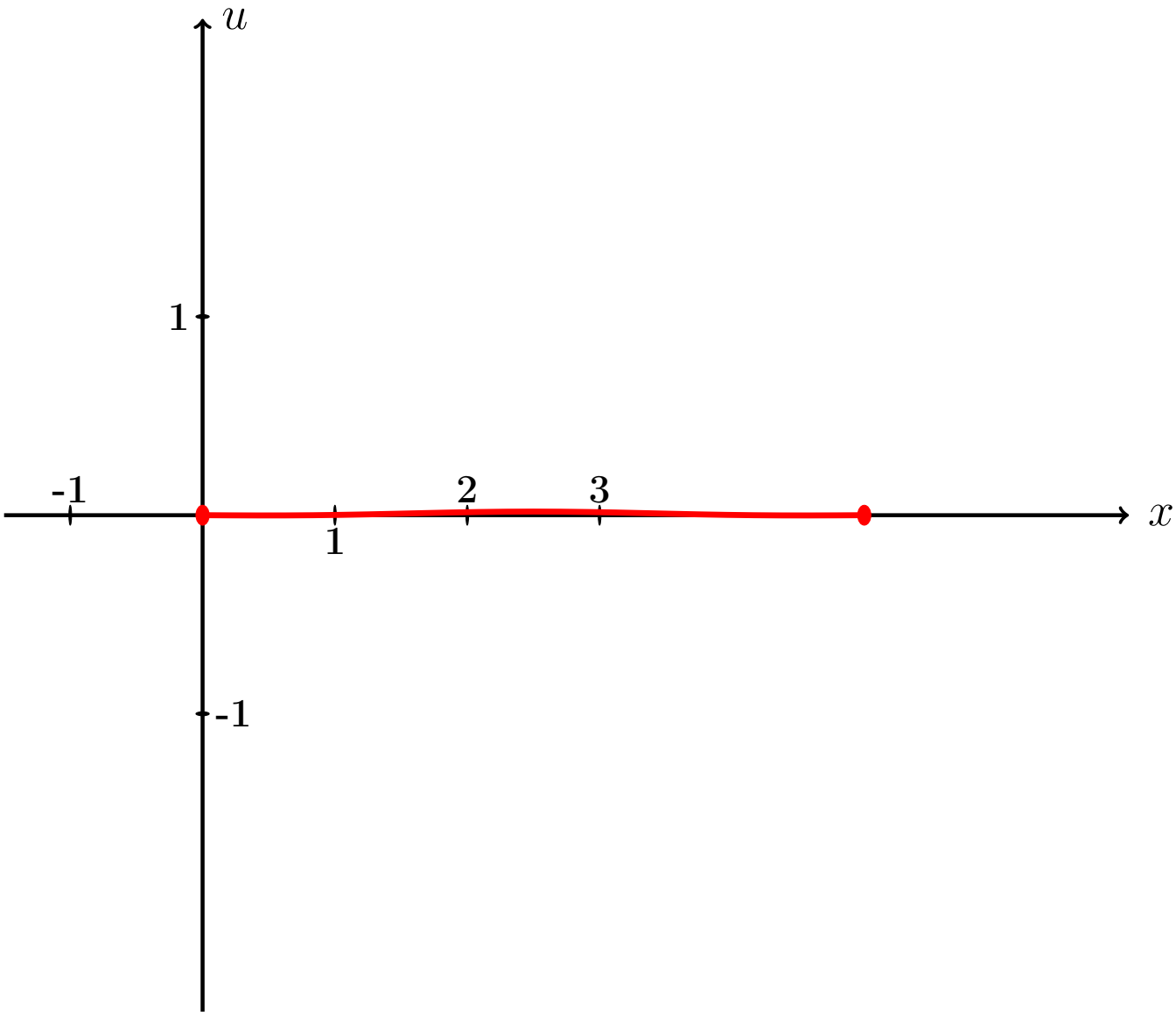


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

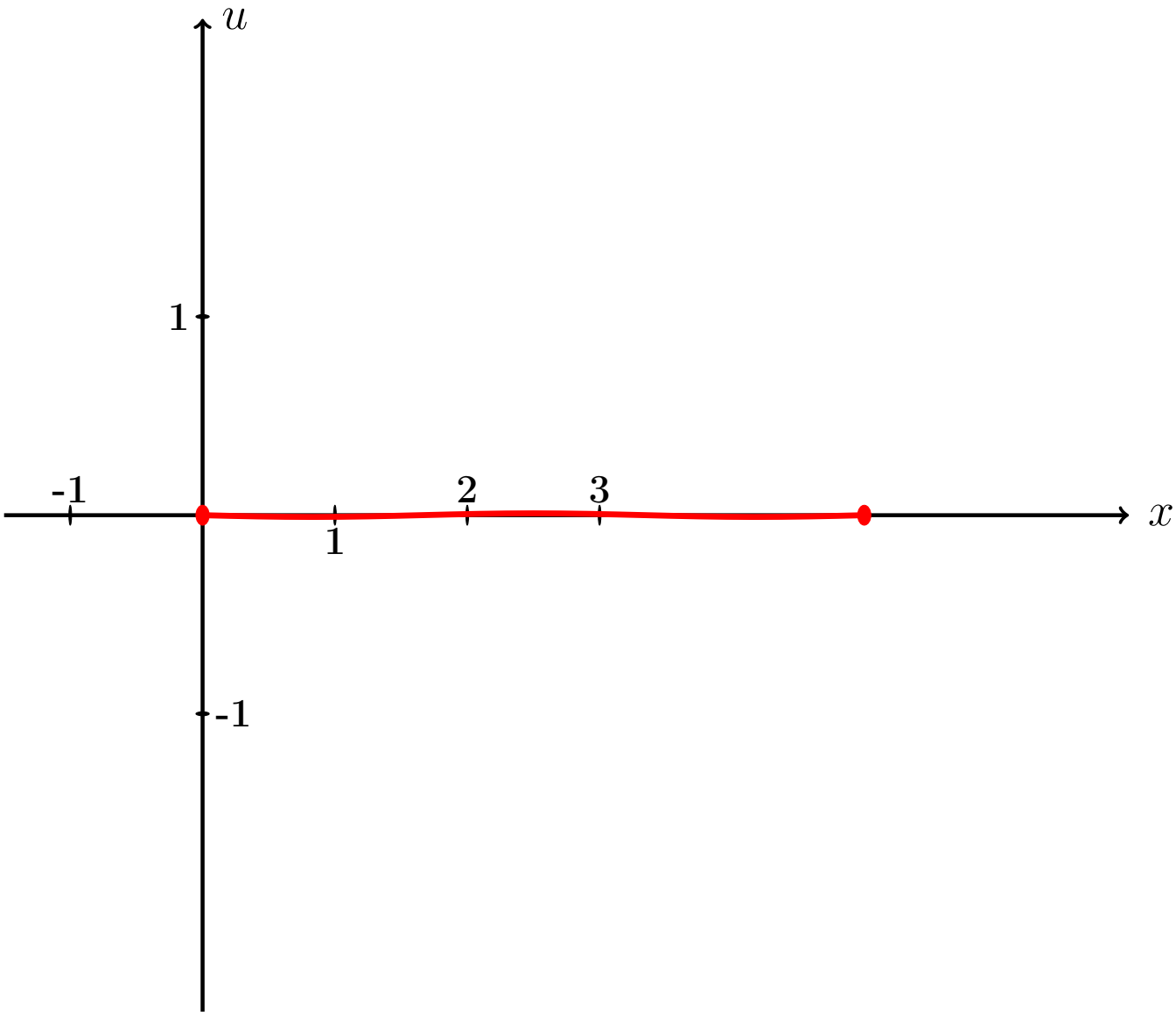


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

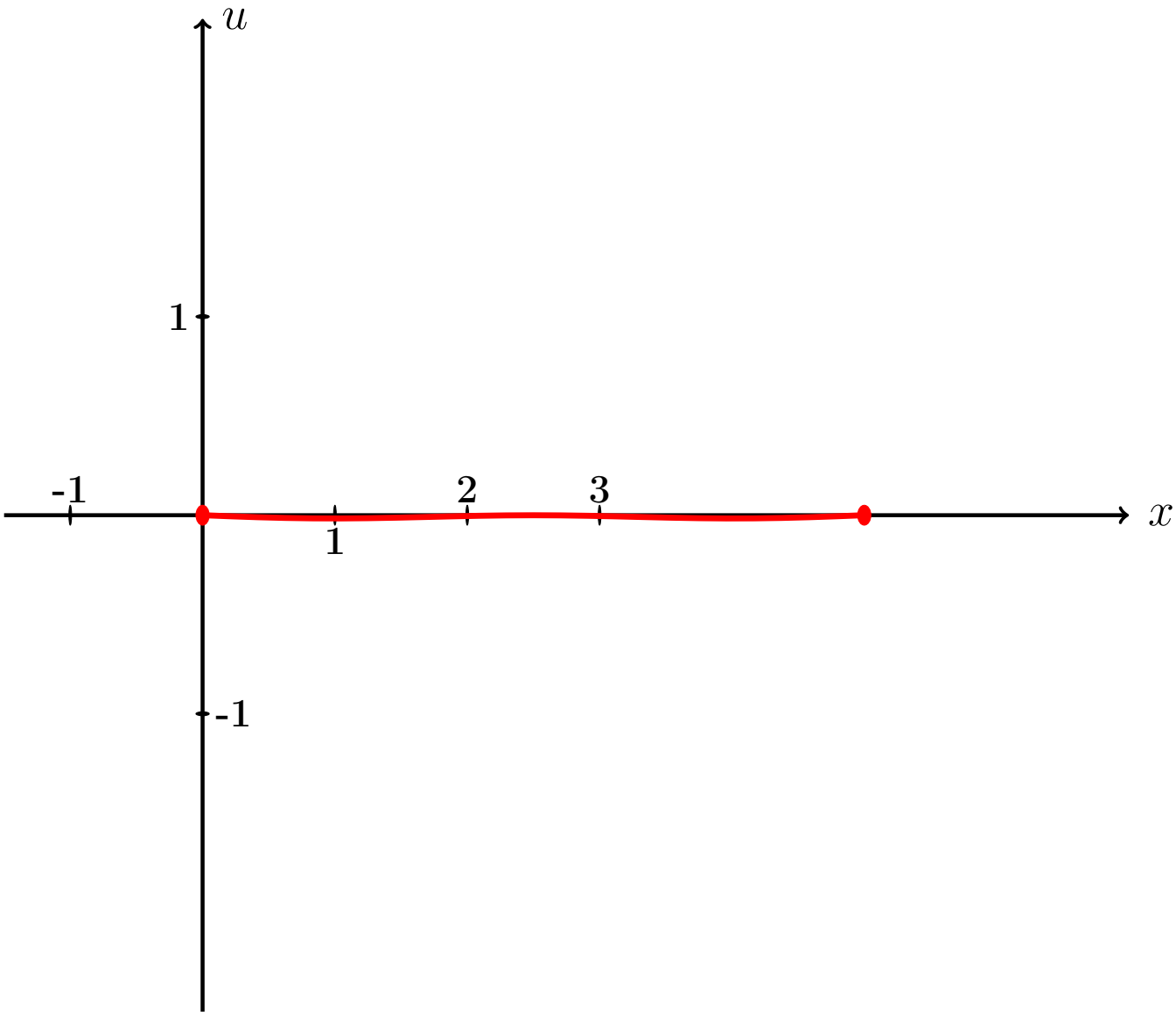


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

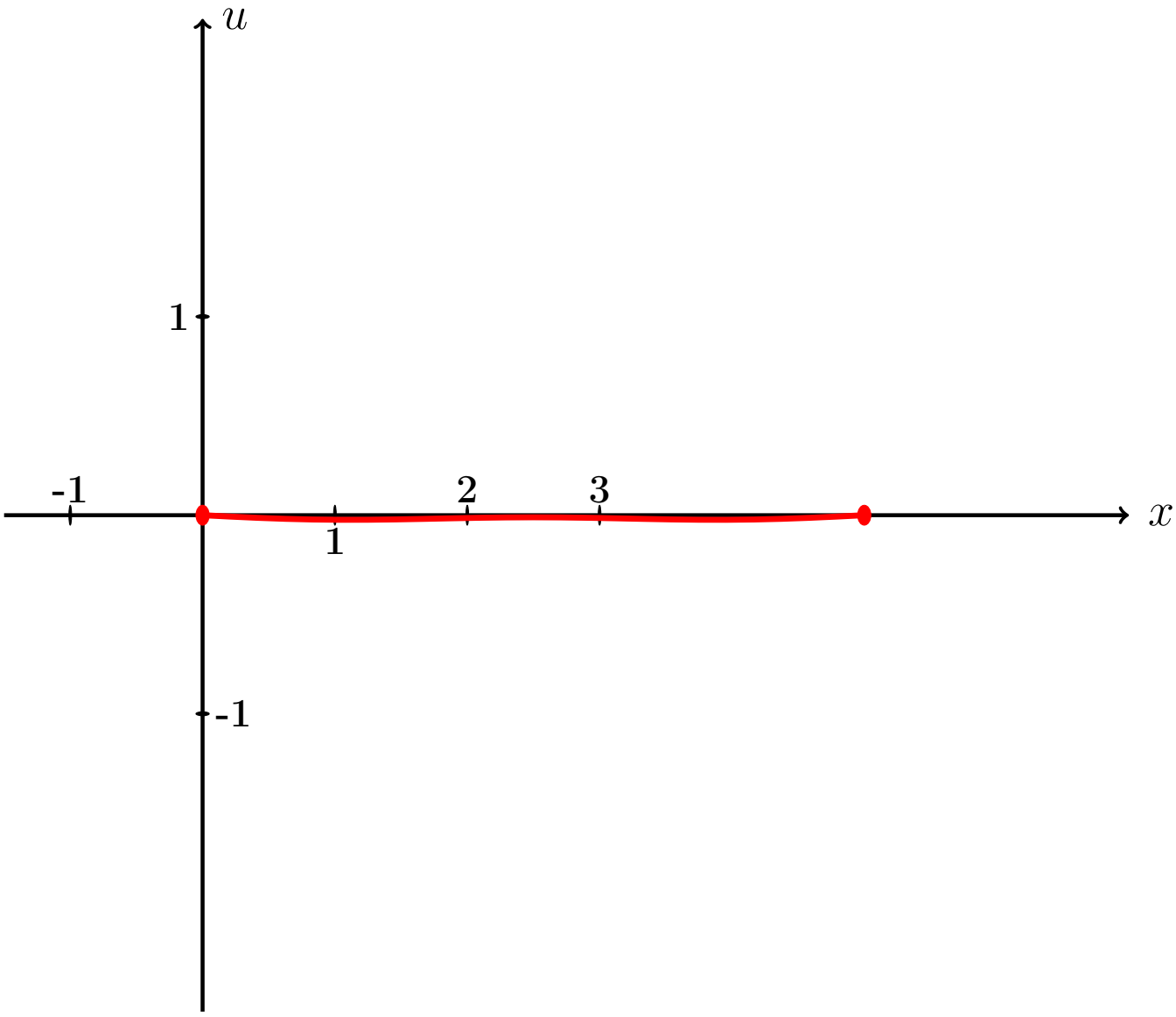


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

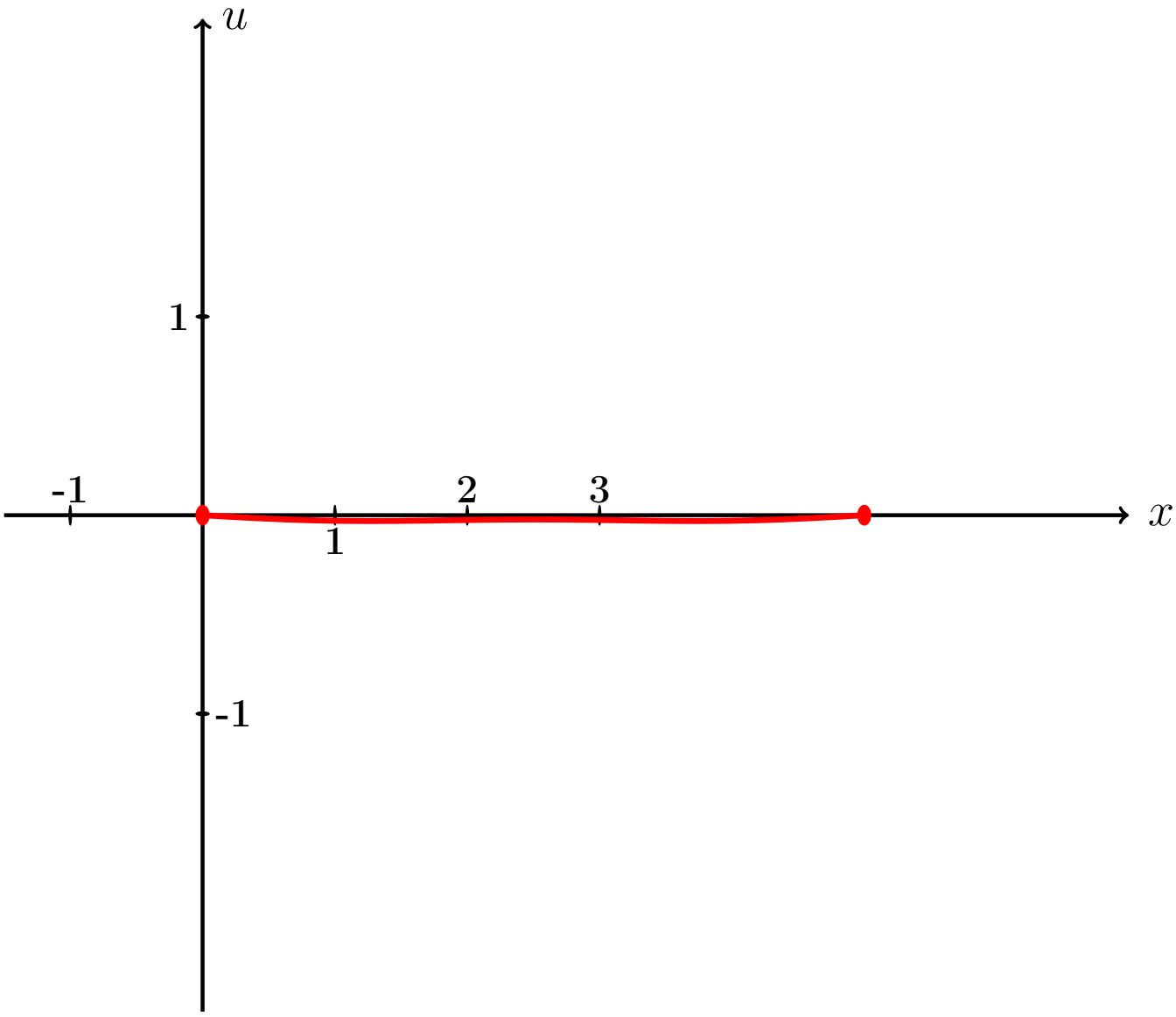


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

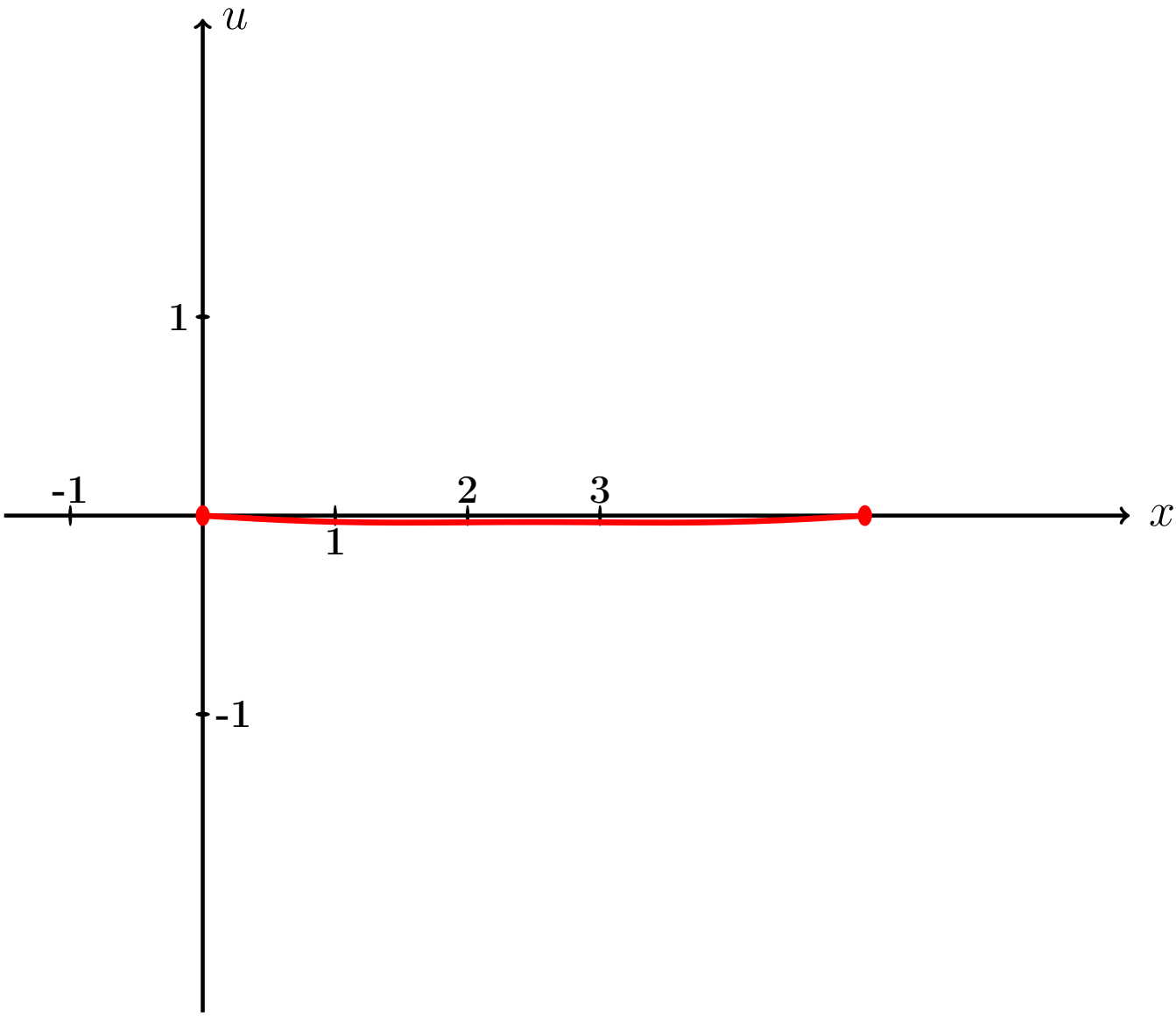


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

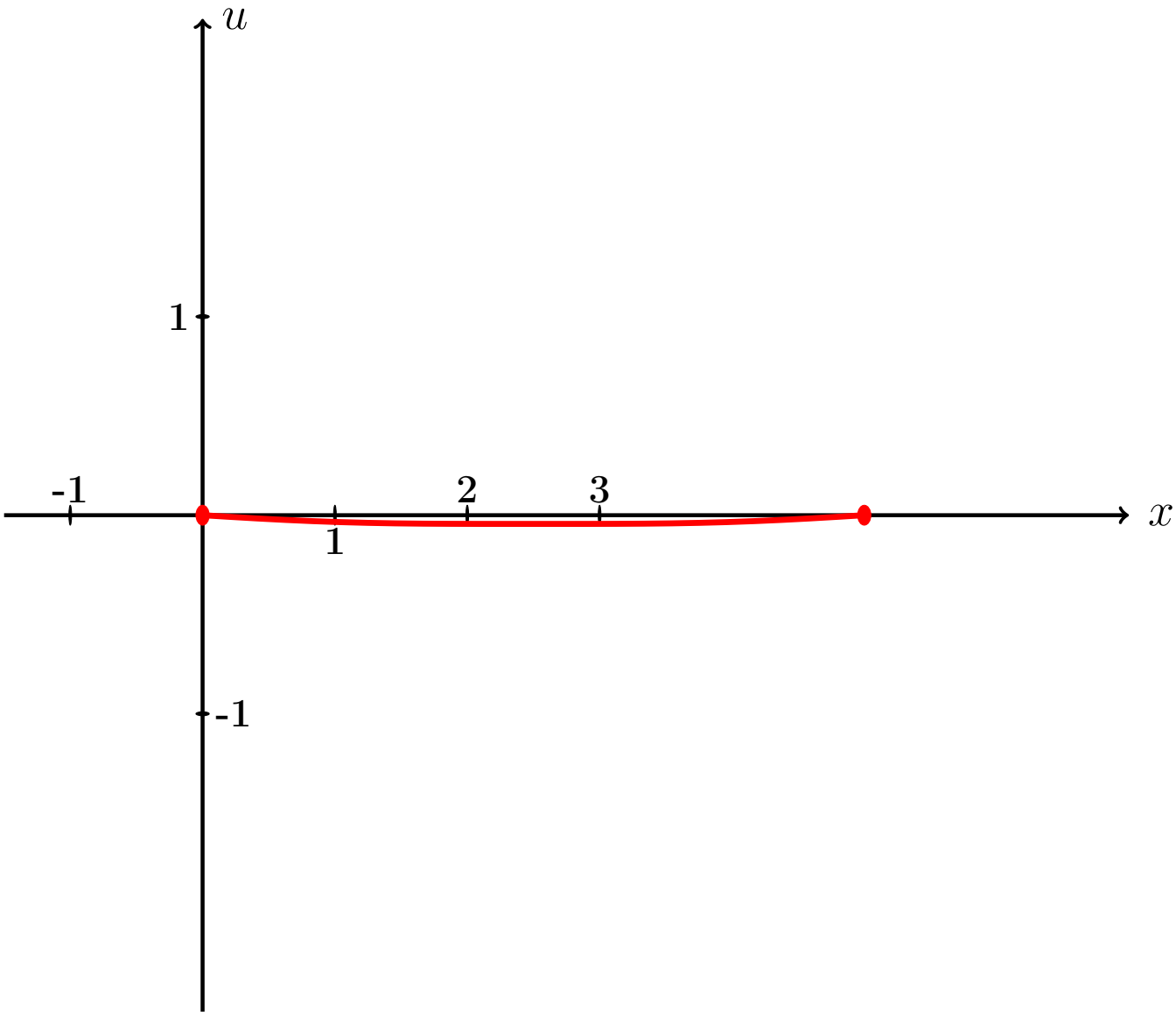


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

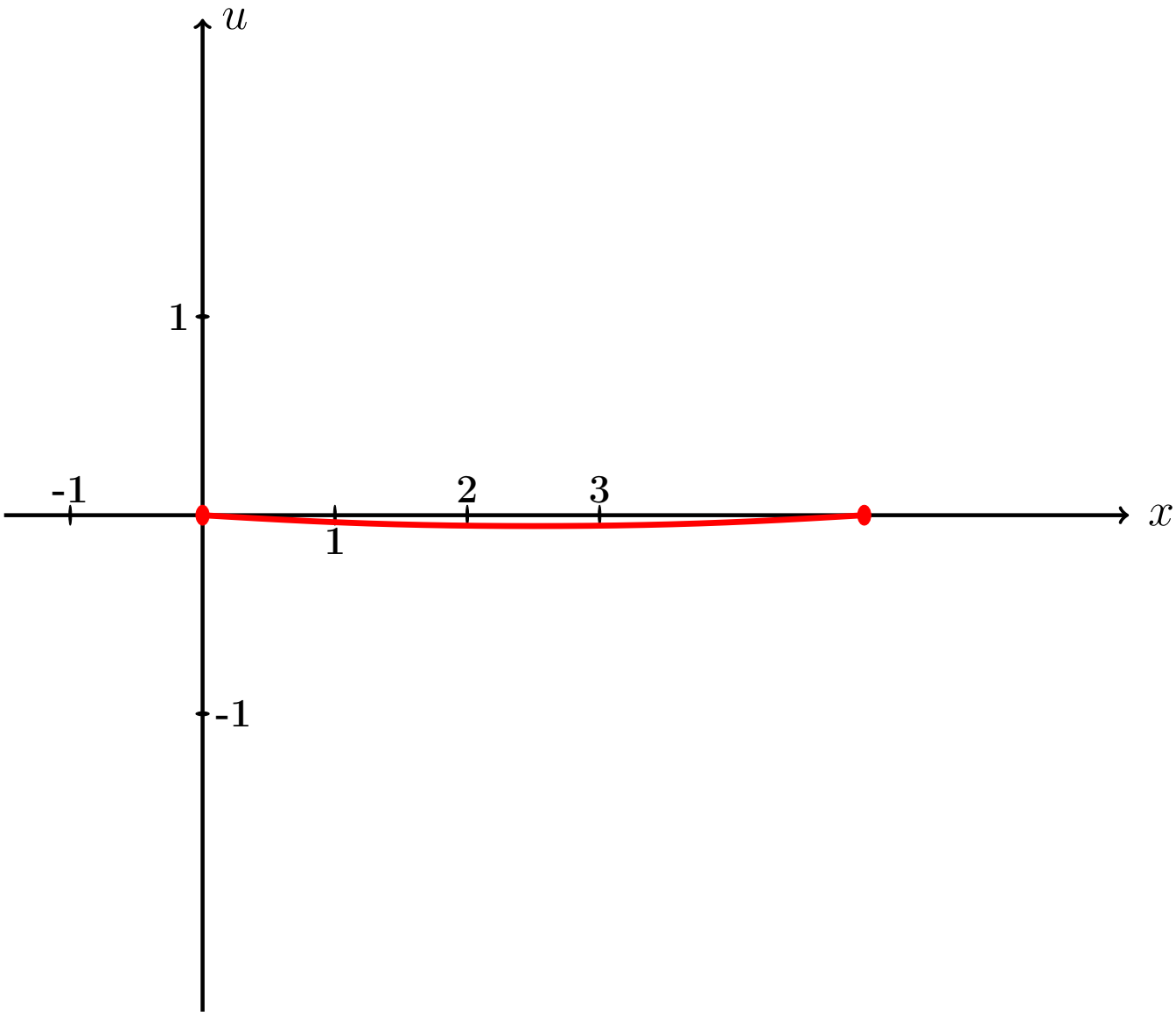


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

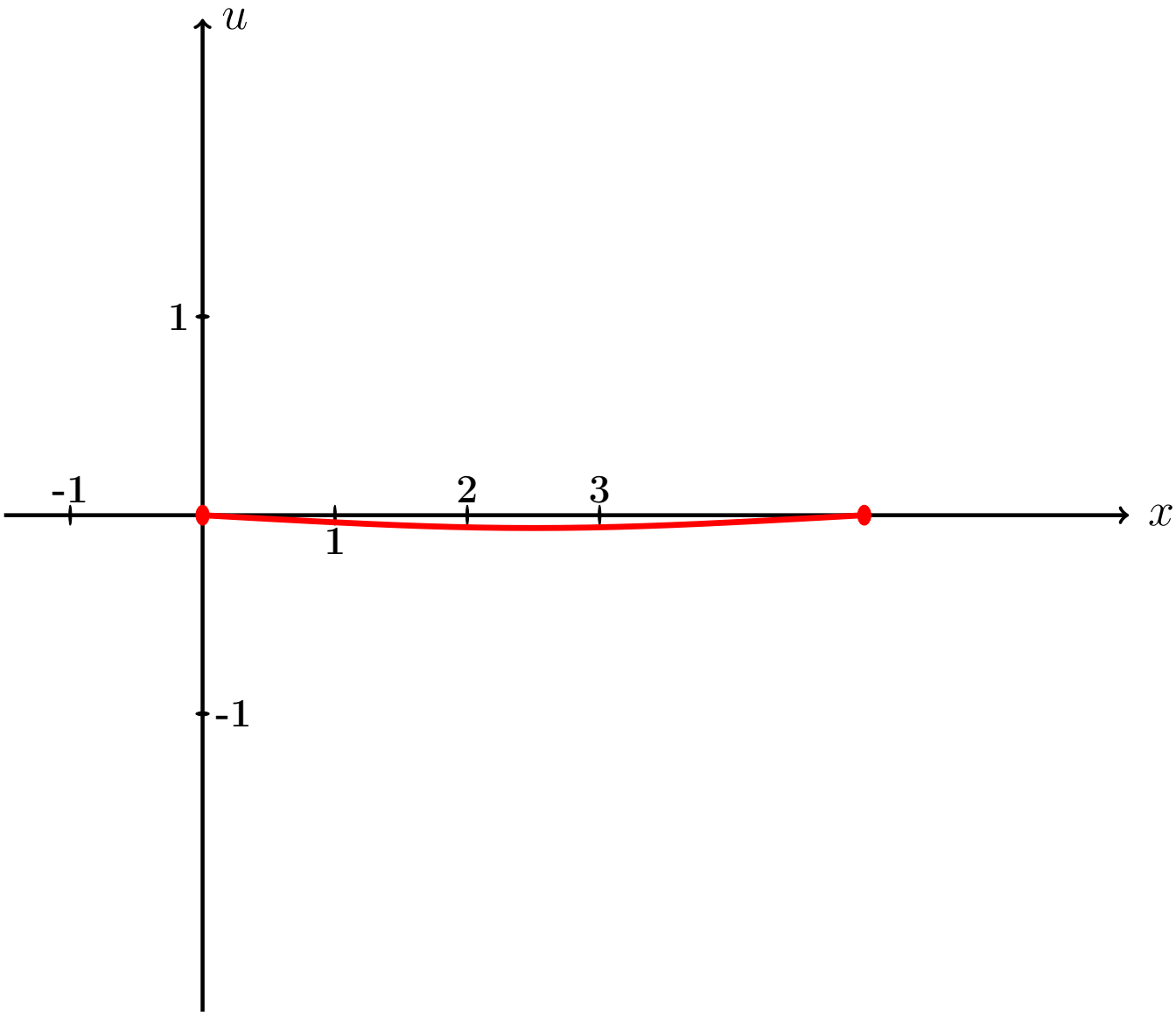


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

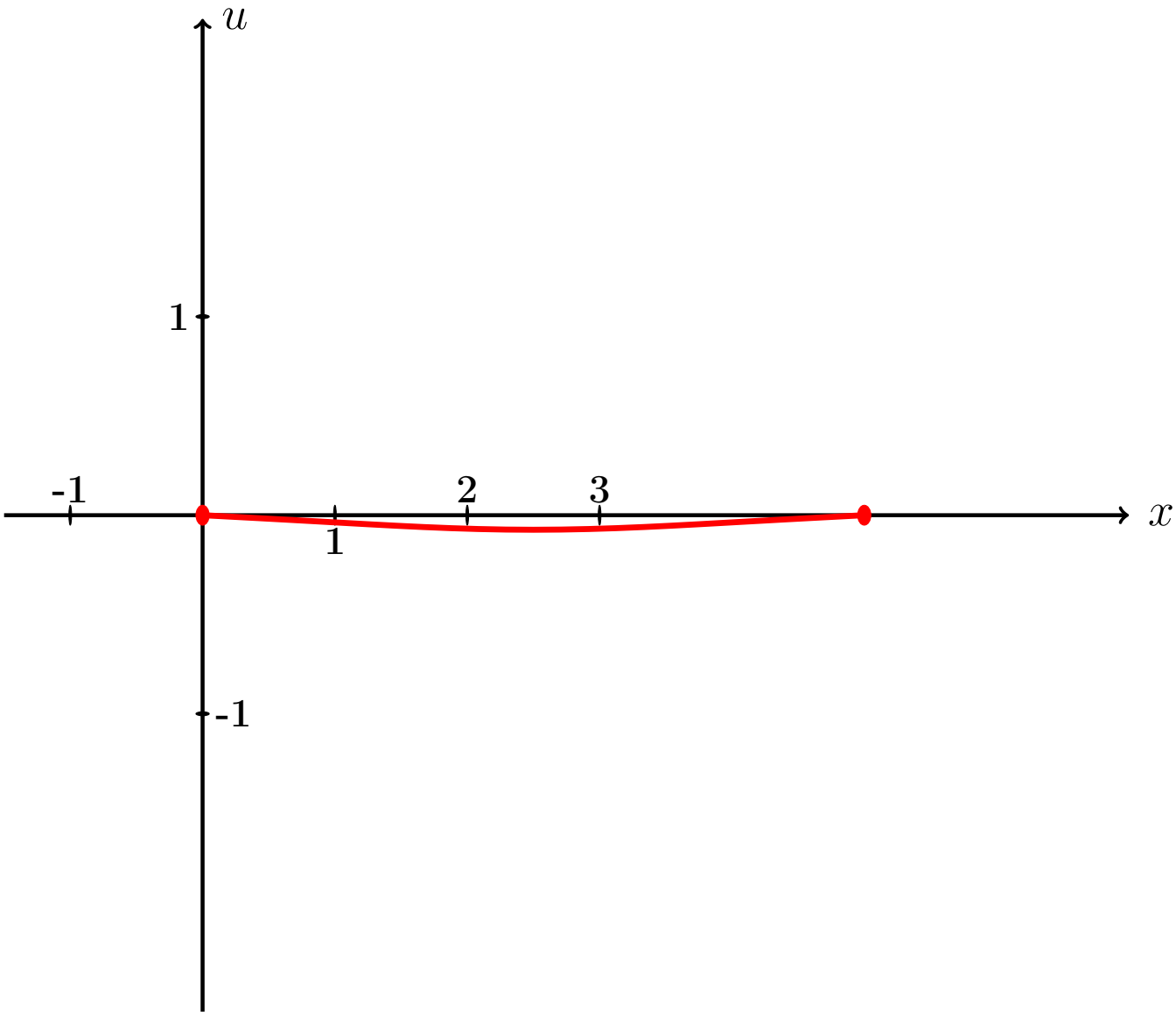


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

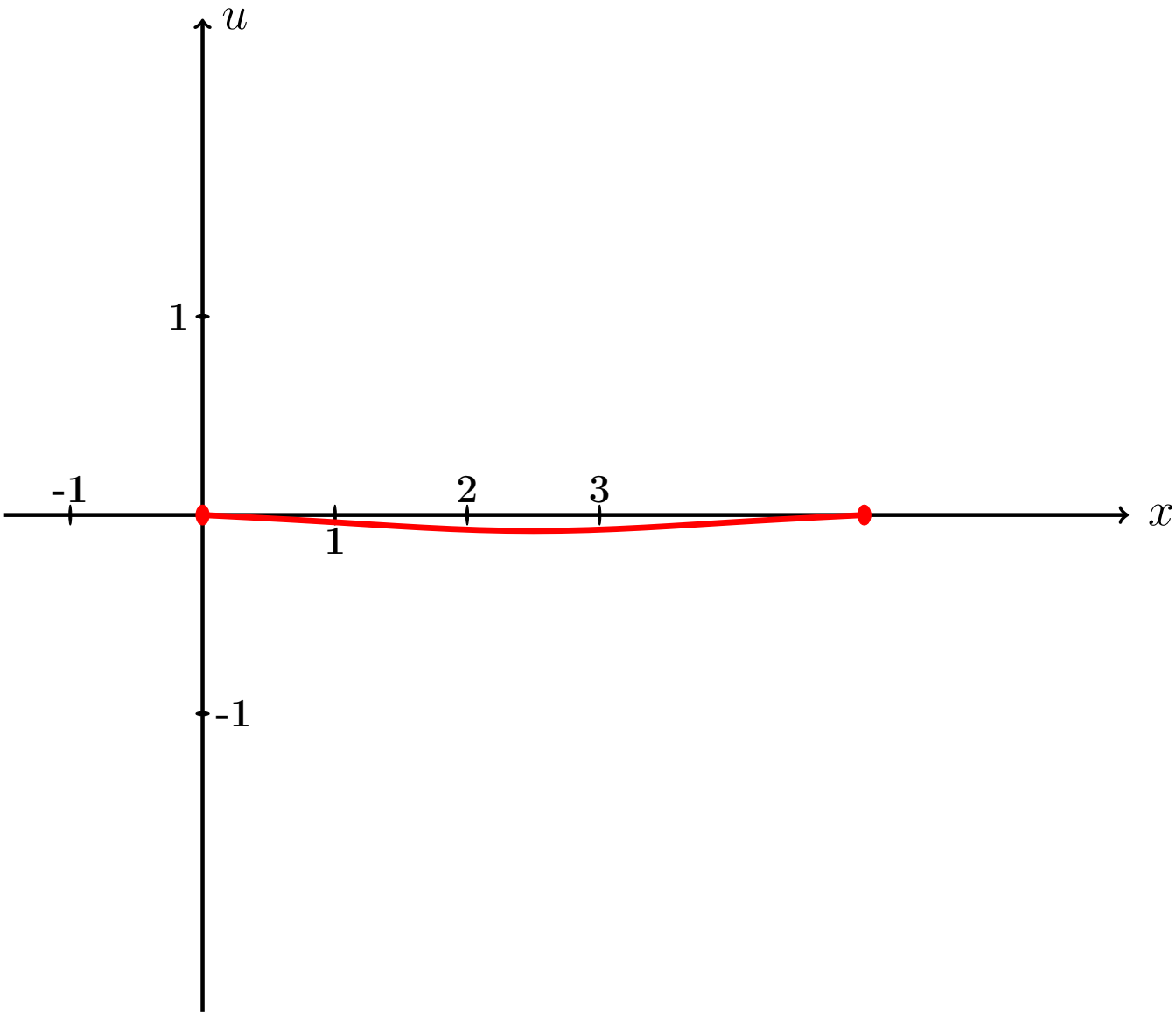


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

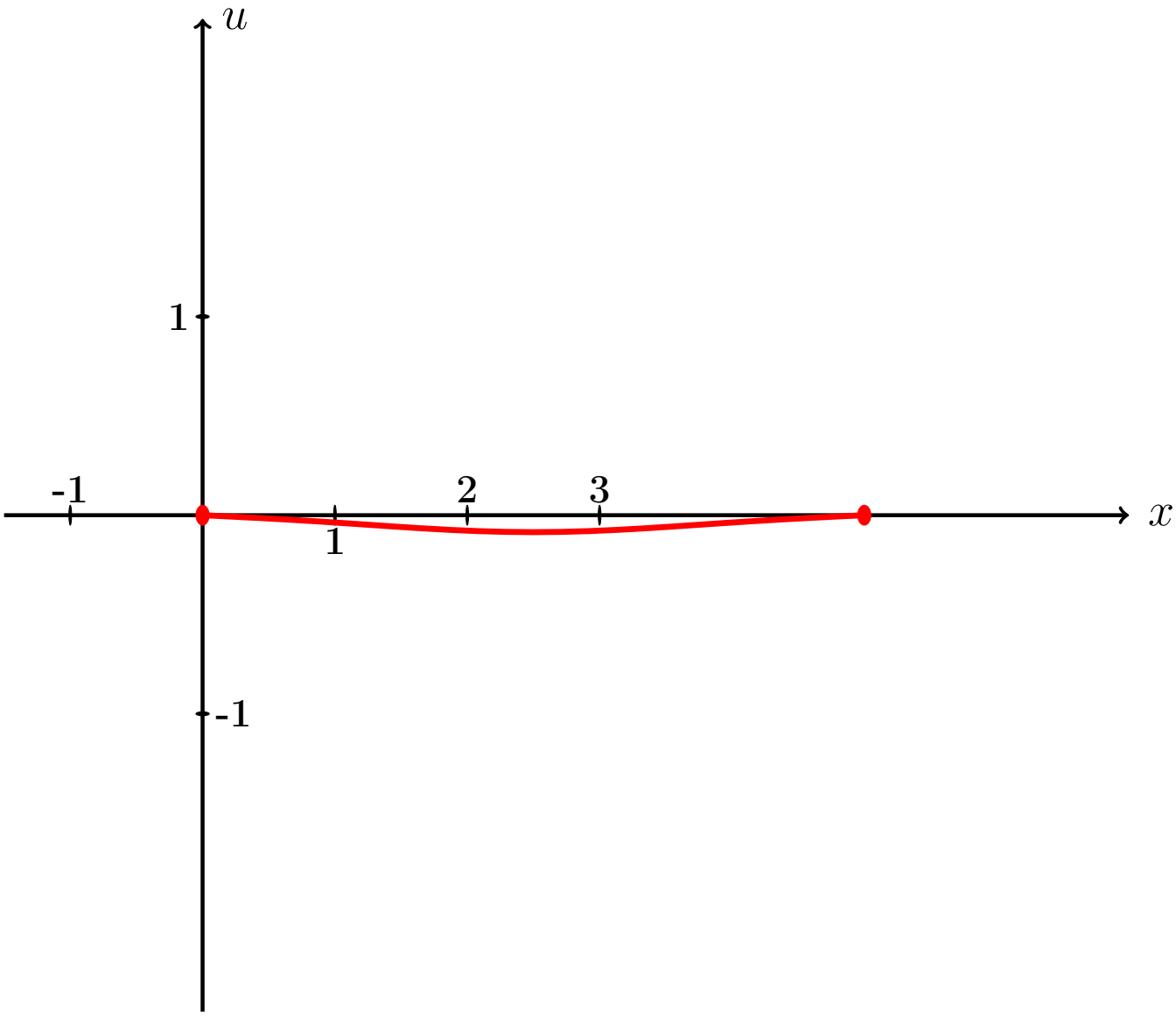


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

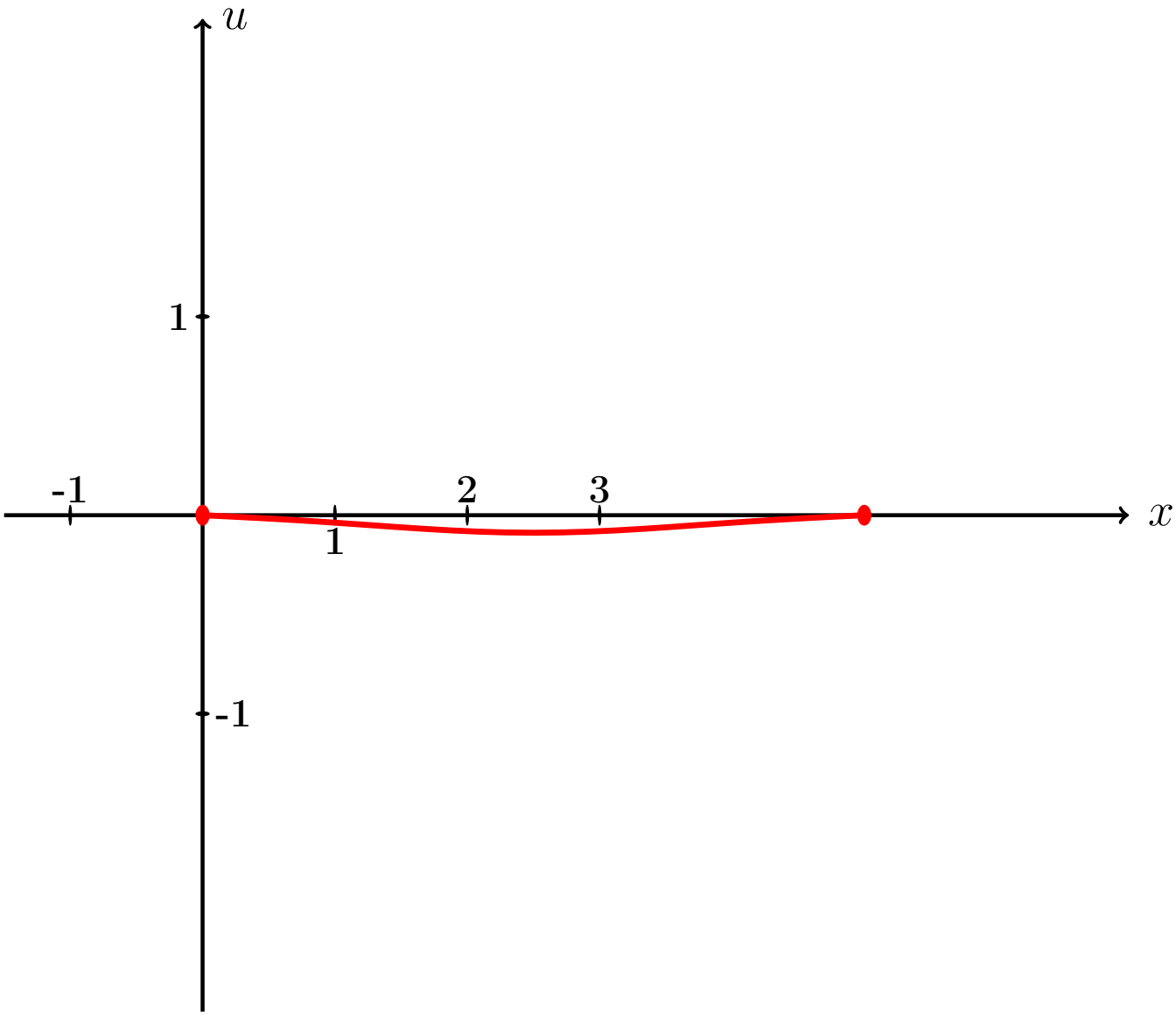


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

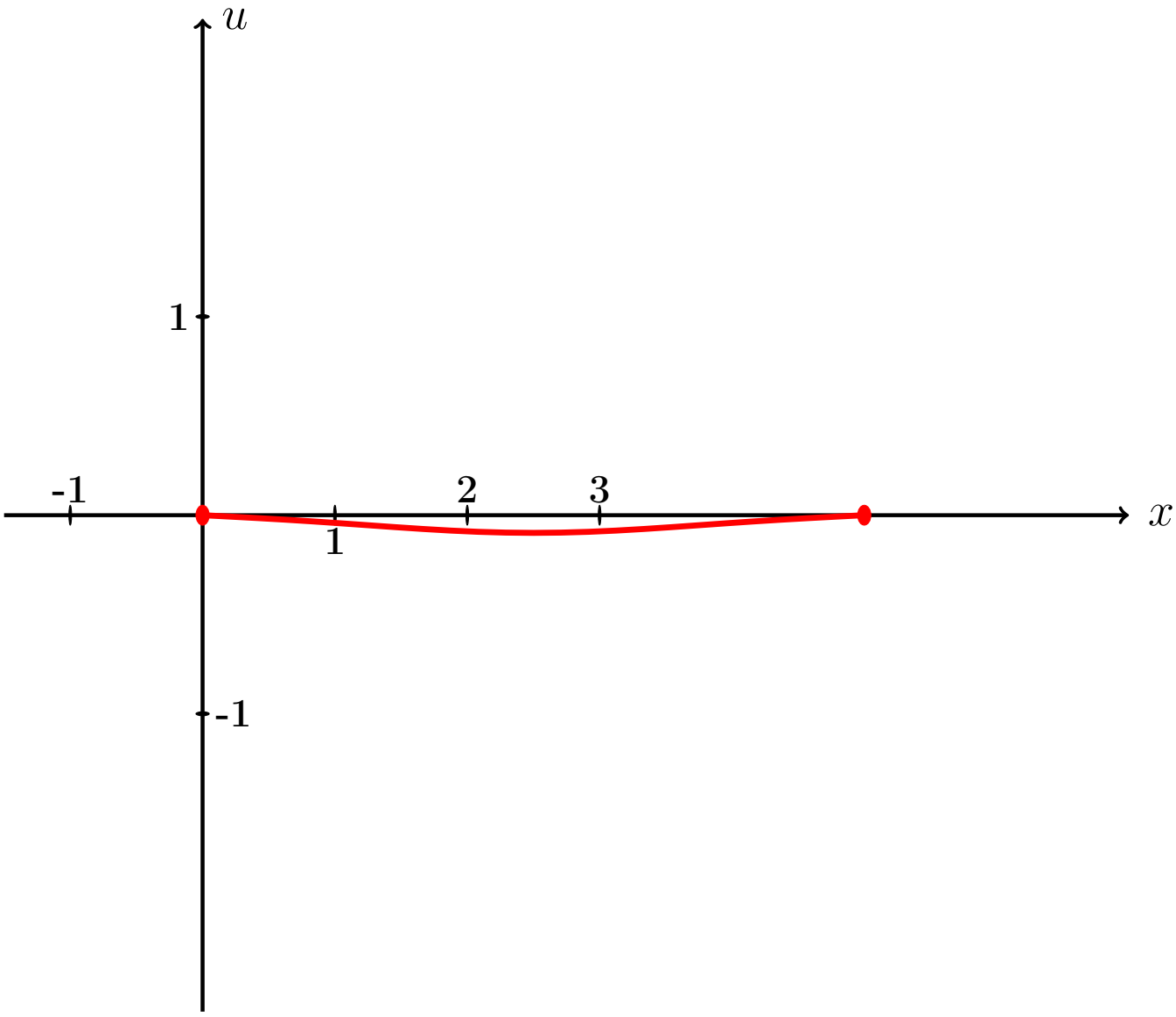


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

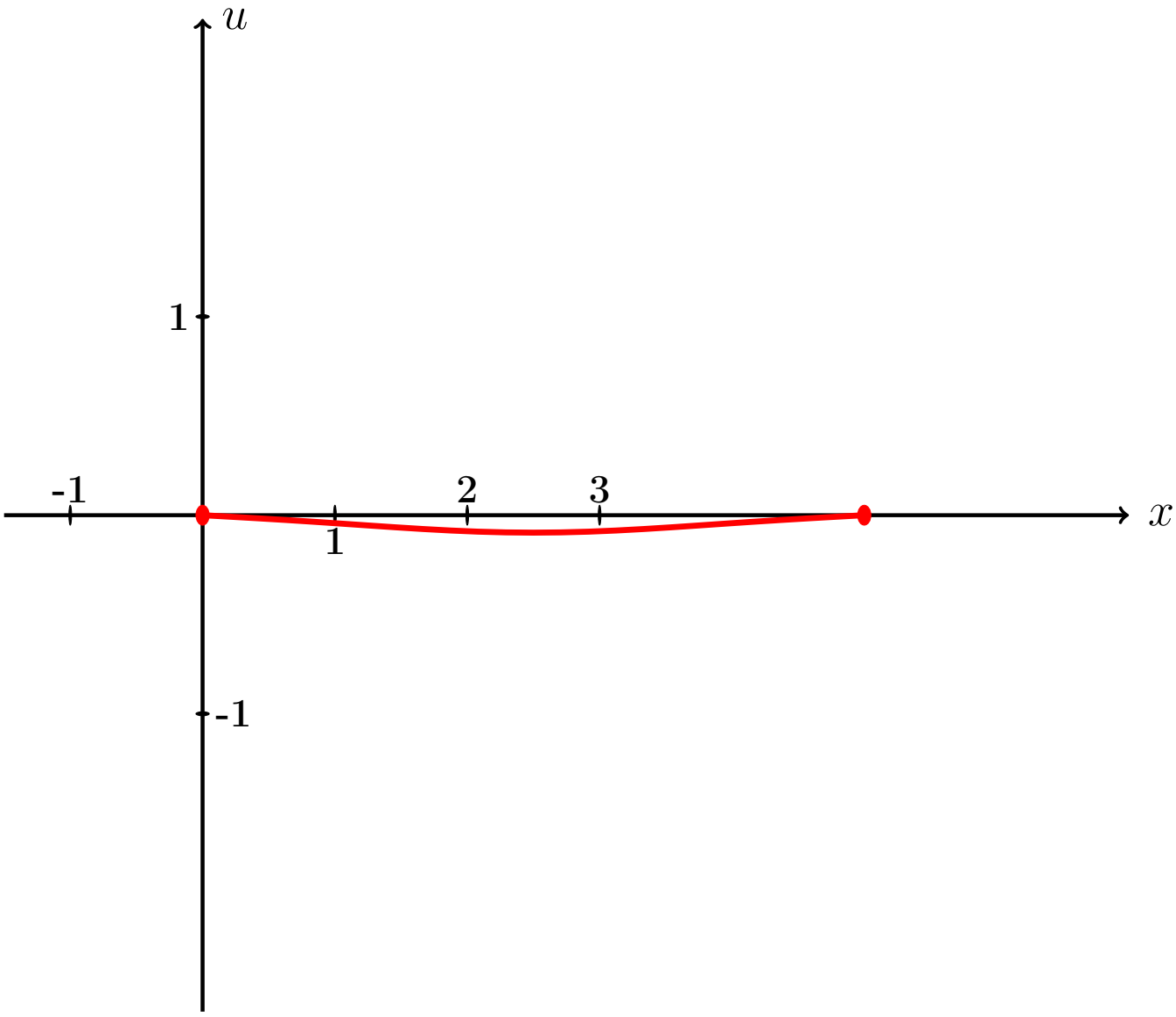


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

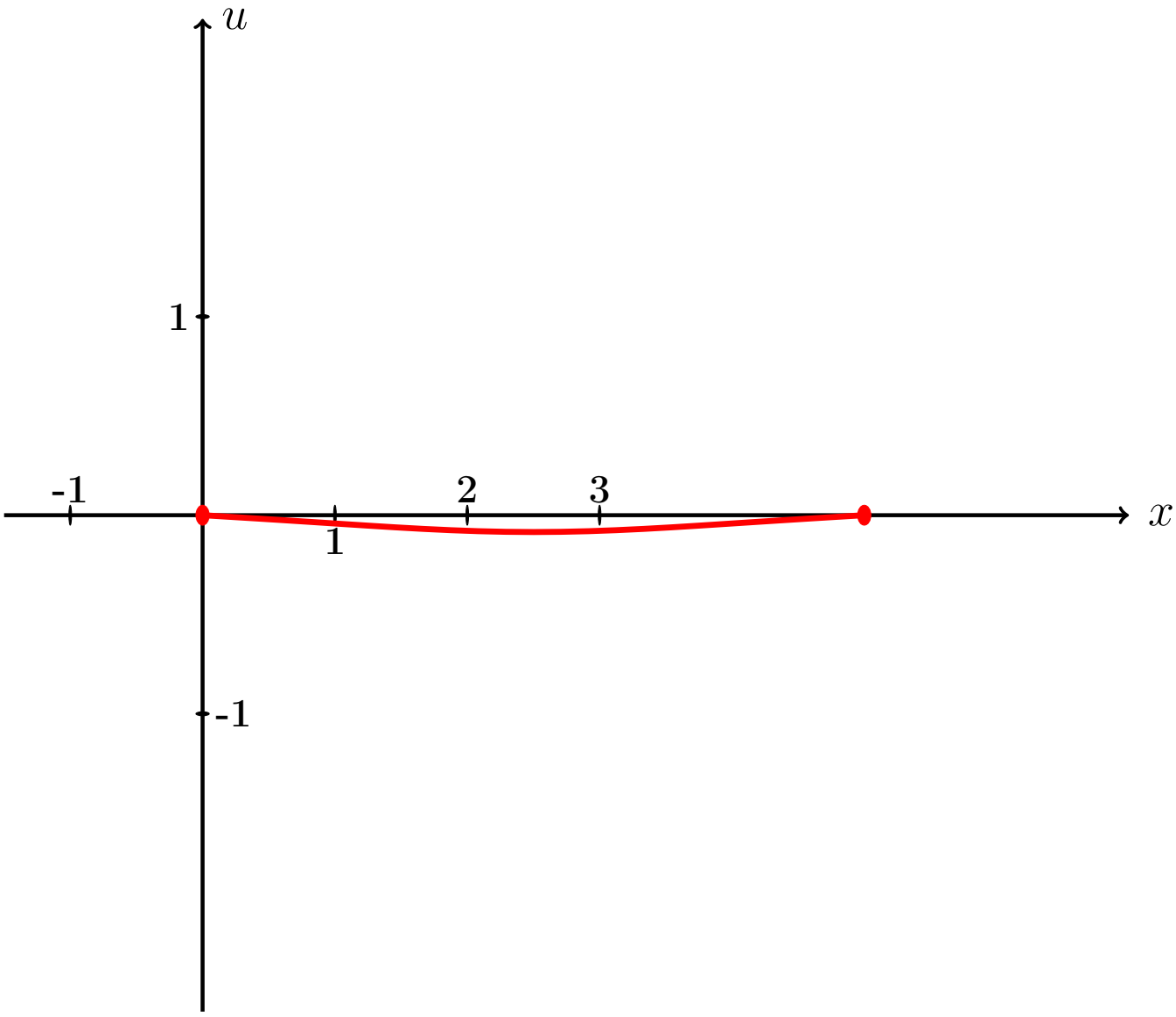


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

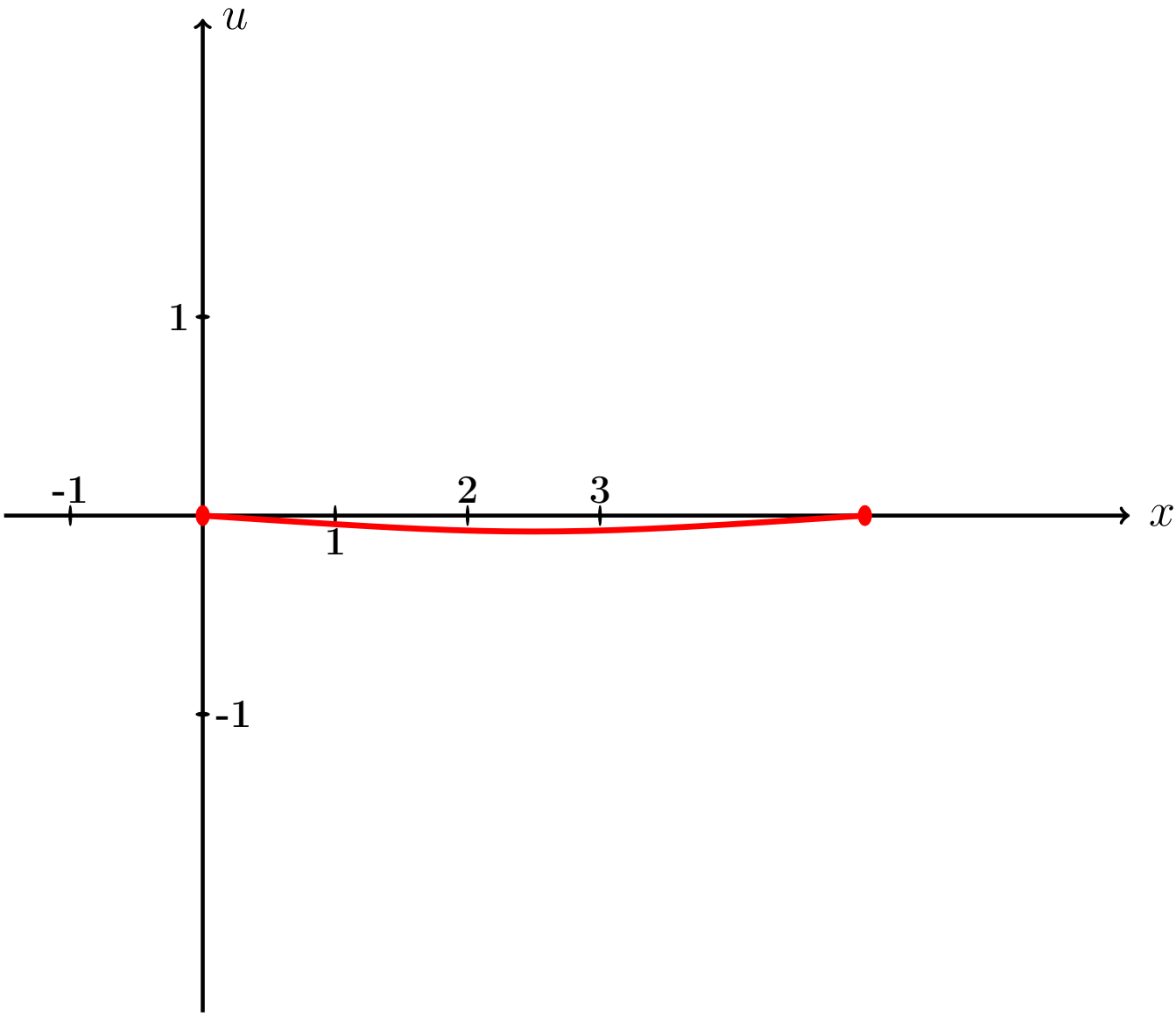


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

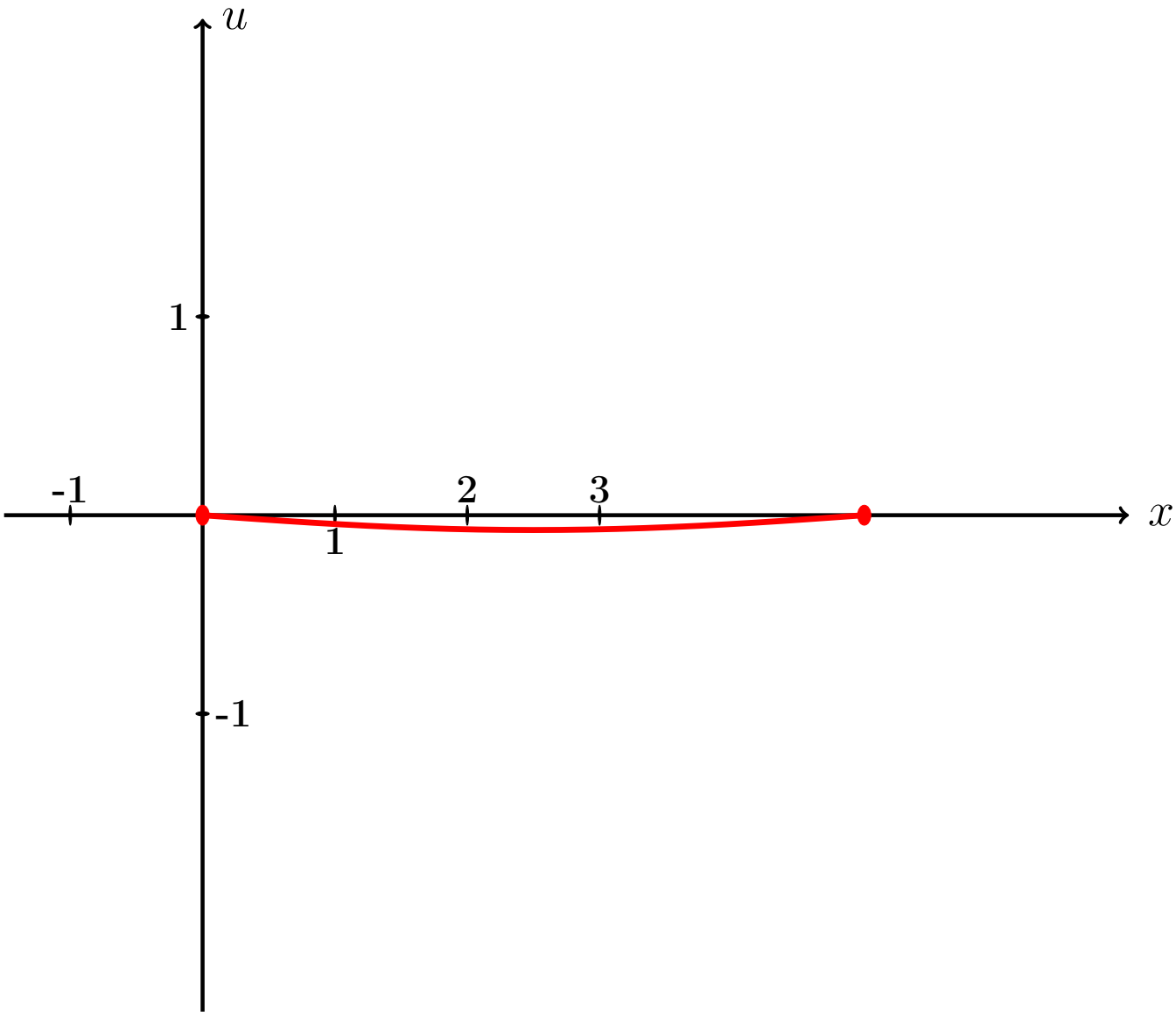


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

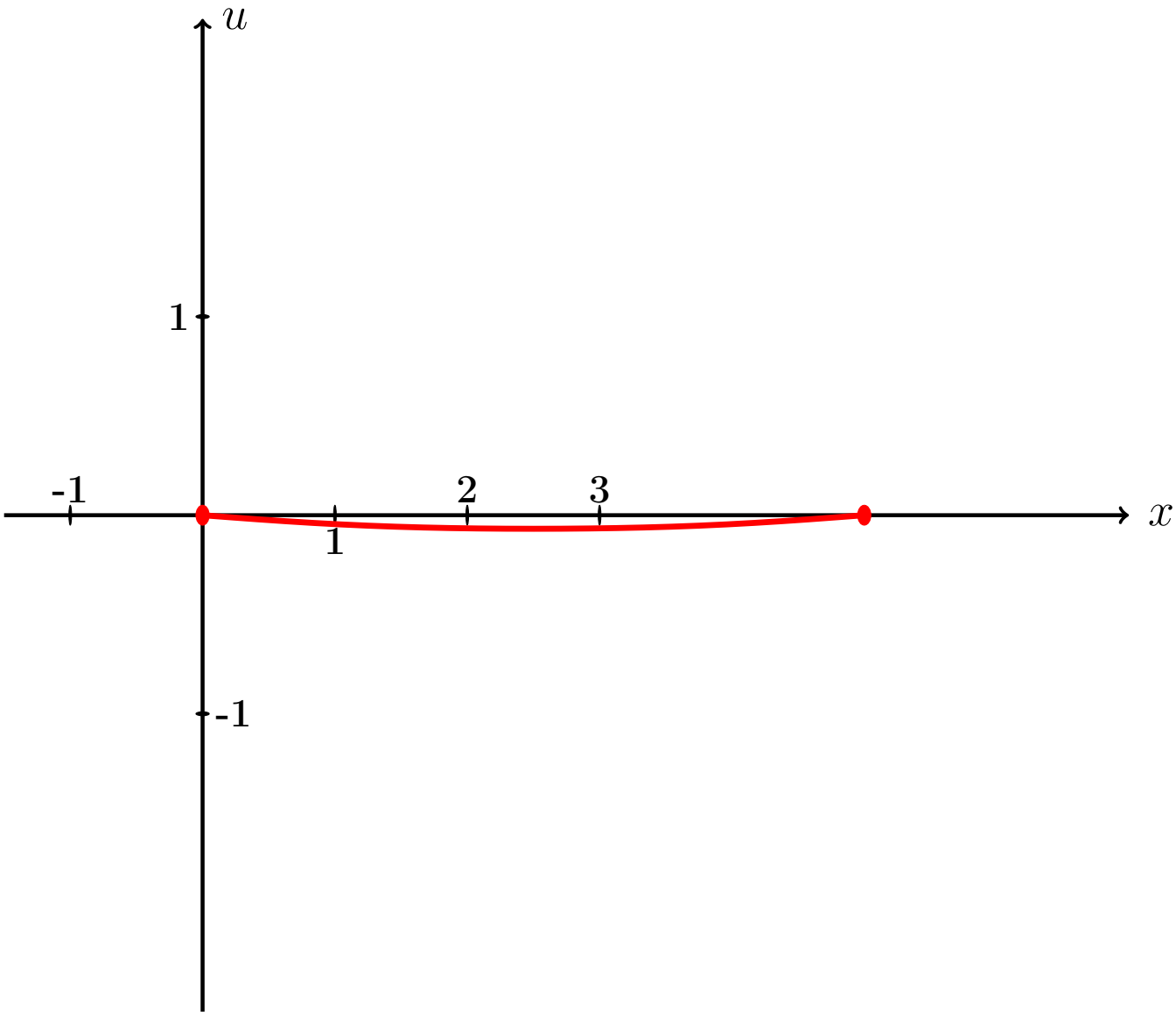


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

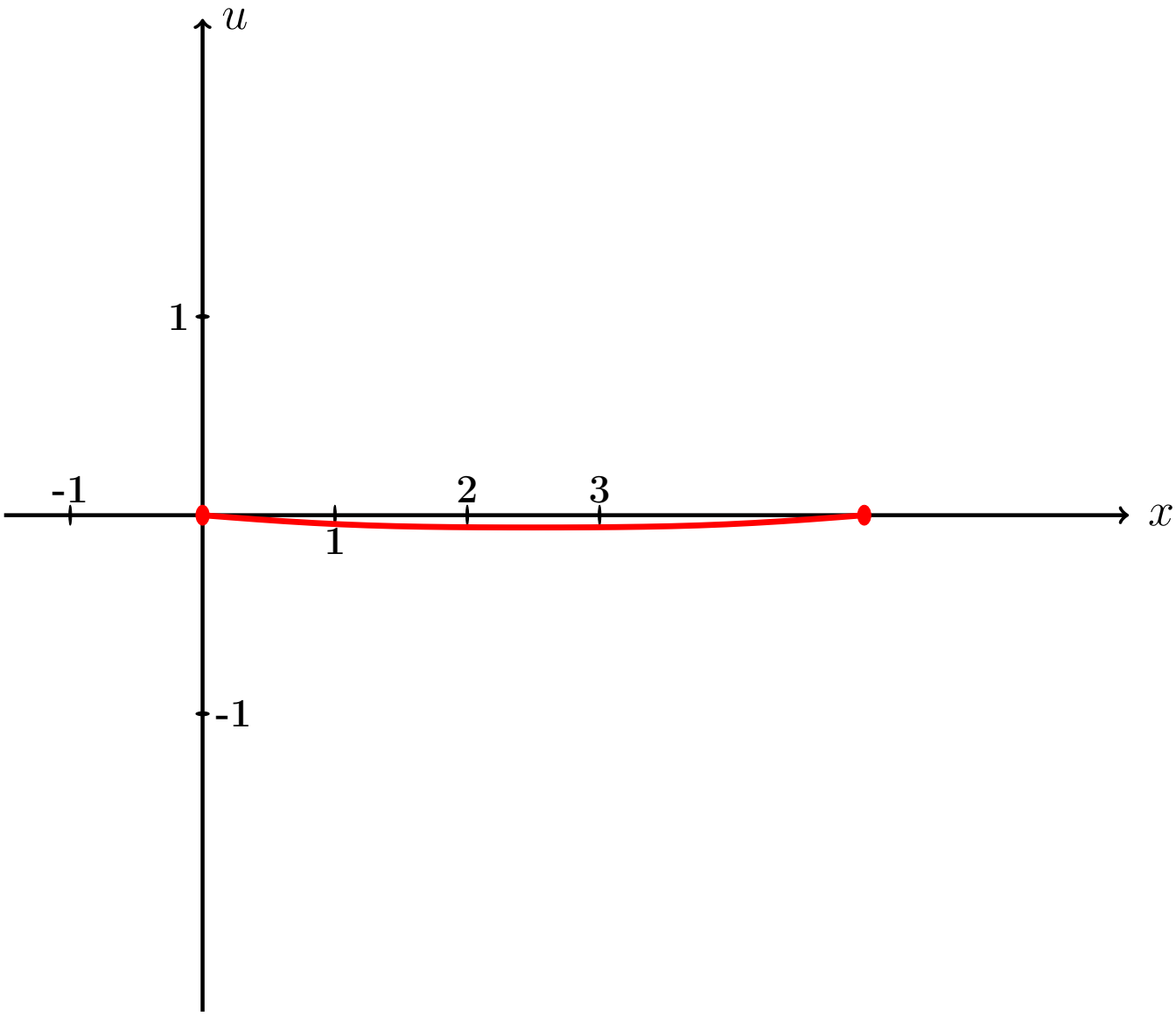


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

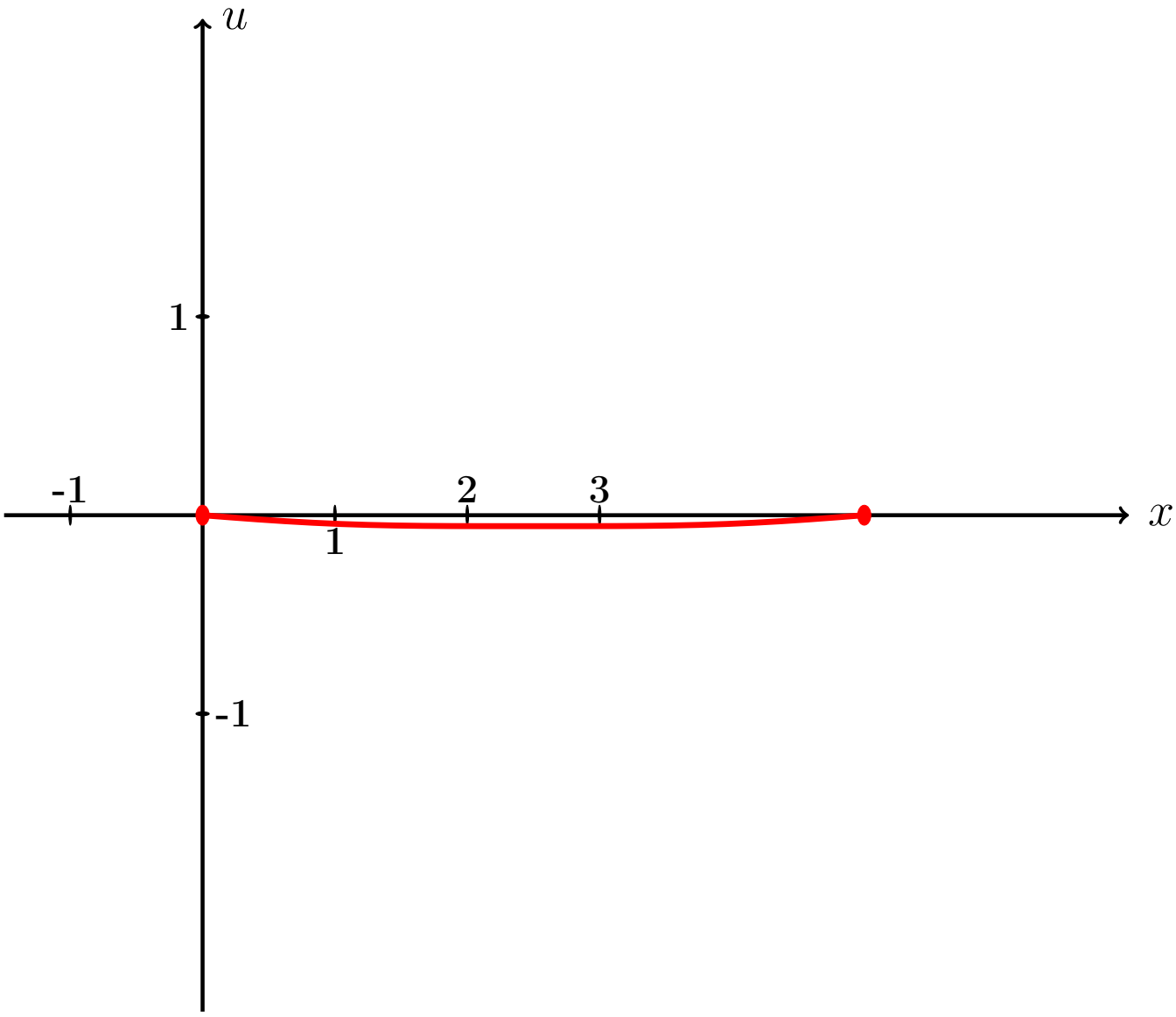


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

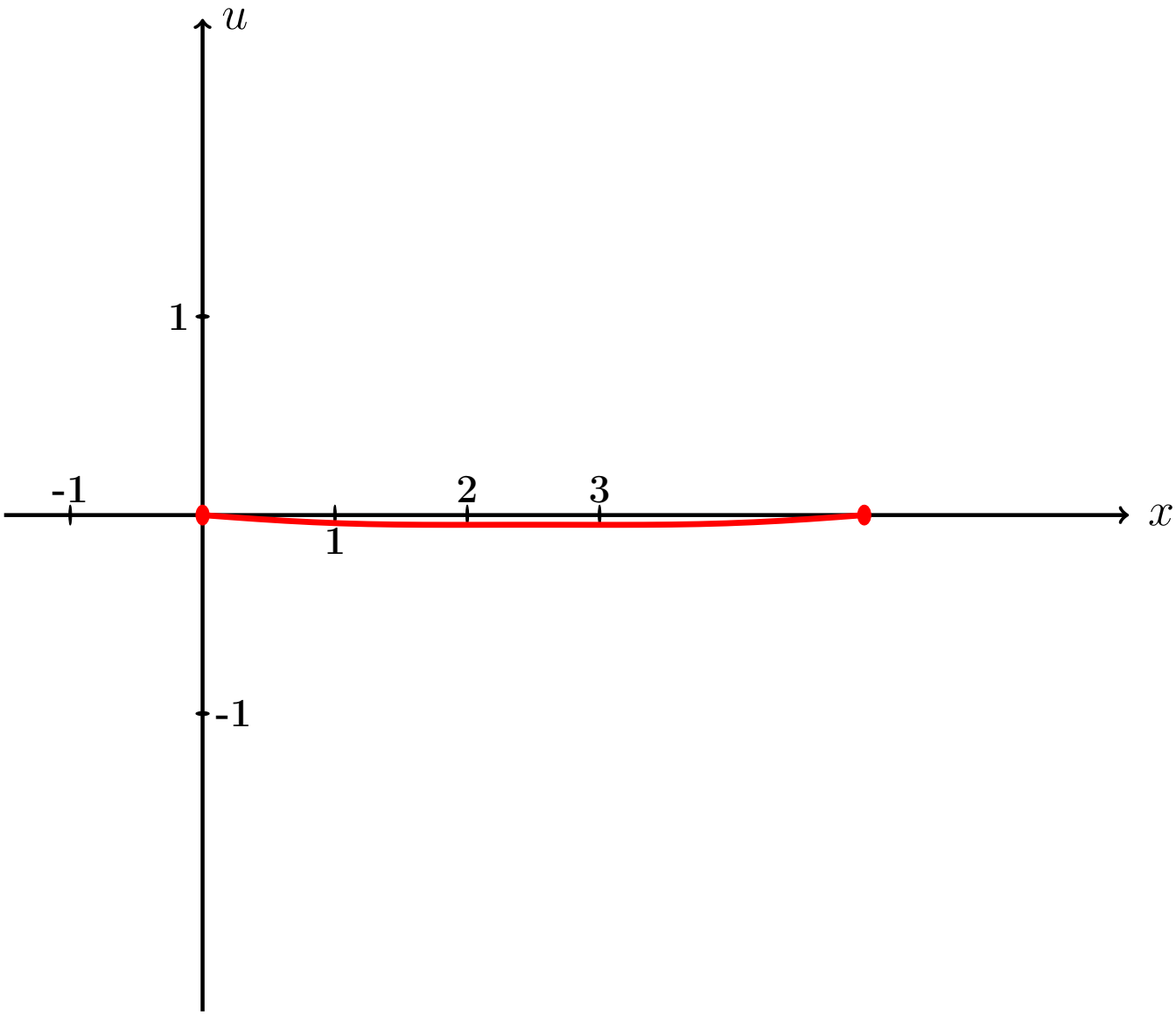


Рис.:

Пример П7, анимация возврат огл

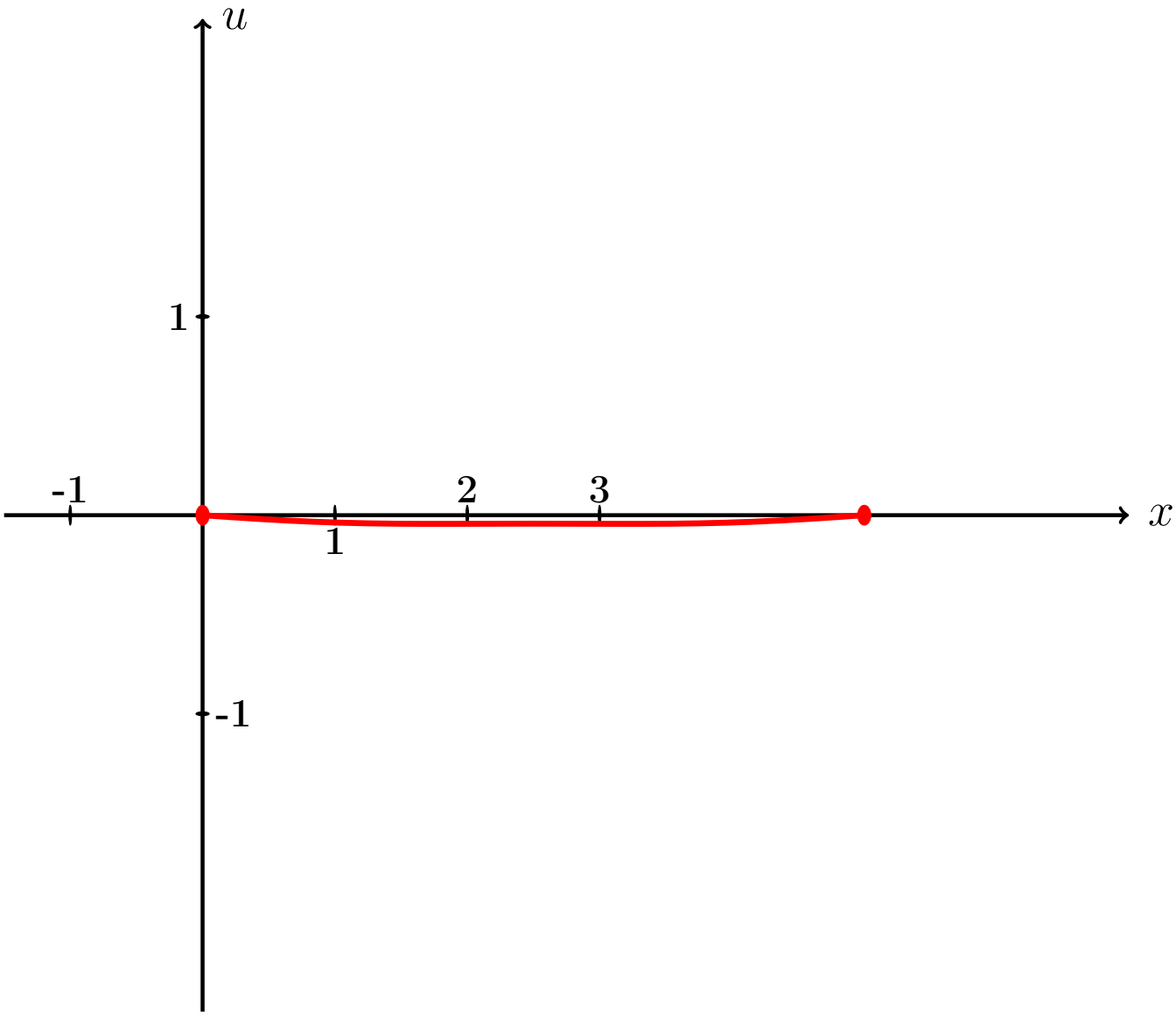


Рис.:

возврат огл

§ 2. Указания для студентов

возврат огл

1. Для работы с Пособием, студент должен использовать современный компьютер с программами Acrobat или Reader для чтения файлов PDF.
2. Студент должен иметь калькулятор для инженерных расчетов, либо как программу в компьютере либо как отдельное устройство. Если имеется доступ к интернету, то вычисления можно производить прямо в окошке поиска Google.
3. Перед выполнением задания, студент должен
   - проработать материал лекций и практических занятий по практике дифференцирования,
   - освоить навигацию по пособию, включая **зеленые кнопки**

     возврат огл таб. интегралов

     а также активные строки самого **оглавления**,
   - внимательно разобрать решение примеров 1 – 8.
   - разобрать вариант 0 дающий правильное оформление решения.
4. Далее следует найти и решить свой вариант, беря за образец вариант 0
5. Те результаты, для которых имеется возможность интерактивной проверки, должны быть проверены.
6. **Закончив решение, следует еще раз ввести все ответы в формы последней страницы своего варианта, выполнить проверку так, чтобы были видны отметки ВЕРНО или НЕВЕРНО, после чего распечатать эту страницу с указанными отметками для сдачи преподавателю, либо же, по указанию преподавателя, отправить результаты электронной почтой через кнопку SUBMIT.**
7. Дополнительно для сдачи работы, студент должен иметь при себе промежуточные вычисления по произвольной форме.
8. Вычисления производятся как минимум с 3 знаками после десятичной точки. Окончательные результаты для нецелых чисел представляются с двумя знаками.
9. Результаты для интерактивной проверки нецелых чисел представляются с двумя знаками после десятичной точки.

возврат огл

Вариант 0

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 7$.

$$y = 2 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{5} \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(2 \cdot \frac{5^2}{2} + 7 \cdot 5 \right) - \left(2 \cdot \frac{(-5)^2}{2} + 7 \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[60.00 - (-10.00) \right] = 14.0 .$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{5}{k\pi}\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{7}{5}\left(\frac{5}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\frac{2}{k\pi}\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{(-2\cdot 5)}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\sin(k\pi) + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\sin(-k\pi) + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = 0,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = 0$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\frac{5}{k\pi}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{7}{5}\left(\frac{5}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\frac{2}{k\pi}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\frac{2\cdot(-5)}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\cos(k\pi) + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{2\cdot 5}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi) + \frac{2\cdot 5}{k^2\pi^2}\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\frac{7}{k\pi}\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\frac{2\cdot 2\cdot 5}{k\pi}\cdot\cos(k\pi) = -\frac{20}{k\pi}\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\frac{20}{k\pi}\cdot(-1)^k$. В частности,

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{20}{1\pi} * (-1) &&= 6.37 \\ B_2 &= -\frac{20}{2\pi} * (1) &&= -3.18 \\ B_3 &= -\frac{20}{3\pi} * (-1) &&= 2.12 \end{aligned}$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\frac{14.0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=7.0+6.37\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=7.0+6.37\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-3.18\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

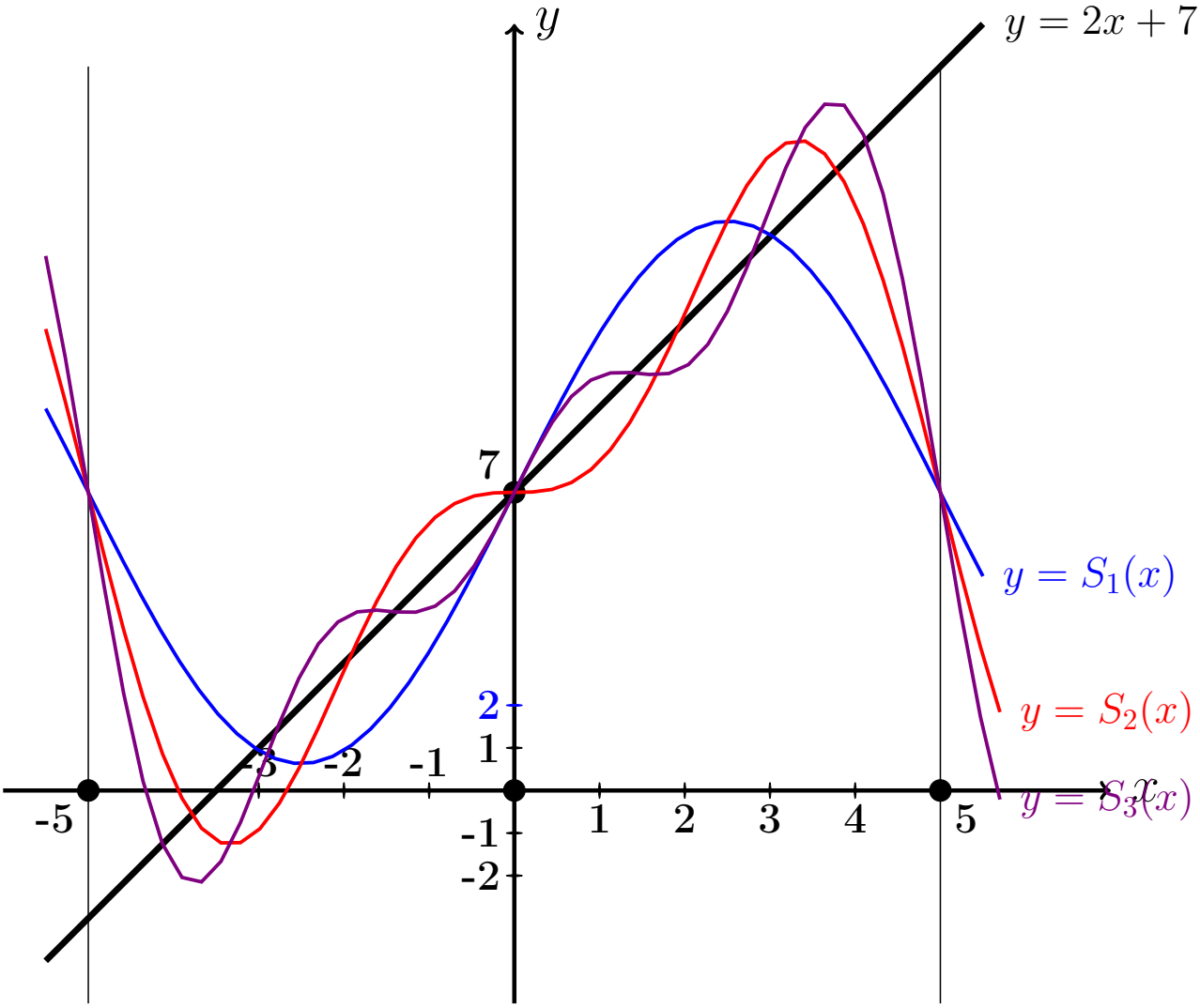
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=7.0+6.37\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-3.18\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+2.12\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 0.1 (Табулировка $y=2x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+7$	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y=S_1(x)$	7	*3,26	0,94	0,94	3,26	7	10,74	13,06	13,06	10,74	7
$y=S_2(x)$	7	0,23	$-0,93$	2,81	*6,28	7	7,72	11,19	14,93	13,77	7
$y=S_3(x)$	7	$-1,78$	0,32	4,06	4,26	7	9,74	*9,94	13,68	15,78	7

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 0.1



Выборочная проверка вариант 0 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи	14.0	Клик	
Ответ (формат 1.23): B_1 введи	6.37	Клик	
Ответ (формат 1.23): B_2 введи	-3.18	Клик	
Ответ (формат 1.23): B_3 введи	2.12	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 1 (по Таблице 0.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи	3.26	Клик	
Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи	6.28	Клик	
Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи	9.94	Клик	

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x^2 + 12\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 6\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (4x^2+12\sqrt{y})dx = 4\int x^2\,dx + 12\int \sqrt{y}\,dx = 4\frac{x^3}{3} + 12x\sqrt{y} + C(y)$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$4\frac{5^3}{3} + 12\cdot 5\cdot\sqrt{y} + C(y) = 6\cos y\,,$$

откуда $C(y) = 6\cos y - 4\cdot\frac{5^3}{3} - 12\cdot 5\cdot\sqrt{y} = 6\cos y - 166.67 - 60\cdot\sqrt{y}$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = 1.33\,x^3 + 12x\sqrt{y} + 6\cos y - 166.67 - 60\cdot\sqrt{y}\,.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,2) = 1.33\cdot 1^3 + 12\cdot 1\cdot\sqrt{2} + 6\cdot\cos 2 - 166.67 - 60\cdot\sqrt{2} = -235.72$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,2)$ введи -235.72 Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^2 + 2t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 2\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^2 + 2t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^2 + 2t)dt = 6x^2 t + 2\cdot\frac{t^2}{2} + C(x) = 6x^2 t + 1.0\,t^2 + C(x)\,,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \left(6x^2 t + 1.0\, t^2 + C(x) \right) dt = \frac{6x^2 t^2}{2} + \frac{1.0 t^3}{3} + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= 3.00 \cdot x^2 \cdot t^2 + 0.333 \cdot t^3 + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{3.00 \cdot x^2 \cdot 0^2 + 0.333 \cdot 0^3 + C(x) \cdot 0}_{0} + C_1(x) = 2\cos x \\ \underbrace{6x^2 \cdot 0 + 1.0 \cdot 0^2}_{0} + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = 3x$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = 2\cos x$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = 3.00 \cdot x^2 \cdot t^2 + 0.333 \cdot t^3 + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= 3.00 \cdot x^2 \cdot t^2 + 0.333 \cdot t^3 + 3xt + 2\cos x$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = 3.00 \cdot 2^2 \cdot 4^2 + 0.333 \cdot 4^3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 2\cos 2 = 236.480$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи 236.480 Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

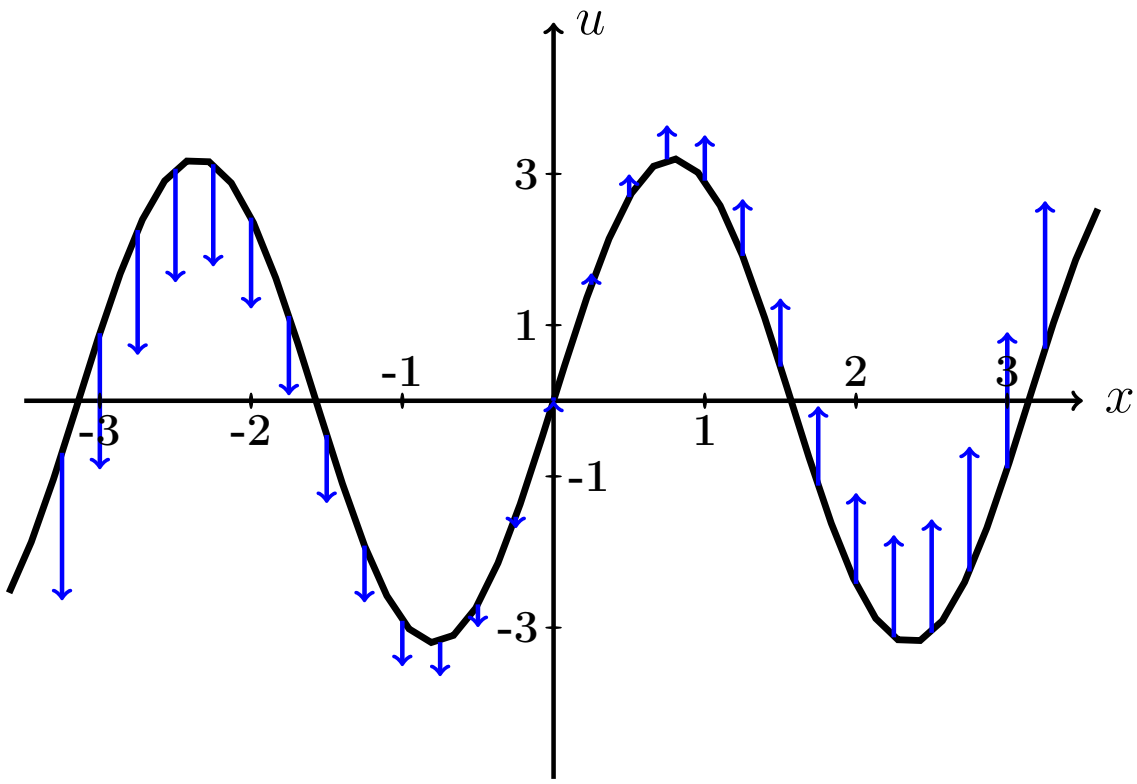


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \frac{3.2\sin 2.0(x-1.1t)+3.2\sin 2.0(x+1.1t)}{2} + \frac{1}{2\cdot 1.1}\int_{x-1.1t}^{x+1.1t} 0.6\,z\,dz =$$

$$= \frac{3.2}{2}\big(\sin(2.0x-2.2t)+\sin(2.0x+2.2t)\big) + \frac{0.6}{2\cdot 1.1\cdot 2}\,z^2\Big|_{z=x-1.1t}^{z=x+1.1t} =$$

$$= 1.60\big(\sin 2.0x\cos 2.2t - \cos 2.0x\sin 2.2t + \sin 2.0x\cos 2.2t + \cos 2.0x\sin 2.2t\big) +$$
$$+ 0.14\cdot\big((x+1.1t)^2-(x-1.1t)^2\big) =$$

$$= = 1.60\cdot 2\cdot\sin 2.0x\cos 2.2t +$$
$$+ 0.14\left(x^2+1.1^2t^2+2\cdot x\cdot 1.1t - x^2 - 1.1^2t^2 + 2\cdot x\cdot 1.1t\right) =$$

$$= 3.2\,\sin 2.0x\cos 2.2t + 0.14\cdot 2\cdot 2\cdot 1.1\cdot xt = 3.2\,\sin 2.0x\cos 2.2t + 0.616\,xt.$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) = 3.2\,\sin 2.0x\cos 2.2t + 0.616\,xt$.

Таблица 0.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0,1,2$)

x	−3,0	−2,5	−2,0	−1,5	−1,0	−0,5	0	+0,5	+1,0	+1,5	+2,0	+2,5	+3,0
$u(x,0)$	*0,9	3,1	2,4	−0,5	−2,9	−2,7	0	2,7	2,9	0,5	−2,4	−3,1	−0,9
$u(x,1)$	−2,4	−3,3	−2,7	−0,7	*1,1	1,3	0	−1,3	−1,1	0,7	2,7	3,3	2,4
$u(x,2)$	−4	−4	−3,2	−1,7	−0,3	0,2	0	−0,2	0,3	1,7	*3,2	4	4

Выборочная проверка вариант 0 задача 4 (по Таблице 0.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи 0.9 Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи 1.1 Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи 3.2 Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 0.2.

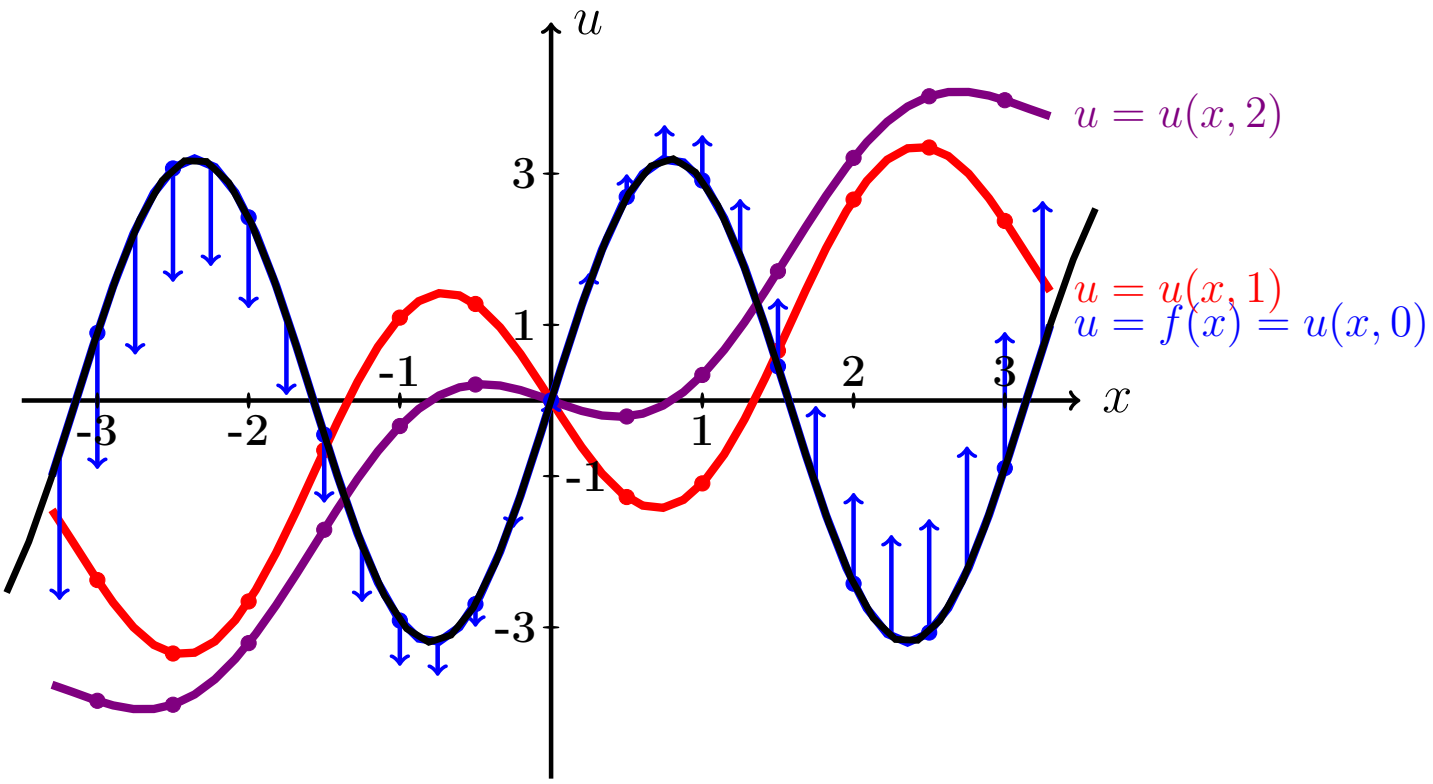


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

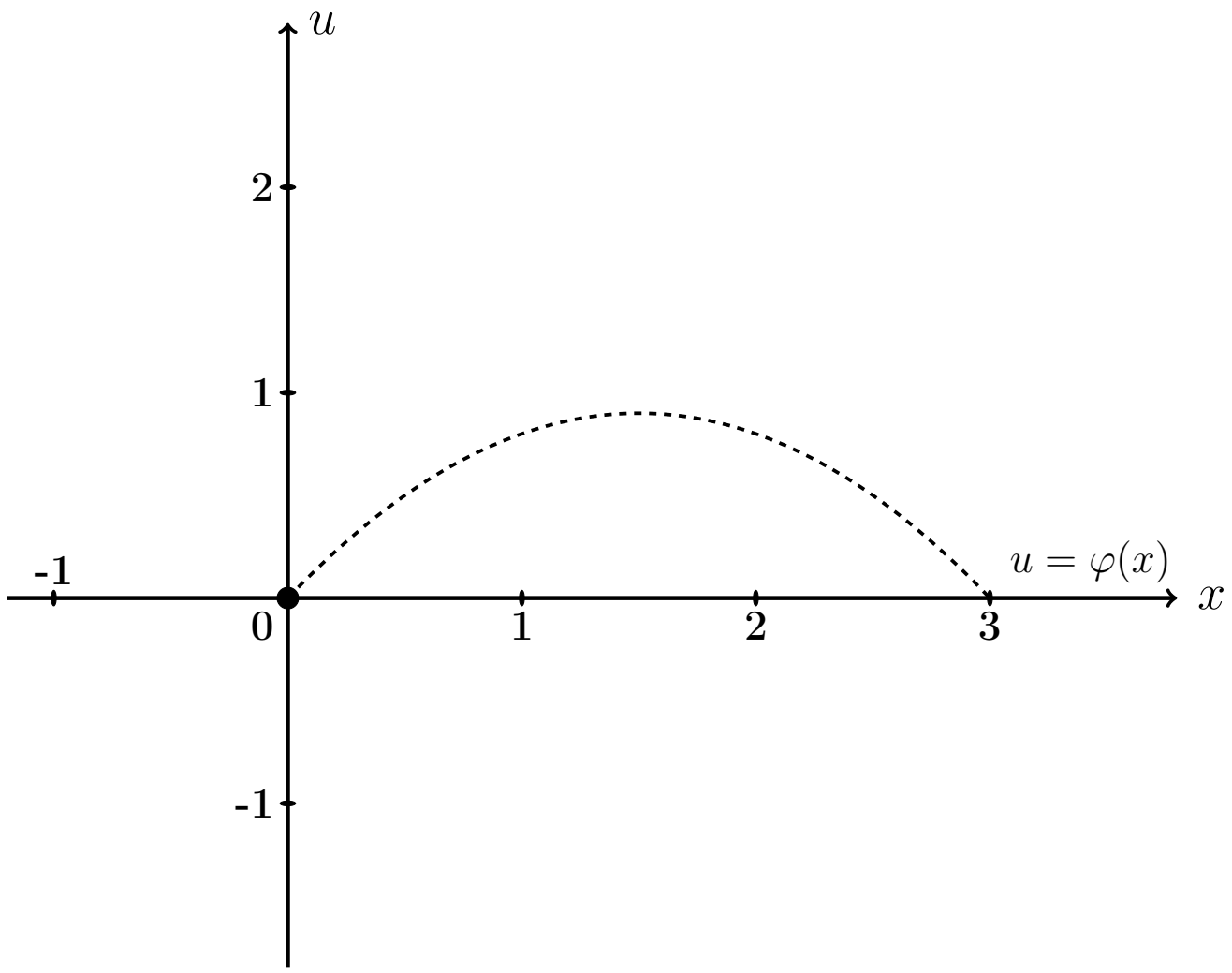


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^3(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= -\frac{0.8}{3}\int_0^3 x^2\sin\frac{k\pi x}{3}dx + \frac{2.4}{3}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}dx\,.$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p=\frac{k\pi}{3}$.

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{x^2}{p}\cos px+\frac{2x}{p^2}\sin px+\frac{2}{p^3}\cos px\Big)\Big|_0^3+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{x}{p}\cos px+\frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3x^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}+\frac{2x\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3+$$

$$+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}\cos k\pi+\frac{2\cdot 3\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos k\pi\Big)+$$

$$+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}\cos k\pi+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi\Big)+$$

$$+\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0^2}{k\pi}\cos 0+\frac{2\cdot 0\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin 0+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos 0\Big)-$$

$$-\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0}{k\pi}\cos 0+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin 0\Big)\,.$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi=\sin 0=0$ и $\cos k\pi=(-1)^k$, $\cos 0=1$ (таблица 5).

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}(-1)^k+0+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k-\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big)+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}(-1)^k+0+0-0\Big)$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k\Big)+\frac{0.8}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big) = \frac{0.8}{3}\cdot\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \frac{14.40}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big)$$

Окончательно $A_k = \frac{14.40}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{28.80}{k^3\pi^3}, & \text{если } k \text{ нечетное}\end{cases}$.

Таблица 0.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	0,929	0	0,034	0	0,007	0	0,003

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{k\pi x}{3}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 0.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos \frac{1\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{1\pi x}{3} + A_3 \cos \frac{3\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{3\pi x}{3} +$$

$$+ A_5 \cos \frac{5\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{5\pi x}{3}$$

где $A_1 = 0.929$, $A_3 = 0.034$, $A_5 = 0.007$ по таб. 0.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = 0.929 \cos \frac{1\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{1\pi x}{3} + 0.034 \cos \frac{3\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{3\pi x}{3} +$$

$$+ 0.007 \cos \frac{5\pi \cdot 3.6t}{3} \sin \frac{5\pi x}{3}$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 0.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	$*$0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,1)$	0	−0,22	−0,43	−0,61	$*$−0,72	−0,76	−0,72	−0,61	−0,43	−0,22	0
$u(x,2)$	0	0,07	0,14	0,22	0,29	0,32	0,29	0,22	0,14	$*$0,07	0

Выборочная проверка вариант 0 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи	0.929	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_3 введи	0.034	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_5 введи	0.007	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 5 (красные клетки таб. 0.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи	0.32	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи	-0.72	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи	0.07	Клик	

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 0.4.

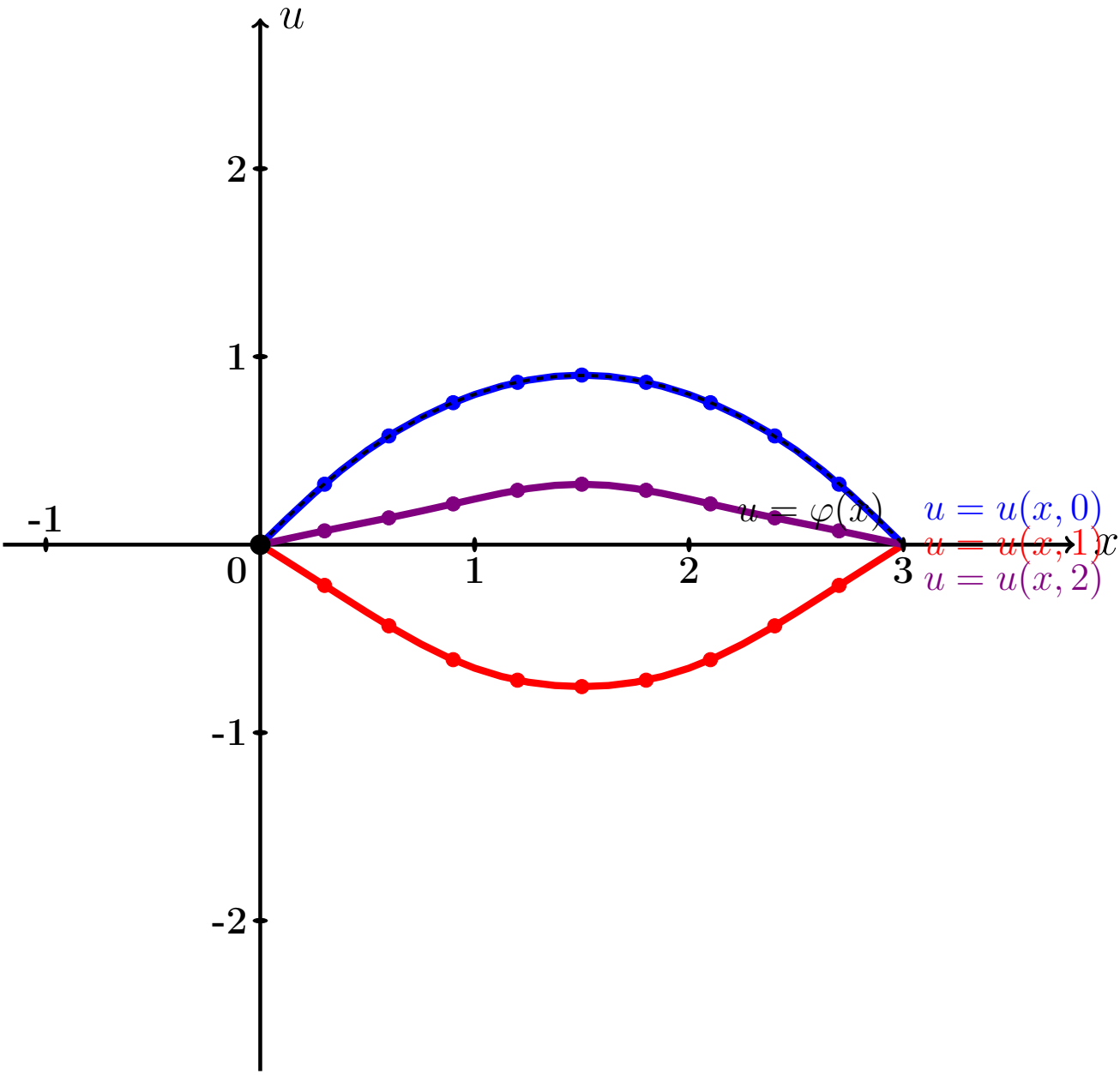


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

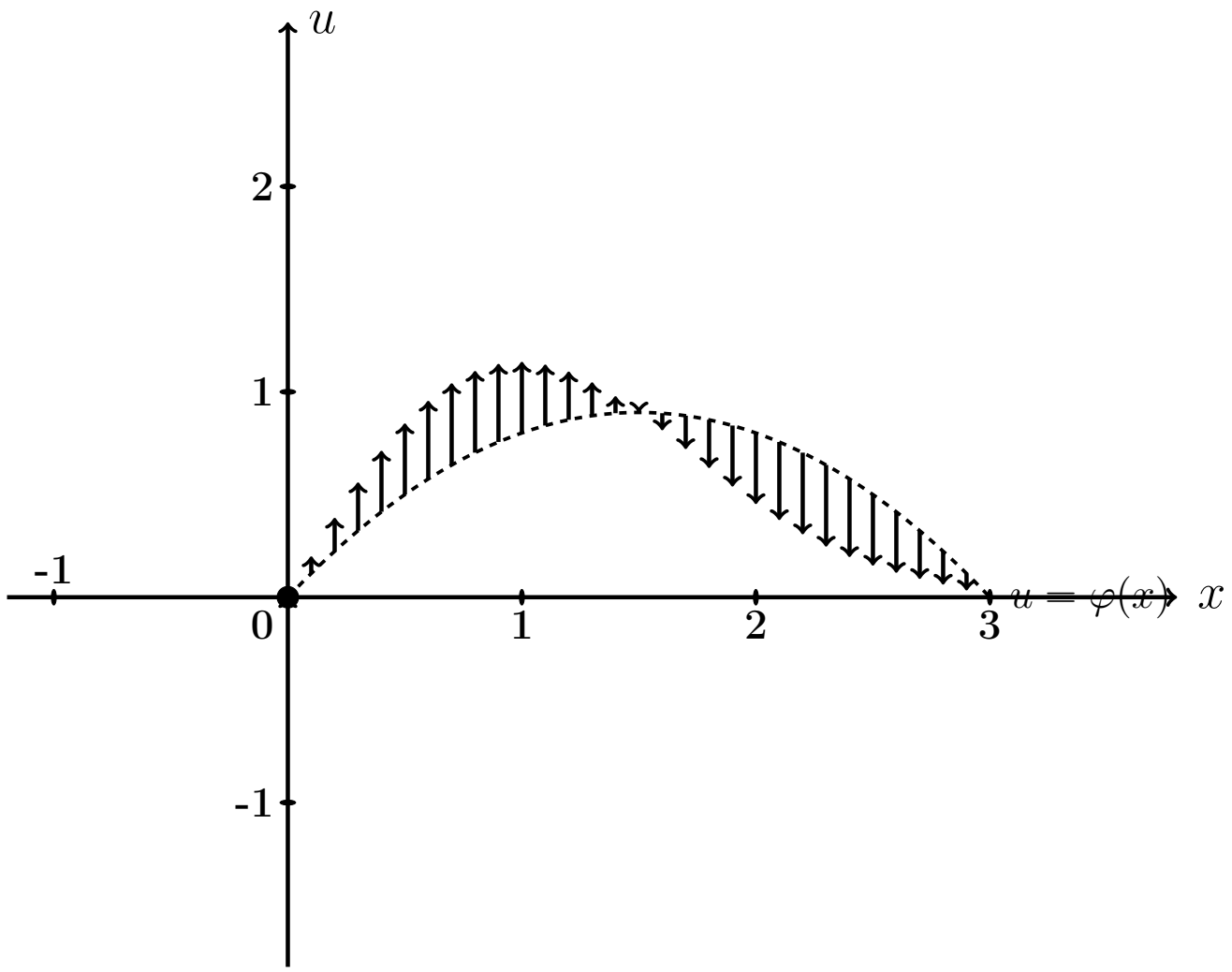


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^3(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= -\frac{0.8}{3}\int_0^3 x^2\sin\frac{k\pi x}{3}dx + \frac{2.4}{3}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}dx\,.$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p=\frac{k\pi}{3}$.

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{x^2}{p}\cos px+\frac{2x}{p^2}\sin px+\frac{2}{p^3}\cos px\Big)\Big|_0^3+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{x}{p}\cos px+\frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3x^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}+\frac{2x\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3+$$

$$+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big)\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}\cos k\pi+\frac{2\cdot 3\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos k\pi\Big)+$$

$$+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}\cos k\pi+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin k\pi\Big)+$$

$$+\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0^2}{k\pi}\cos 0+\frac{2\cdot 0\cdot 3^2}{k^2\pi^2}\sin 0+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cos 0\Big)-$$

$$-\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 0}{k\pi}\cos 0+\frac{3^2}{k^2\pi^2}\sin 0\Big)\,.$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi=\sin 0=0$ и $\cos k\pi=(-1)^k$, $\cos 0=1$ (таблица 5).

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3^2}{k\pi}(-1)^k+0+\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k-\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big)+\frac{2.4}{3}\Big(-\frac{3\cdot 3}{k\pi}(-1)^k+0+0-0\Big)$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

$$= -\frac{0.8}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}(-1)^k\Big)+\frac{0.8}{3}\Big(\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\Big) = \frac{0.8}{3}\cdot\frac{2\cdot 3^3}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \frac{14.40}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big)$$

Окончательно $A_k = \frac{14.40}{k^3\pi^3}\cdot\big(1-(-1)^k\big) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{28.80}{k^3\pi^3}, & \text{если } k \text{ нечетное}\end{cases}$.

Таблица 0.5 (значения A_k при $k = 1, \dots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	0,929	0	0,034	0	0,007	0	0,003

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.0\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \frac{4.0}{k\pi\cdot 3.6}\int_0^3 \sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx\,.$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

$$\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3} = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\frac{(k-2)\pi x}{3} - \cos\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big)\,.$$

Получаем

$$B_k = \frac{4.0}{k\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\Big(\cos\frac{(k-2)\pi x}{3} - \cos\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big)dx =$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\int_0^3\cos\frac{(k-2)\pi x}{3}dx - \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\int_0^3\cos\frac{(k+2)\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\sin\frac{(k-2)\pi x}{3}\Big|_0^3 - \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{(k+2)\pi}\sin\frac{(k+2)\pi x}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\big(\sin(k-2)\pi - \sin 0)\big) - \frac{2.00}{k\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{(k-2)\pi}\big(\sin(k+2)\pi - \sin 0)\big).$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\int_0^3\cos\frac{(2-2)\pi x}{3}dx - \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\int_0^3\cos\frac{(2+2)\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\int_0^3 1dx - \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\int_0^3\cos\frac{4\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\cdot x\Big|_0^3 - \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\cdot(3-0) - \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\cdot\frac{3}{4\pi}\big(\sin 4\pi - \sin 0\big)$$

Окончательно $B_2 = \frac{2.00}{2\pi\cdot 3.6}\cdot 3 = 0.27$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}+B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{k\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}+B_2\sin\frac{2\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.27$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1,3,5$ по таблице 0.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1\cos\frac{1\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{1\pi x}{3} + A_3\cos\frac{3\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} +$$

$$+ A_5\cos\frac{5\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{5\pi x}{3} + B_2\sin\frac{2\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

где $A_1 = 0.929$, $A_3 = 0.034$, $A_5 = 0.007$ по таблице 0.5, а $B_2 = 0.27$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = 0.929\cos\frac{1\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{1\pi x}{3} + 0.034\cos\frac{3\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} +$$

$$+ 0.007\cos\frac{5\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{5\pi x}{3} + 0.27\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 3.6t}{3}\sin\frac{2\pi x}{3}$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 0.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0,1,2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	$*$0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,1)$	0	−0,07	−0,19	−0,37	$*$−0,57	−0,76	−0,87	−0,86	−0,68	−0,37	0
$u(x,2)$	0	0,17	0,29	0,37	0,38	0,32	0,2	0,07	−0,01	$*$−0,02	0

Выборочная проверка вариант 0 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи	0.929	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_3 введи	0.034	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_5 введи	0.007	Клик	
Ответ (формат 1.2): B_2 введи	0.27	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 6 (красные клетки Таблицы 0.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи	0.32	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи	-0.72	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи	0.07	Клик	

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 0.6.

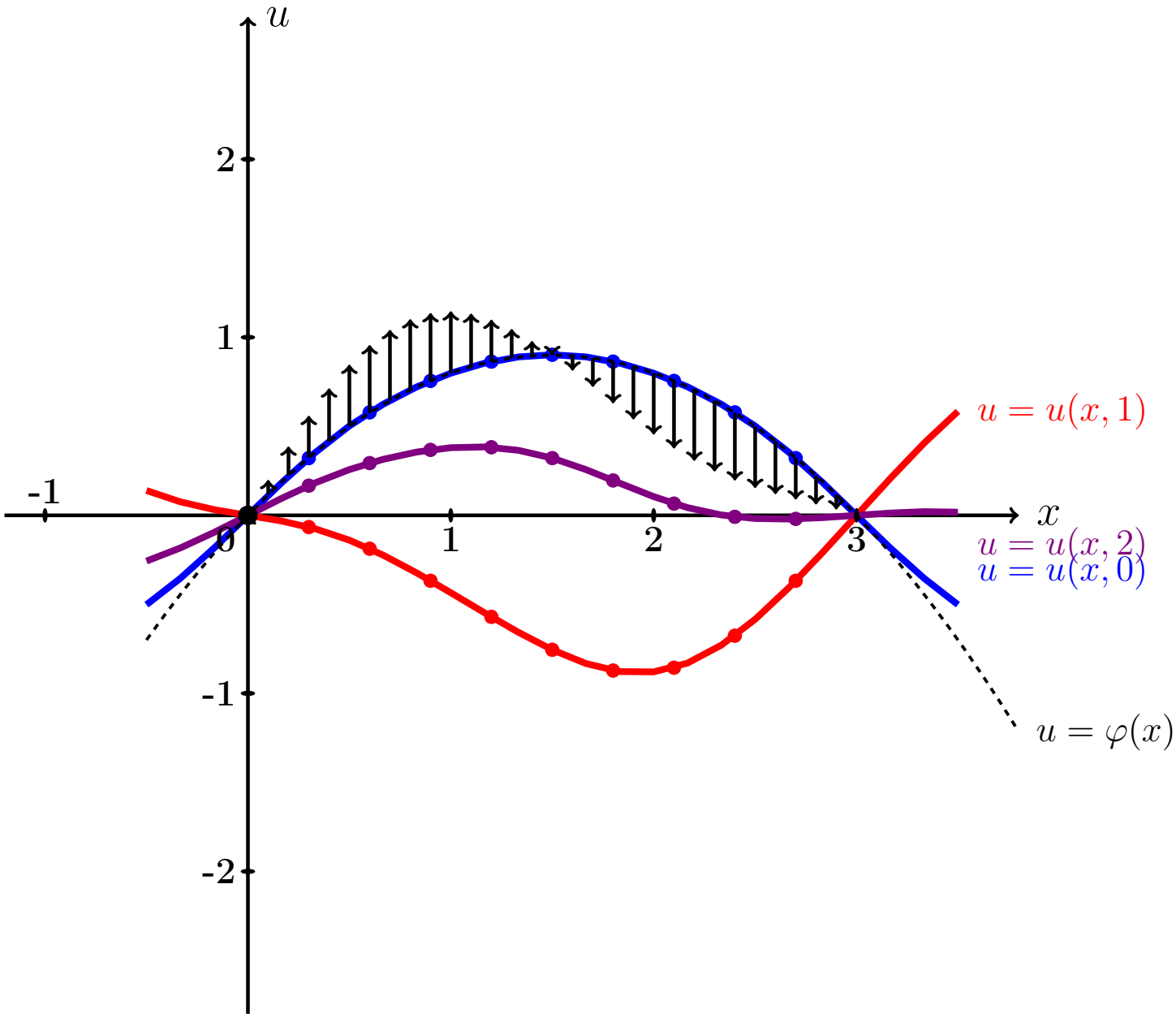


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{0.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{0.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{0.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (0.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{0.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (0.2), (0.3). Затабулировать решение уравнения (0.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (0.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (0.2), (0.3). Затабулировать решение уравнения (0.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (0.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{5/2} 0.50\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2}{5}\int_{5/2}^{5} 0.50\cdot(5-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_0^{5/2} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2\cdot 0.50\cdot 5}{5}\int_{5/2}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx - \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_{5/2}^{5} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{5/2} + \frac{1.00\cdot 5}{5}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_0^{5/2} + 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) - \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 0}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 0}{5}\Big) +$$

$$+ 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) - 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) + \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{1.00\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{10.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \dfrac{10.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечет.} \end{cases}$$

Таблица 0.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	1,013	0	−0,113	0	0,041	0	−0,021

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$\begin{aligned} u_{\text{одн}}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{k\pi\cdot 3.1 t}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}, \end{aligned}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \frac{k\cdot\pi\cdot 3.1}{5} = 0.62\pi\cdot k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{0.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (0.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{0.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (0.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (0.4) при граничных условиях (0.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{0.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{0.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если}\ \ \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если}\ \ \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{0.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k = 0.62\pi\cdot k$ по формуле (0.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (0.9). Следовательно, по формуле (0.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin 4.0t - \frac{4.0}{0.62\pi\cdot k}\sin(0.62\pi\cdot kt)\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} \end{aligned} \tag{0.10}$$

где

$$C_k = \frac{2\cdot E\cdot(1-(-1)^k)}{k\pi((0.62\pi\cdot k)^2-4.0^2)} = \begin{cases} \dfrac{2\cdot(10.0)\cdot 2}{k\pi((0.62\pi\cdot k)^2-4.0^2)}\,, & \text{если}\ \ k\ \text{нечетно} \\[2ex] 0\,, & \text{если}\ \ k\ \text{четно}\,. \end{cases} \tag{0.11}$$

Шаг 6.

Таблица 0.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k	$-1{,}043$	0	0,234	0	0,032	0	0,011

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3} \sin \omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 = 1.013$, $A_3 = -0.113$ по таблице 0.7,

$$\ell = 5\,, \quad a = 3.1\,, \quad \Omega = 4.0\,,$$

$\omega_1 = 0.62\pi \cdot 1 = 0.62\pi$ и $\omega_3 = 0.62\pi \cdot 3 = 1.86\pi$ по формуле (0.5), и $C_1 = -1.043$, $C_3 = 0.234$ по таблице 0.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= (1.013) \cos\frac{1\pi\cdot 3.1 t}{5} \sin\frac{1\pi x}{5} && + \\ &+ (-0.113) \cos\frac{3\pi\cdot 3.1 t}{5} \sin\frac{3\pi x}{5} && + \\ &+ (-1.043) \cdot \left(\sin 4.0t - \frac{4.0}{0.62\pi} \sin 0.62\pi t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{5} && + \\ &+ (0.234) \cdot \left(\sin 4.0t - \frac{4.0}{1.86\pi} \sin 1.86\pi t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{5}\,. \end{aligned}$$

Таблица 0.9 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	0,57	1,21	1,88	2,41	2,62	2,41	1,88	1,21	0,57	0
$u(x,2)$	0	$-0{,}77$	$-1{,}63$	$-2{,}53$	$-3{,}24$	$-3{,}52$	$-3{,}24$	$-2{,}53$	$-1{,}63$	$-0{,}77$	0

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 0.9

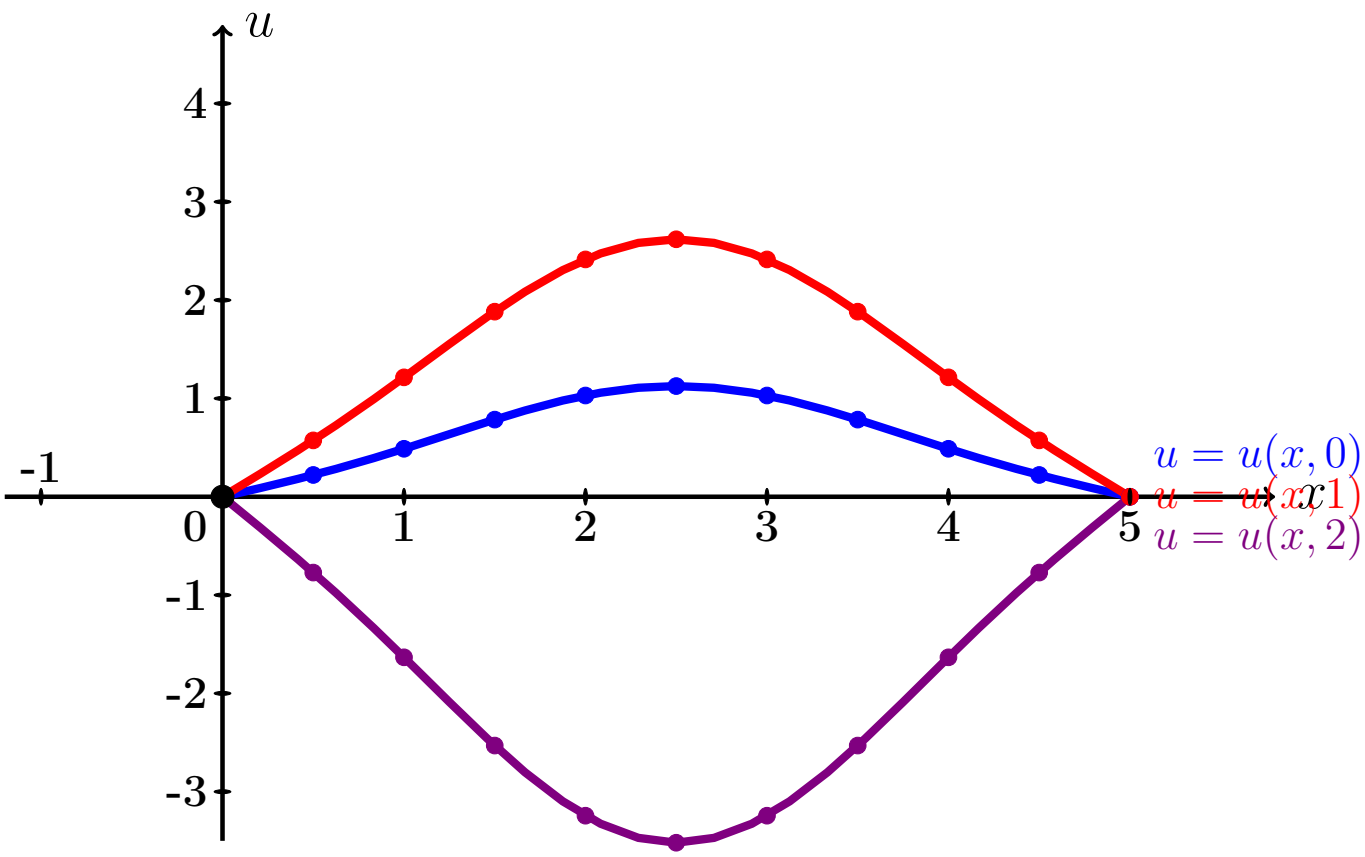


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 0 задача 7 (по Таб. 0.7, 0.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи	1.013	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_3 введи	-0.113	Клик	
Ответ (формат 1.2): C_1 введи	-1.043	Клик	
Ответ (формат 1.2): C_3 введи	0.234	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 7 (по таблице 0.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи	0.22	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи	2.41	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи	-0.77	Клик	

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (0.6) и (0.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} = 0.62\pi \cdot 1$ (формула (0.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (0.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \cos(0.62\pi t)\,, \text{ где} \\ C_1' &= \frac{-E(1-(-1)^1)}{1\pi\omega_1} = \frac{-2\cdot 10.0}{\pi\cdot 0.62\pi} = -3.268 \end{aligned}\right\} \tag{0.12}$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (0.9). Следовательно, по формуле (0.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \frac{-20}{0.62\pi^2}\,t\,\cos(0.62\pi t)\,\sin\frac{\pi x}{5} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin 4.0t - \frac{4.0}{0.62\pi\cdot k}\sin(0.62\pi k t)\right)\,\sin\frac{k\pi x}{5} \end{aligned}\right\} \tag{0.13}$$

где C_k вычисляется по формулам (0.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (0.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 = 1.013$, $A_3 = -0.113$ по таблице 0.7,

$\ell = 5$, $a = 3.1$, $\Omega = 0.62\pi$,

$\omega_1 = 0.62\pi \cdot 1 = 0.62\pi$ и $\omega_3 = 0.62\pi \cdot 3 = 1.86\pi$ по формуле (0.5),

$C_1' = -3.268$ по формуле (0.12)

и $C_3 = 0.234$ по таблице 0.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = (1.013) \cdot \cos\frac{1\pi\cdot 3.1 t}{5} \cdot \sin\frac{1\pi x}{5} + (-0.113) \cdot \cos\frac{3\pi\cdot 3.1 t}{5} \cdot \sin\frac{3\pi x}{5} + \\ + (-3.268) \cdot t \cdot \cos(0.62\pi t) \cdot \sin\frac{1\pi x}{5} + \\ + (0.234) \cdot \left(\sin 4.0t - \frac{4.0}{1.86\pi}\sin 1.86\pi t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{5} .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 0.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	0,09	0,29	0,61	*0,91	1,04	0,91	0,61	0,29	0,09	0
$u(x,2)$	0	1,47	2,64	3,34	3,66	3,74	3,66	3,34	2,64	*1,47	0

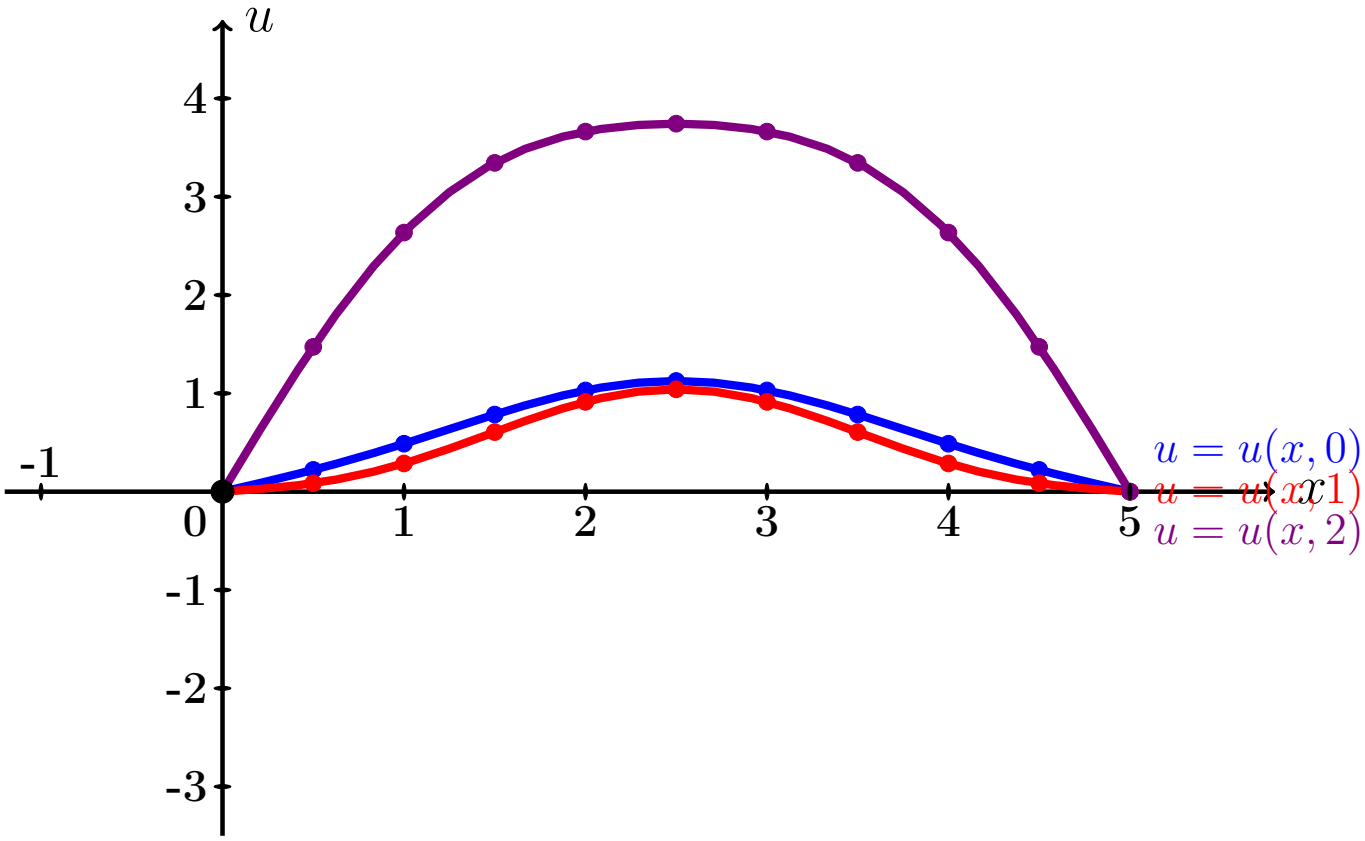


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 0 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (0.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи -3.268 Клик

Выборочная проверка вариант 0 задача 7 (по таблице 0.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи	0.22	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи	0.91	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи	1.47	Клик	

$0.22, 2.41, -0.77; \quad 0.22, 0.91, 1.47,$

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{0.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{0.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (0.1). Затабулировать решение уравнения (0.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

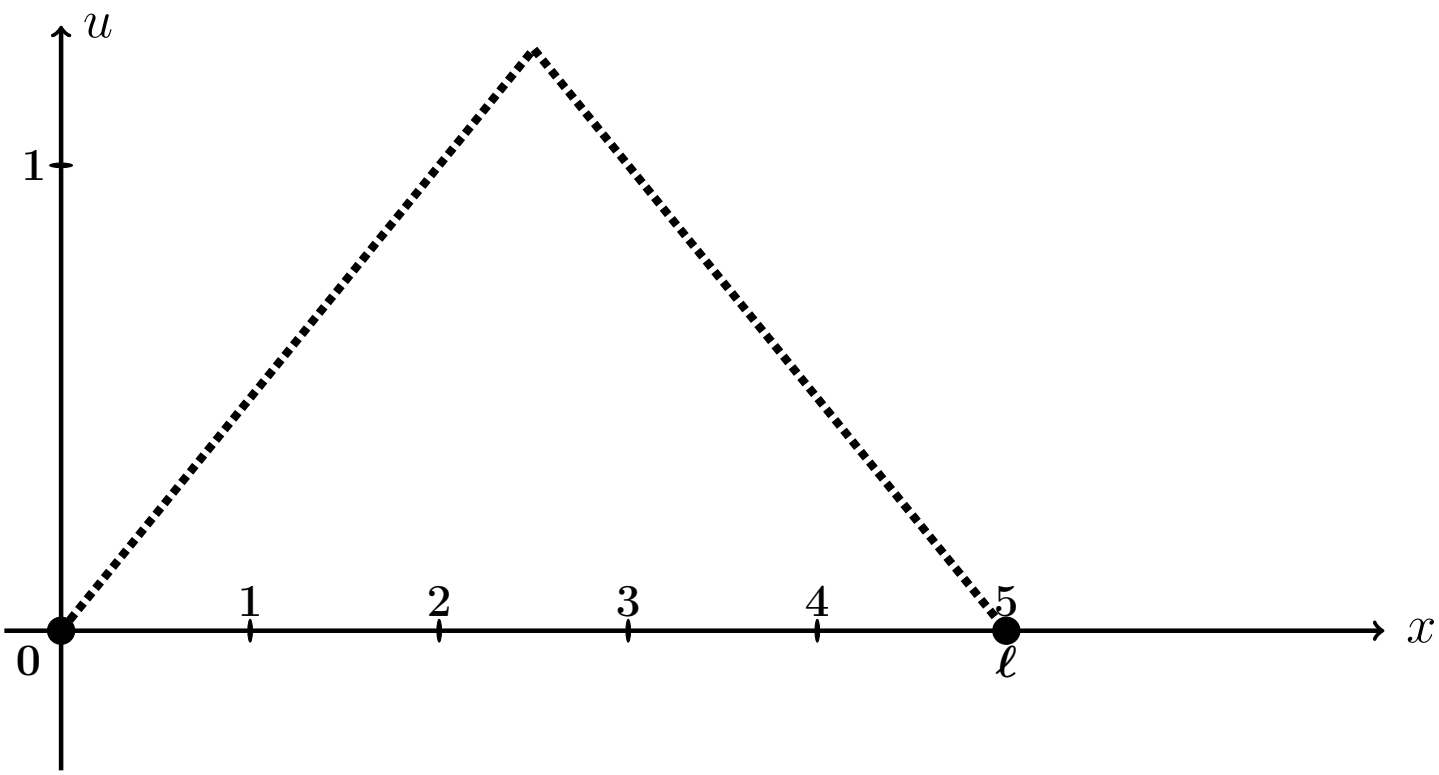


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (0.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5} , \end{aligned}\right\} \qquad (0.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot 3}{5}\right)^2 - (0.3)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 0.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k	1,861	3,758	5,647	7,534	9,42	11,306	13,191

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{5/2} 0.50\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2}{5}\int_{5/2}^{5} 0.50\cdot(5-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_0^{5/2} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{2\cdot 0.50\cdot 5}{5}\int_{5/2}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx - \frac{2\cdot 0.50}{5}\int_{5/2}^{5} x\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{5/2} + \frac{1.00\cdot 5}{5}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_0^{5/2} + 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{5}\Big)\Big|_{5/2}^{5} =$$

$$= \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) - \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 0}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 0}{5}\Big) +$$

$$+ 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) - 1.00\cdot\Big(-\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{2\cdot 5}\Big) -$$

$$-\frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5}\Big) + \frac{1.00}{5}\Big(-\frac{5\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2} + \frac{5^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 5}{5\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{1.00\cdot 5}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{1.00\cdot 5}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{1.00\cdot 5}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 1.00\cdot 5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{10.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \dfrac{10.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{cases}$$

Таблица 0.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	1,013	0	−0,113	0	0,041	0	−0,021

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$$= \begin{cases} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \frac{0.3 \cdot 10.00 \cdot (-1)^n}{k^2 \pi^2 \cdot q_k}\,, & \text{если } k = 2n+1 \text{ нечетное} \end{cases}$$

Таблица 0.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k	0,163	0	−0,006	0	0,001	0	−0

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 0.12, 0.13) формулы (0.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big(\big(A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t\big) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + \\ + \big(A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t\big) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 5$, $q_1 = 1.861$ и $q_3 = 5.647$ по таблице 0.11, $A_1 = 1.013$ и $A_3 = -0.113$ по таблице 0.12, $B_1 = 0.163$ и $B_3 = -0.006$ по таблице 0.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-0.3 \cdot t} \cdot \Big(\big((1.013)\cos(1.861t) + (0.163)\sin(1.861t)\big) \sin \frac{1\pi x}{5} + \\ + \big((-0.113)\cos(5.647t) + (-0.006)\sin(5.647t)\big) \sin \frac{3\pi x}{5} \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 0.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	$*$0,22	0,49	0,78	1,03	1,13	1,03	0,78	0,49	0,22	0
$u(x,1)$	0	−0,08	−0,12	−0,1	$*$−0,06	−0,03	−0,06	−0,1	−0,12	−0,08	0
$u(x,2)$	0	−0,17	−0,32	−0,42	−0,48	−0,5	−0,48	−0,42	−0,32	$*$−0,17	0

Шаг 7. Построение графиков.

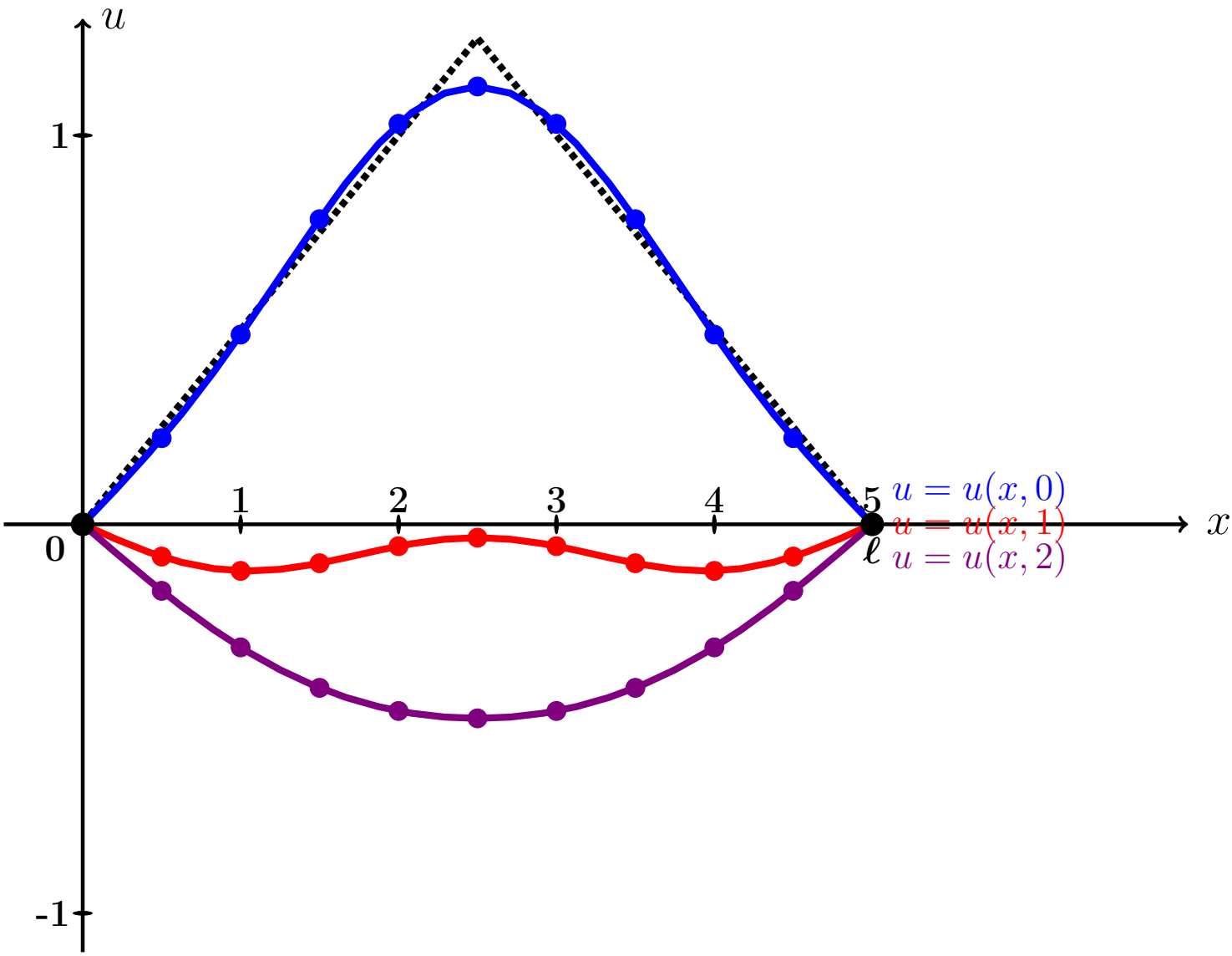


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (0.2).

Выборочная проверка вариант 0 задача 8 (по таблице 0.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи 1.861 Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи 5.647 Клик

Выборочная проверка вариант 0 задача 8 (по таблице 0.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи 1.013 Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи -0.113 Клик

Выборочная проверка вариант 0 задача 8 (по таблице 0.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи 0.163 Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи -0.006 Клик

Выборочная проверка вариант 0 задача 8 (по таблице 0.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи 0.22 Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи -0.06 Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи -0.17 Клик

$1.861, 5.647, 1.013, -0.113, 0.163, -0.006, 0.22, -0.06, -0.17$

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{0.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(3.75)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(-0.25)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(7.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{0.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{0.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

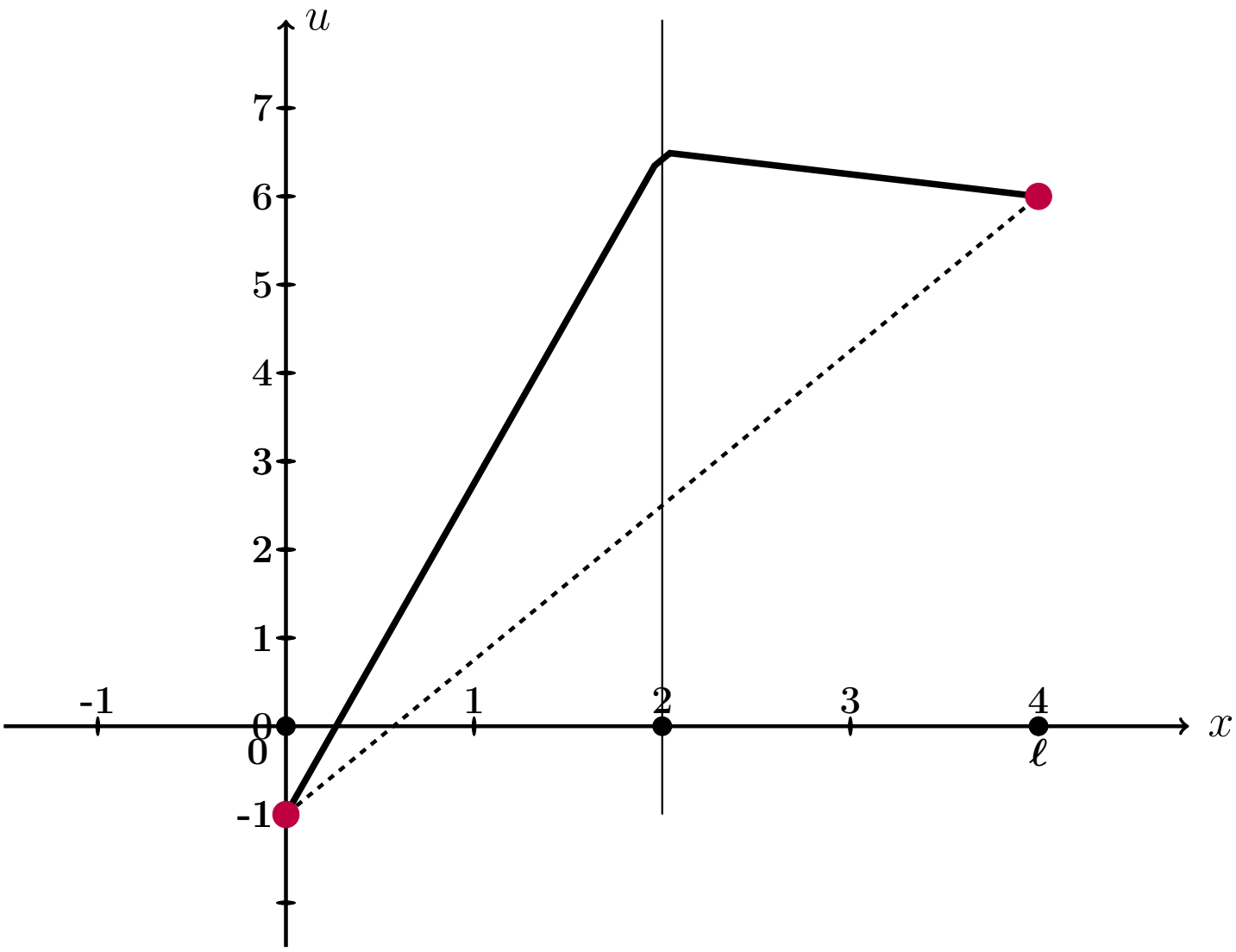


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (0.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (0.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (0.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{0.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(2.00)}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(-2.00)}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{(8.00)}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{0.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - (-1.0) - \frac{(6.0)-(-1.0)}{4}\cdot x =$$
$$= \varphi(x) - (-1.0) - 1.750\cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (0.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (0.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = (3.75) - \frac{(6.0)-(-1.0)}{4} = 2.00 \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = (-0.25) - \frac{(6.0)-(-1.0)}{4} = -2.00 \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = (7.00) - (-1.0) = 8.00 \end{aligned}\right\} \tag{0.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \frac{2}{4}\int_0^{4/2} 2.00\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{2}{4}\int_{4/2}^{4}((8.00)-2.00\cdot x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 2.00}{4}\int_0^{4/2} x\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{2\cdot(8.00)}{4}\int_{4/2}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx - \frac{2\cdot 2.00}{4}\int_{4/2}^{4} x\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx\,.$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \frac{4.00}{4}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_0^{4/2} + \frac{2\cdot(8.00)}{4}\Big(-\frac{1}{p}\cos px\Big)\Big|_{4/2}^{4} -$$

$$-\frac{4.00}{4}\Big(-\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\Big)\Big|_{4/2}^{4} =$$

$$= \frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big)\Big|_0^{4/2} + 4.00\cdot\Big(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big)\Big|_{4/2}^{4} -$$

$$-\frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big)\Big|_{4/2}^{4} =$$

$$= \frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4\cdot 4}{2k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 4}{2\cdot 4} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 4}{2\cdot 4}\Big) - \frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4\cdot 0}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 0}{4} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 0}{4}\Big) +$$

$$+ 4.00\cdot\Big(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 4}{4}\Big) - 4.00\cdot\Big(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 4}{2\cdot 4}\Big) -$$

$$-\frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4\cdot 4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\cdot 4}{4} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 4}{4}\Big) + \frac{4.00}{4}\Big(-\frac{4\cdot 4}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi\cdot 4}{4\cdot 2} + \frac{4^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\cdot 4}{4\cdot 2}\Big) =$$

$$= -\frac{4.00\cdot 4}{2k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4.00\cdot 4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - 0 - \frac{4.00\cdot 4}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4.00\cdot 4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} +$$

$$+ \frac{4.00\cdot 4}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{4.00\cdot 4}{k^2\pi^2}\sin(k\pi) - \frac{4.00\cdot 4}{k\pi\cdot 2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4.00\cdot 4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \frac{2\cdot 4.00\cdot 4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{32.00}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \left\{\begin{array}{ll} 0\,, & \text{если } k \text{ четное} \\ \dfrac{32.00\cdot(-1)^n}{k^2\pi^2}\,, & k = 2n+1 \text{ нечет.} \end{array}\right. \quad (0.7)$$

Таблица 0.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k	3,242	0	−0,36	0	0,13	0	−0,066

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{4}\,,$$

где A_k вычисляется по формуле (0.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (0.1) с начальным условием (0.2) и граничными условиями (0.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (0.4)) при помощи формулы

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4}\cdot x = \\ &= -1.0 + \frac{(6.0)-(-1.0)}{4}\cdot x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{4}\,, \end{aligned}$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_4 = 6.0$ — значения граничных условий (0.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = (-1.0) + \frac{(6.0)-(-1.0)}{4}\cdot x + A_1 \cdot e^{-\frac{1^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t} \cdot \sin\frac{1\pi x}{4} +$$

$$+ A_3 \cdot e^{-\frac{3^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t} \cdot \sin\frac{3\pi x}{4} + A_5 \cdot e^{-\frac{5^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t} \cdot \sin\frac{5\pi x}{4}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 = 3.242$, $A_3 = -0.360$, $A_5 = 0.130$ по таблице 0.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = (-1.0) + (1.750)\cdot x + (3.242)\cdot e^{-\frac{1^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t}\cdot \sin\frac{1\pi x}{4} +$$

$$+ (-0.360)\cdot e^{-\frac{3^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t}\cdot \sin\frac{3\pi x}{4} + (0.130)\cdot e^{-\frac{5^2\pi^2 0.4^2}{4^2}t}\cdot \sin\frac{5\pi x}{4}\ .$$

Таблица 0.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-1	0,5	2	3,5	5	6,5	6,4	6,3	6,2	6,1	6
$u(x,0)$	-1	$*$0,54	1,96	3,48	5,09	6,23	6,49	6,28	6,16	6,14	6
$u(x,1)$	-1	0,5	1,99	3,42	$*$4,68	5,6	6,08	6,22	6,19	6,1	6
$u(x,2)$	-1	0,47	1,91	3,23	4,37	5,22	5,77	6,03	6,11	$*$6,07	6

Шаг 8. Графики по Таблице 0.16.

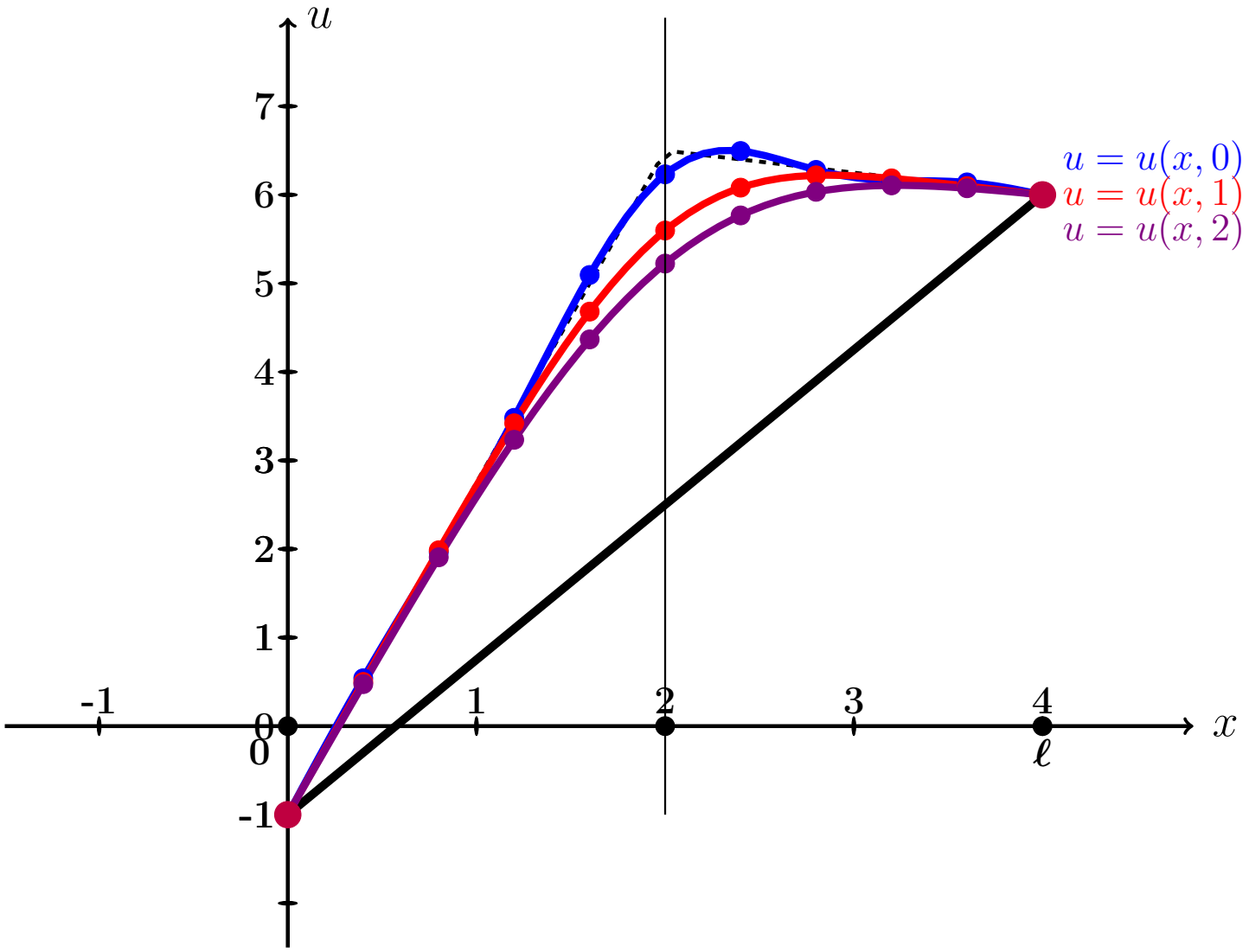


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (0.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (0.3).

Выборочная проверка вариант 0 задача 9 (по формулам (0.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи	2.00	Клик	
Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи	-2.00	Клик	
Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи	8.00	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 9 (по таблице 0.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи	3.242	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_3 введи	-0.360	Клик	
Ответ (формат 1.2): A_5 введи	0.130	Клик	

Выборочная проверка вариант 0 задача 9 (по таблице 0.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи	0.54	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи	4.68	Клик	
Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи	6.07	Клик	

$3.242, -0.360, 0.130, 0.54, 4.68, 6.07$

возврат огл

Вариант 1

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 6$.

$$y = 3 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{6}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{6}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

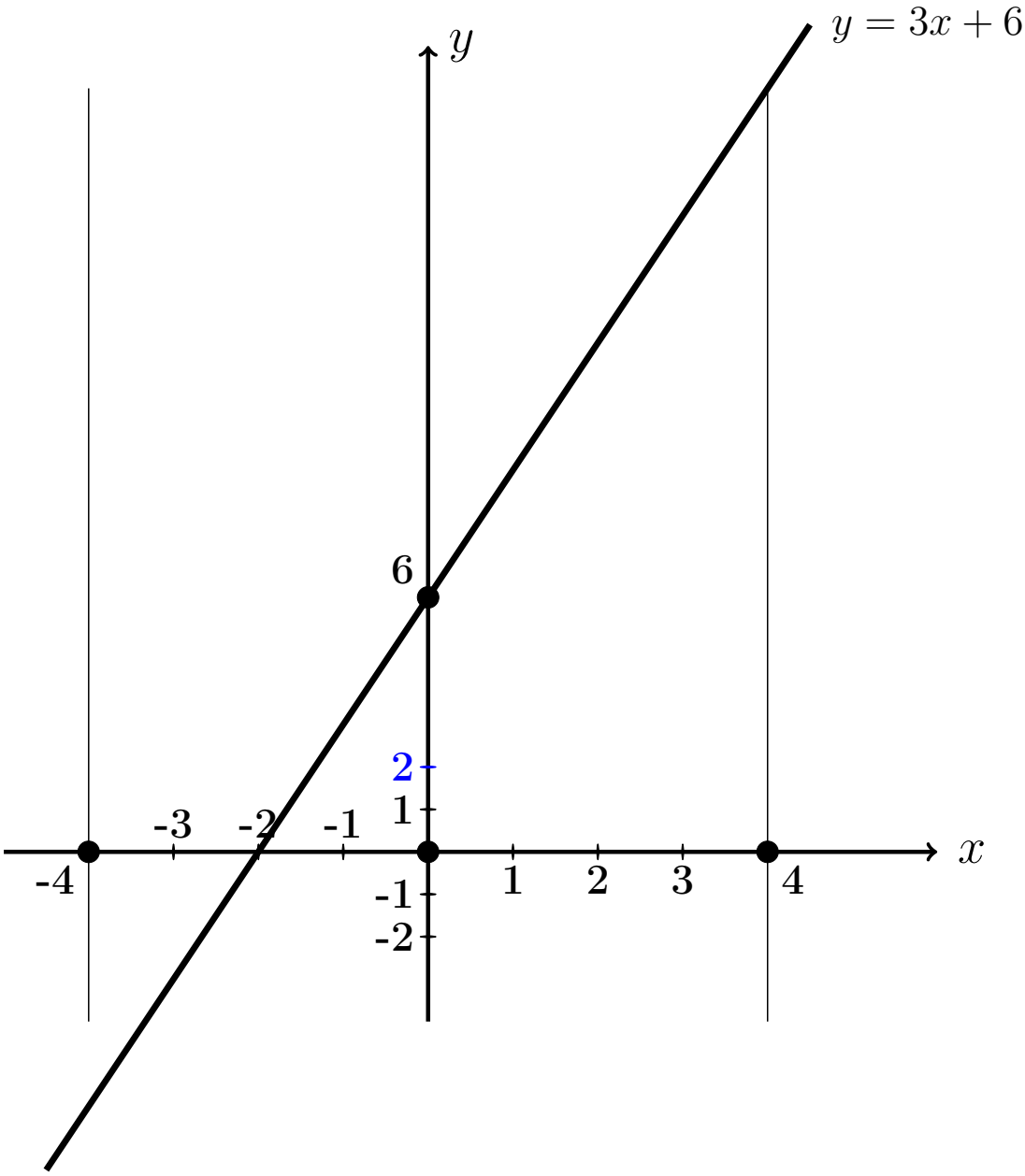
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 1.1 (Табулировка $y=3x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+6$	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 1.1



Выборочная проверка вариант 1 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 1 (по Таблице 1.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sin x + 18y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=2} = 9\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (6\sin x + 18y^3)dx = 6\int \sin x\,dx + 18\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad = 9\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x + 3t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x + 3t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x + 3t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 1 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

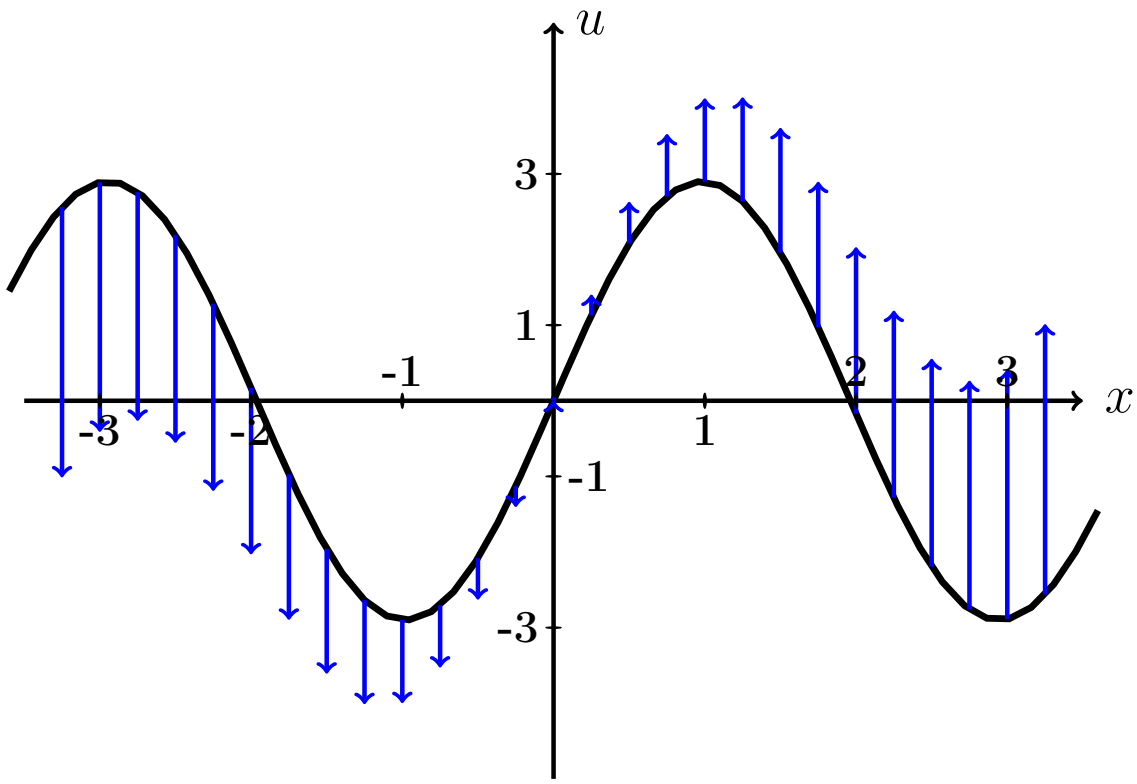


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 1.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 1 задача 4 (по Таблице 1.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 1.2.

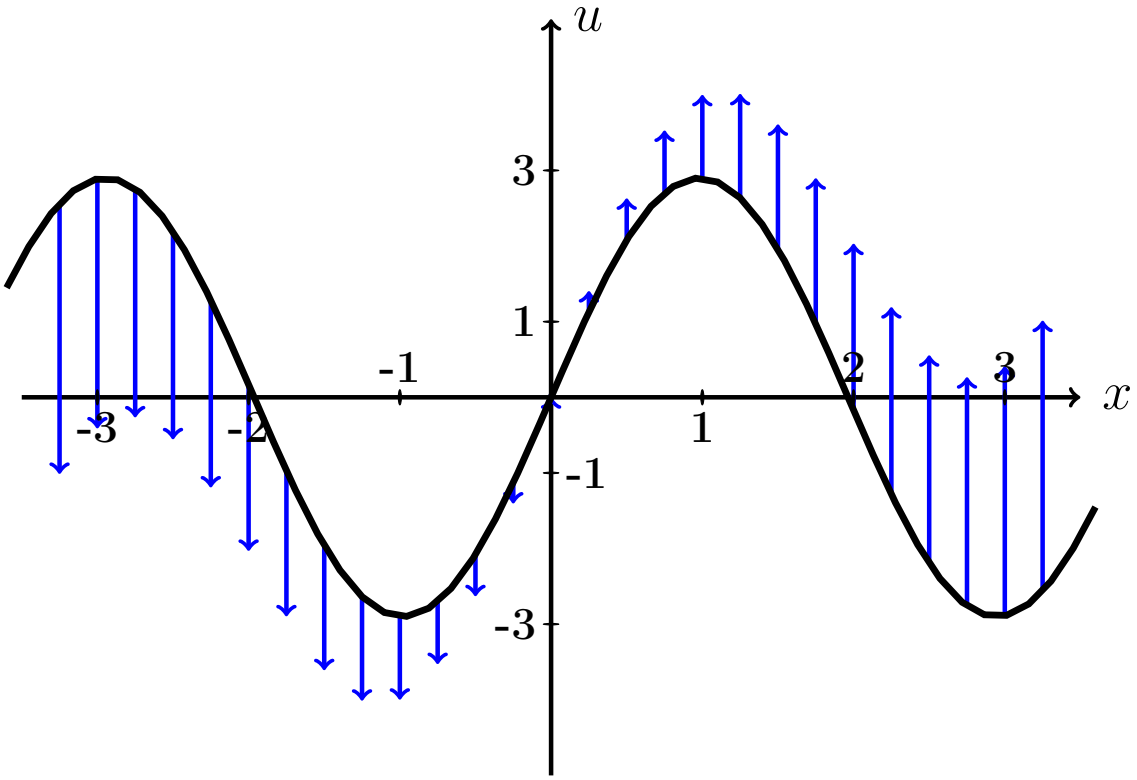


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

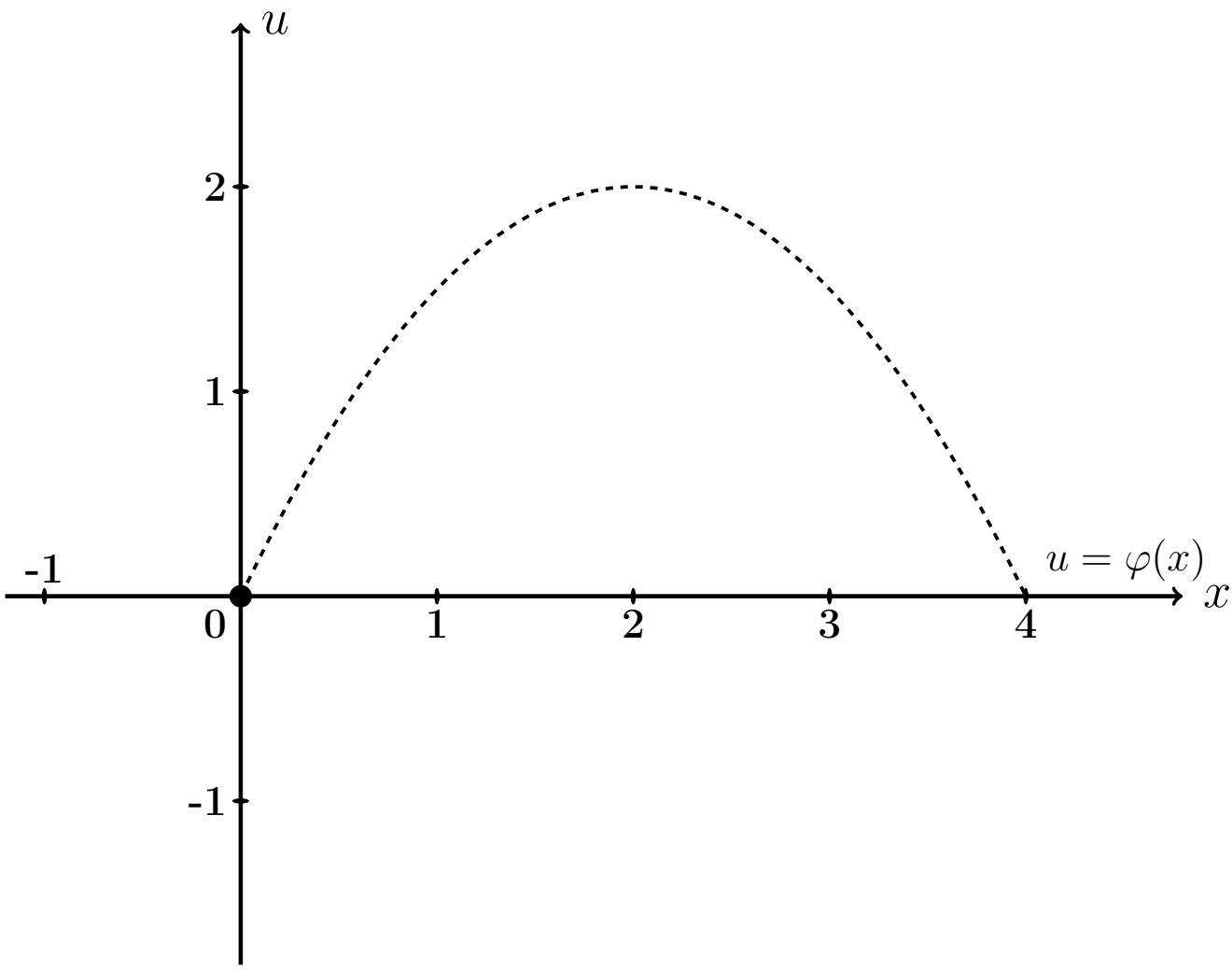


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 1.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 1.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 1.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 1.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 1 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 5 (красные клетки таб. 1.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 1.4.

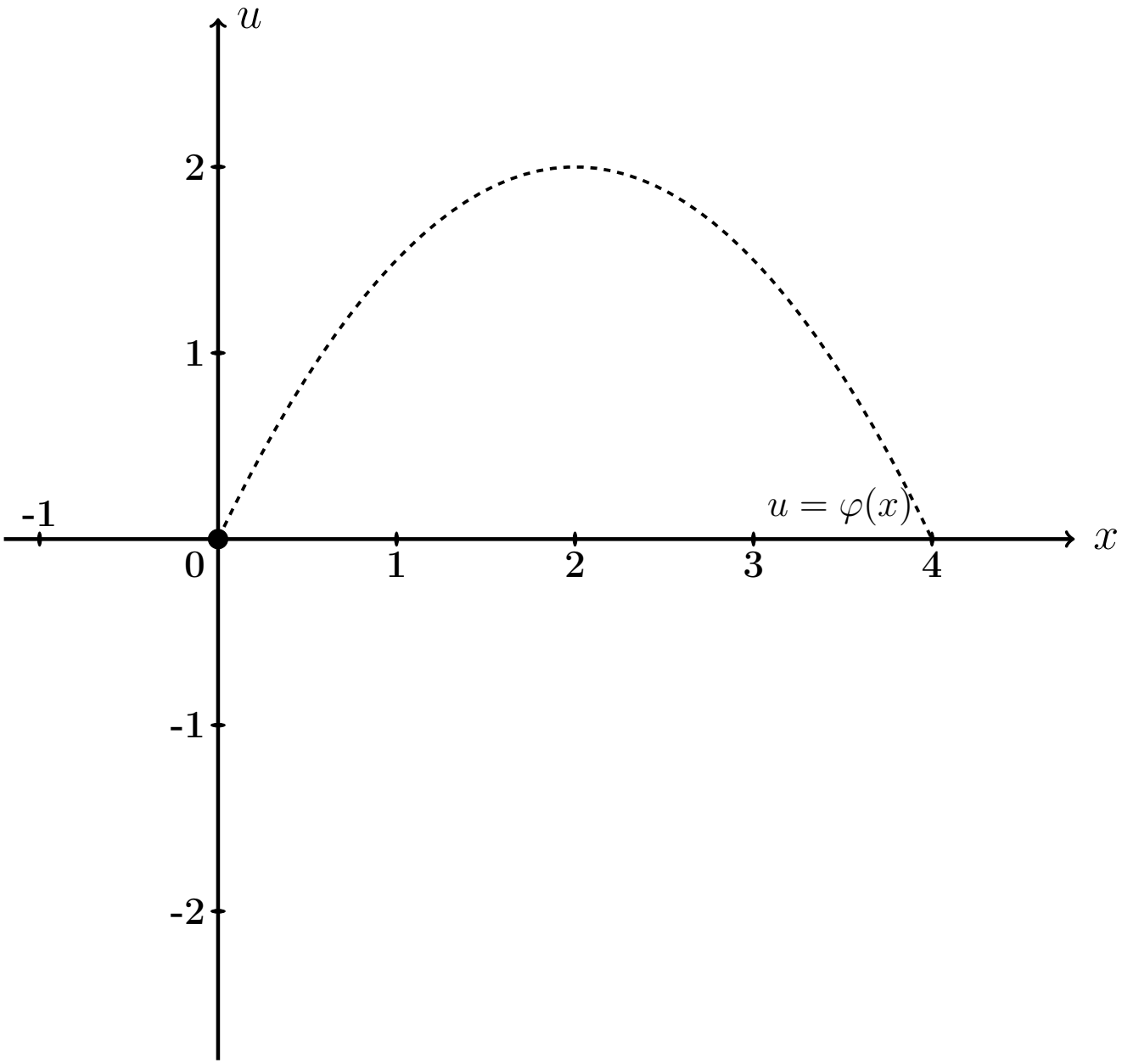


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

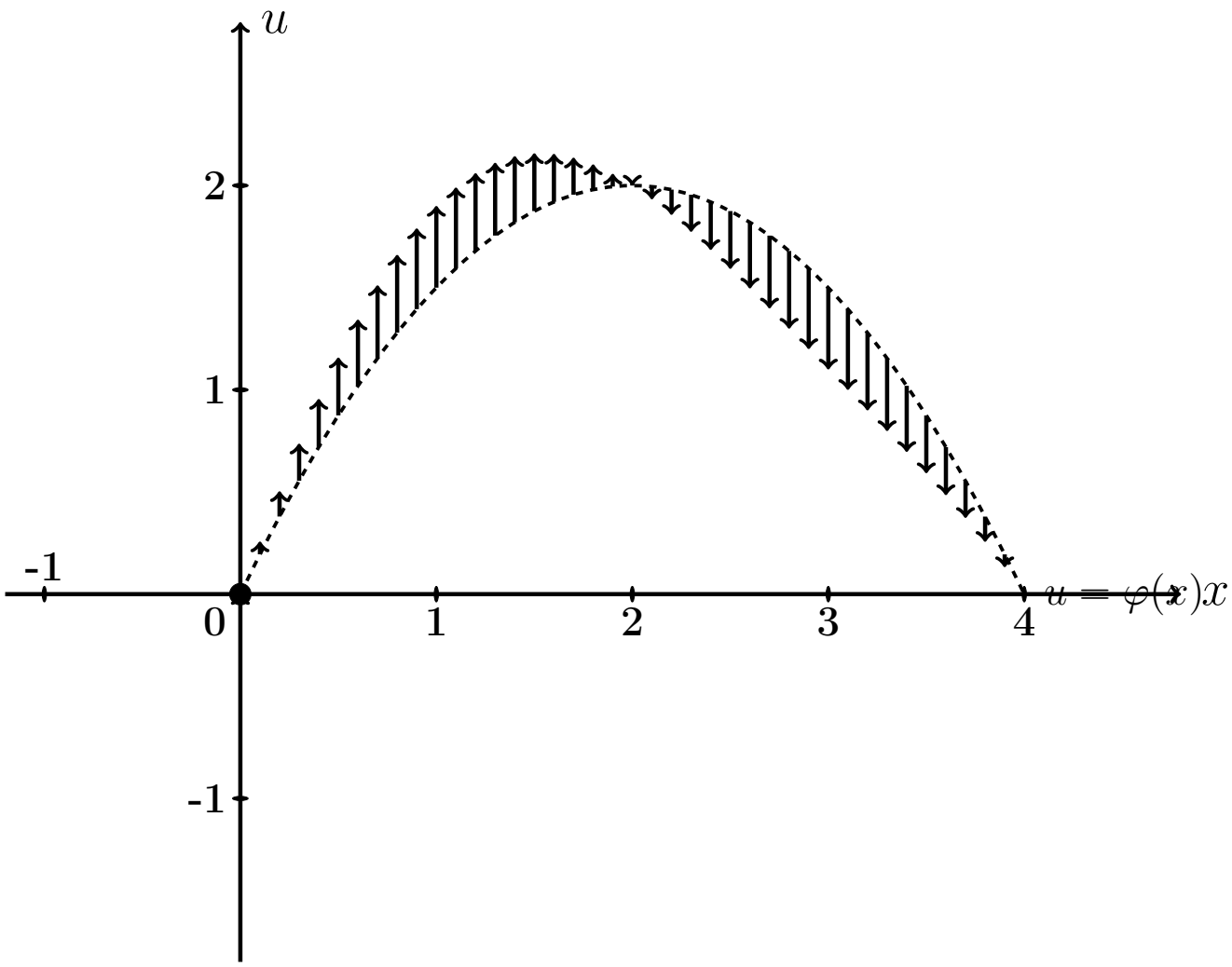


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 1.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 1.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 1.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 1.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 1 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 6 (красные клетки Таблицы 1.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 1.6.

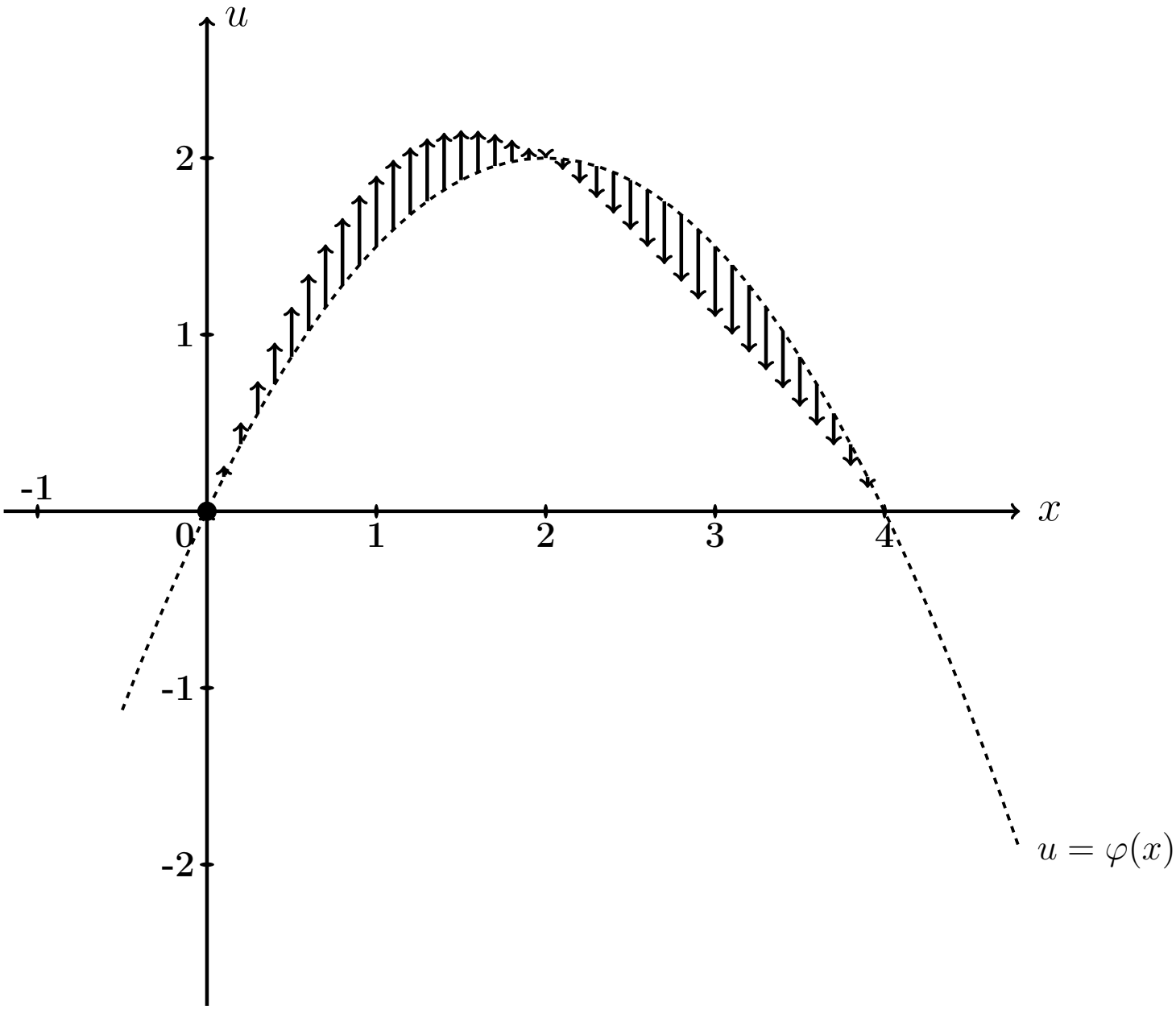


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{1.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{1.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (1.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{1.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (1.2), (1.3). Затабулировать решение уравнения (1.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (1.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (1.2), (1.3). Затабулировать решение уравнения (1.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (1.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 1.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (1.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{1.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (1.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (1.4) при граничных условиях (1.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{1.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{1.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{1.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (1.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (1.9). Следовательно, по формуле (1.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Шаг 6.

Таблица 1.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 1.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (1.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 1.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 1.9

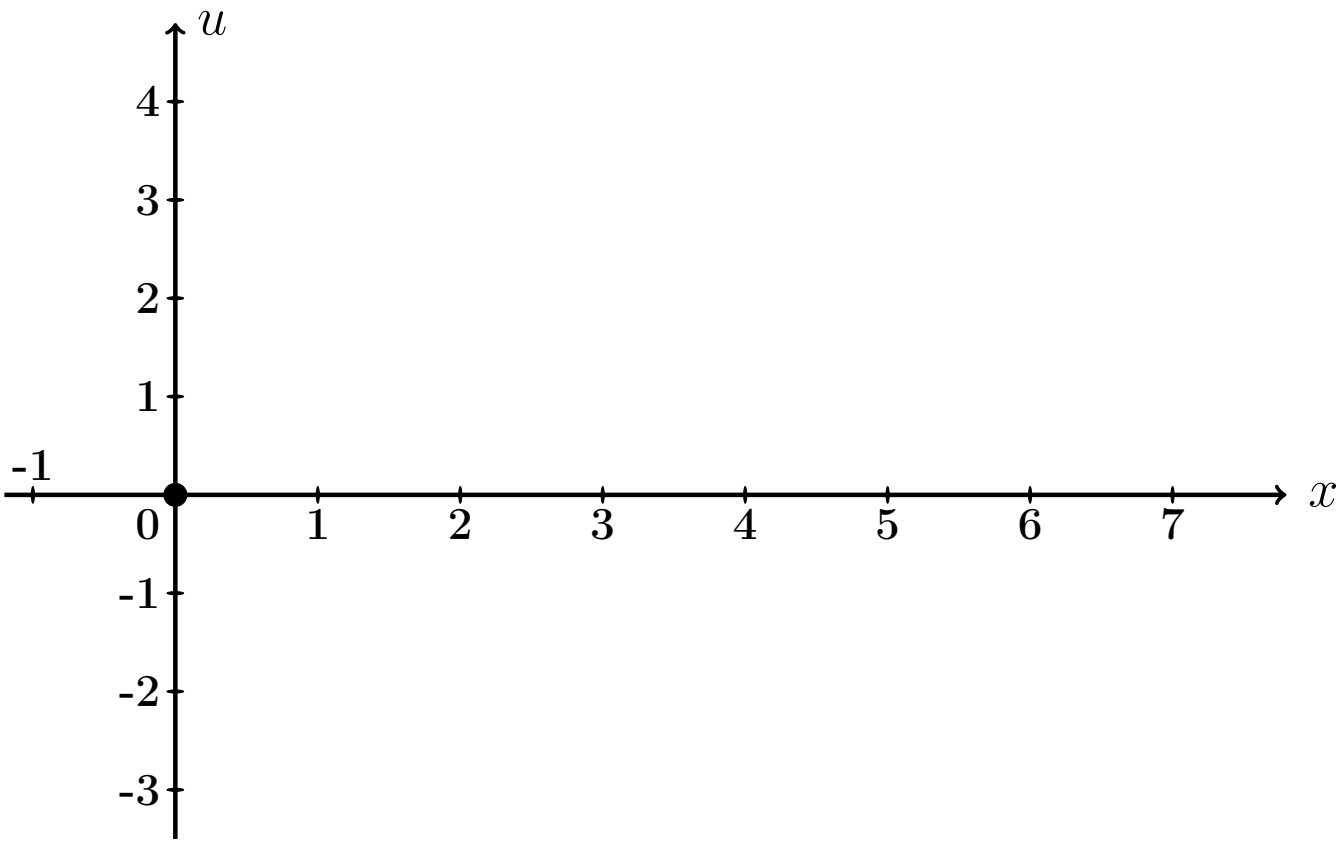


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 1 задача 7 (по Таб. 1.7, 1.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 1 задача 7 (по таблице 1.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (1.6) и (1.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (1.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (1.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (1.9). Следовательно, по формуле (1.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (1.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (1.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 1.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (1.5),

$C_1' =$ по формуле (1.12)

и $C_3 =$ по таблице 1.8 . Окончательно

$u_{\text{прибл}}(x,t) =$ $+$ $+$

$+$ $+$

$+$.

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 1.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

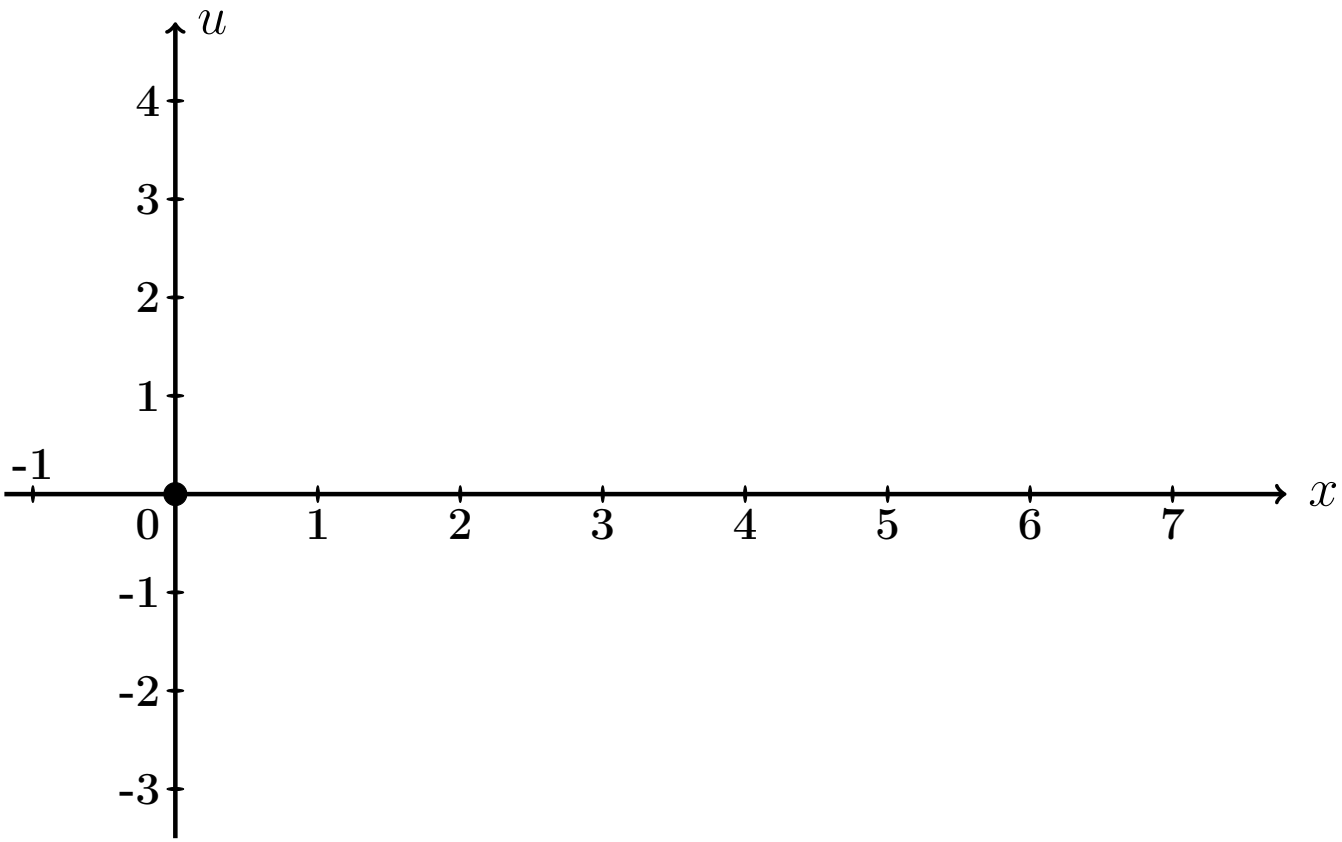


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 1 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (1.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 7 (по таблице 1.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{1.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (1.1). Затабулировать решение уравнения (1.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

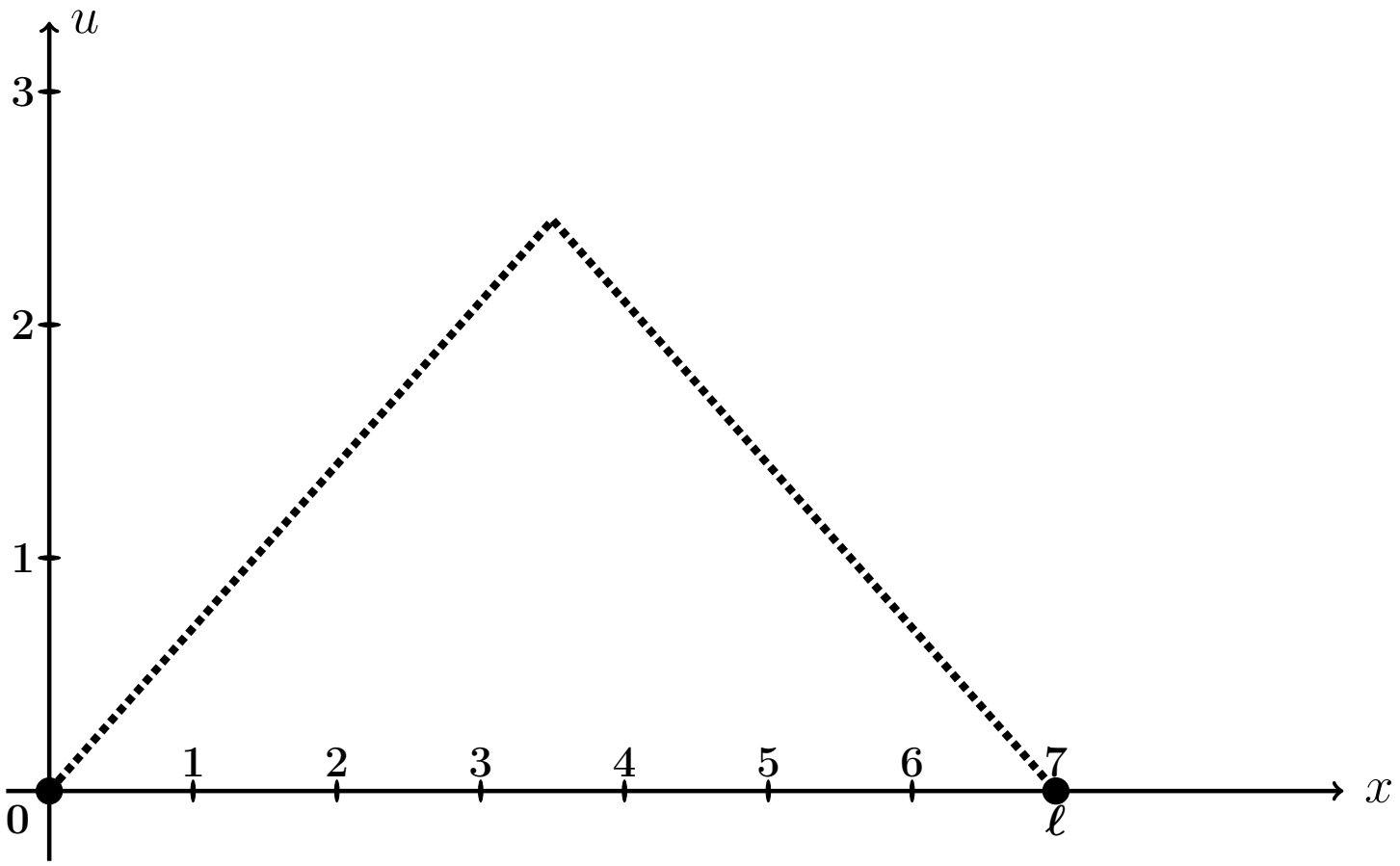


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (1.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где $\ell = 7$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 1.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 1.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 1.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 1.12, 1.13) формулы (1.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 1.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 1.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 1.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 1.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

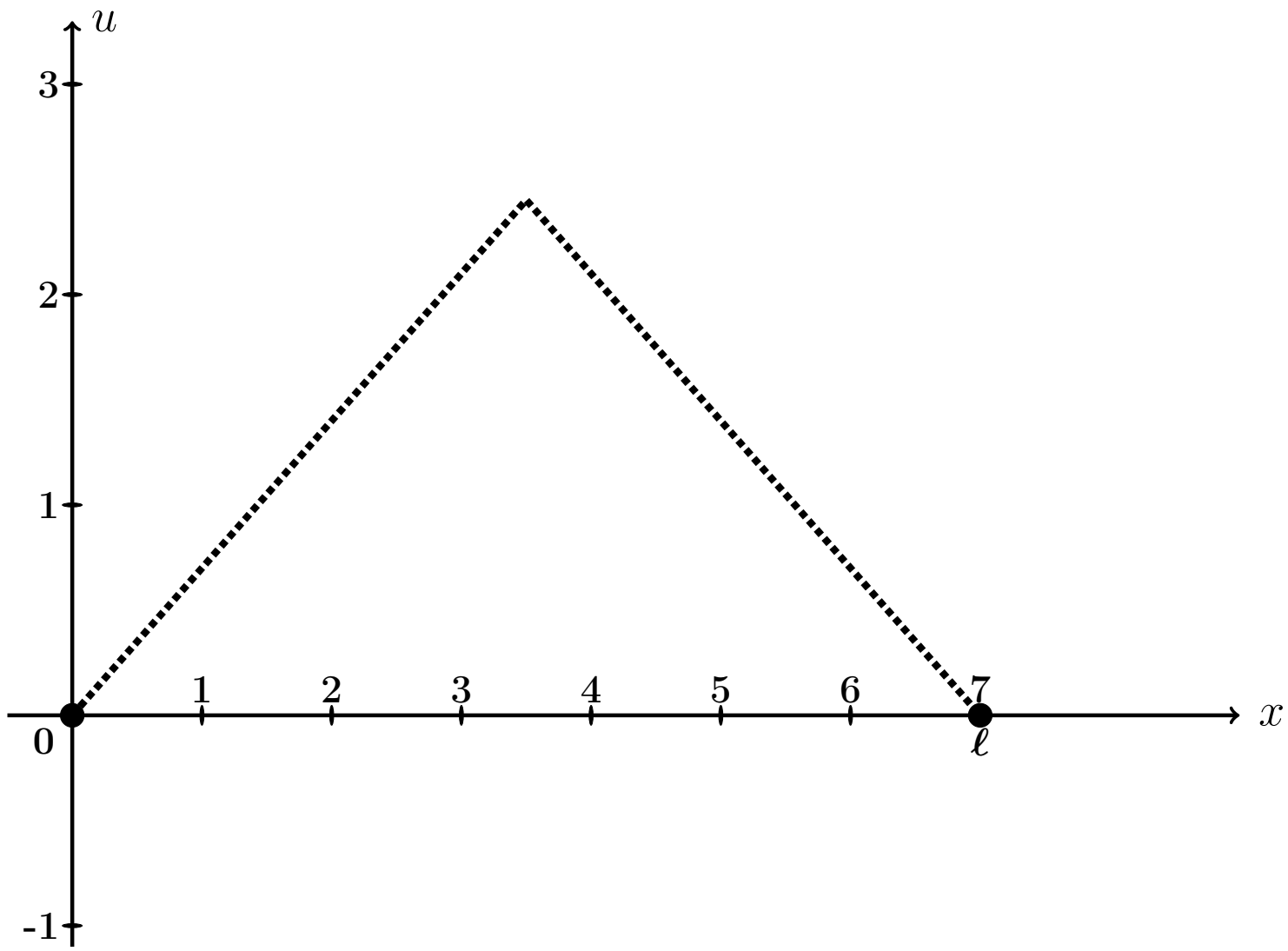


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (1.2).

Выборочная проверка вариант 1 задача 8 (по таблице 1.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 8 (по таблице 1.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 8 (по таблице 1.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 8 (по таблице 1.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.17)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.83)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(17.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{1.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{1.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

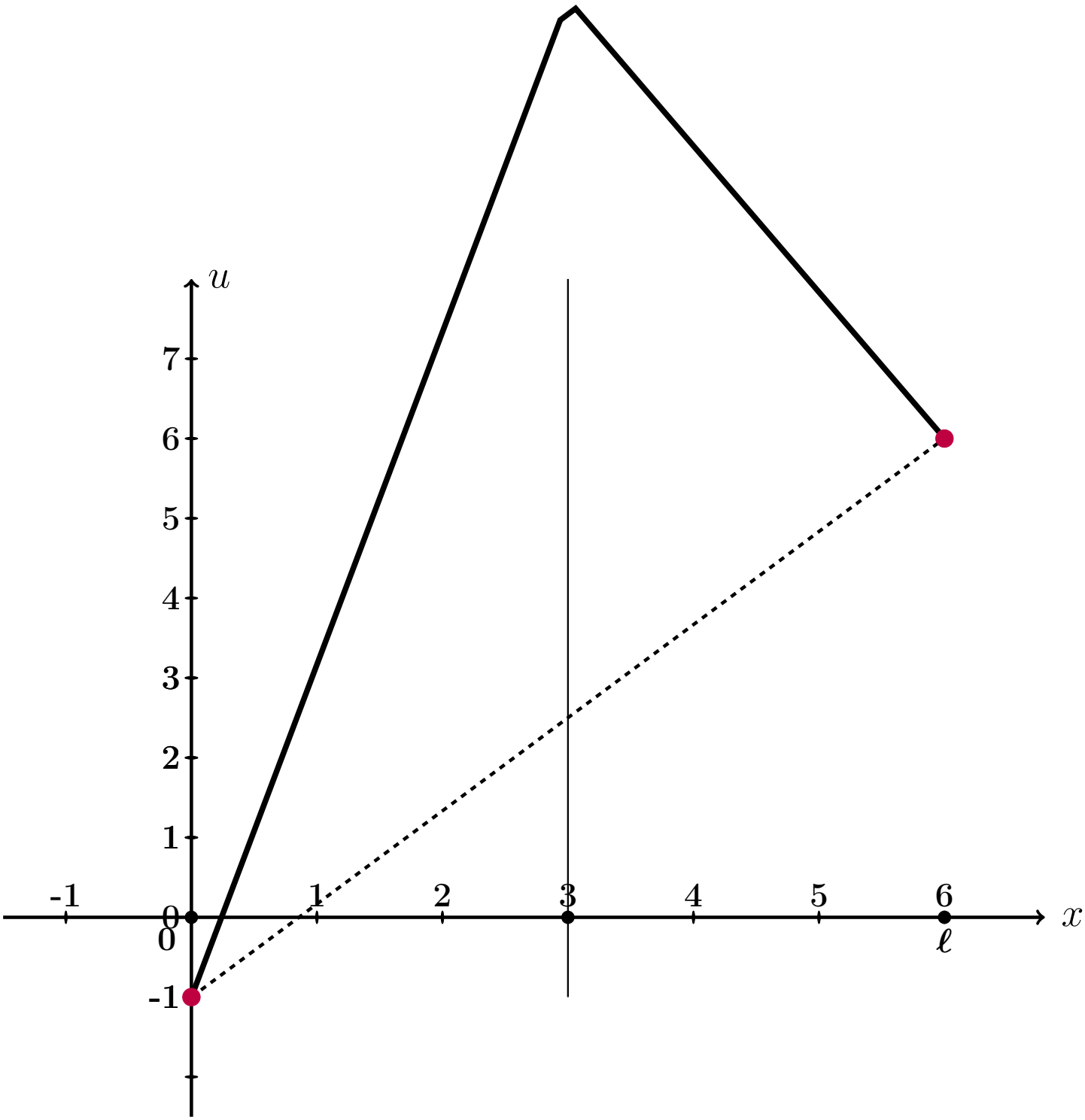


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (1.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (1.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (1.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{1.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{1.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (1.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (1.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{1.7}$$

Таблица 1.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (1.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) и граничными условиями (1.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (1.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_6 = 6.0$ — значения граничных условий (1.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 1.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 1.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-1	1,5	4	6,5	9	11,5	10,4	9,3	8,2	7,1	6
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 1.16.

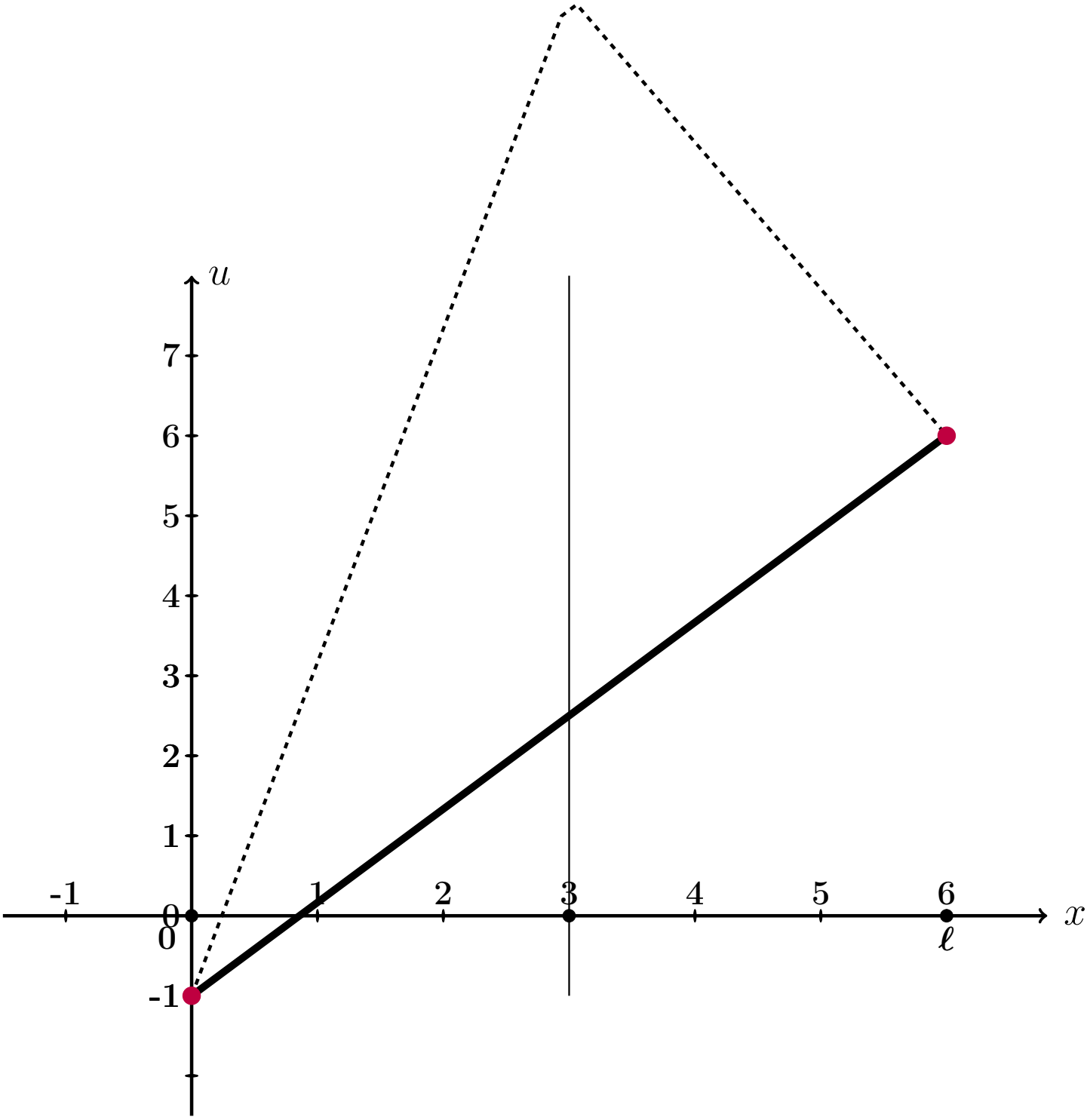


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (1.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (1.3).

Выборочная проверка вариант 1 задача 9 (по формулам (1.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 9 (по таблице 1.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 1 задача 9 (по таблице 1.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 2

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 1 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 1 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 1 \cdot x + 9$.

$$y = 1 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \boxed{\square}.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{9}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{9}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$1\cdot x+9=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

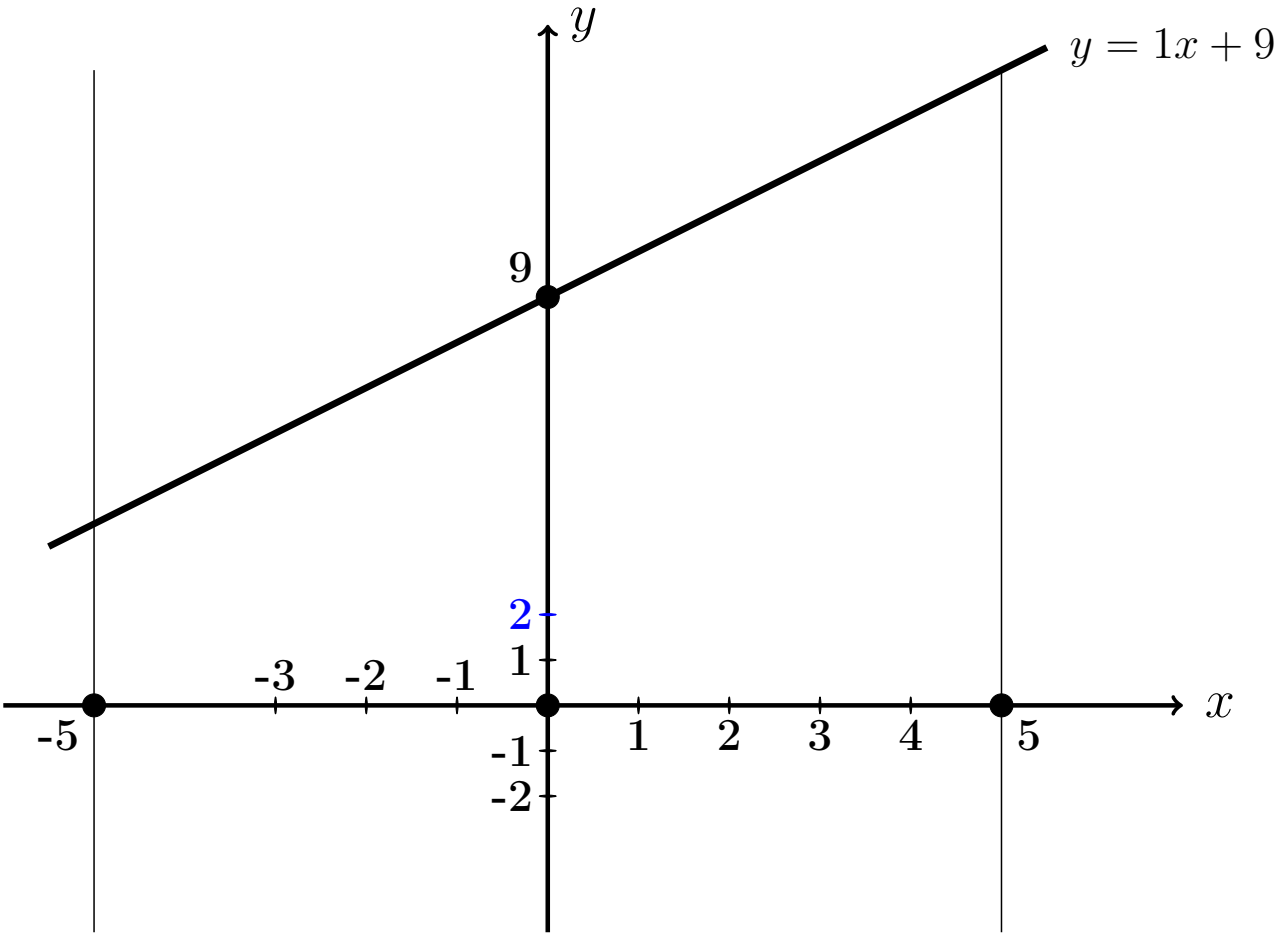
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 2.1 (Табулировка $y=1x+9$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=1x+9$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$y=S_1(x)$		*									
$y=S_2(x)$					*						
$y=S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 2.1



Выборочная проверка вариант 2 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 1 (по Таблице 2.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sqrt{x} + \frac{18}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 9\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(6\sqrt{x} + \frac{18}{y}\right)dx = 6\int x^{1/2}dx + 18\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y) = \qquad\qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 9\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^3 + 4\sin 3t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2x\ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^3 + 4\sin 3t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^3 + 4\sin 3t)dt = \qquad + C(x)\ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\,,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 2x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = \qquad = \qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = \qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$

Выборочная проверка вариант 2 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

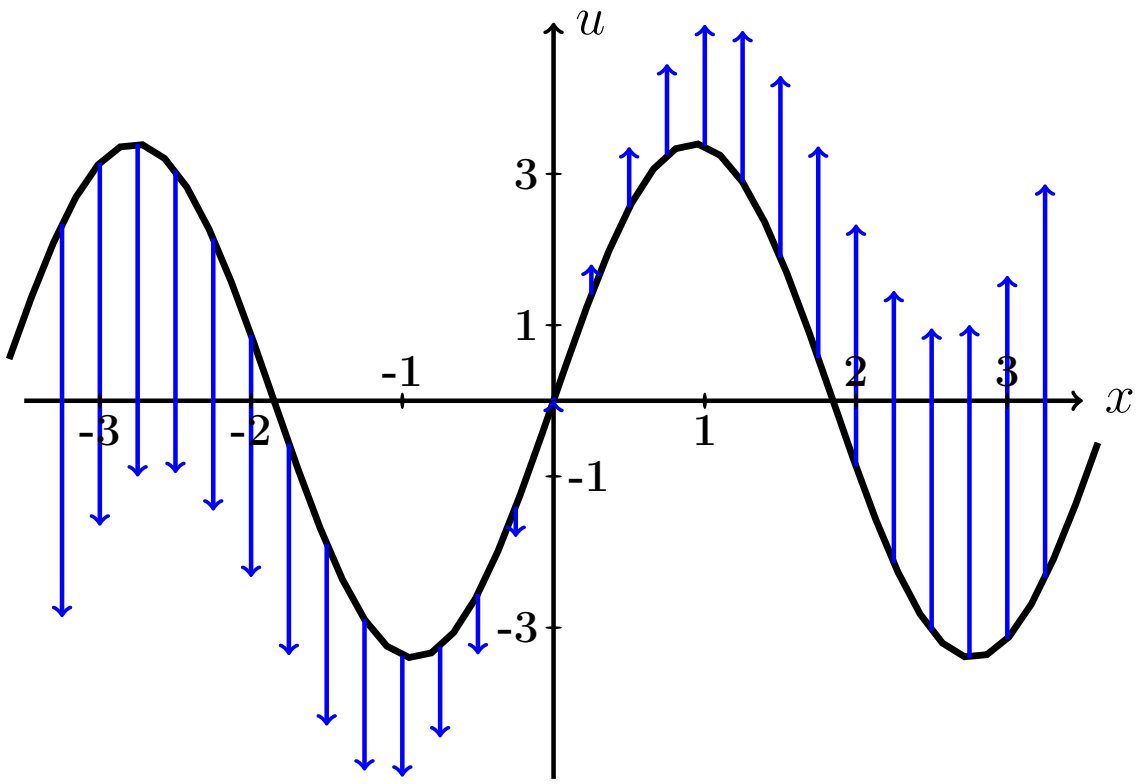


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 2.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 2 задача 4 (по Таблице 2.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 2.2.

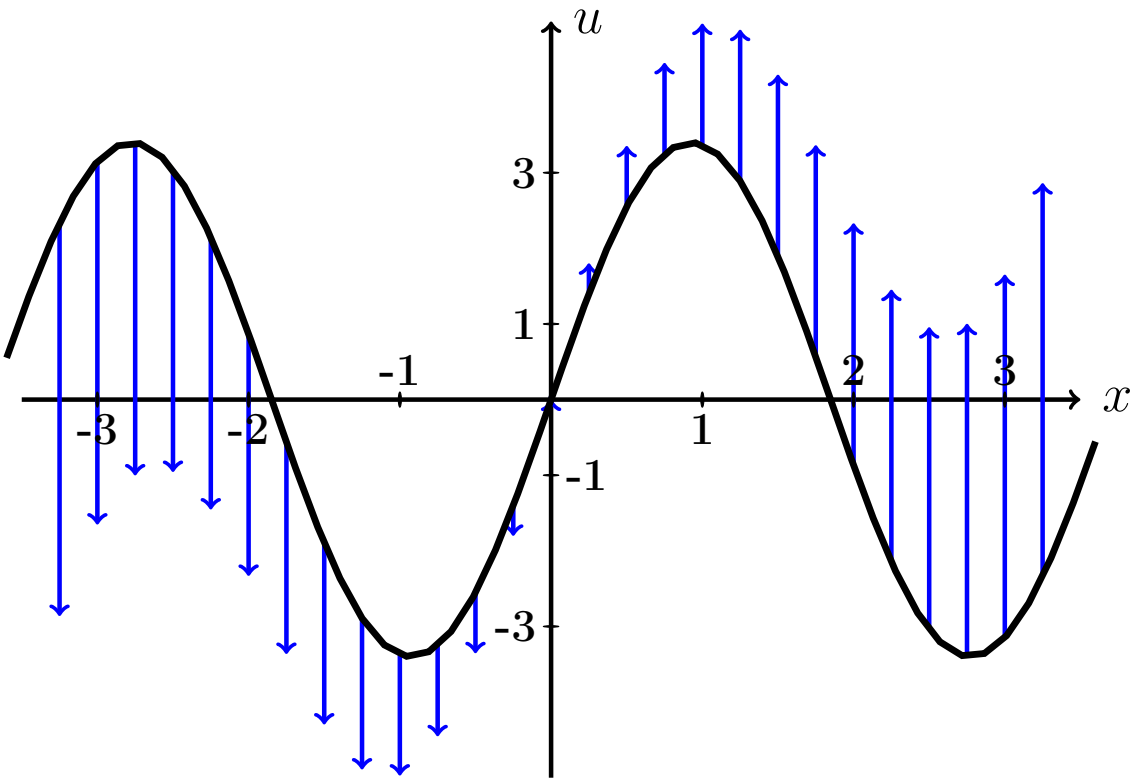


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

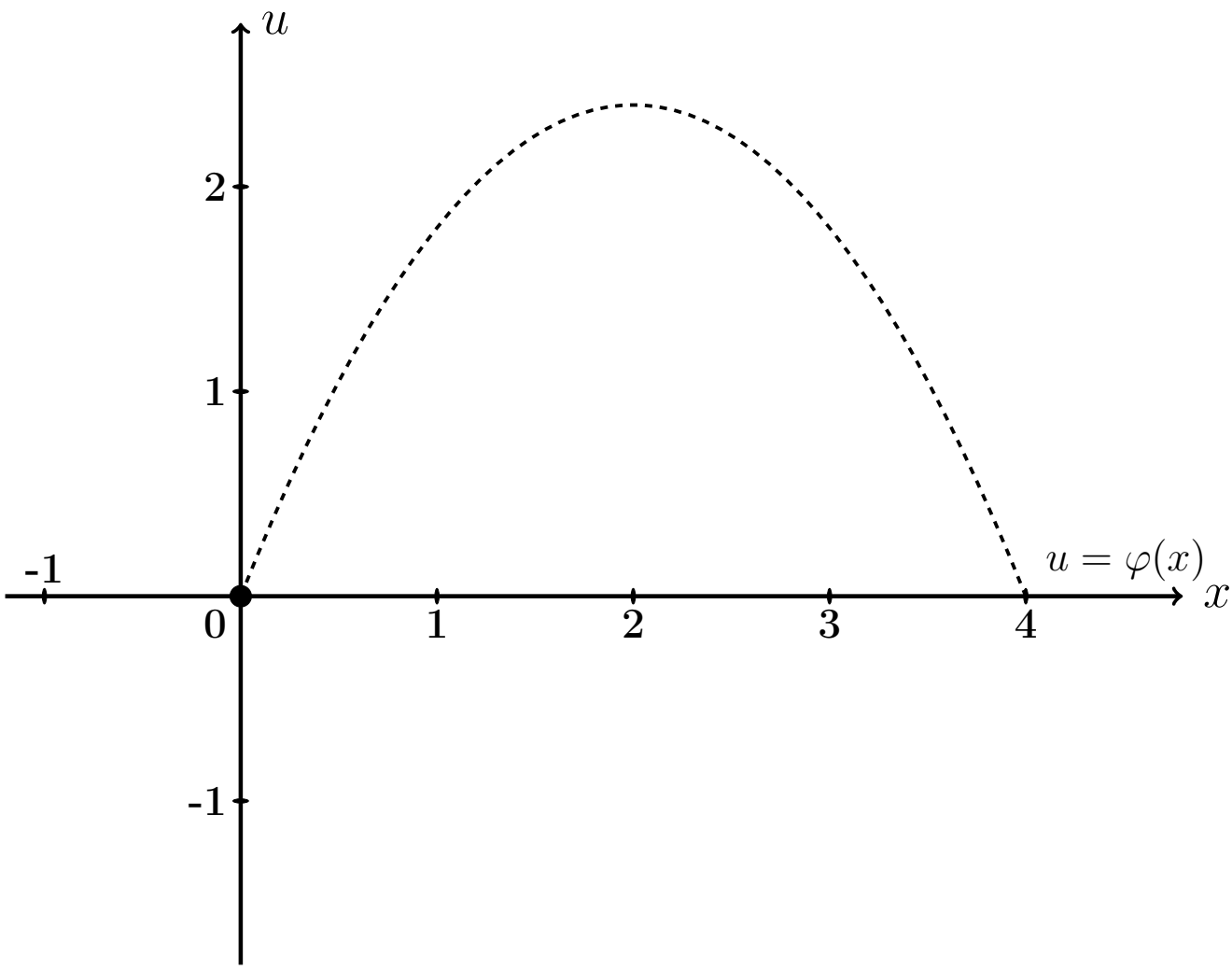


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 2.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 2.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 2.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 2.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 2 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 5 (красные клетки таб. 2.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 2.4.

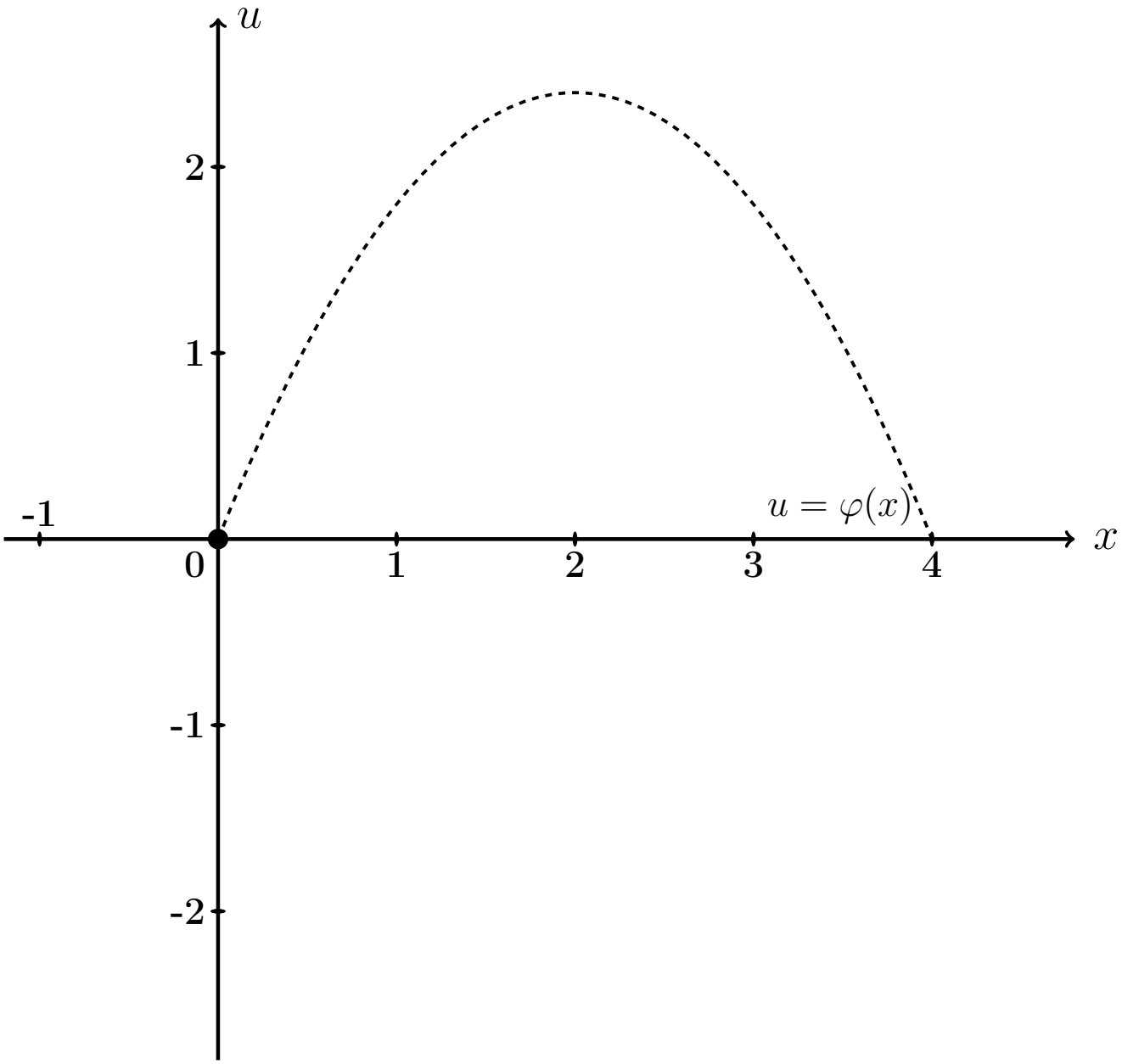


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

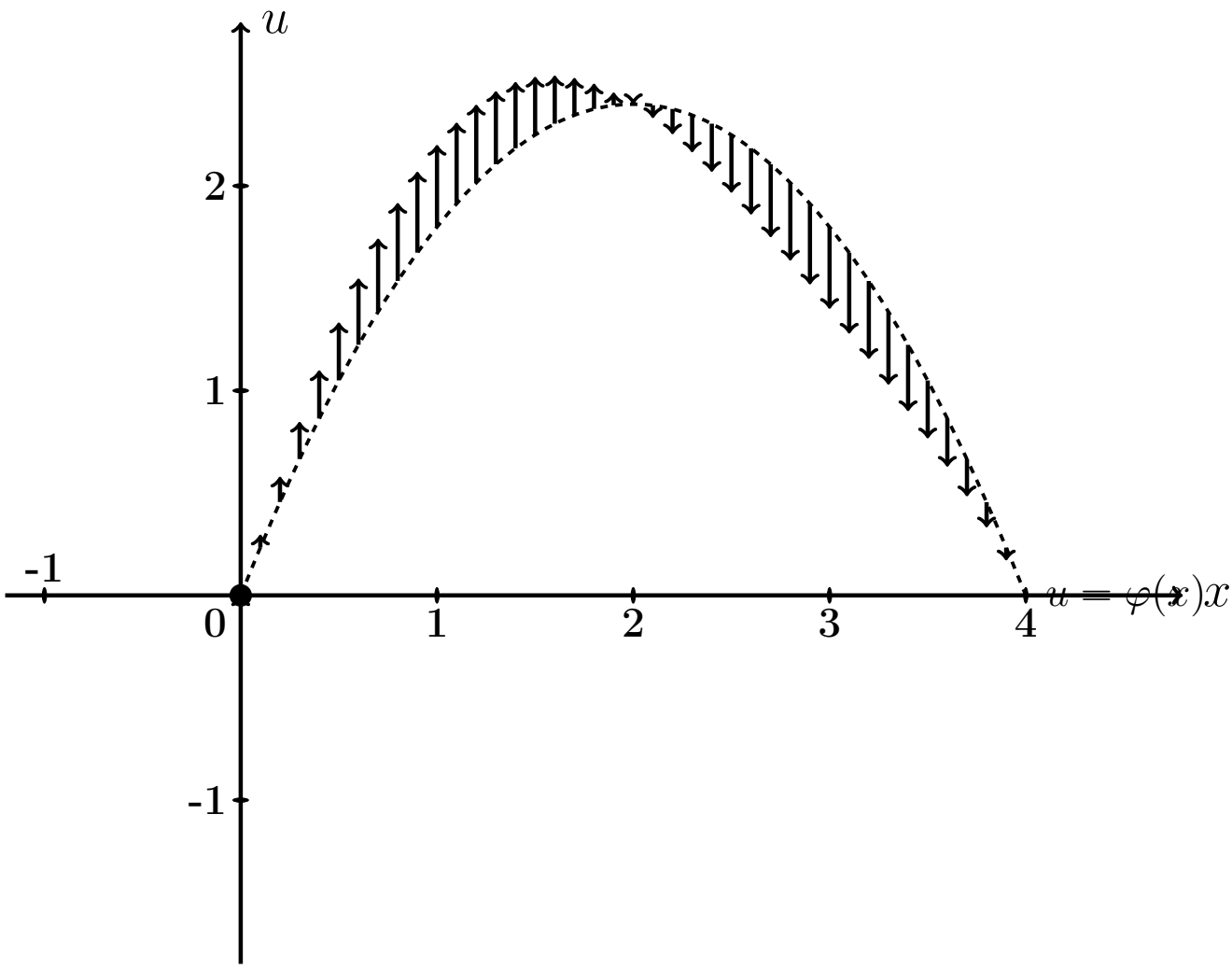


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 2.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad =$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 2.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 2.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 2.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 2 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 6 (красные клетки Таблицы 2.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 2.6.

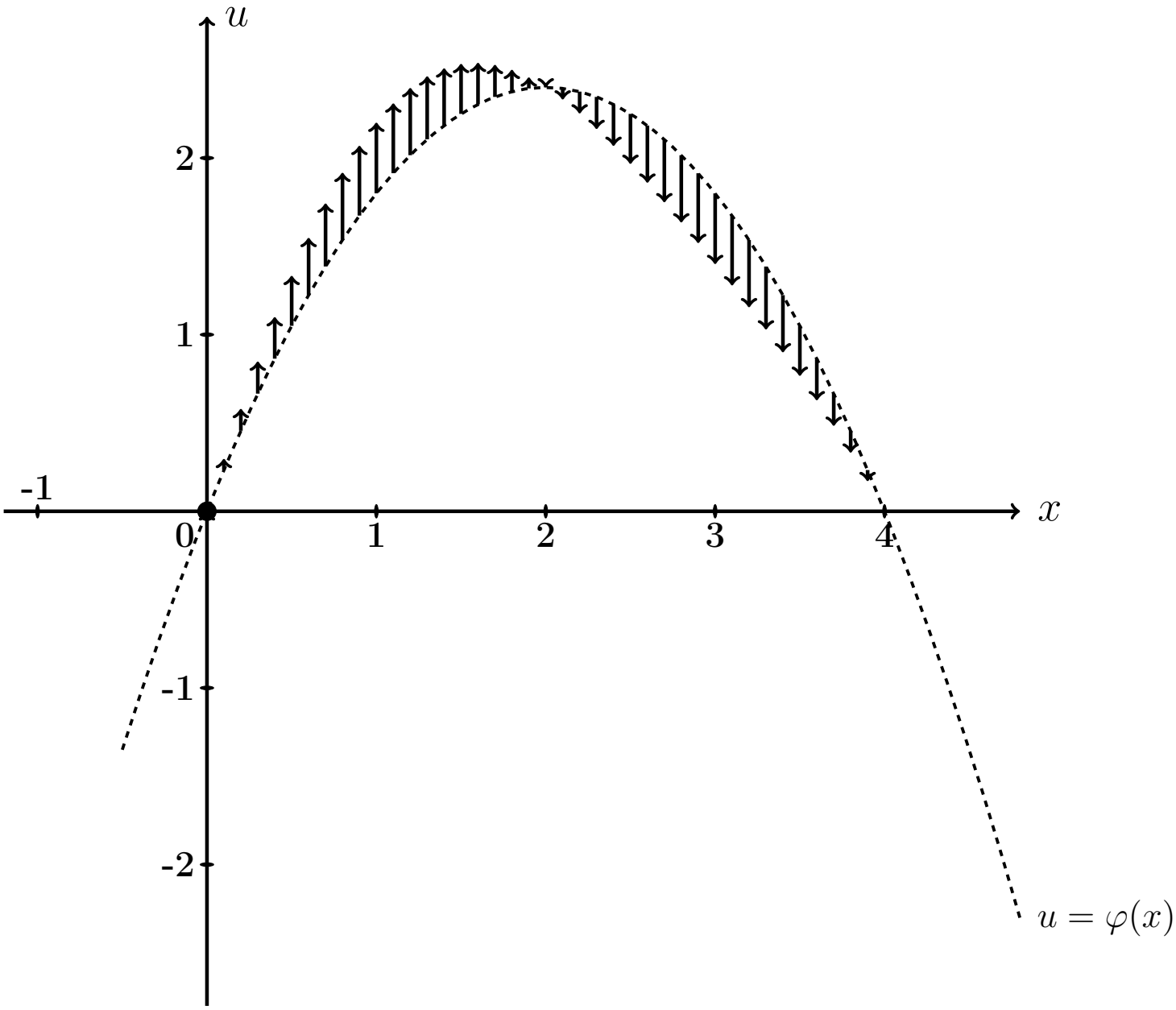


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{2.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{2.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (2.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{2.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (2.2), (2.3). Затабулировать решение уравнения (2.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (2.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (2.2), (2.3). Затабулировать решение уравнения (2.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (2.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 2.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (2.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{2.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (2.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (2.4) при граничных условиях (2.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{2.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{2.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (2.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (2.9). Следовательно, по формуле (2.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Шаг 6.

Таблица 2.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 2.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (2.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 2.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 2.9

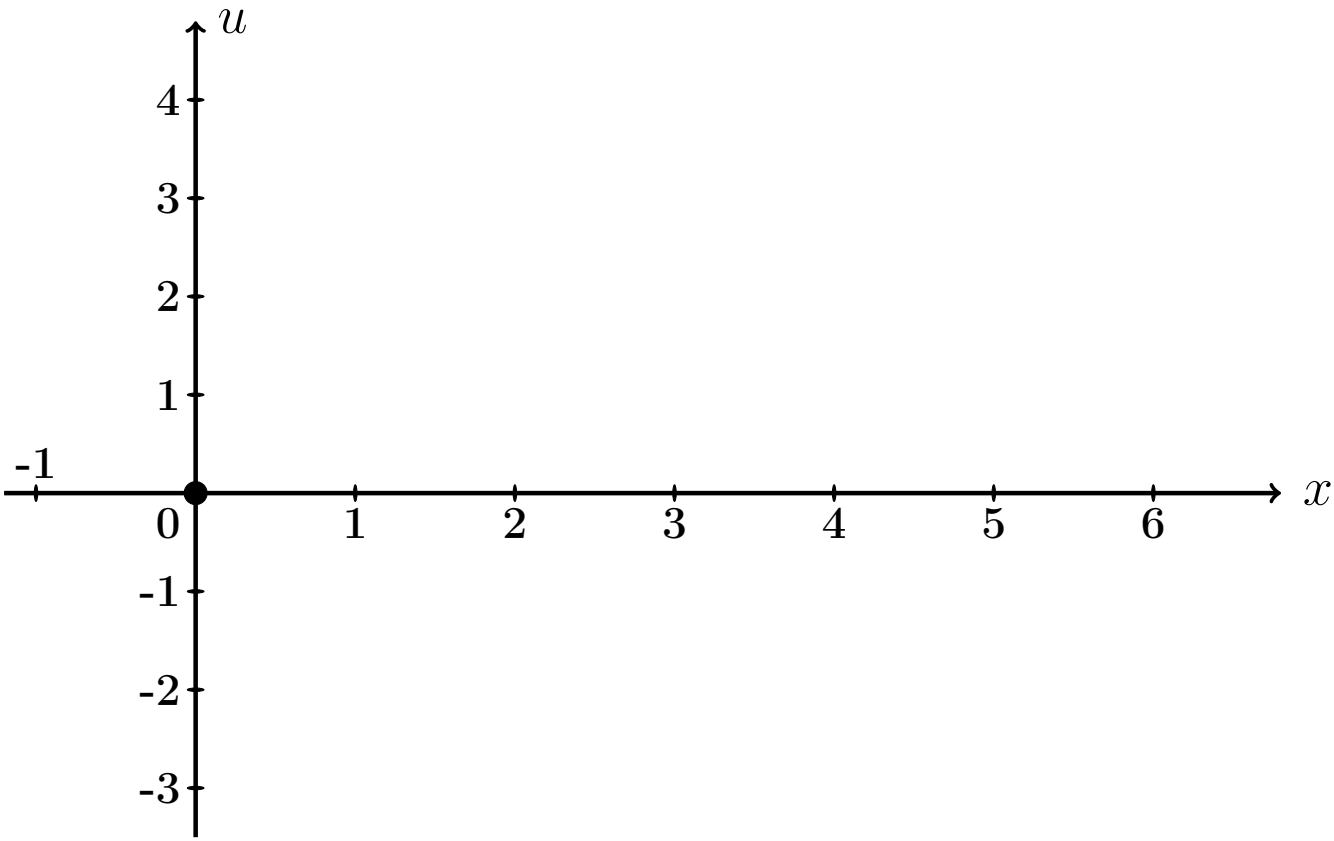


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 2 задача 7 (по Таб. 2.7, 2.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 7 (по таблице 2.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (2.6) и (2.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (2.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (2.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (2.9). Следовательно, по формуле (2.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (2.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (2.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 2.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (2.5),

$C_1' =$ по формуле (2.12)

и $C_3 =$ по таблице 2.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 2.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

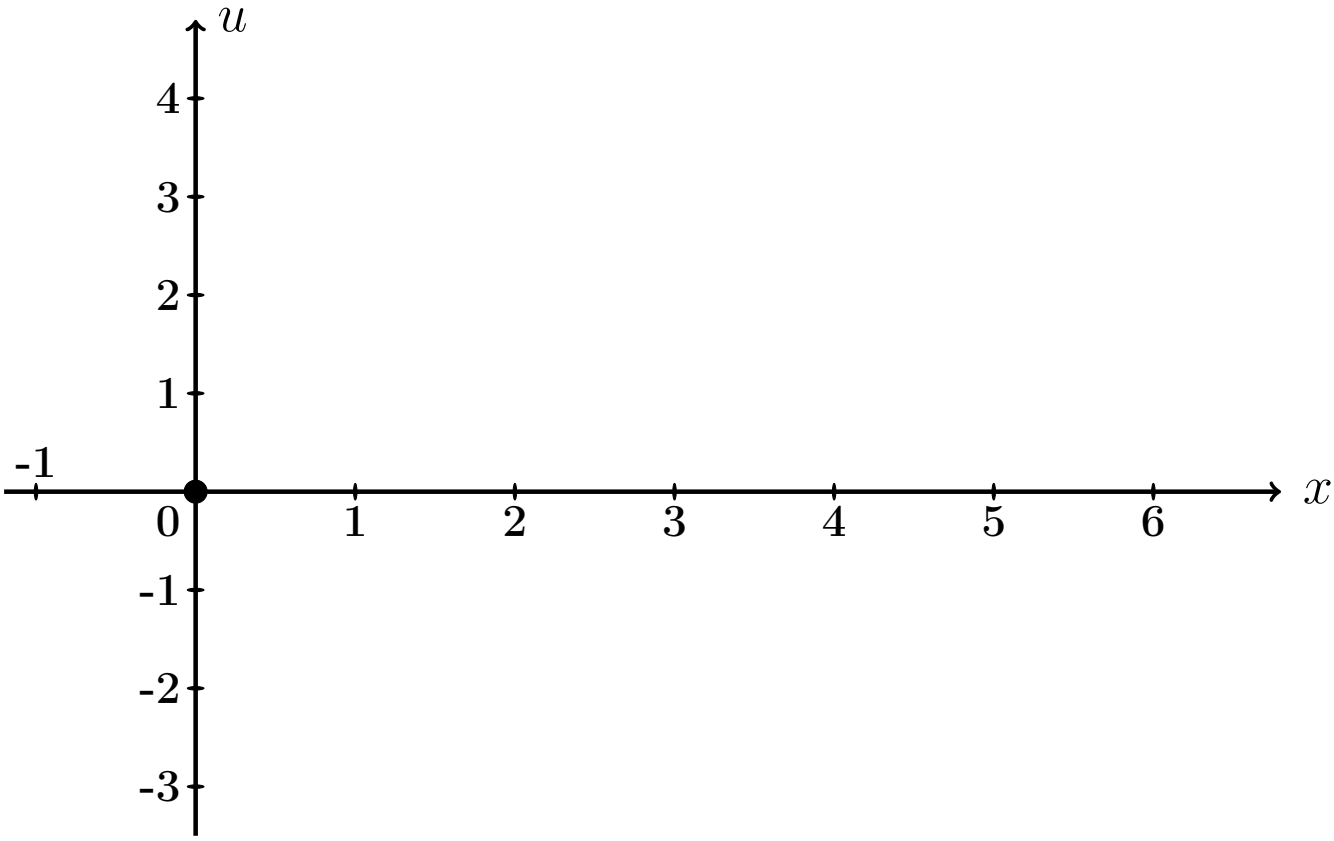


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 2 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (2.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 2 задача 7 (по таблице 2.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{2.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (2.1). Затабулировать решение уравнения (2.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

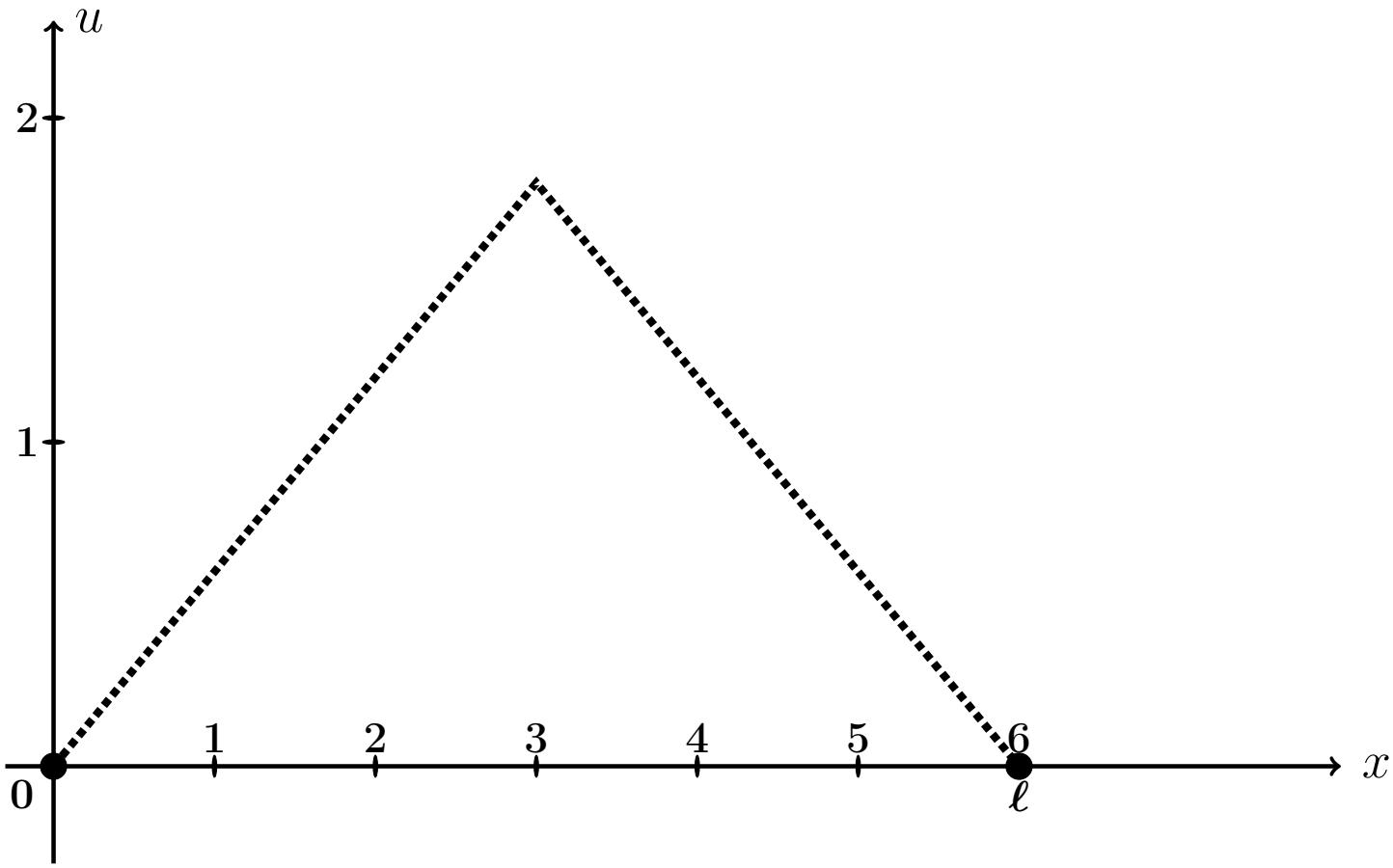


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (2.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где $\ell = 6$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 2.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 2.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 2.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 2.12, 2.13) формулы (2.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 2.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 2.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 2.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 2.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

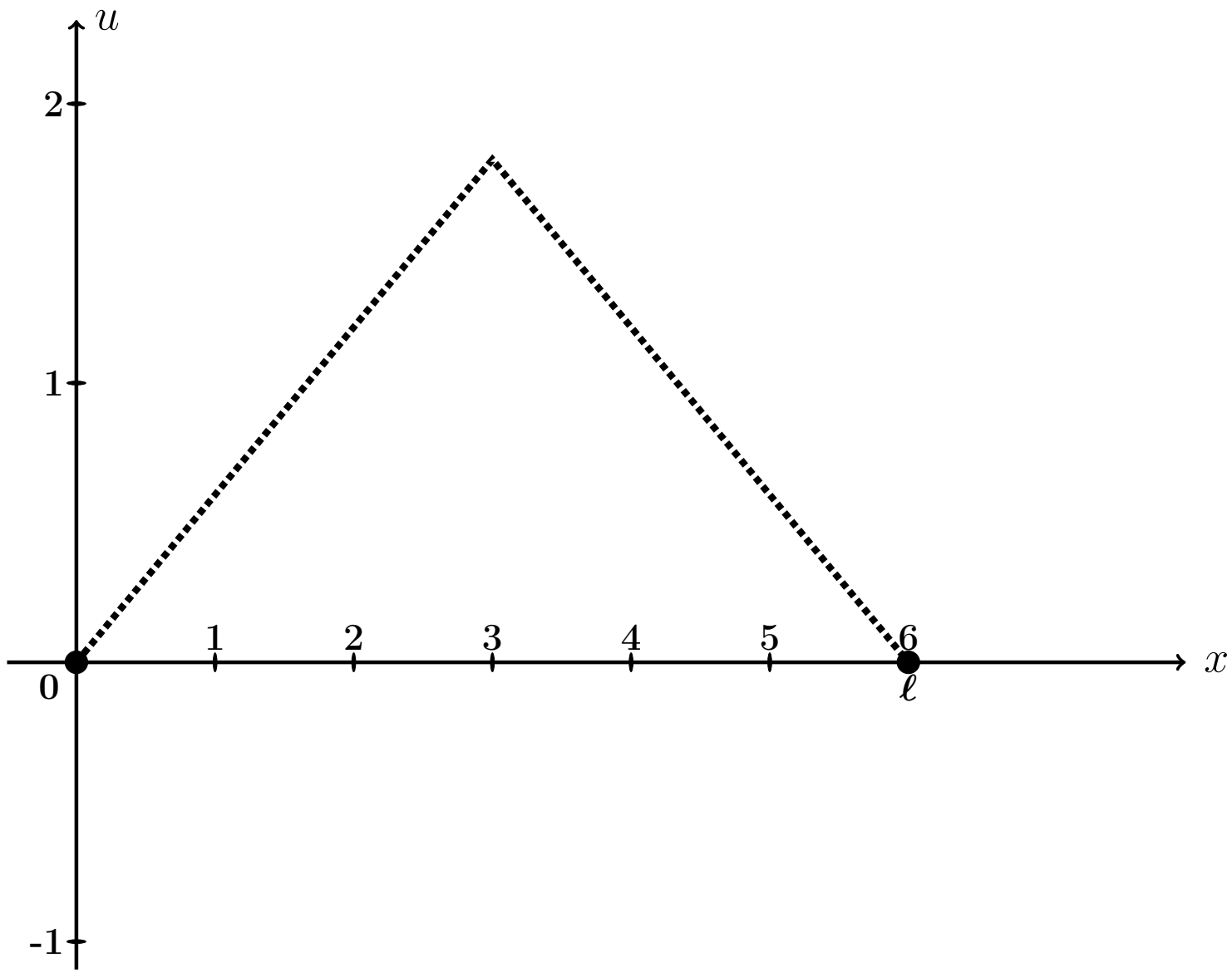


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (2.2).

Выборочная проверка вариант 2 задача 8 (по таблице 2.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 8 (по таблице 2.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 8 (по таблице 2.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 8 (по таблице 2.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(3.83)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(0.83)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(3.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{2.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{2.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

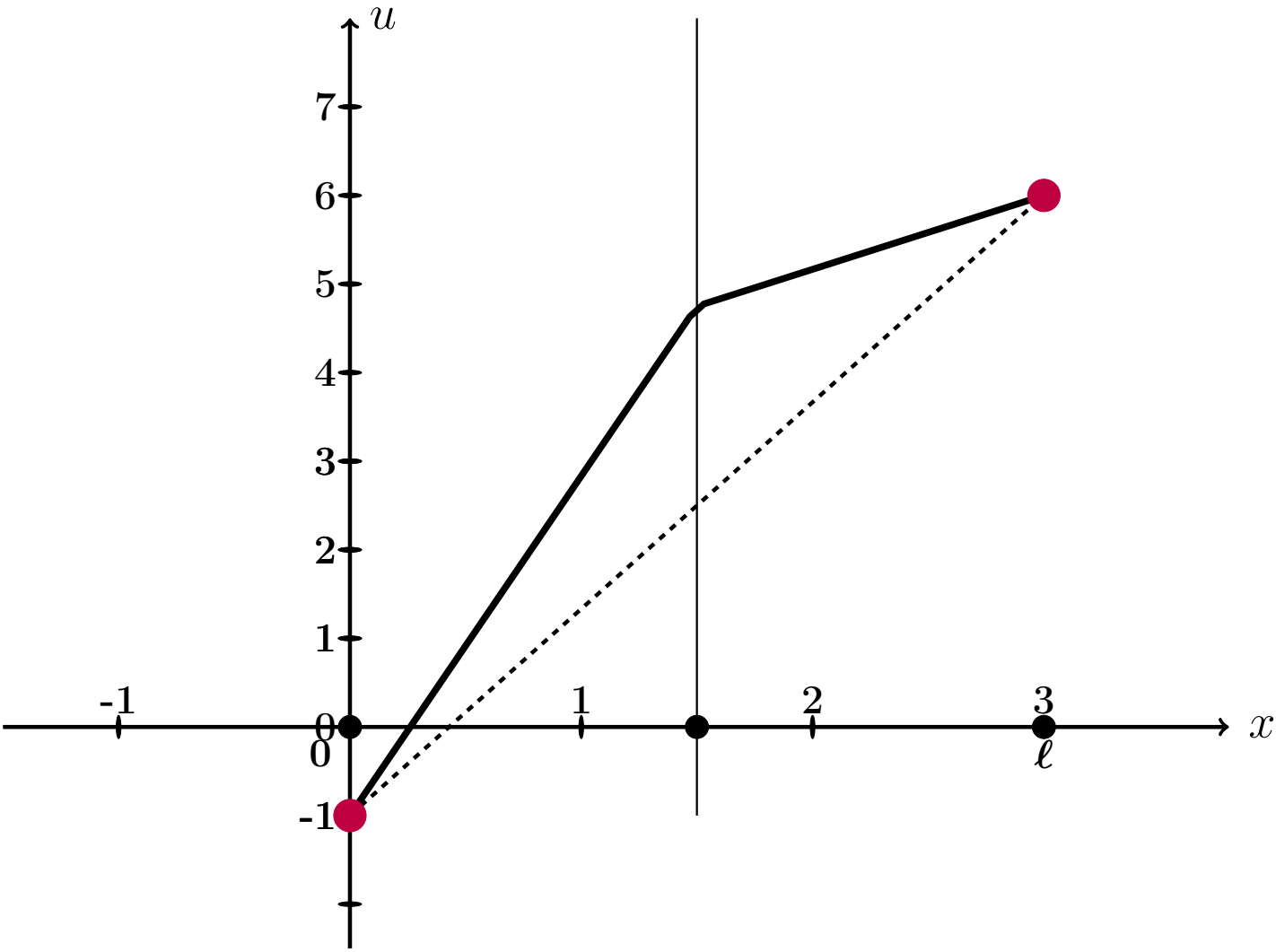


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (2.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (2.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (2.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{2.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)}\cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)}\cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{2.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (2.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (2.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{2.7}$$

Таблица 2.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (2.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (2.1) с начальным условием (2.2) и граничными условиями (2.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (2.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_3 = 6.0$ — значения граничных условий (2.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 2.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 2.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-1	0,15	1,3	2,45	3,6	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 2.16.

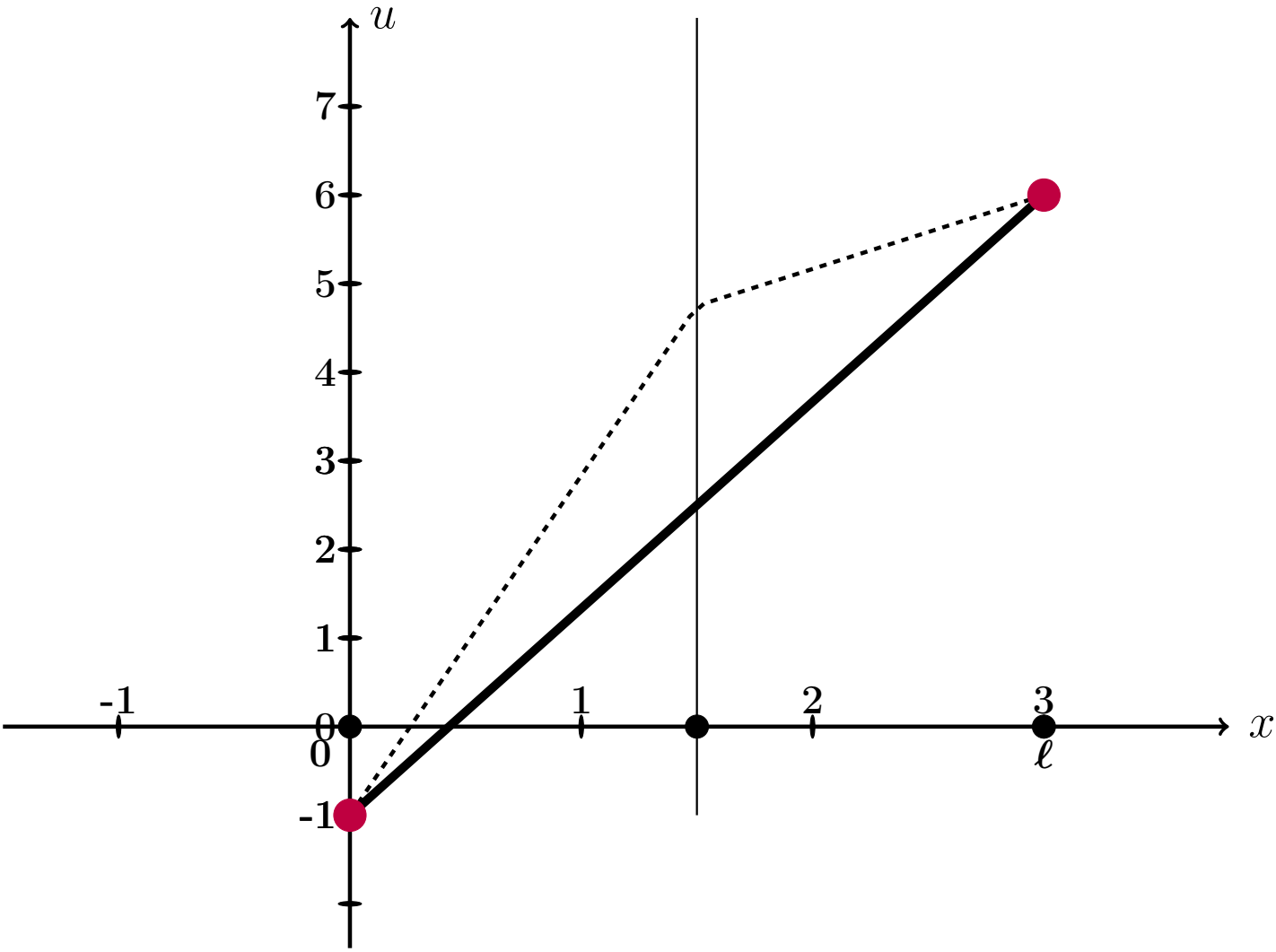


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (2.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (2.3).

Выборочная проверка вариант 2 задача 9 (по формулам (2.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 9 (по таблице 2.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 2 задача 9 (по таблице 2.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 3

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{8}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{8}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

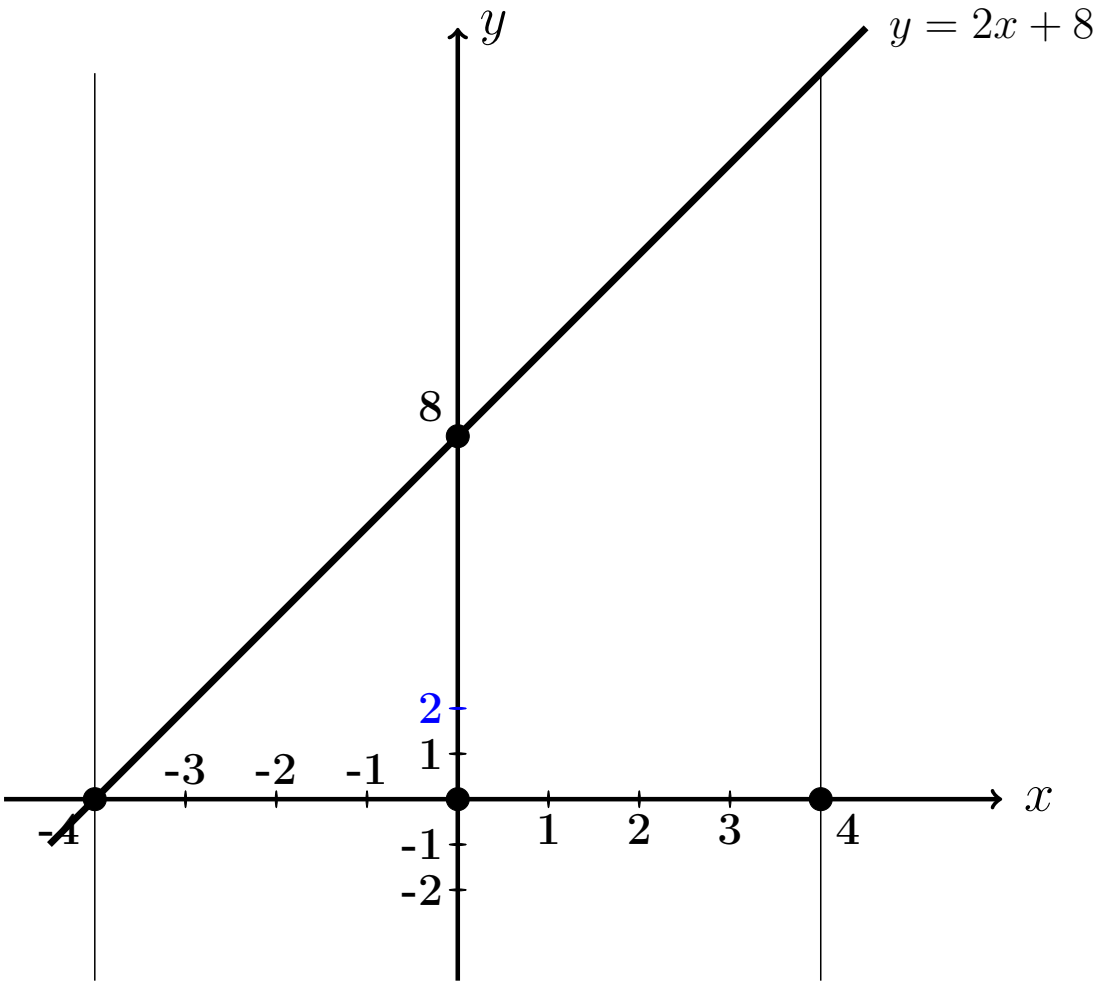
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 3.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x+8$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$y=S_1(x)$		*							
$y=S_2(x)$					*				
$y=S_3(x)$								*	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 3.1



Выборочная проверка вариант 3 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 1 (по Таблице 3.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 8\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 12\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 8\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 8\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 12\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x^2 + 8t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x^2 + 8t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x^2 + 8t)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 4x^2 \\ \qquad = 3e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 3 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

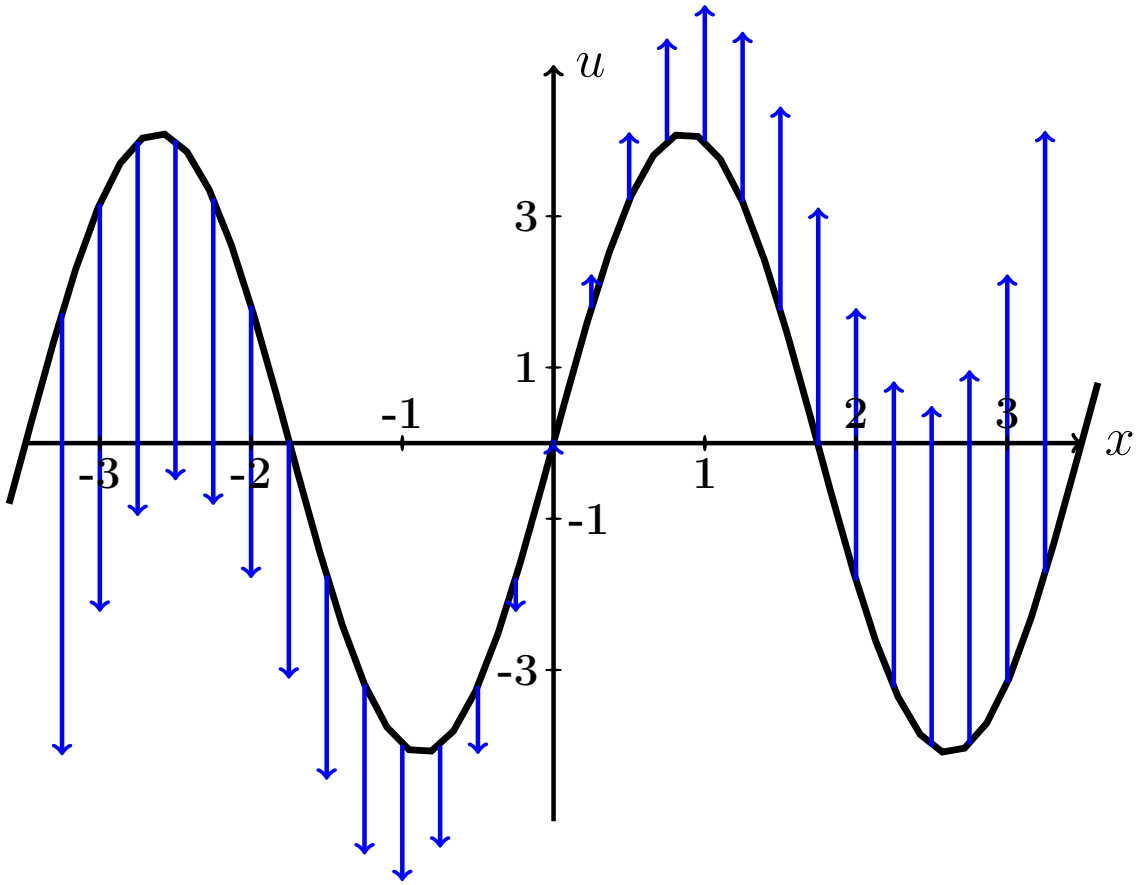


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 3.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 3 задача 4 (по Таблице 3.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 3.2.

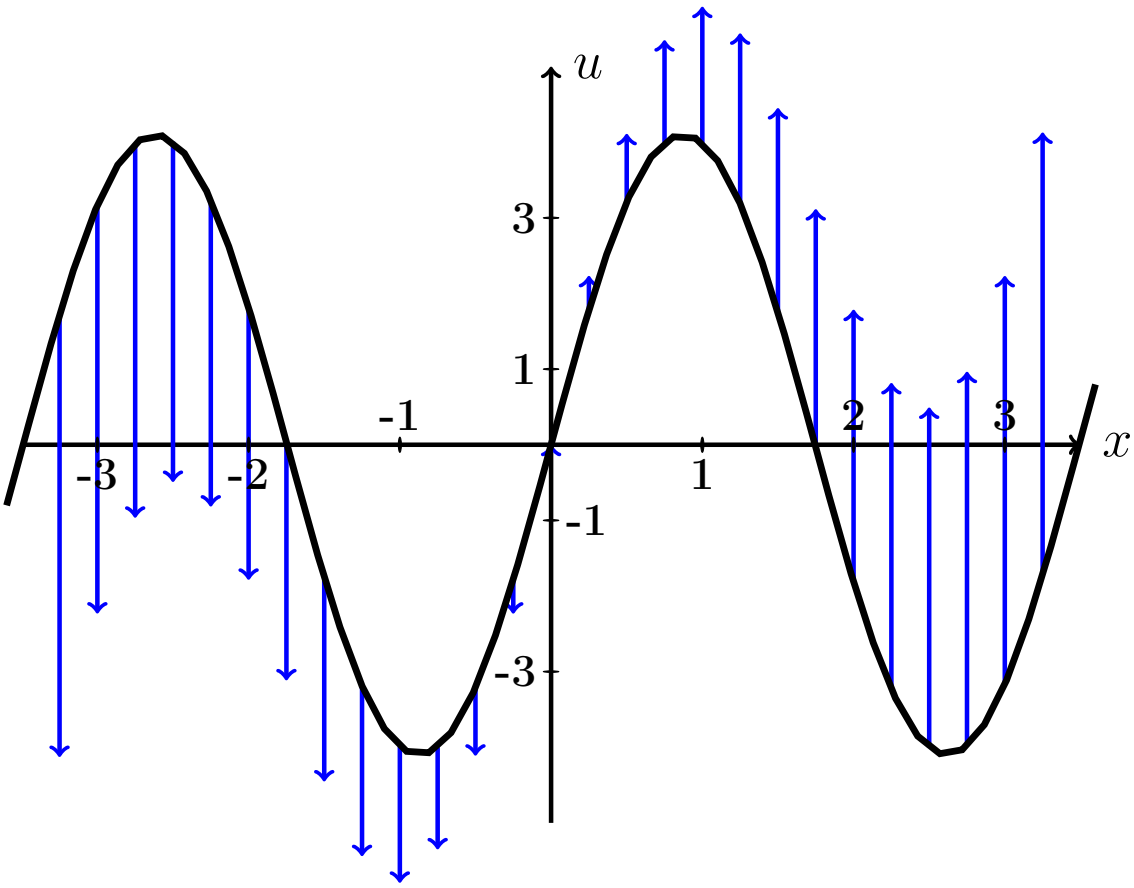


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

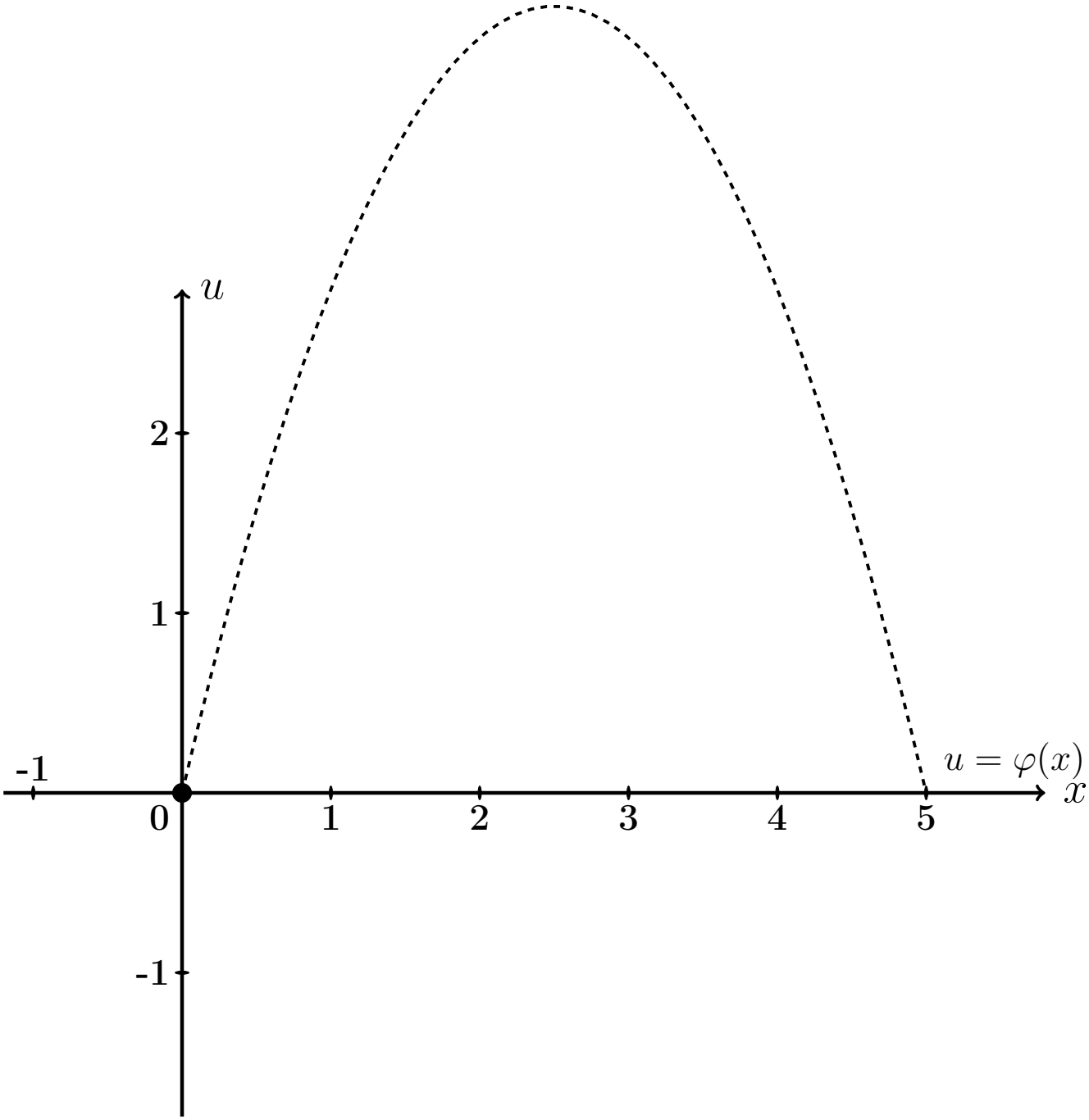


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 3.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 3.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 3.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 3.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 3 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 5 (красные клетки таб. 3.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 3.4.

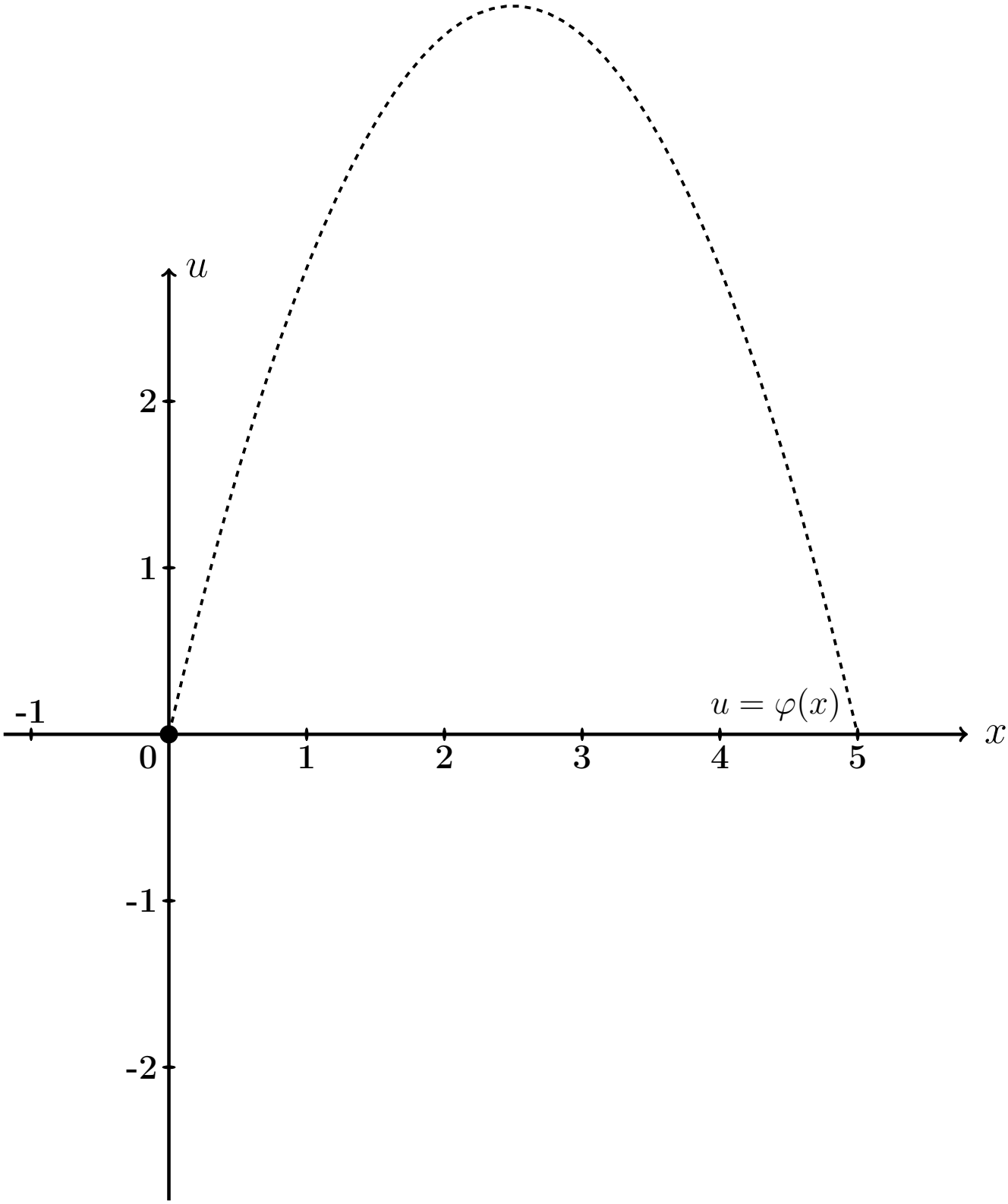


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

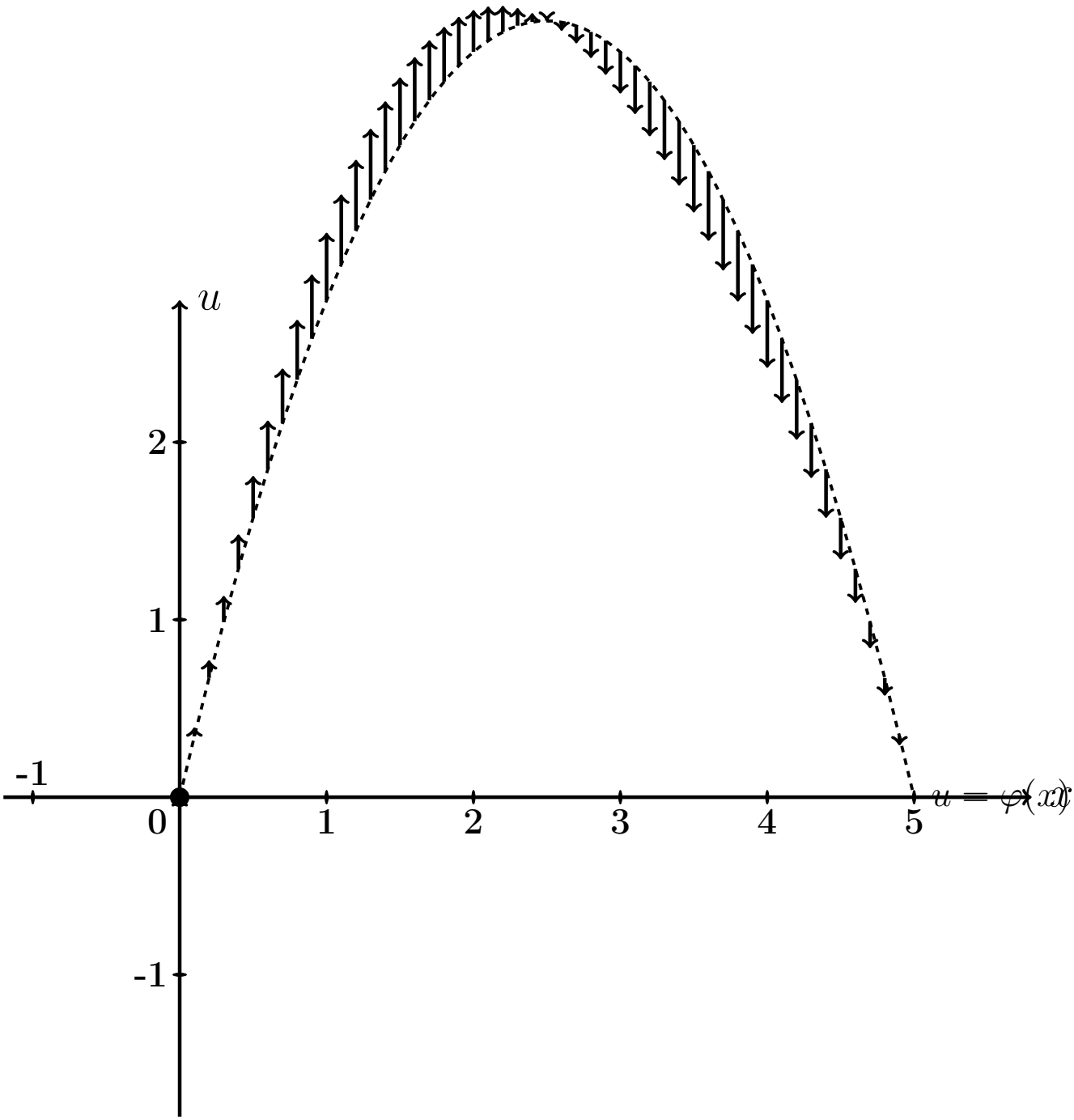


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 3.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.0\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.41$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 3.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 3.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 3.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 3 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 6 (красные клетки Таблицы 3.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 3.6.

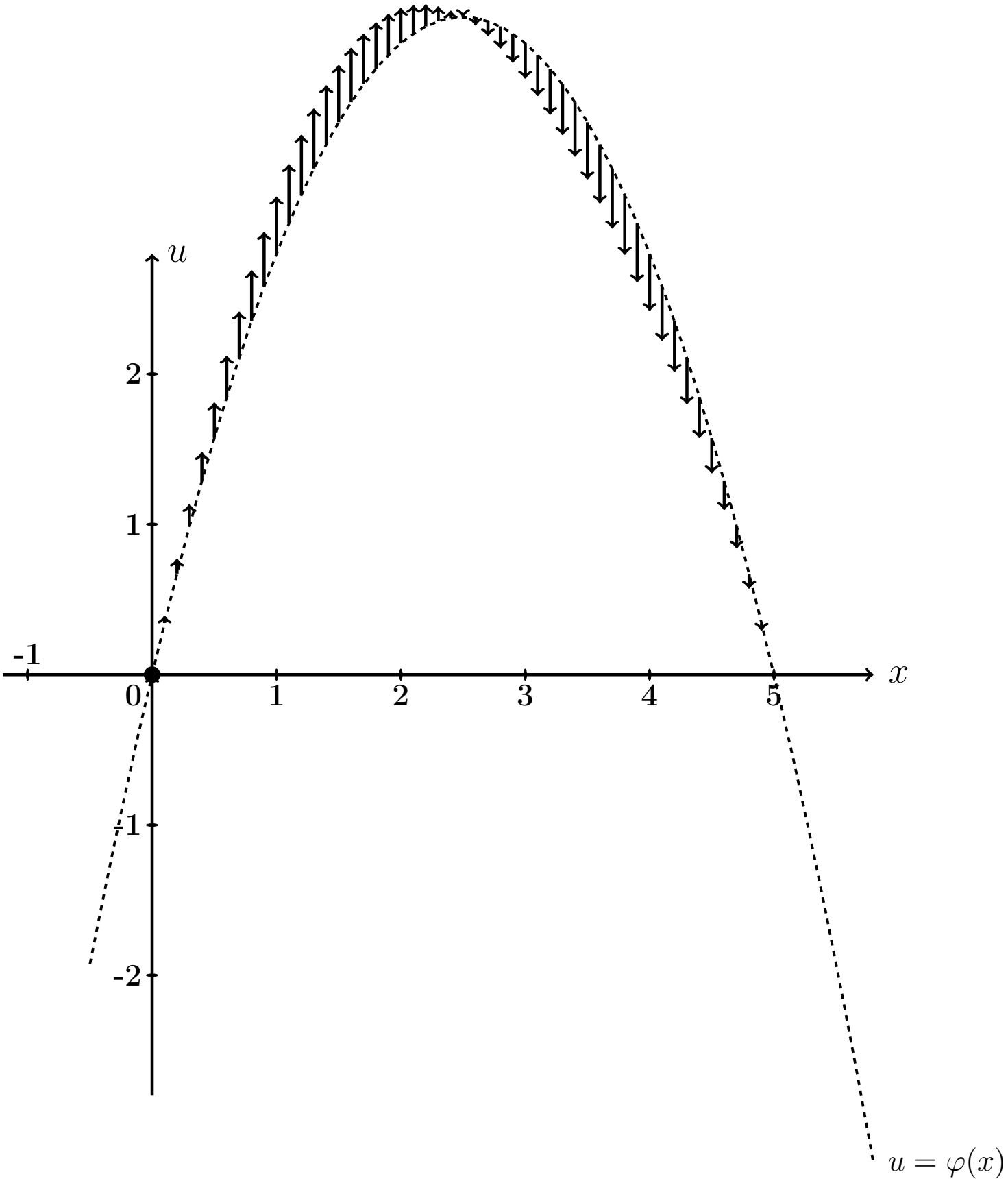


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{3.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{3.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (3.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{3.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (3.2), (3.3). Затабулировать решение уравнения (3.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (3.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (3.2), (3.3). Затабулировать решение уравнения (3.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (3.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 3.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (3.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{3.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (3.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (3.4) при граничных условиях (3.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{3.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{3.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (3.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (3.9). Следовательно, по формуле (3.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Шаг 6.

Таблица 3.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 3.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (3.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 3.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 3.9

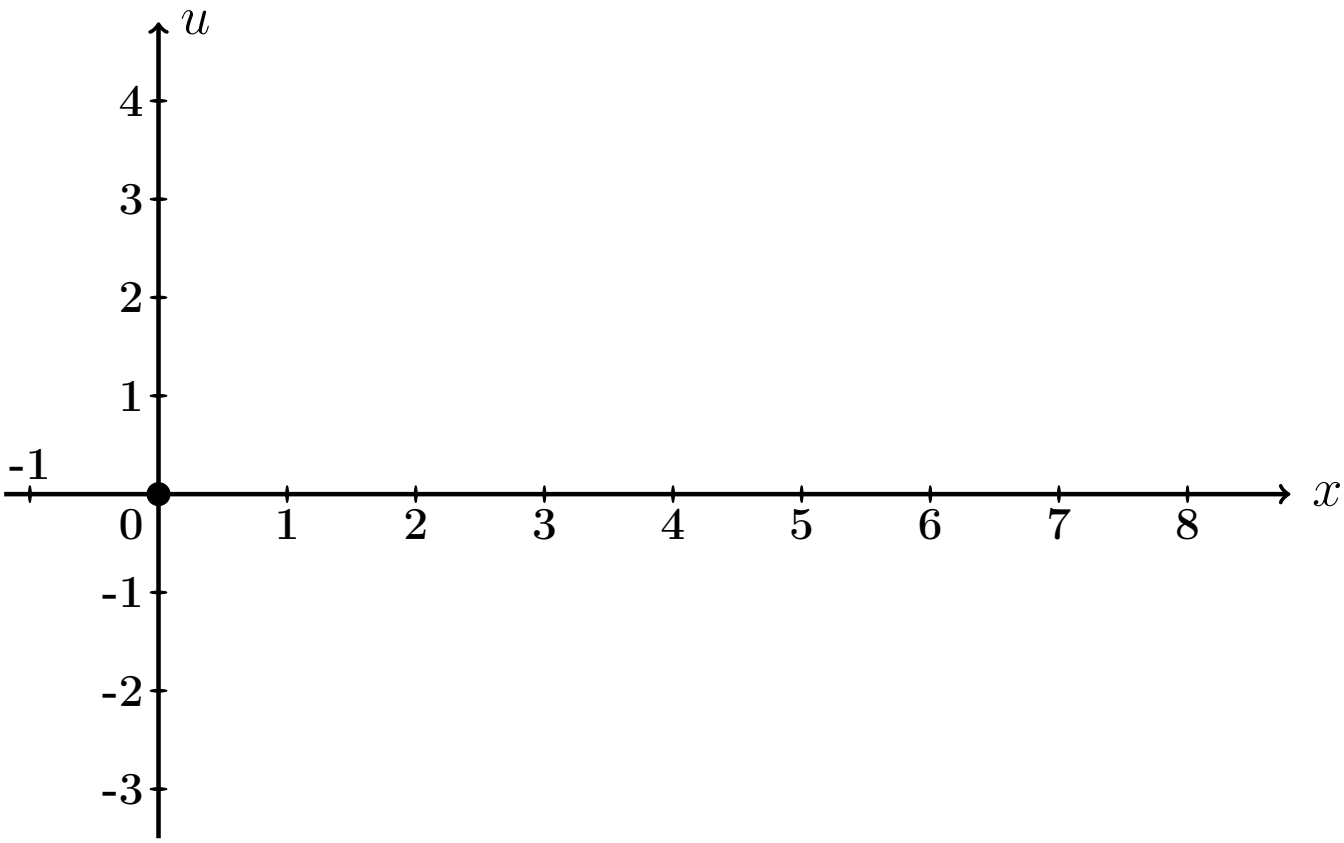


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 3 задача 7 (по Таб. 3.7, 3.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 3 задача 7 (по таблице 3.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (3.6) и (3.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (3.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (3.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (3.9). Следовательно, по формуле (3.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (3.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (3.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 3.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (3.5),

$C_1' =$ по формуле (3.12)

и $C_3 =$ по таблице 3.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 3.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

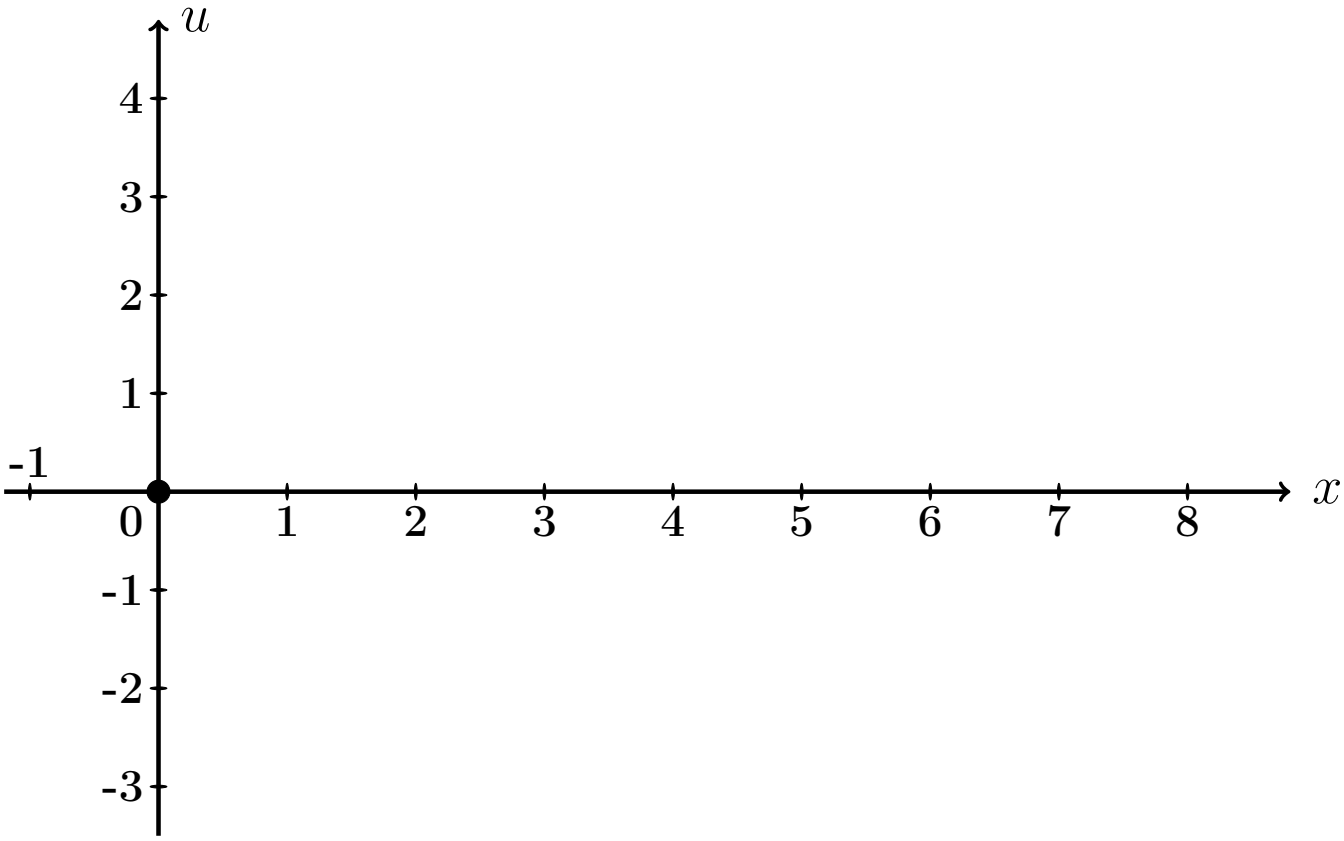


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 3 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (3.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 3 задача 7 (по таблице 3.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{3.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (3.1). Затабулировать решение уравнения (3.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

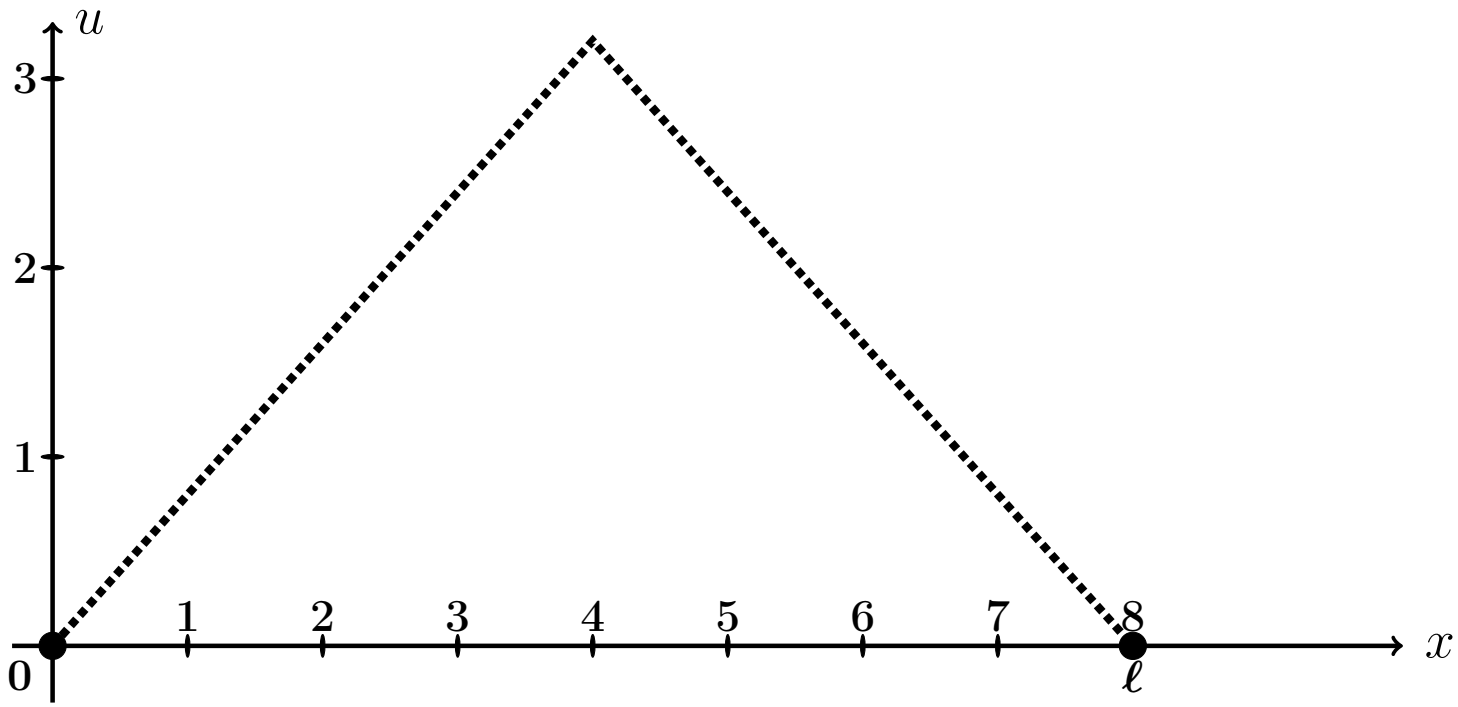


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (3.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где $\ell = 8$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 3.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 3.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 3.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 3.12, 3.13) формулы (3.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 3.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 3.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 3.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 3.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

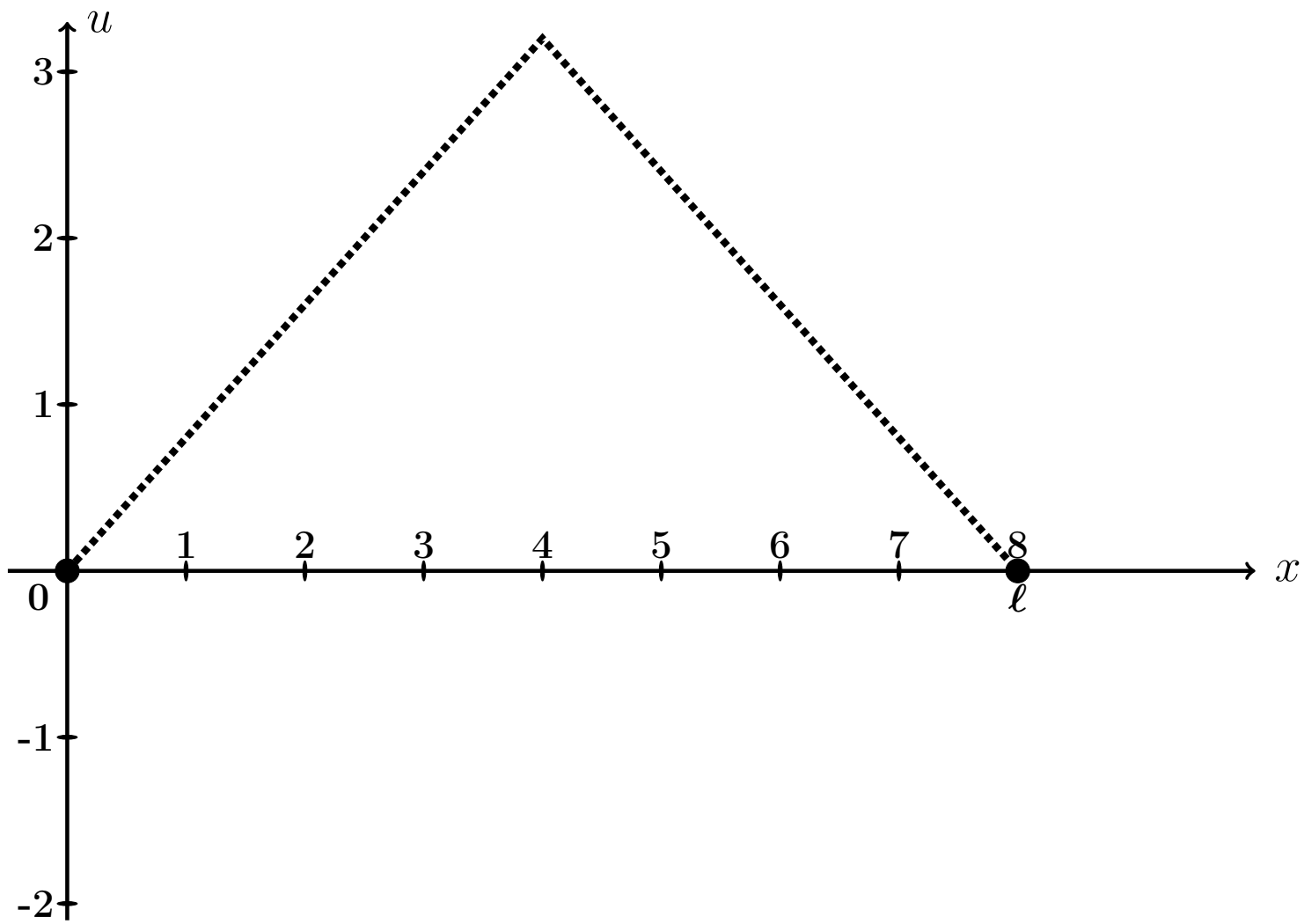


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (3.2).

Выборочная проверка вариант 3 задача 8 (по таблице 3.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 8 (по таблице 3.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 8 (по таблице 3.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 8 (по таблице 3.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(3.90)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-1.10)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(11.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{3.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{3.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

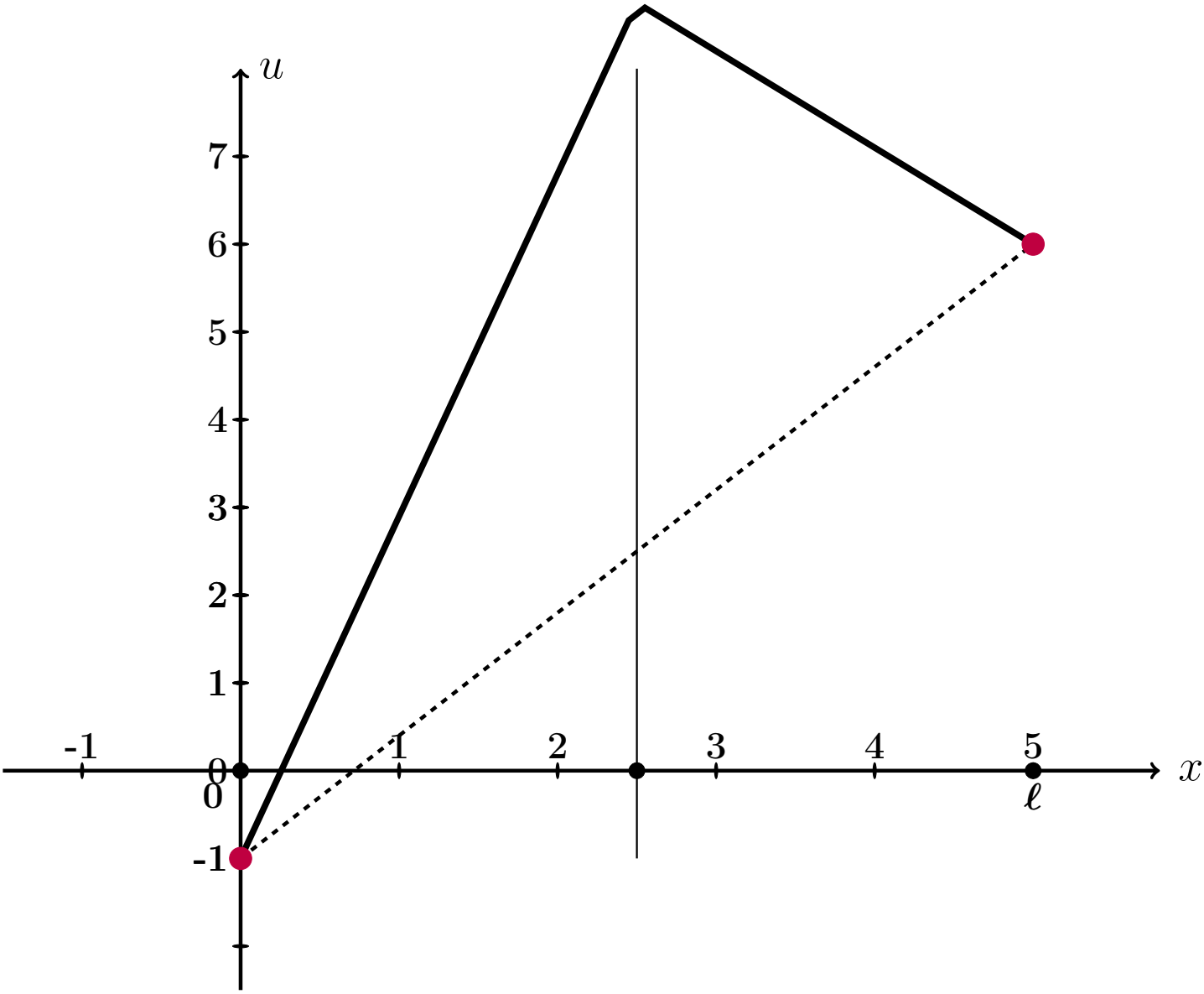


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (3.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (3.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (3.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{3.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{3.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (3.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (3.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{3.7}$$

Таблица 3.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (3.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (3.1) с начальным условием (3.2) и граничными условиями (3.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (3.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_5 = 6.0$ — значения граничных условий (3.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 3.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 3.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-1	0,95	2,9	4,85	6,8	8,75	8,2	7,65	7,1	6,55	6
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 3.16.

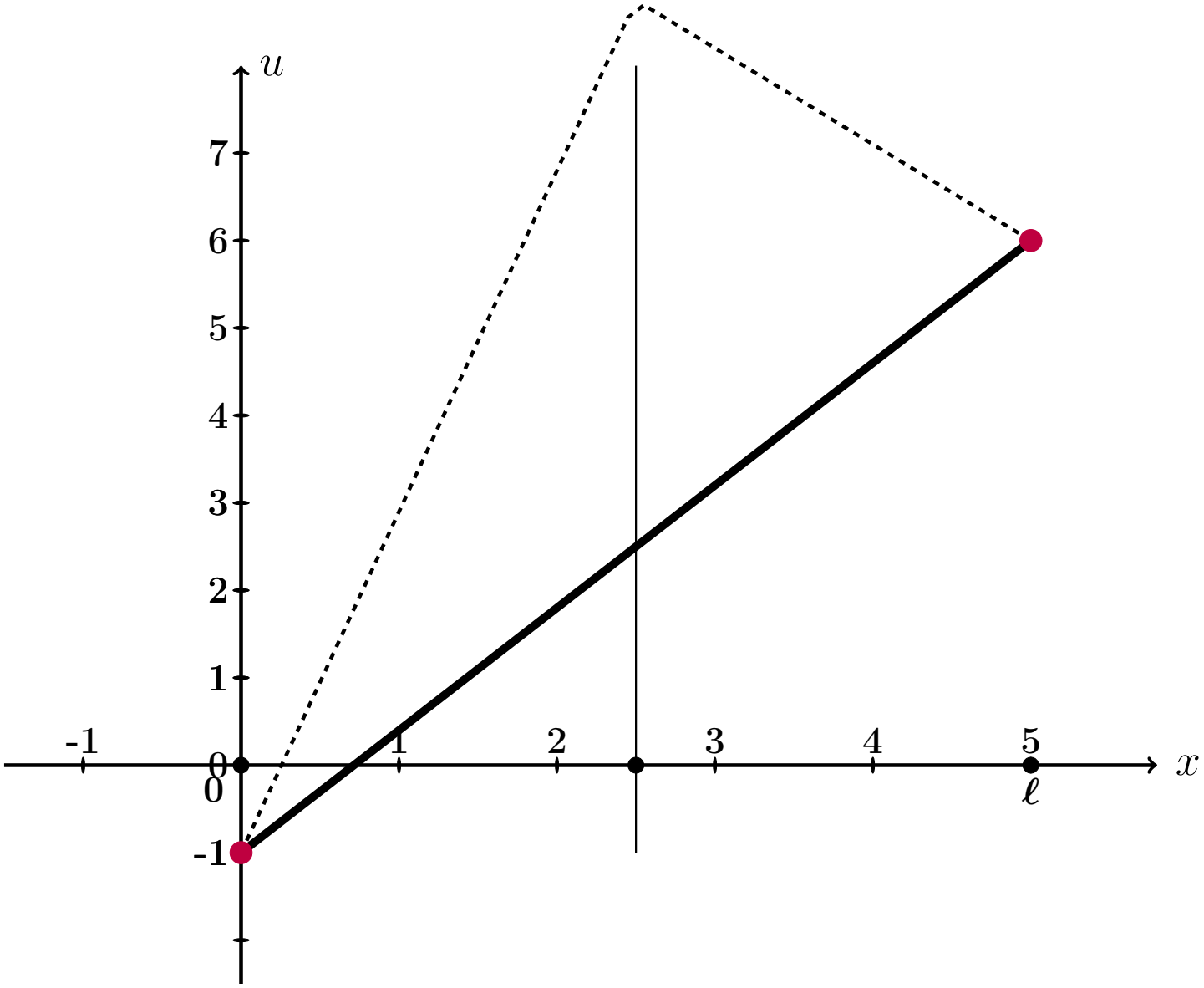


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (3.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (3.3).

Выборочная проверка вариант 3 задача 9 (по формулам (3.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 9 (по таблице 3.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 3 задача 9 (по таблице 3.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 4

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 3 \cdot x + 6$.

$$y = 3 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{6}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{6}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{6}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{6}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

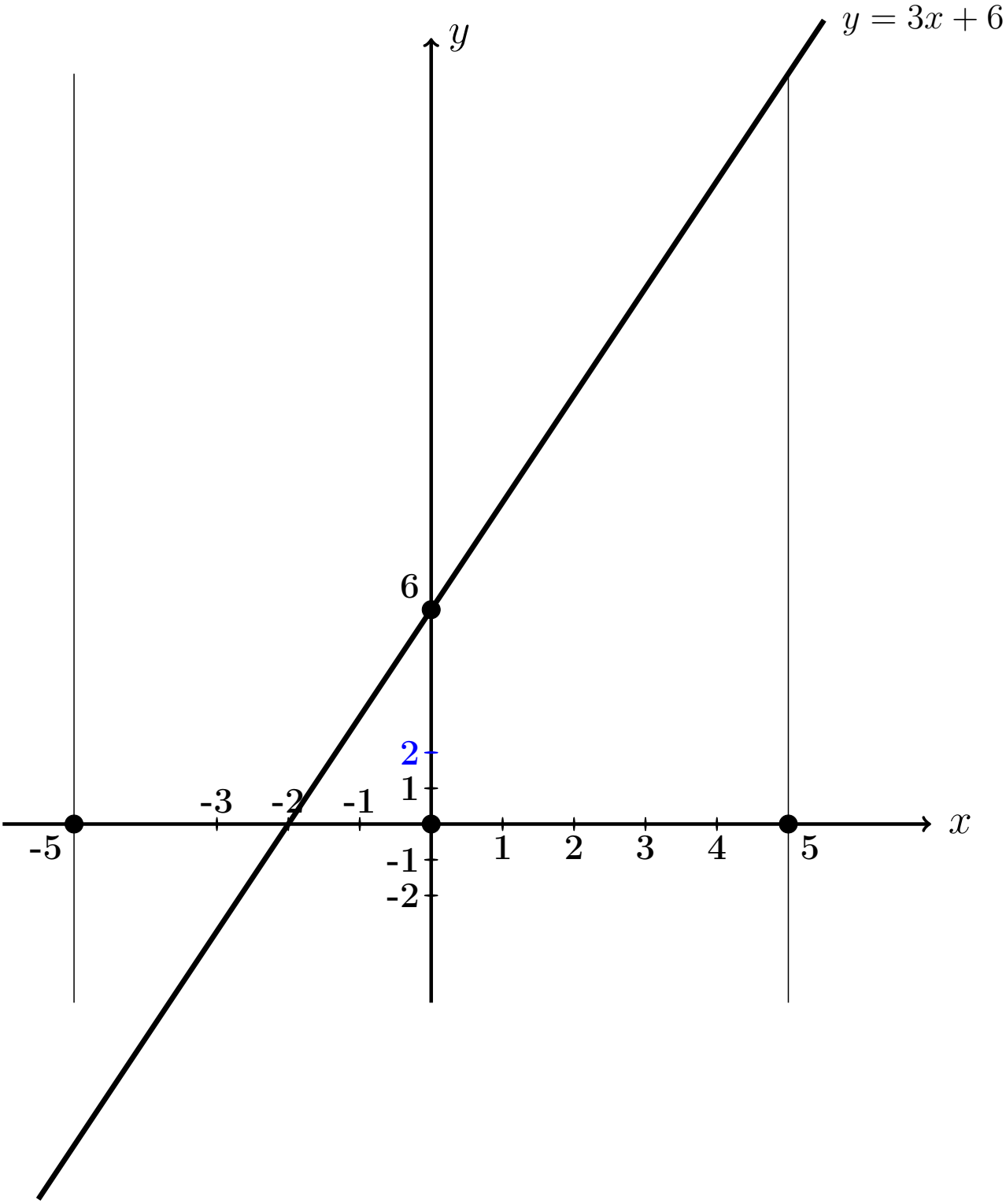
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 4.1 (Табулировка $y=3x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=3x+6$	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 4.1



Выборочная проверка вариант 4 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 1 (по Таблице 4.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x^2 + 12\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=5} = 6\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (4x^2+12\sqrt{y})dx = 4\int x^2\,dx+12\int \sqrt{y}\,dx = \qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad = 6\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^2 + 2t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 2\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^2 + 2t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^2 + 2t)dt = \qquad\qquad = \qquad\qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 2\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

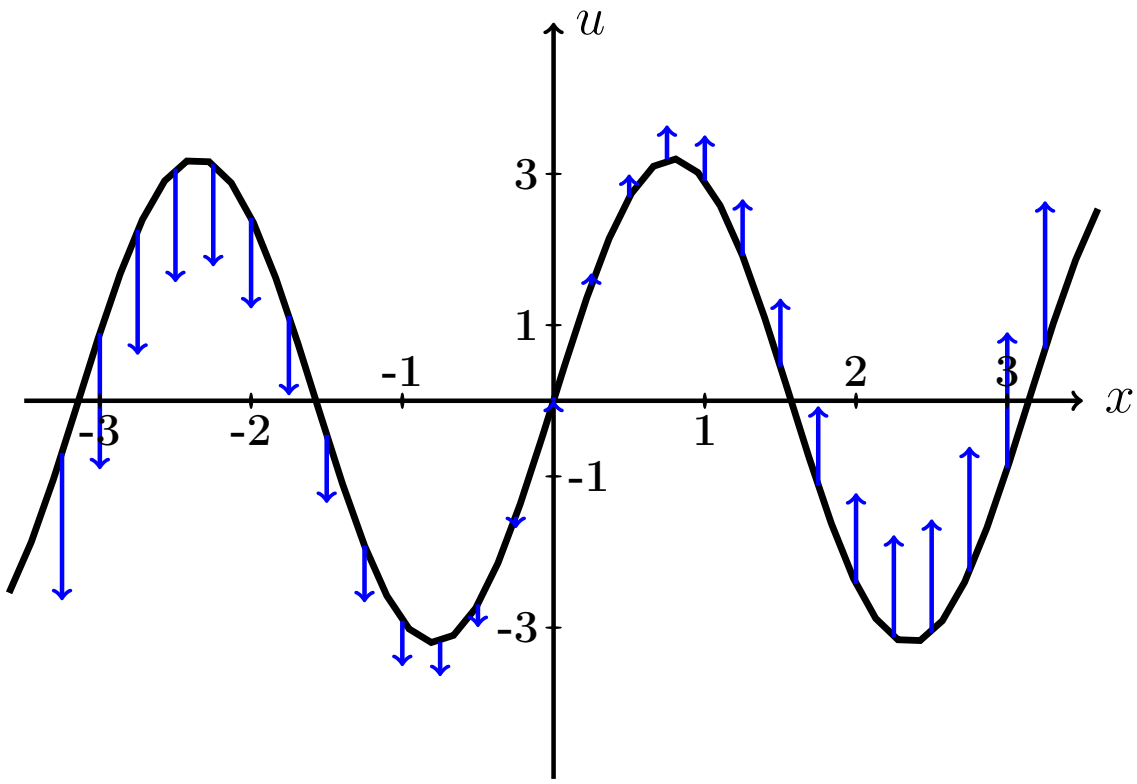


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 4.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 4 задача 4 (по Таблице 4.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 4.2.

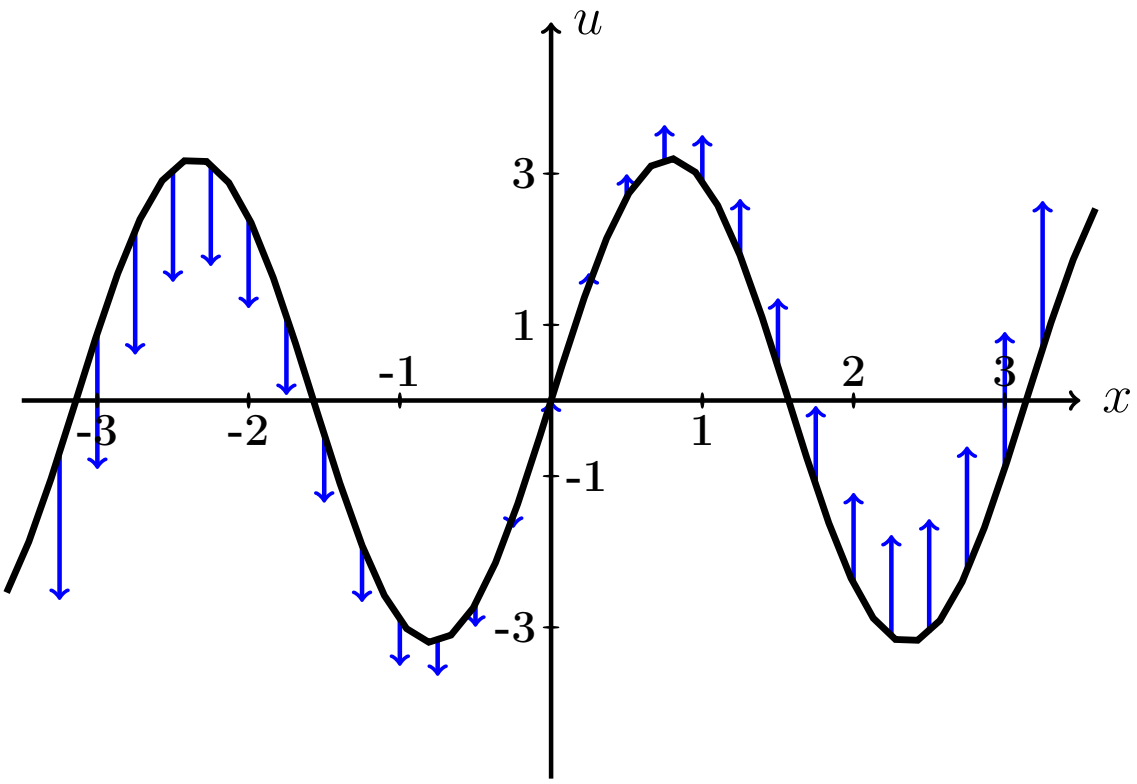


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

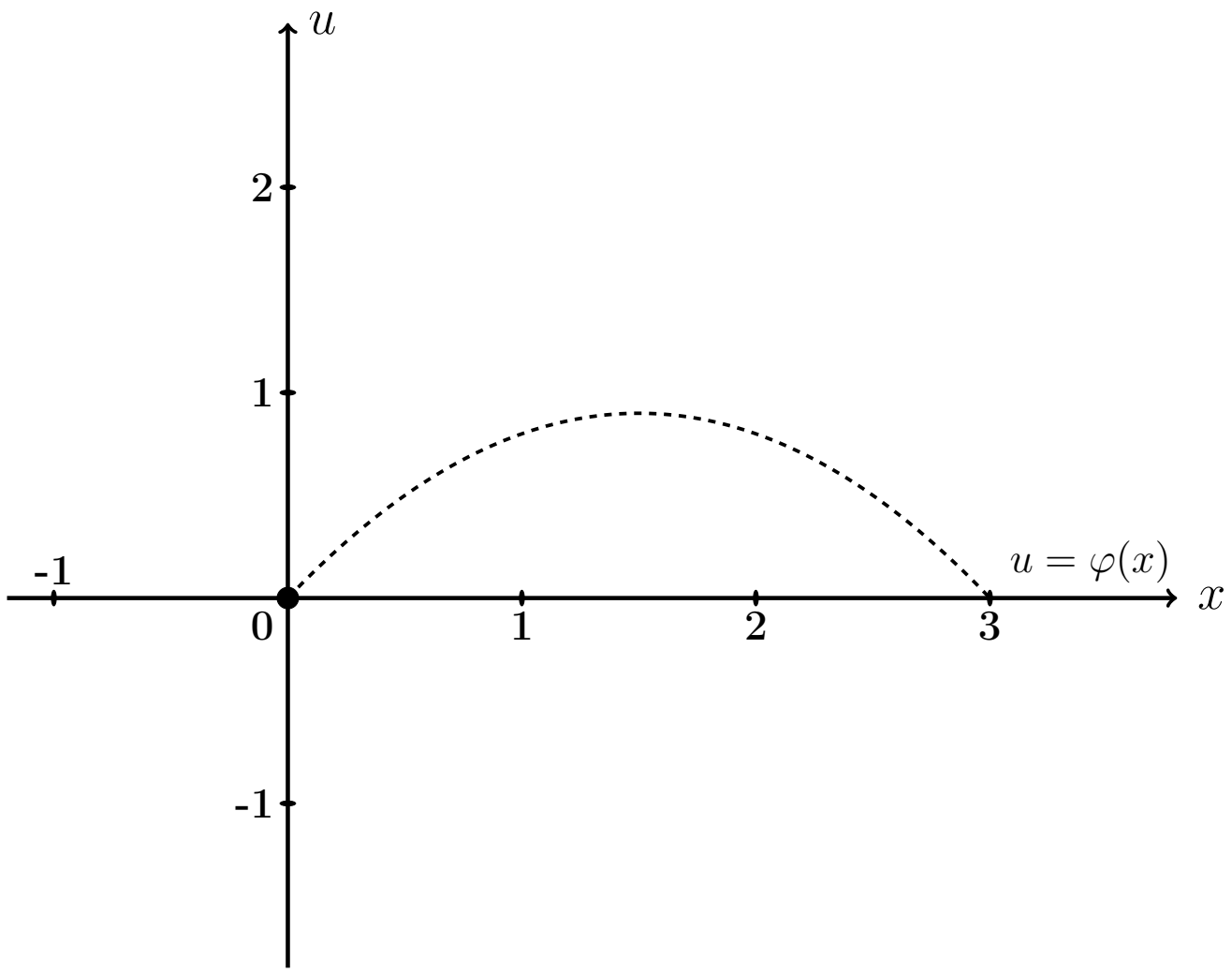


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 4.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 4.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 4.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 4.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 4 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 5 (красные клетки таб. 4.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 4.4.

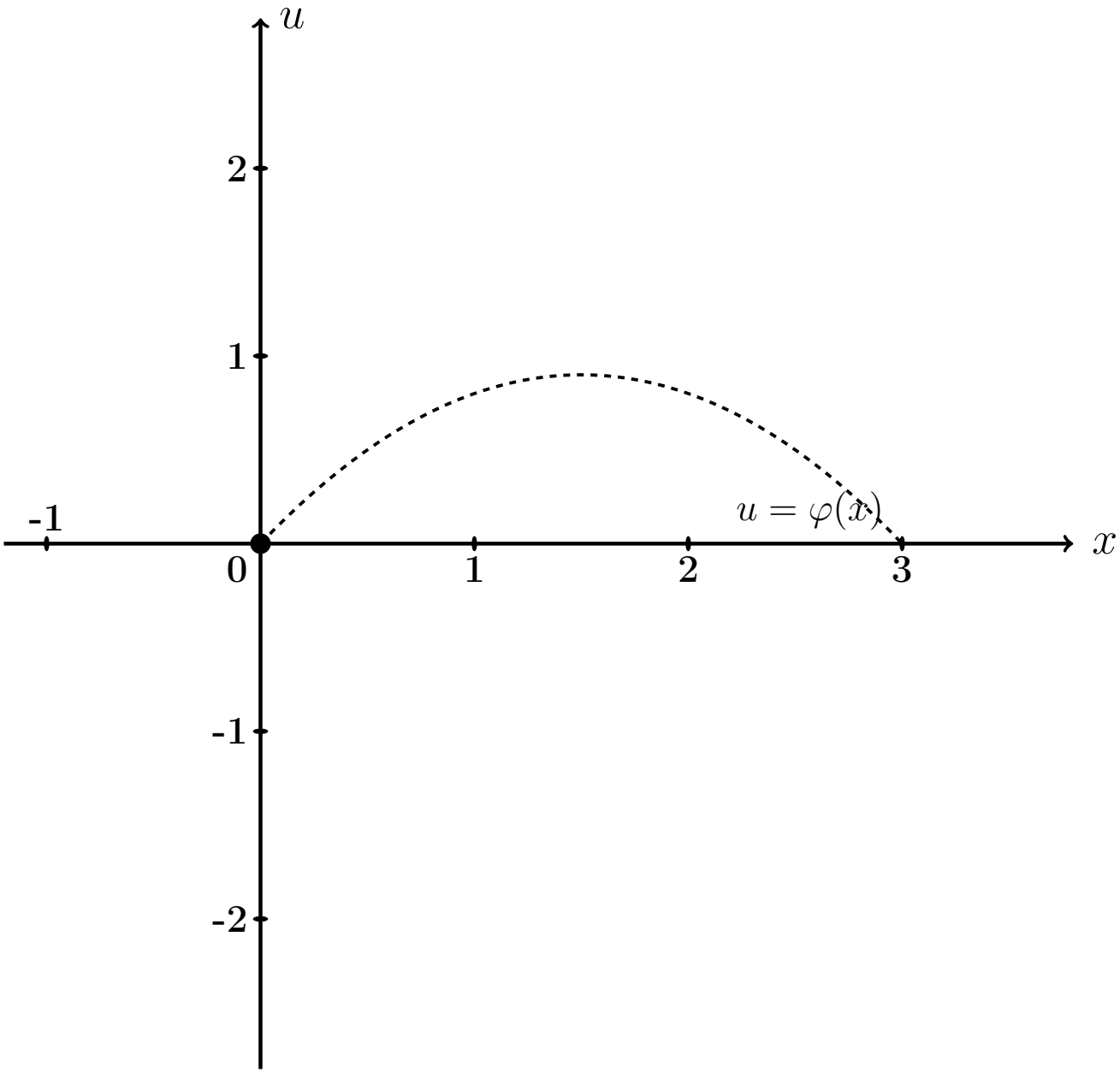


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

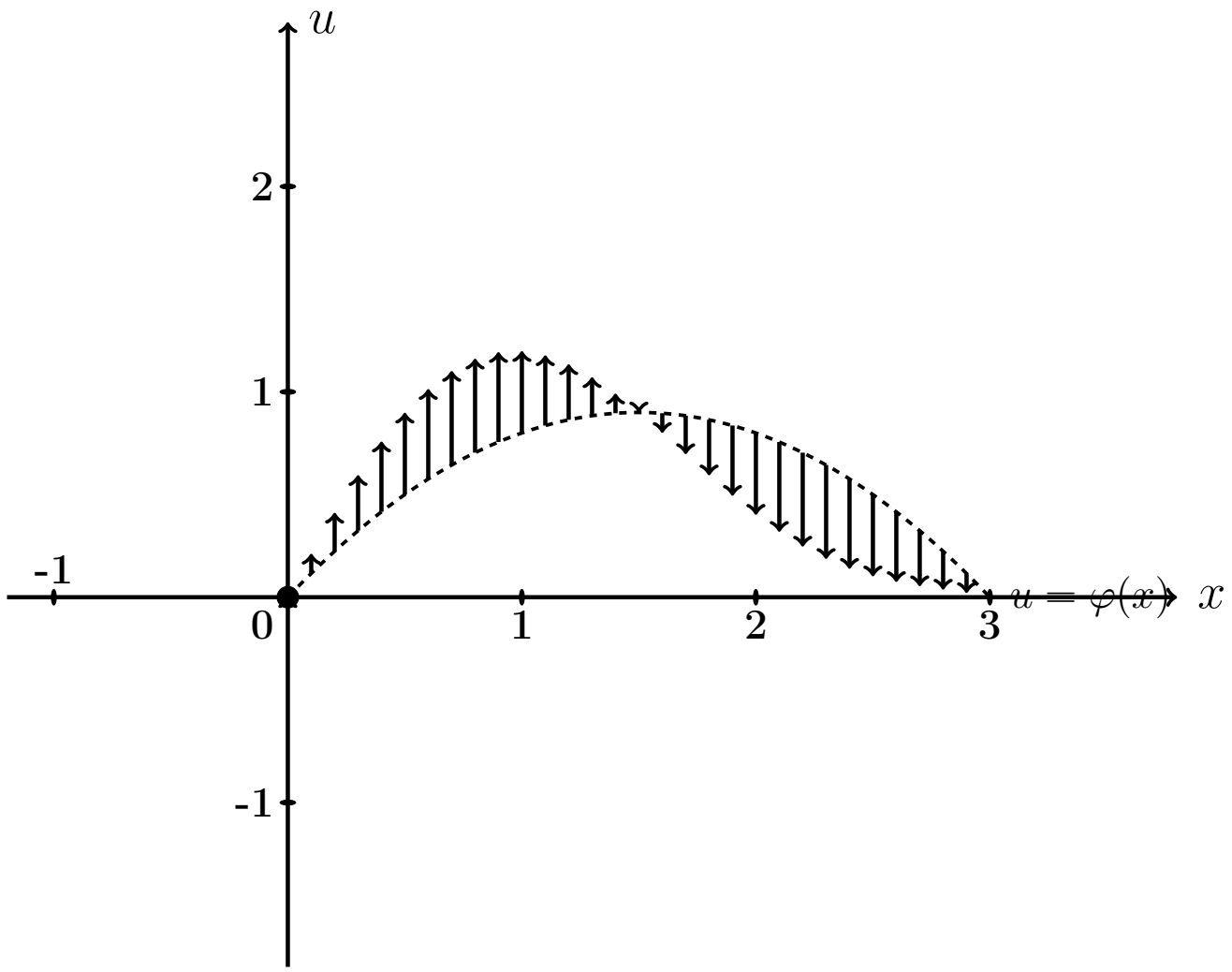


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 4.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.3\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.31$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 4.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 4.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 4.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 4 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 6 (красные клетки Таблицы 4.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 4.6.

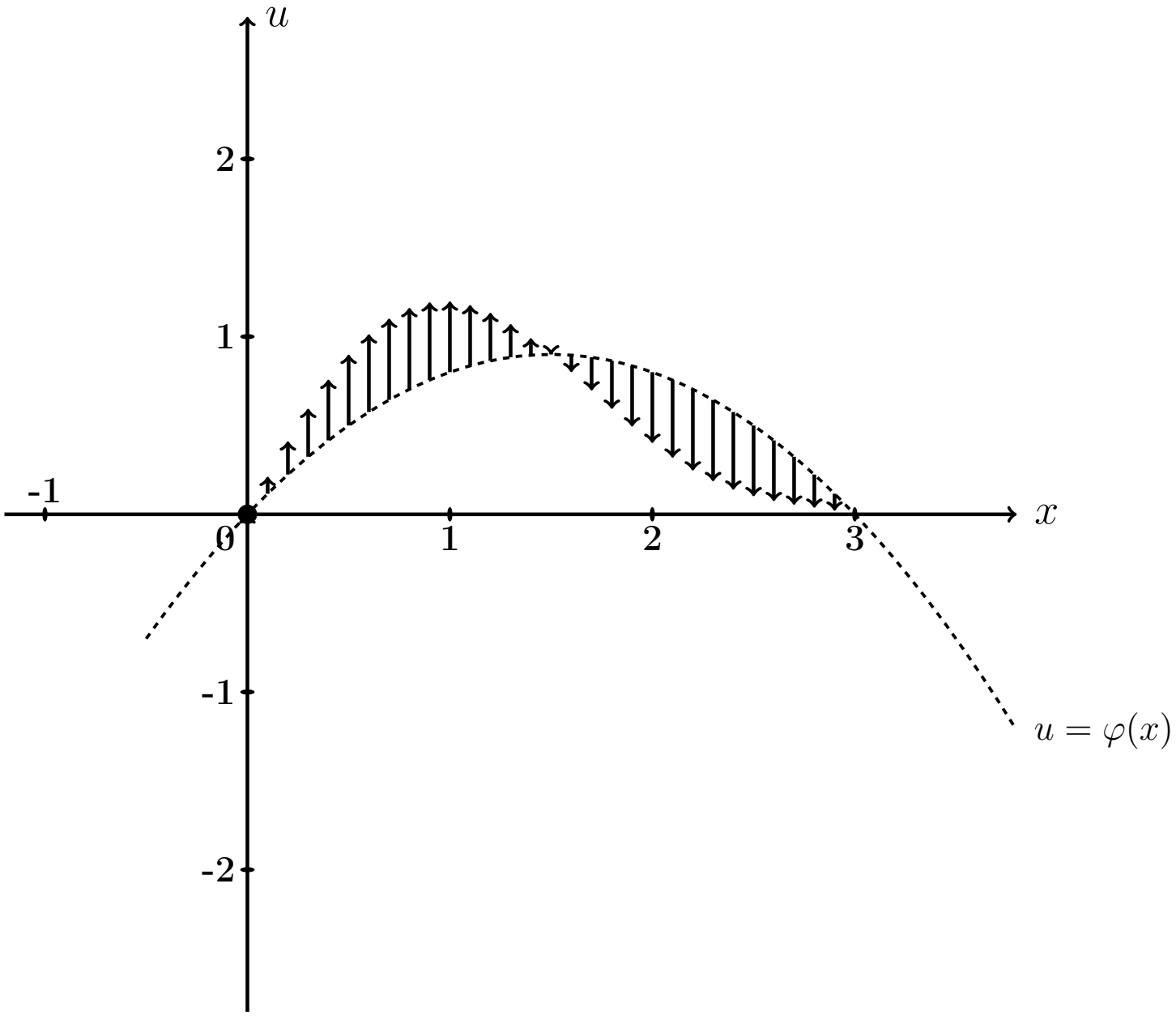


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.00 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 1.00 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{4.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{4.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (4.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{4.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (4.2), (4.3). Затабулировать решение уравнения (4.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (4.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (4.2), (4.3). Затабулировать решение уравнения (4.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (4.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 4.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (4.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{4.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (4.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (4.4) при граничных условиях (4.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{4.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{4.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (4.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (4.9). Следовательно, по формуле (4.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Шаг 6.

Таблица 4.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 4.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (4.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 4.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 4.9

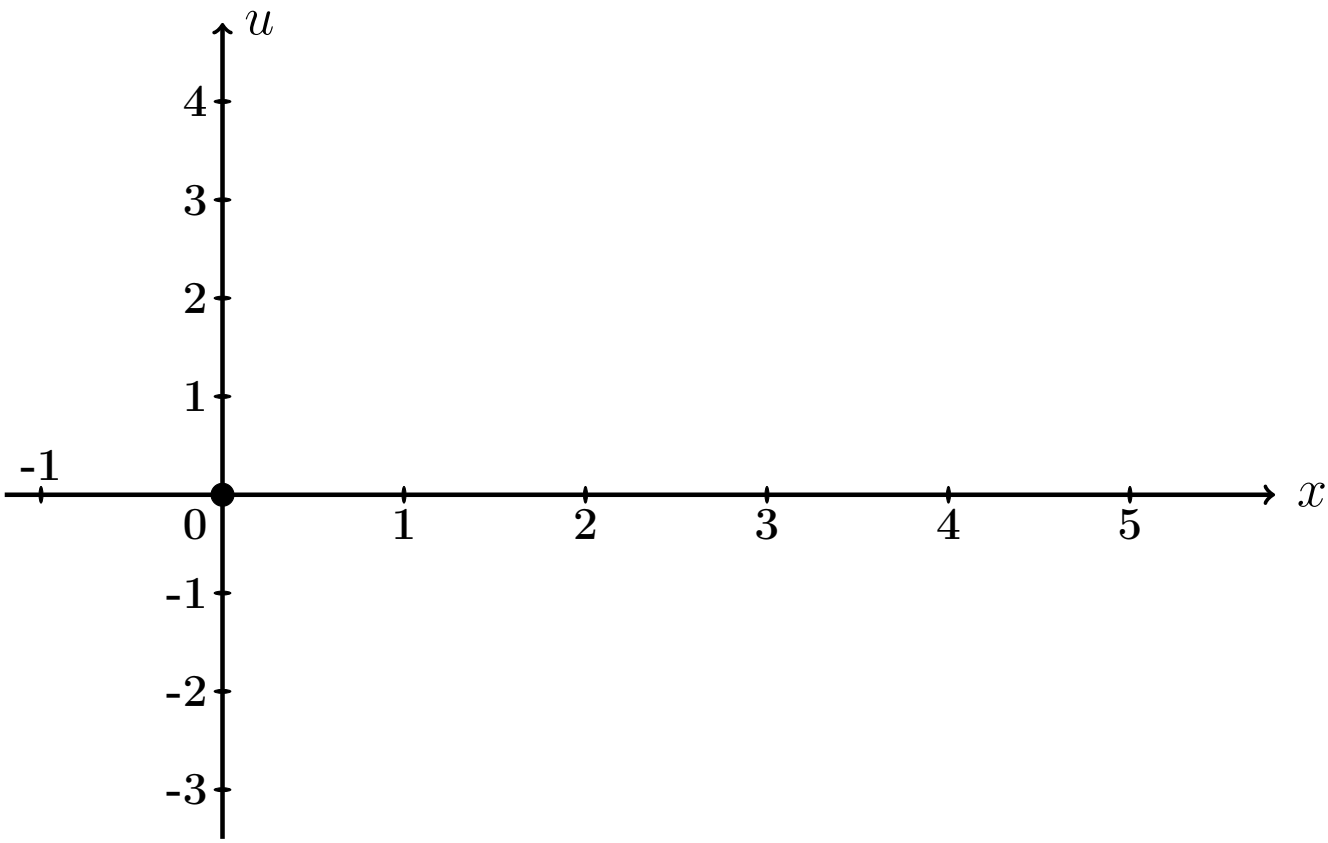


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 4 задача 7 (по Таб. 4.7, 4.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 4 задача 7 (по таблице 4.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (4.6) и (4.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (4.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (4.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (4.9). Следовательно, по формуле (4.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (4.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (4.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 4.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (4.5),

$C_1' =$ по формуле (4.12)

и $C_3 =$ по таблице 4.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 4.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2	1,5	1	0,5	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

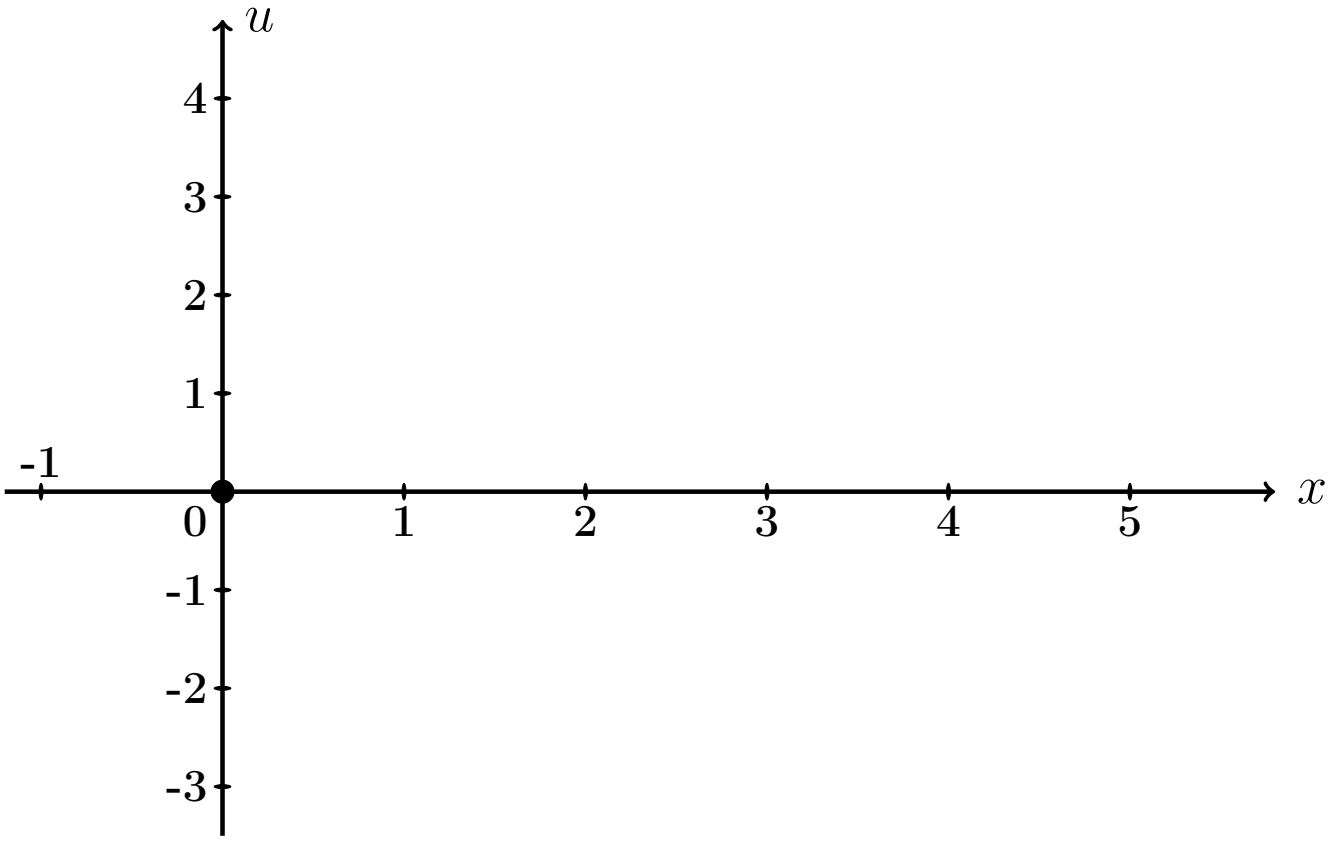


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 4 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (4.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 4 задача 7 (по таблице 4.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{4.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (4.1). Затабулировать решение уравнения (4.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

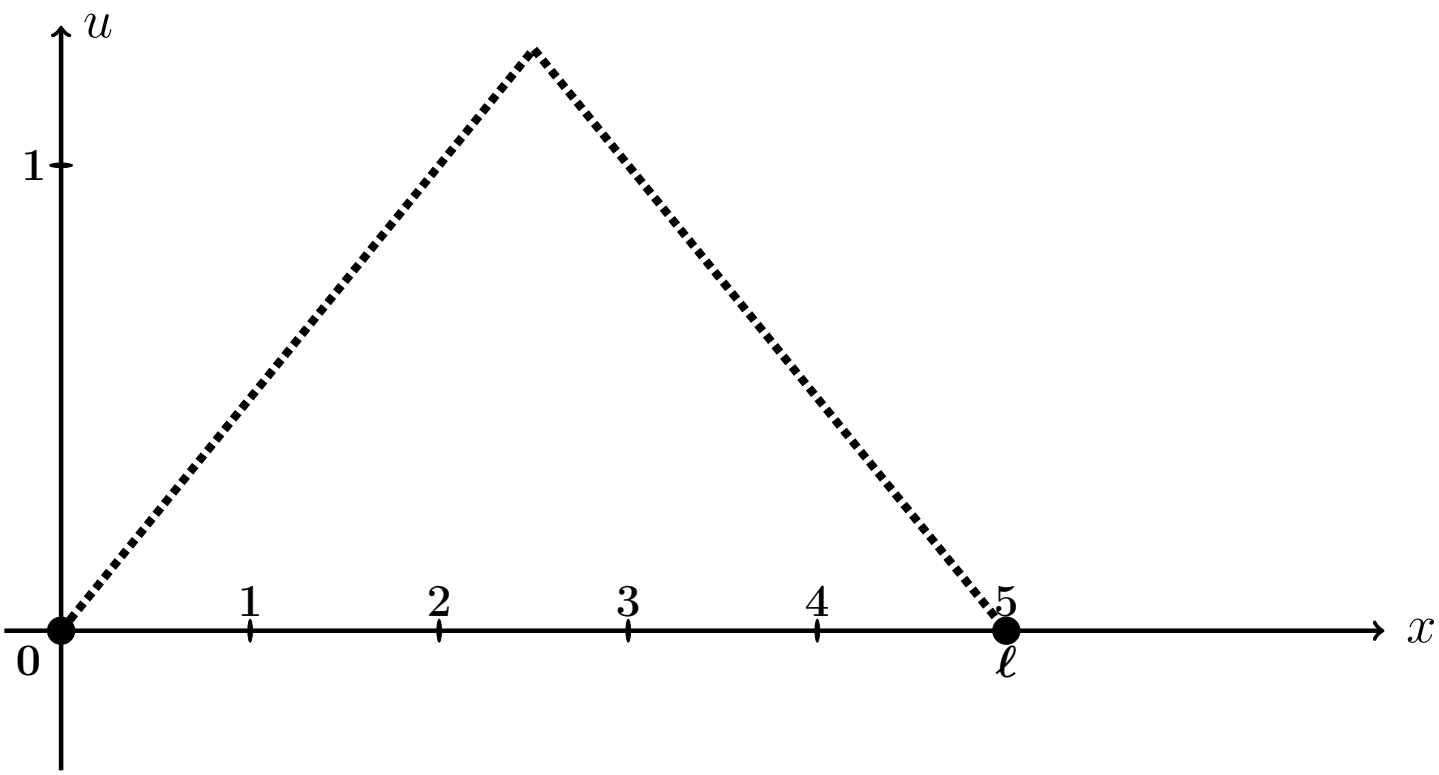


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (4.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где $\ell = 5$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 4.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 4.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 4.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 4.12, 4.13) формулы (4.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 4.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 4.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 4.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 4.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

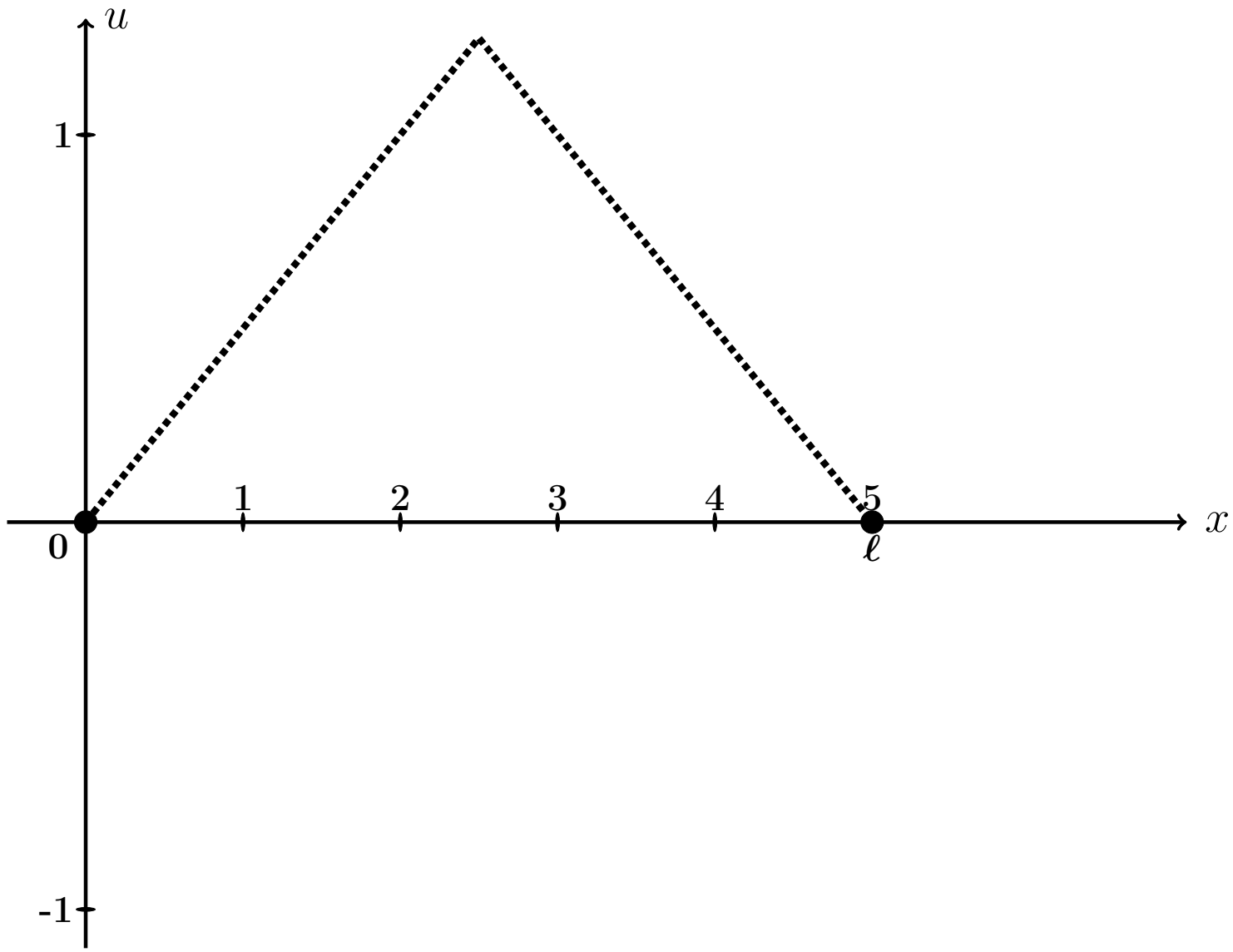


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (4.2).

Выборочная проверка вариант 4 задача 8 (по таблице 4.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 8 (по таблице 4.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 8 (по таблице 4.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 8 (по таблице 4.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.00)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.00)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(6.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{4.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{4.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

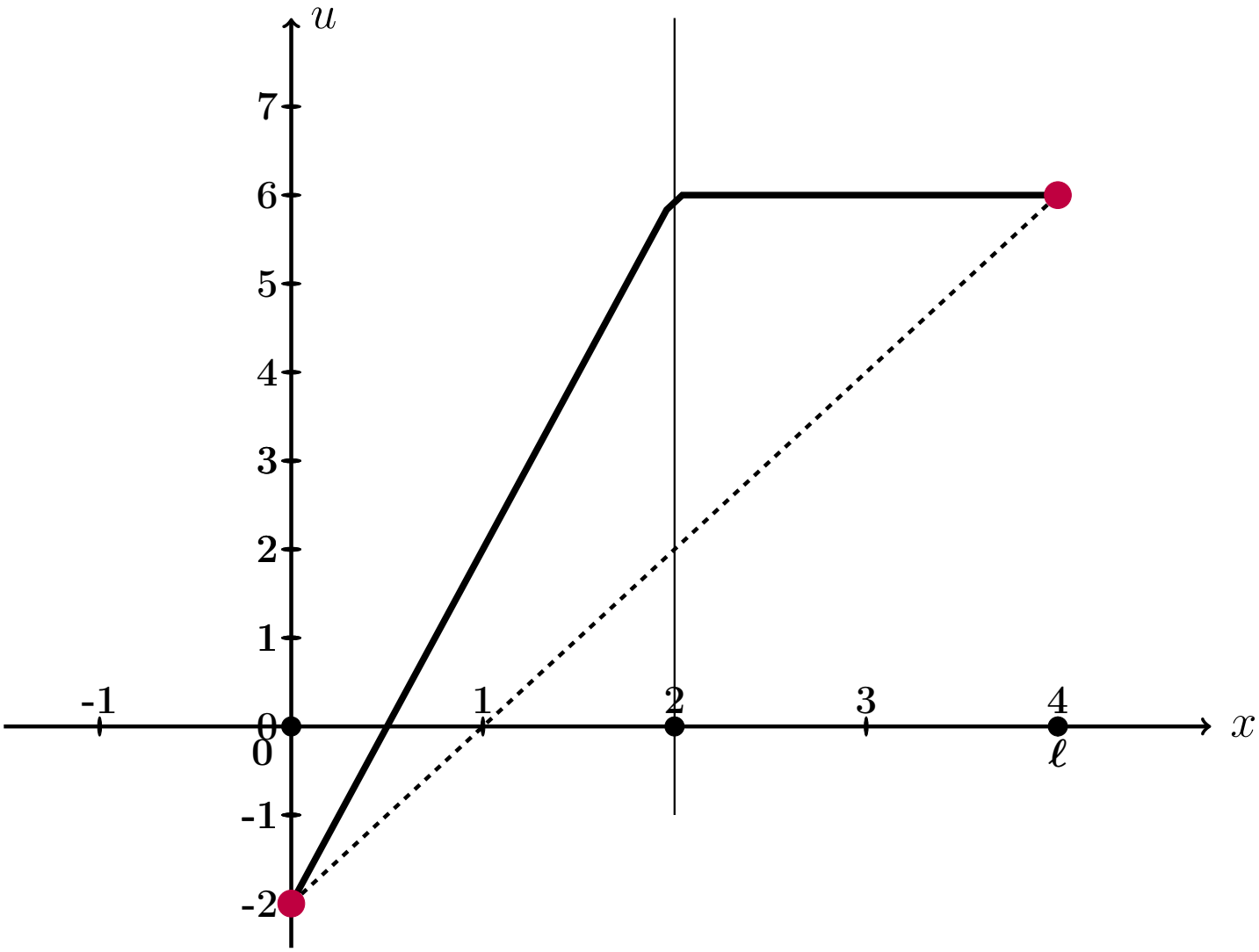


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (4.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (4.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (4.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{4.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)}\cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)}\cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{4.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (4.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (4.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{4.7}$$

Таблица 4.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (4.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (4.1) с начальным условием (4.2) и граничными условиями (4.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (4.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_4 = 6.0$ — значения граничных условий (4.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 4.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 4.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}4$	1,2	2,8	4,4	6	6	6	6	6	6
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 4.16.

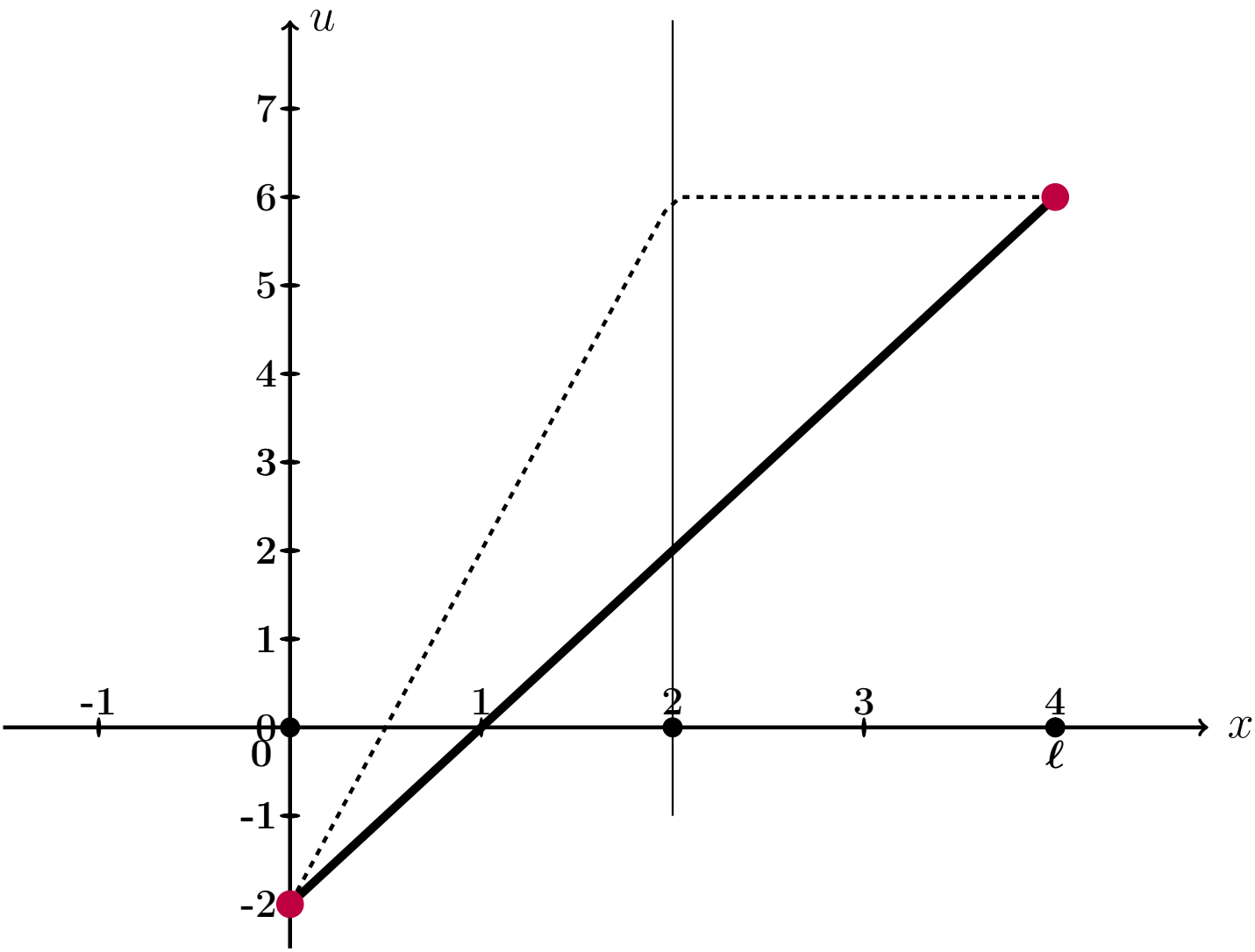


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (4.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (4.3).

Выборочная проверка вариант 4 задача 9 (по формулам (4.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 9 (по таблице 4.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 4 задача 9 (по таблице 4.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 5

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 4 \cdot x + 5$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 4 \cdot x + 5$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 4 \cdot x + 5$.

$$y = 4 \cdot x + 5 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+5)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{5}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{5}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \boxed{\square},$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+5)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{5}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{5}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$4\cdot x+5=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

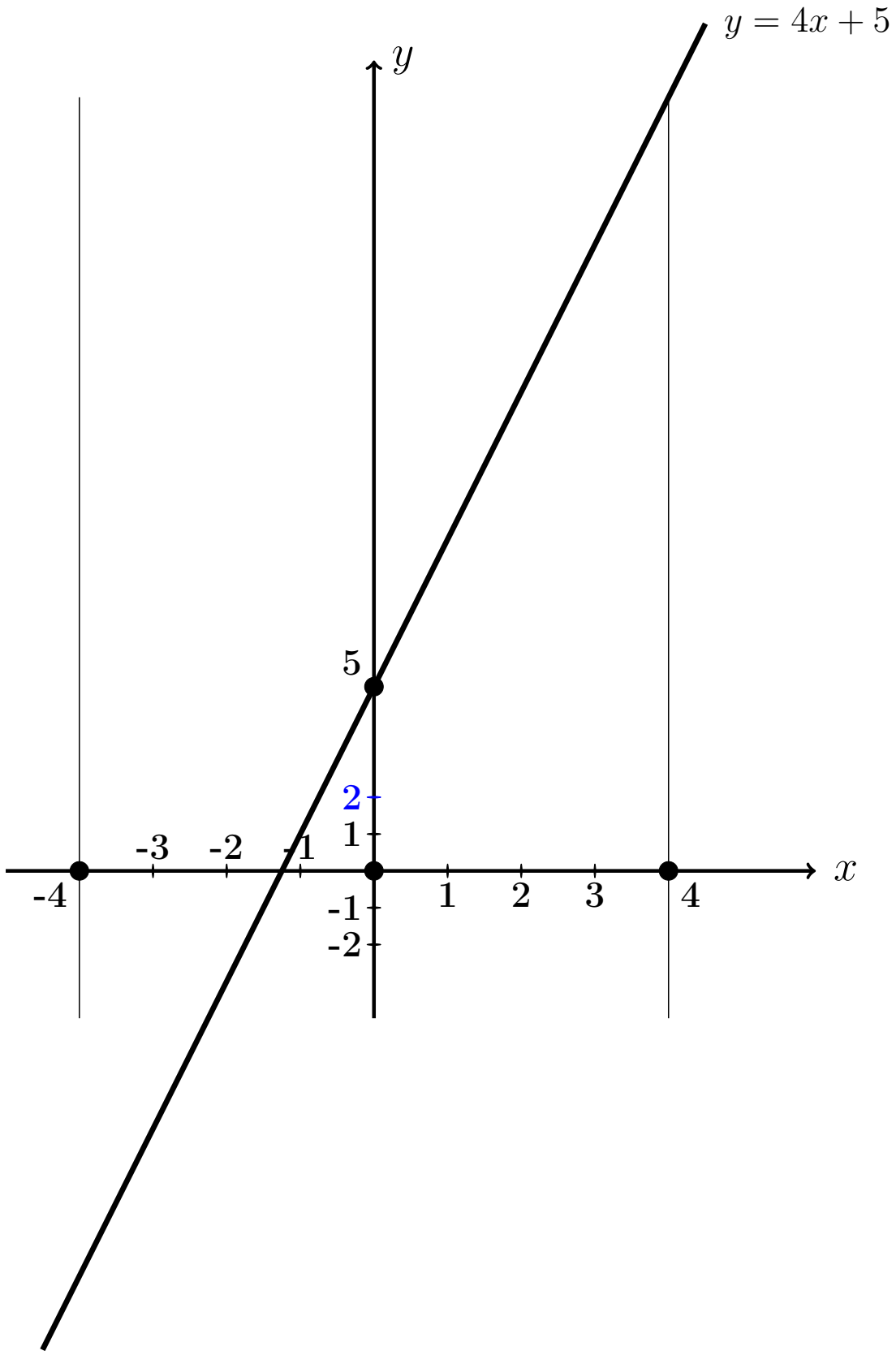
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 5.1 (Табулировка $y=4x+5$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=4x+5$	-11	-7	-3	1	5	9	13	17	21
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 5.1



Выборочная проверка вариант 5 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 1 (по Таблице 5.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sin x + 18y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=2} = 9\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (6\sin x + 18y^3)dx = 6\int \sin x\,dx + 18\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 9\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x + 3t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x + 3t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x + 3t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 5 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

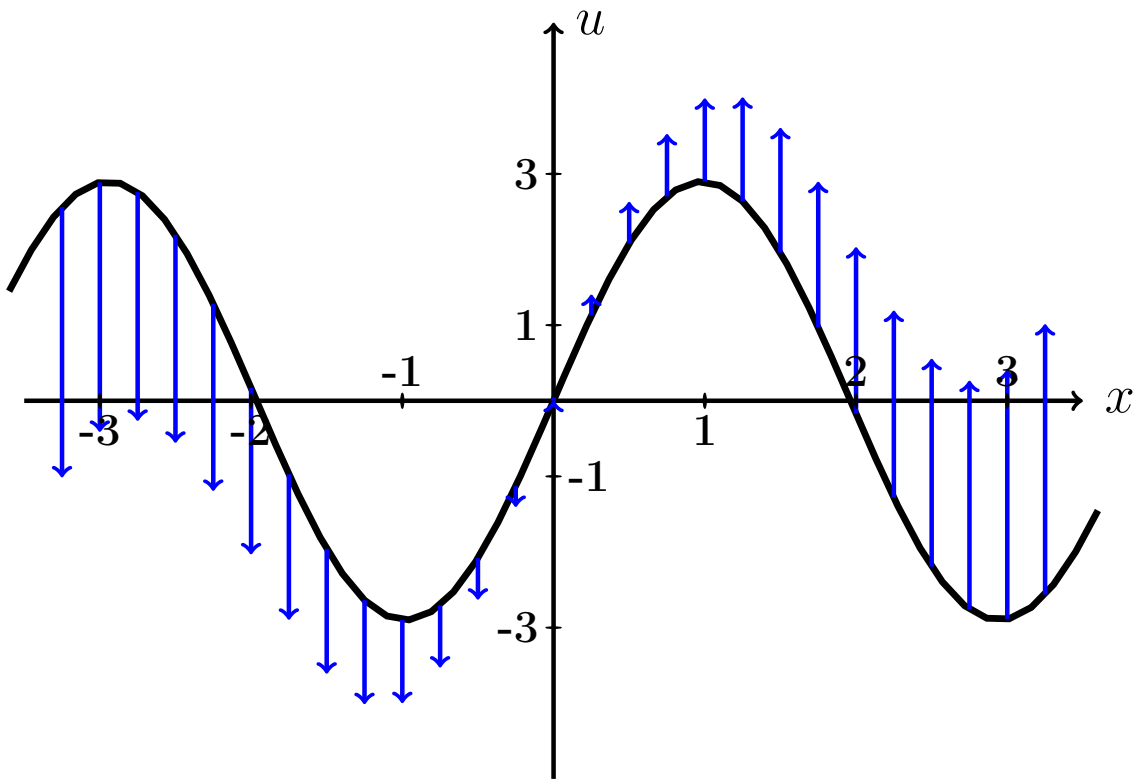


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 5.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 5 задача 4 (по Таблице 5.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 5.2.

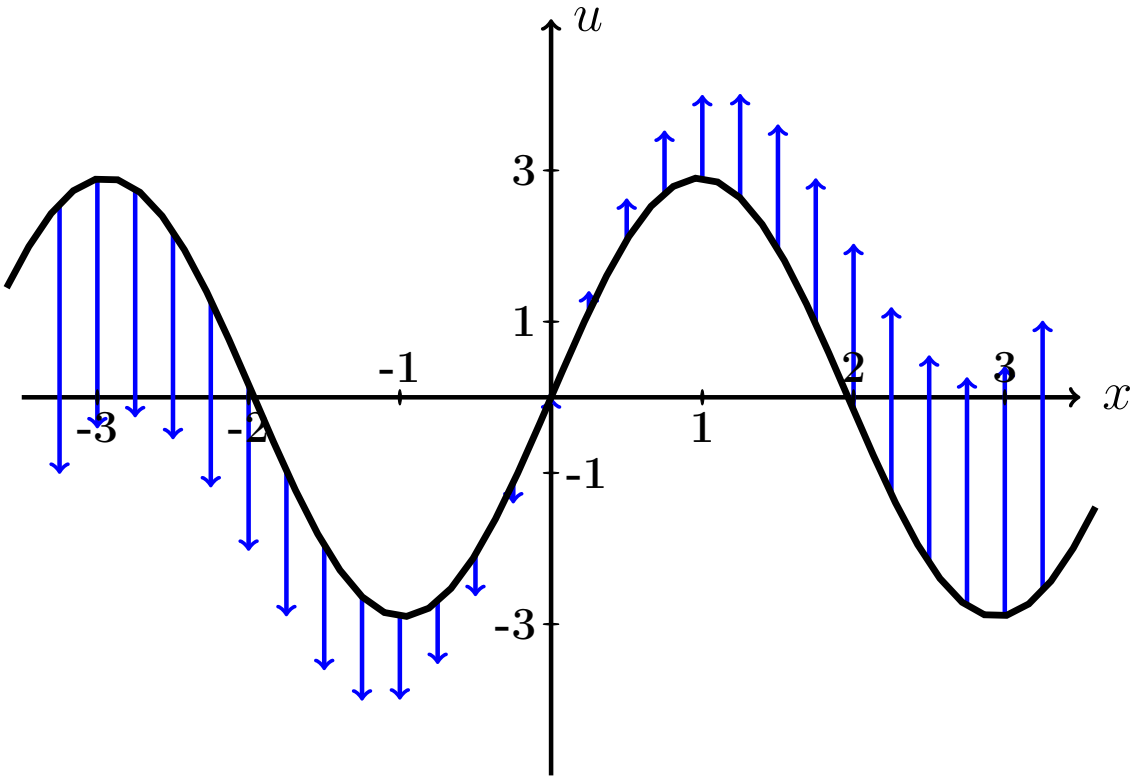


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

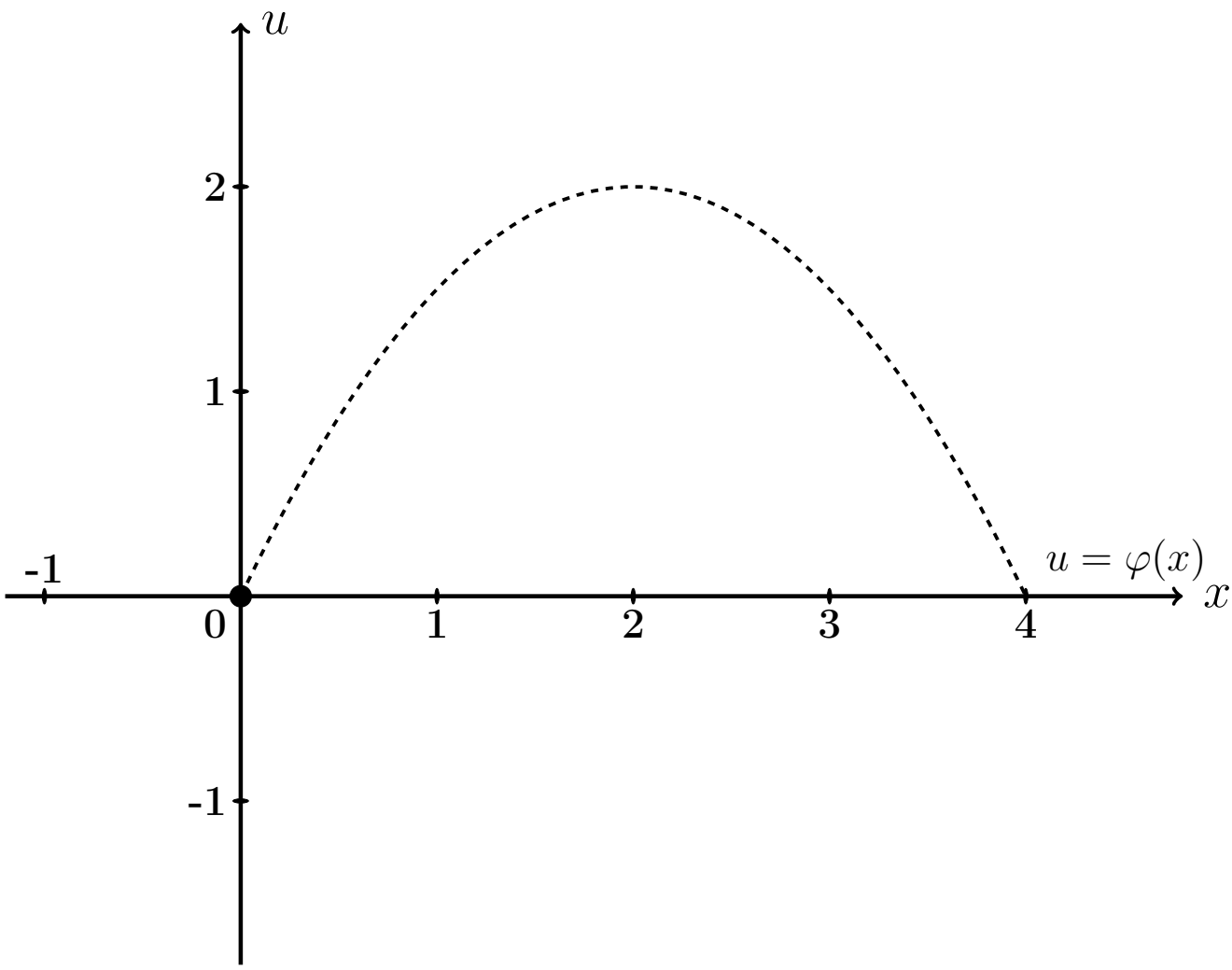


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 5.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 5.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 5.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 5.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 5 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 5 (красные клетки таб. 5.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 5.4.

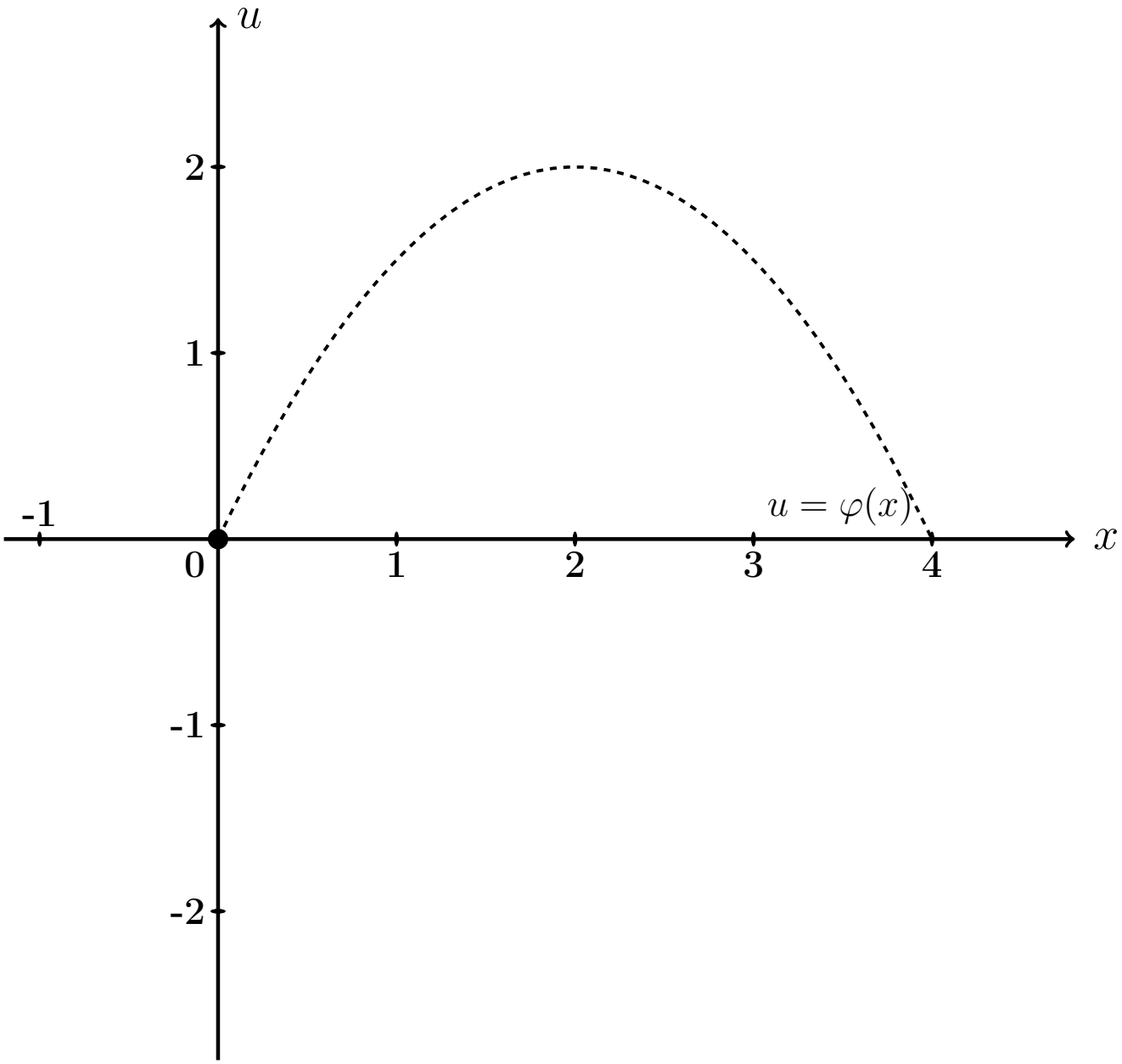


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

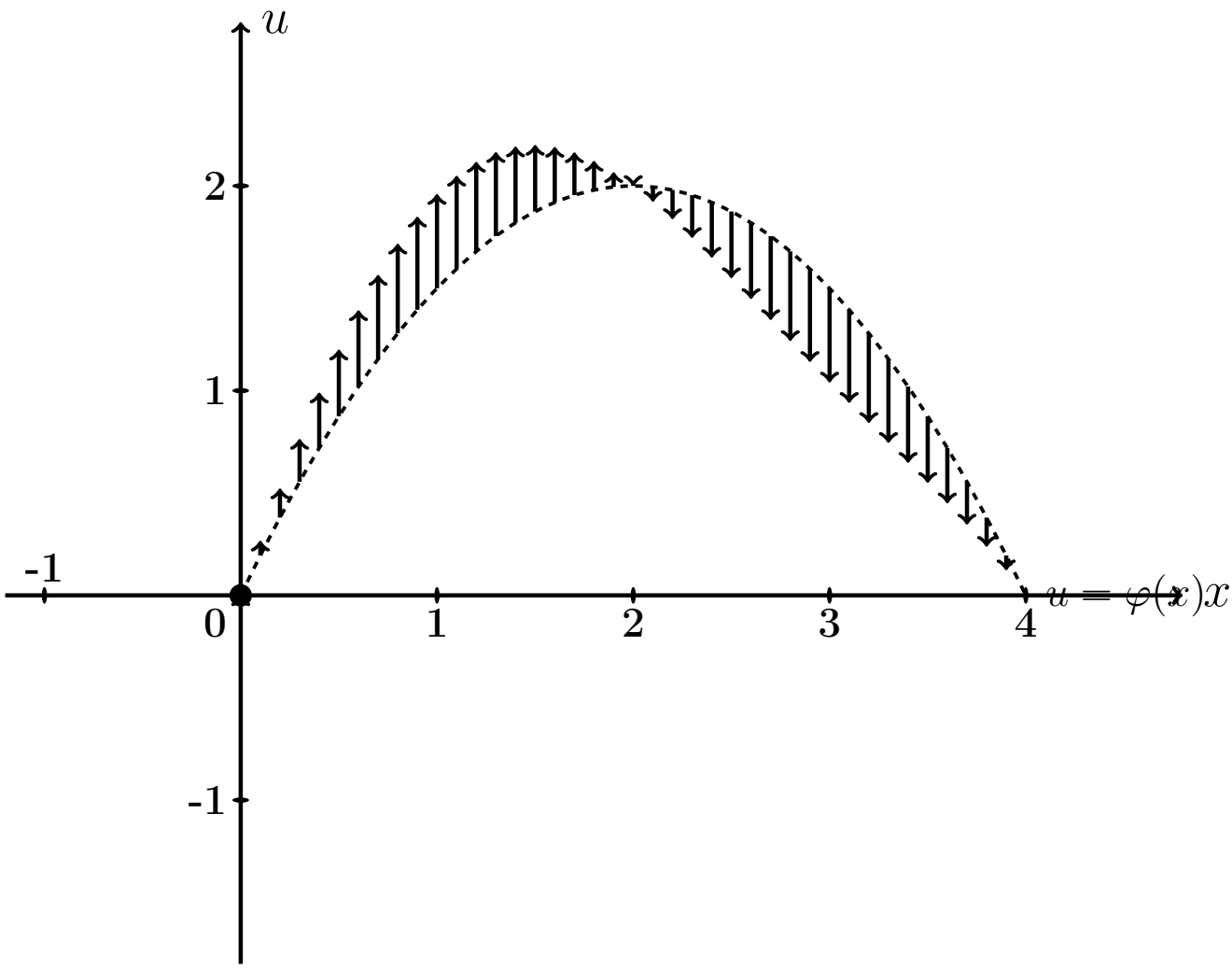


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 5.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.40$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 5.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 5.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 5.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 5 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 6 (красные клетки Таблицы 5.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 5.6.

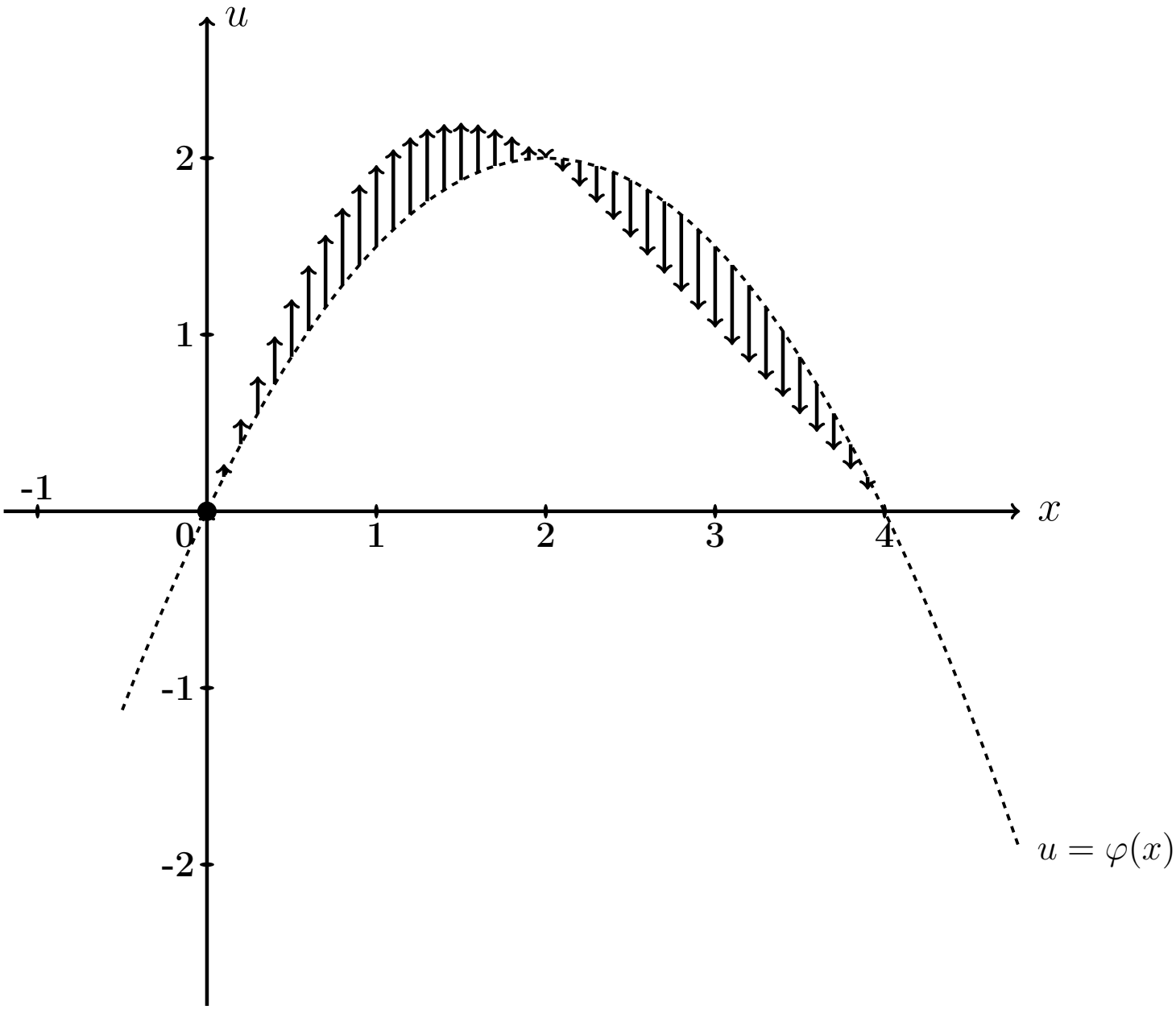


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.40 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 1.40 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{5.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{5.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (5.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{5.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (5.2), (5.3). Затабулировать решение уравнения (5.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (5.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (5.2), (5.3). Затабулировать решение уравнения (5.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (5.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 5.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (5.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{5.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (5.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (5.4) при граничных условиях (5.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{5.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{5.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (5.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (5.9). Следовательно, по формуле (5.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{5.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{5.11}$$

Шаг 6.

Таблица 5.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 5.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (5.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 5.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 5.9

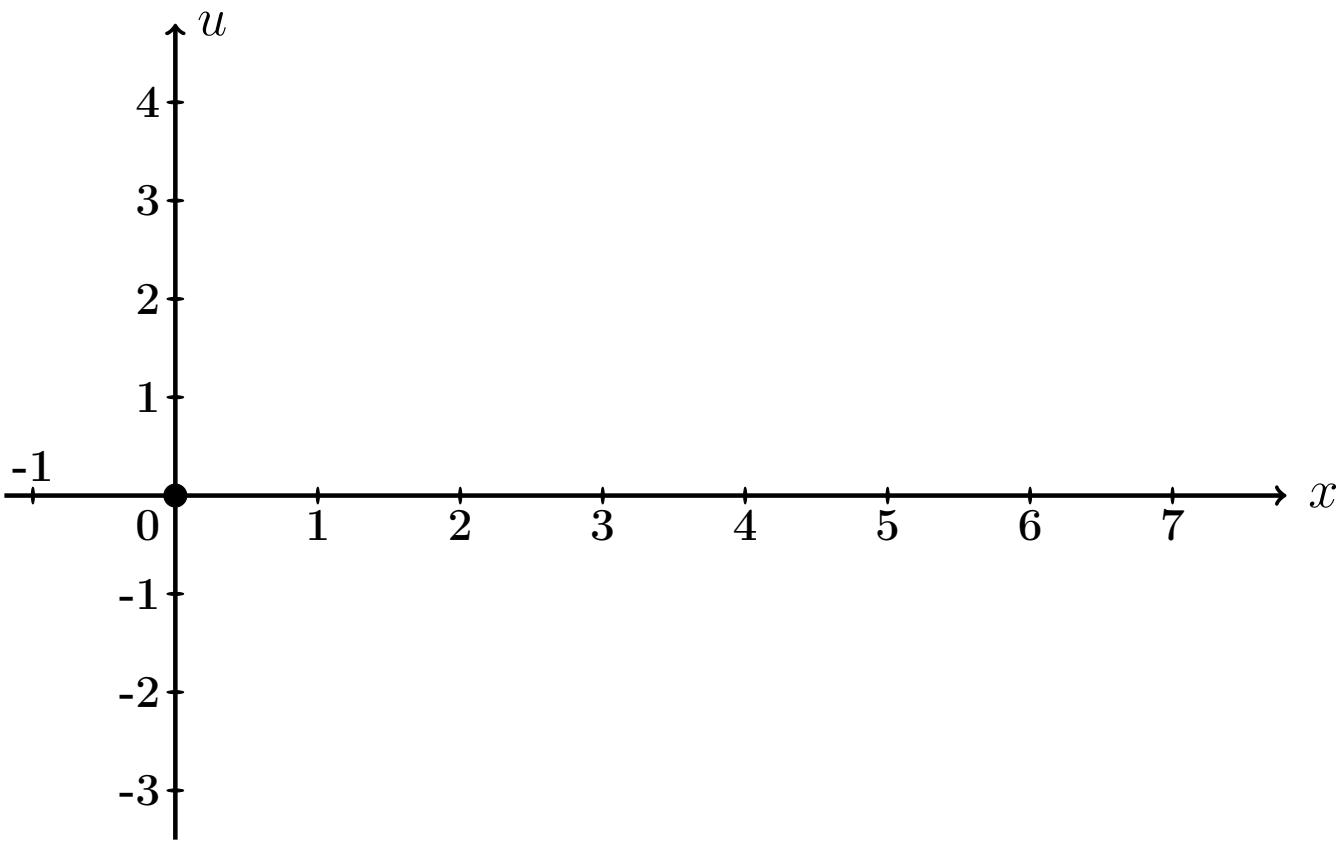


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 5 задача 7 (по Таб. 5.7, 5.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 5 задача 7 (по таблице 5.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (5.6) и (5.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (5.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (5.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (5.9). Следовательно, по формуле (5.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (5.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (5.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 5.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (5.5),

$C_1' =$ по формуле (5.12)

и $C_3 =$ по таблице 5.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 5.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,98	1,96	2,94	3,92	4,9	3,92	2,94	1,96	0,98	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

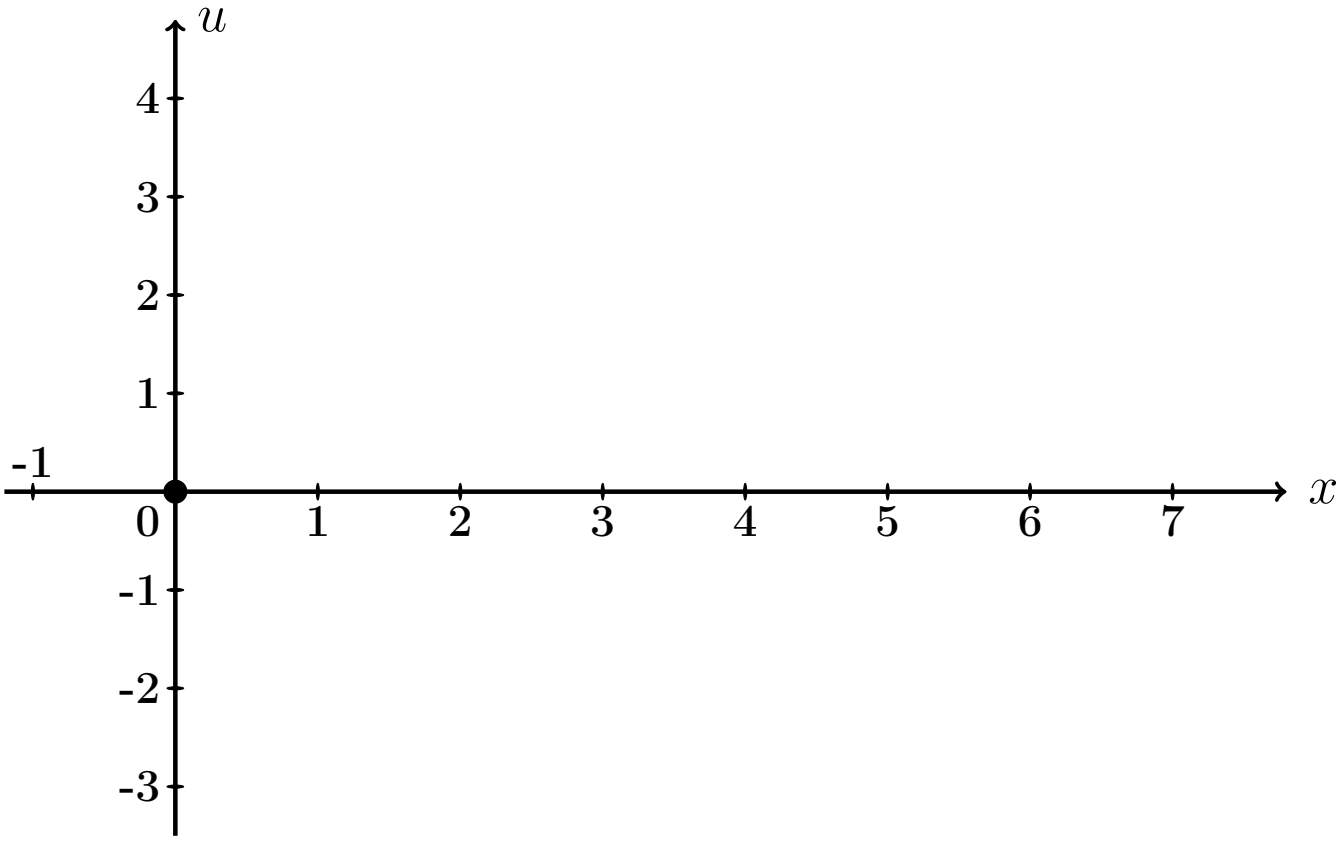


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 5 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (5.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 5 задача 7 (по таблице 5.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{5.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (5.1). Затабулировать решение уравнения (5.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

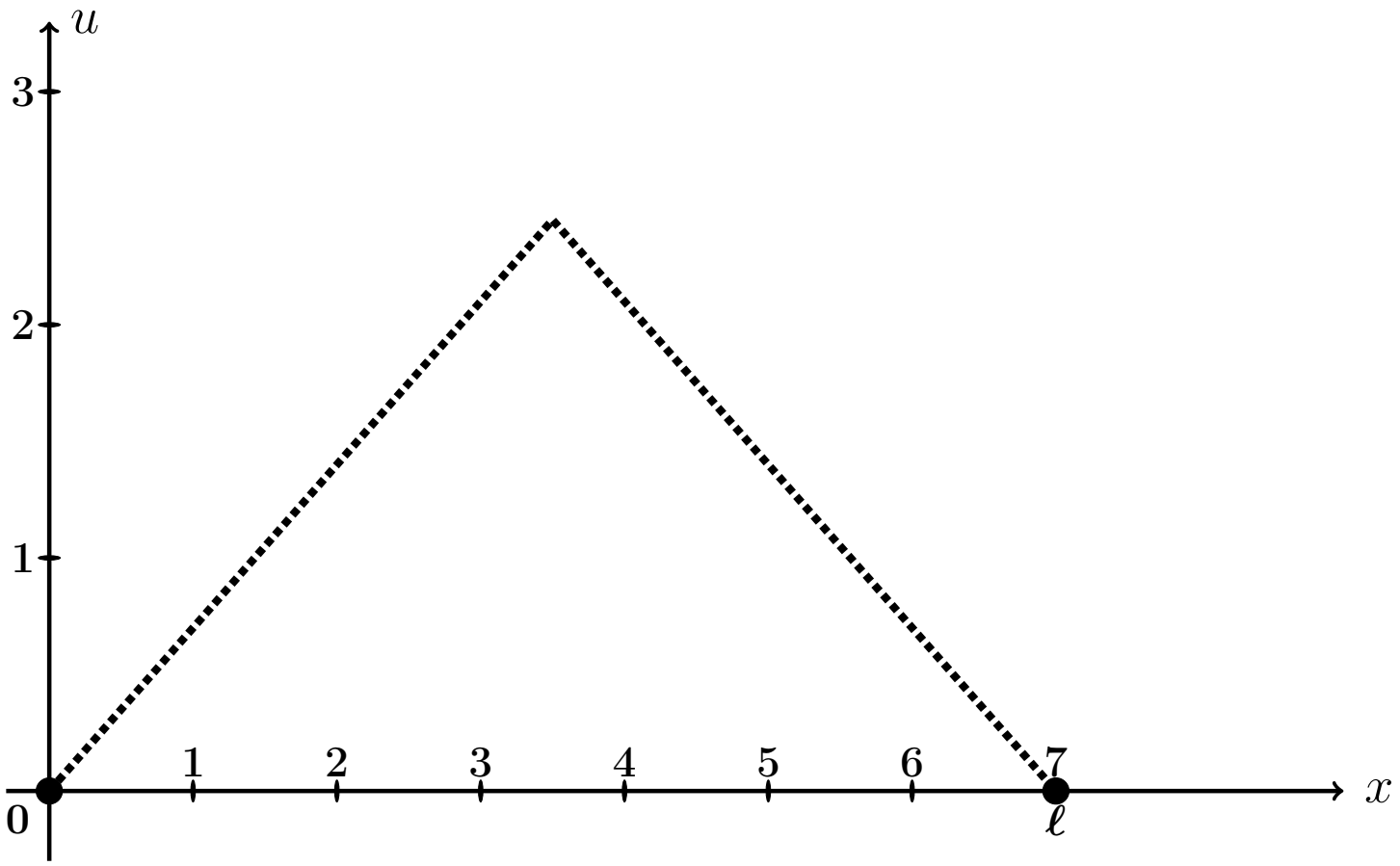


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (5.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7}\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где $\ell = 7$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 5.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 5.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 5.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 5.12, 5.13) формулы (5.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 5.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 5.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 5.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 5.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

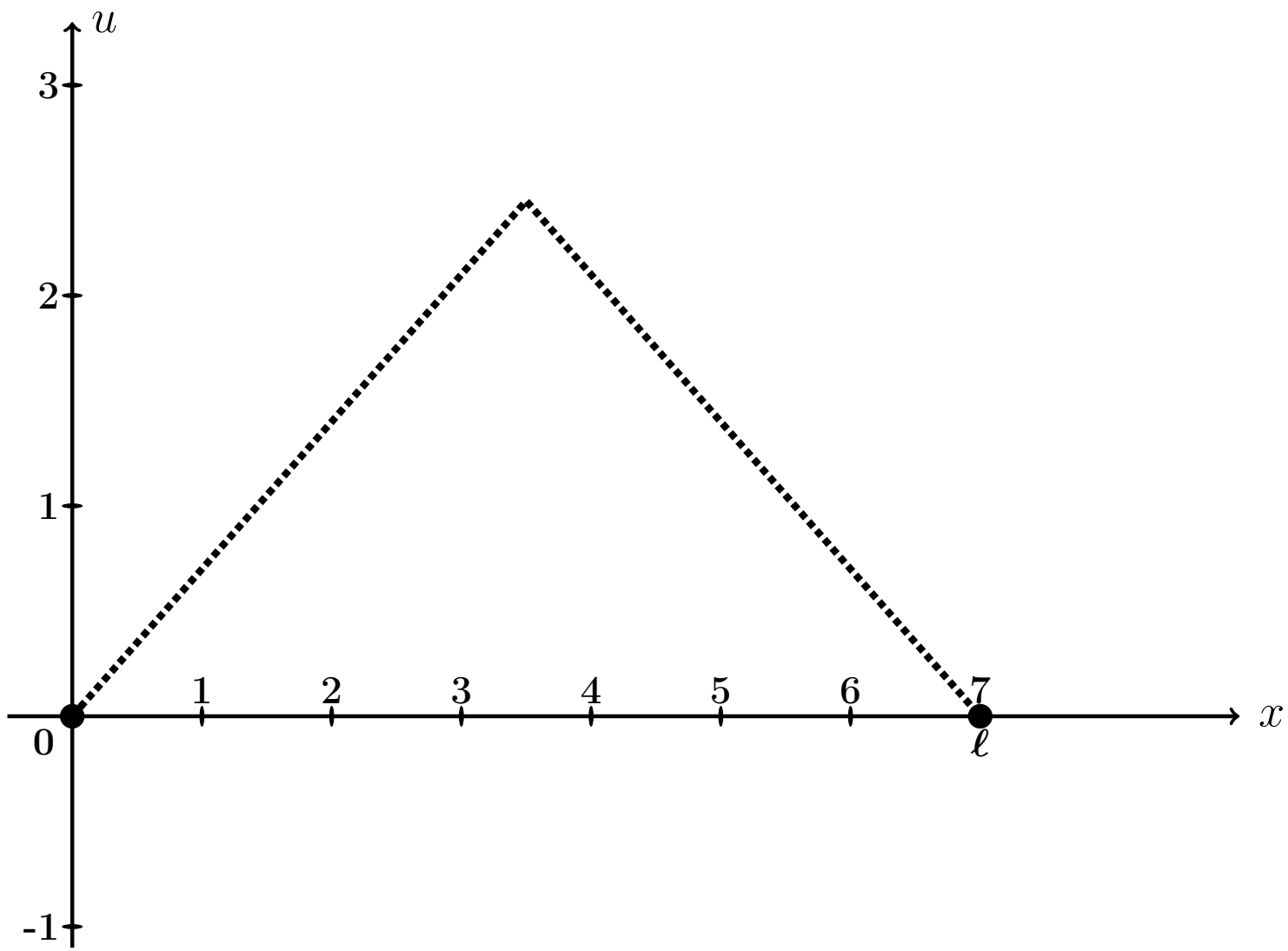


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (5.2).

Выборочная проверка вариант 5 задача 8 (по таблице 5.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 8 (по таблице 5.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 8 (по таблице 5.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 8 (по таблице 5.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.33)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.67)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(16.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{5.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{5.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

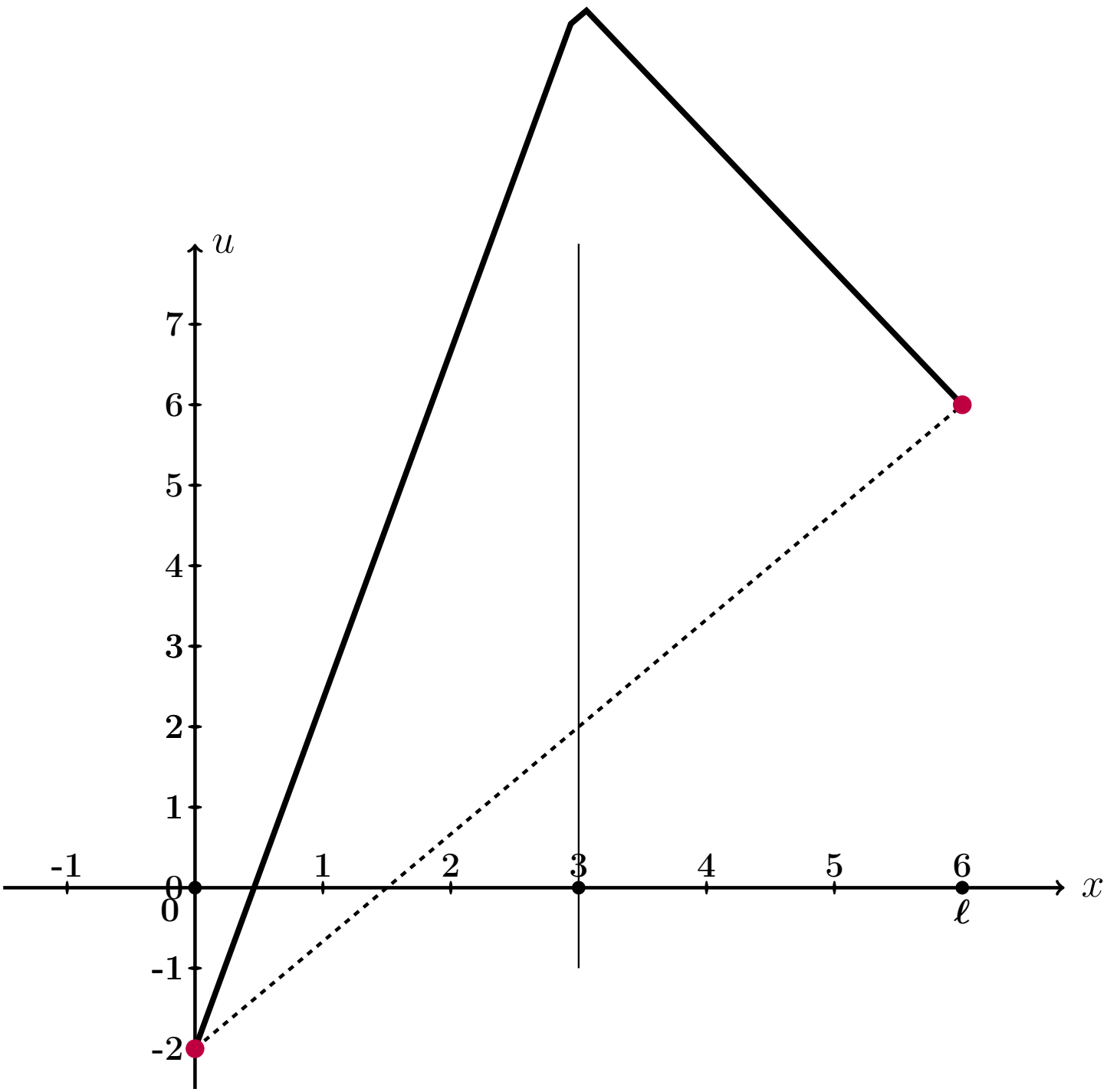


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (5.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (5.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (5.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{5.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{5.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (5.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (5.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{5.7}$$

Таблица 5.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (5.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (5.1) с начальным условием (5.2) и граничными условиями (5.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (5.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_6 = 6.0$ — значения граничных условий (5.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 5.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 5.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-2	0,6	3,2	5,8	8,4	11	10	9	8	7	6
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 5.16.

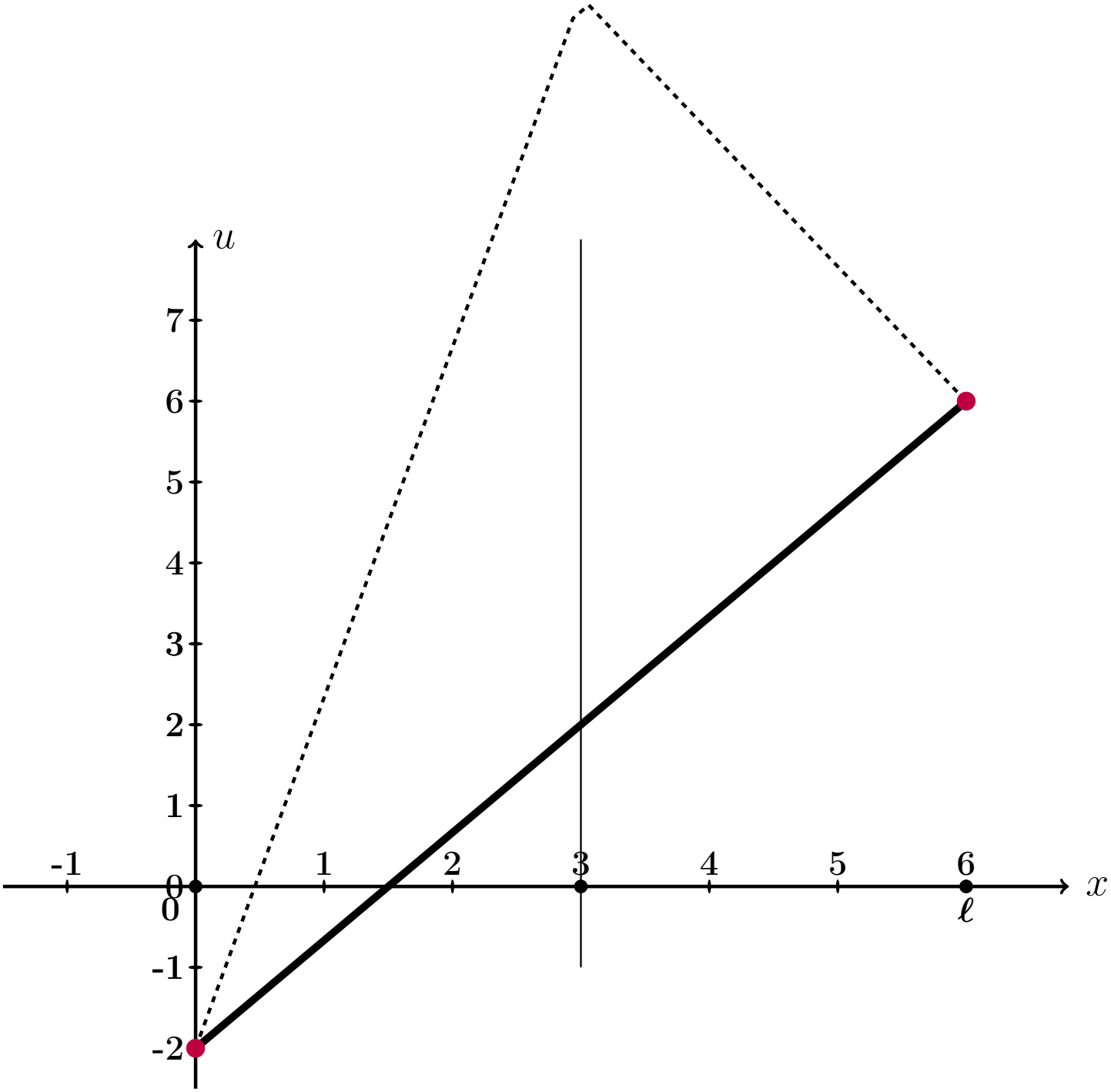


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (5.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (5.3).

Выборочная проверка вариант 5 задача 9 (по формулам (5.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 9 (по таблице 5.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 5 задача 9 (по таблице 5.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 6

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{8}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{8}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

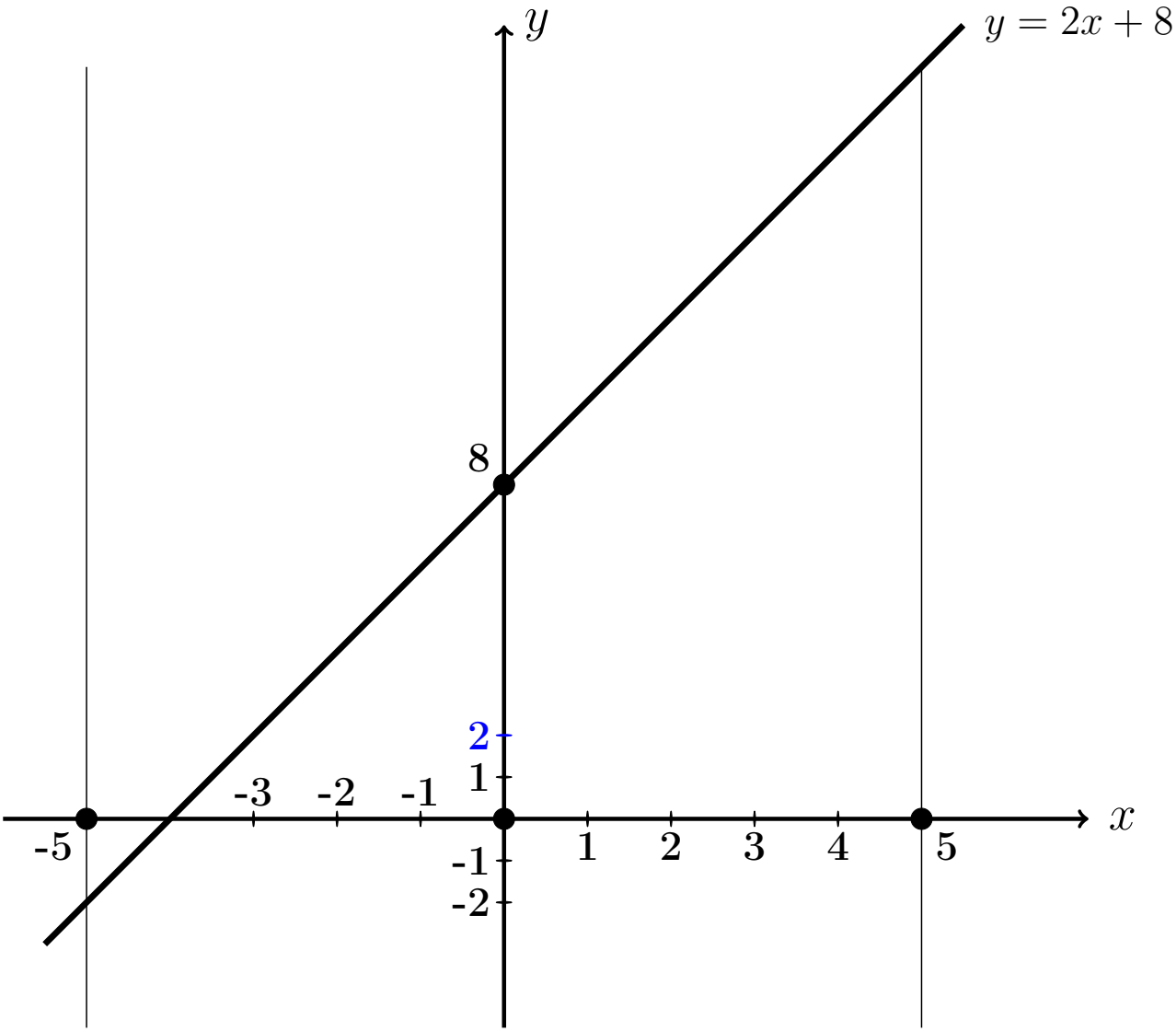
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 6.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+8$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 6.1



Выборочная проверка вариант 6 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 1 (по Таблице 6.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sqrt{x} + \frac{18}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 9\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(6\sqrt{x} + \frac{18}{y}\right)dx = 6\int x^{1/2}dx + 18\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad + C(y) = \qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad + C(y) = 9\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^3 + 4\sin 4t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2x\ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^3 + 4\sin 4t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^3 + 4\sin 4t)dt = \qquad + C(x)\ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 2x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$ $\qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$

Выборочная проверка вариант 6 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи $\qquad$ Клик $\qquad$

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

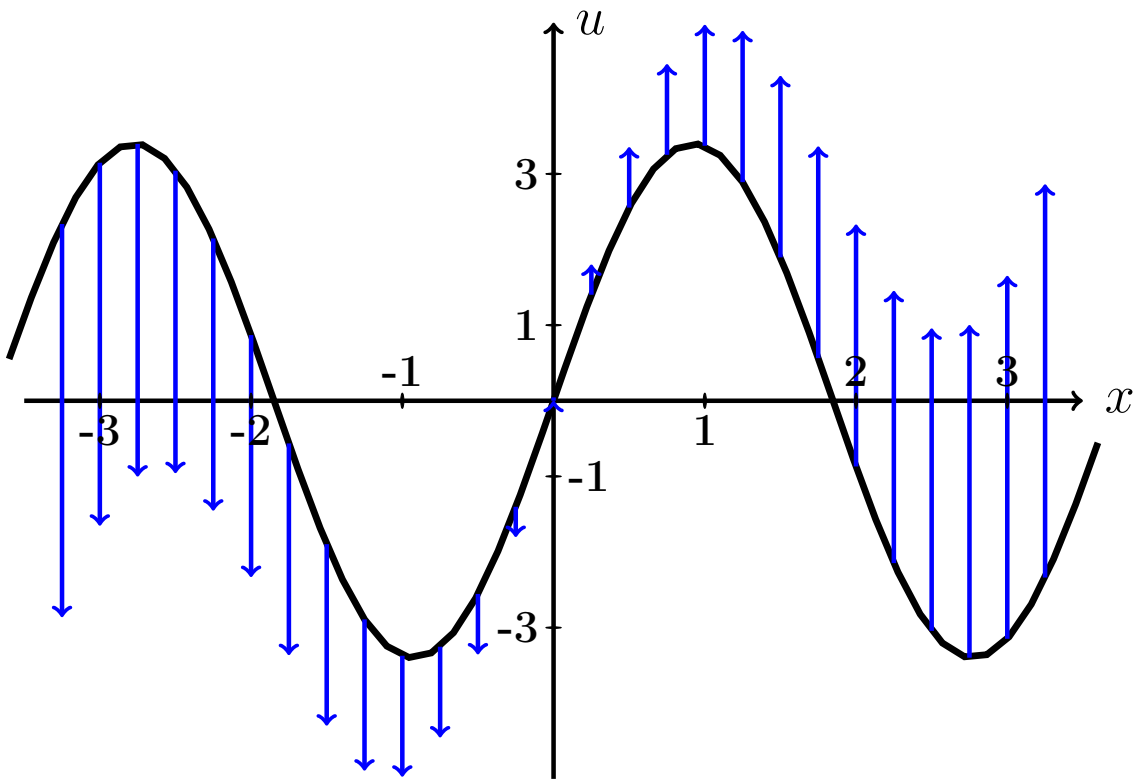


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 6.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 6 задача 4 (по Таблице 6.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 6.2.

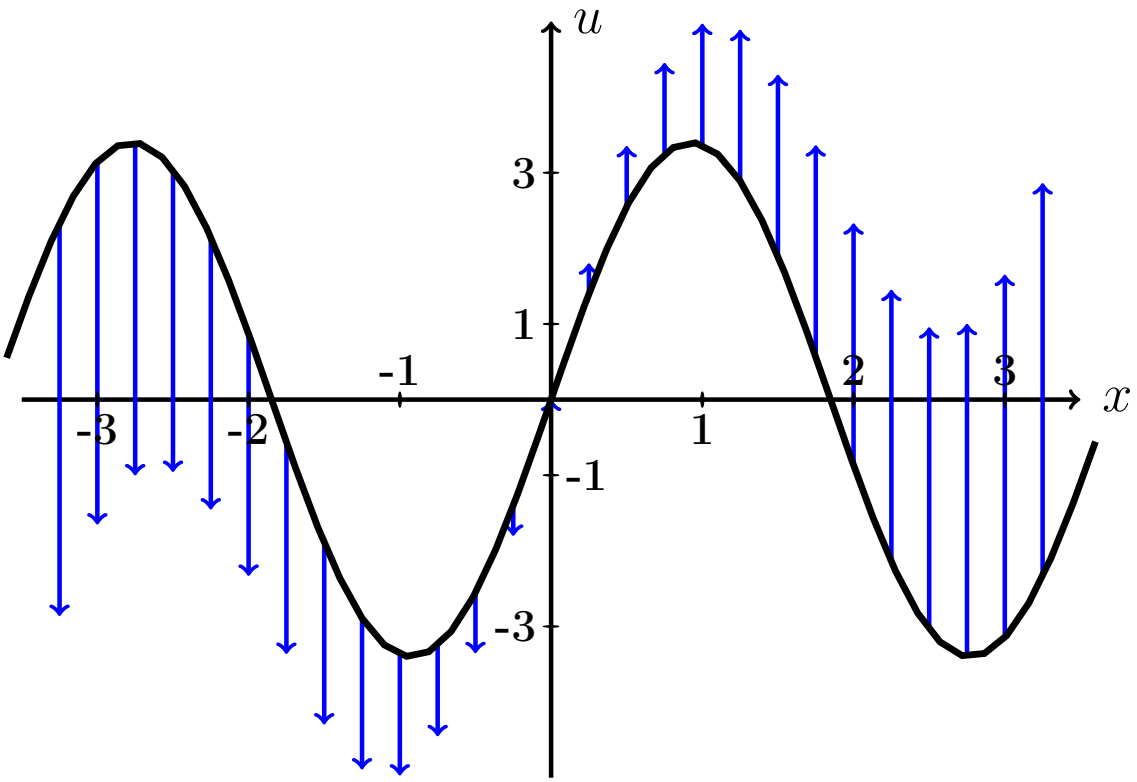


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

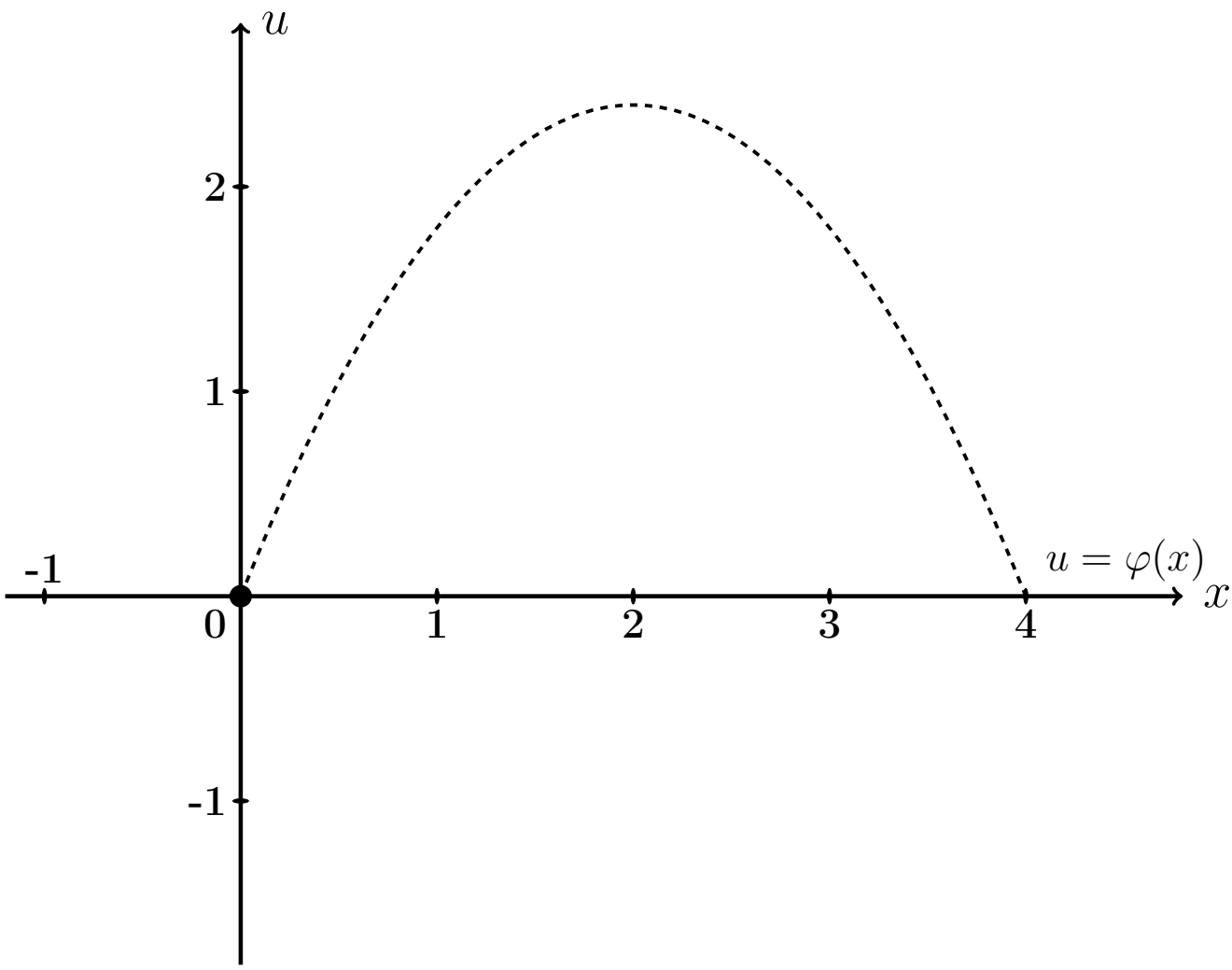


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 6.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 6.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 6.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 6.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 6 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 5 (красные клетки таб. 6.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 6.4.

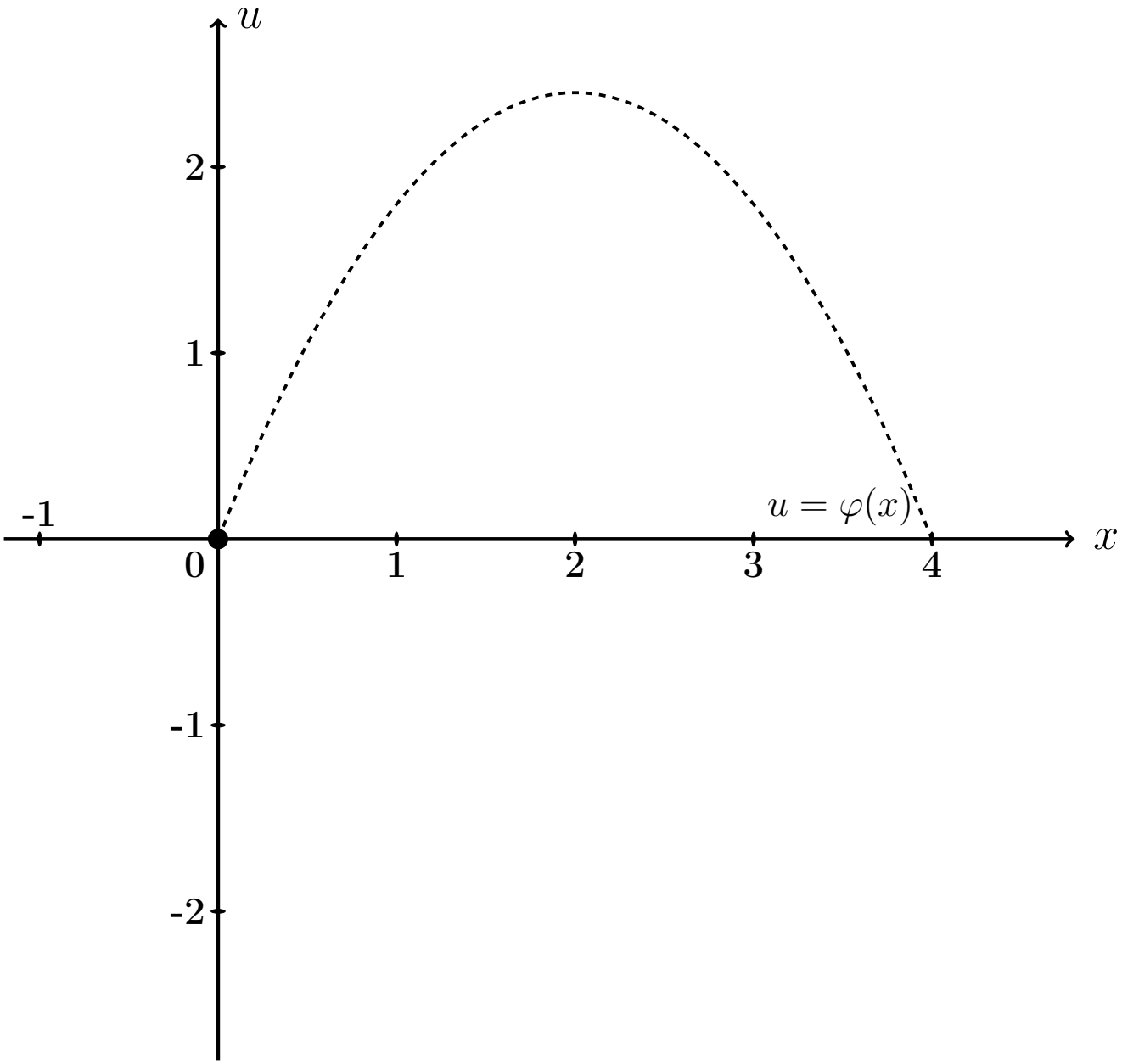


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

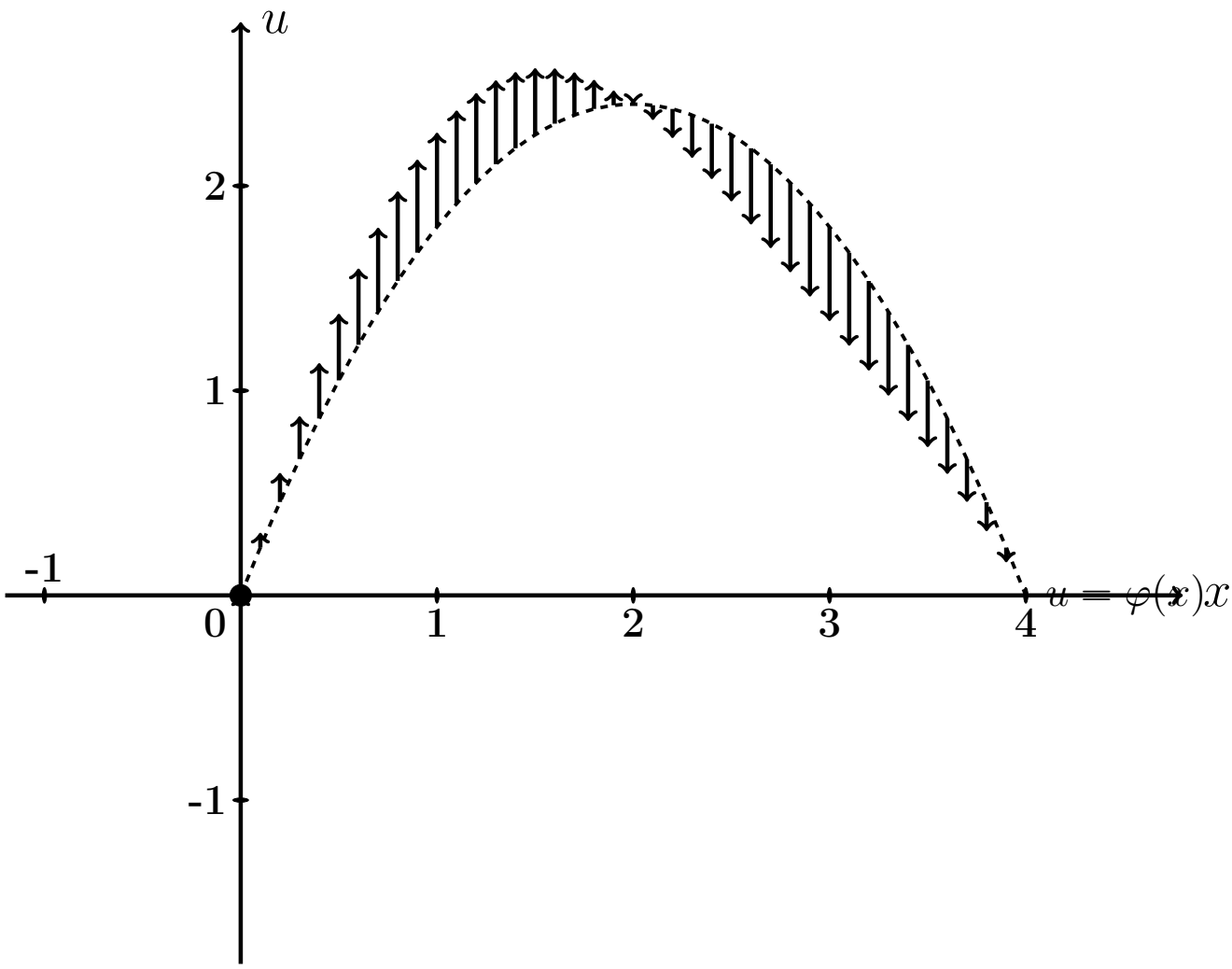


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 6.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad =$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.39$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 6.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 6.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 6.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 6 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 6 (красные клетки Таблицы 6.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 6.6.

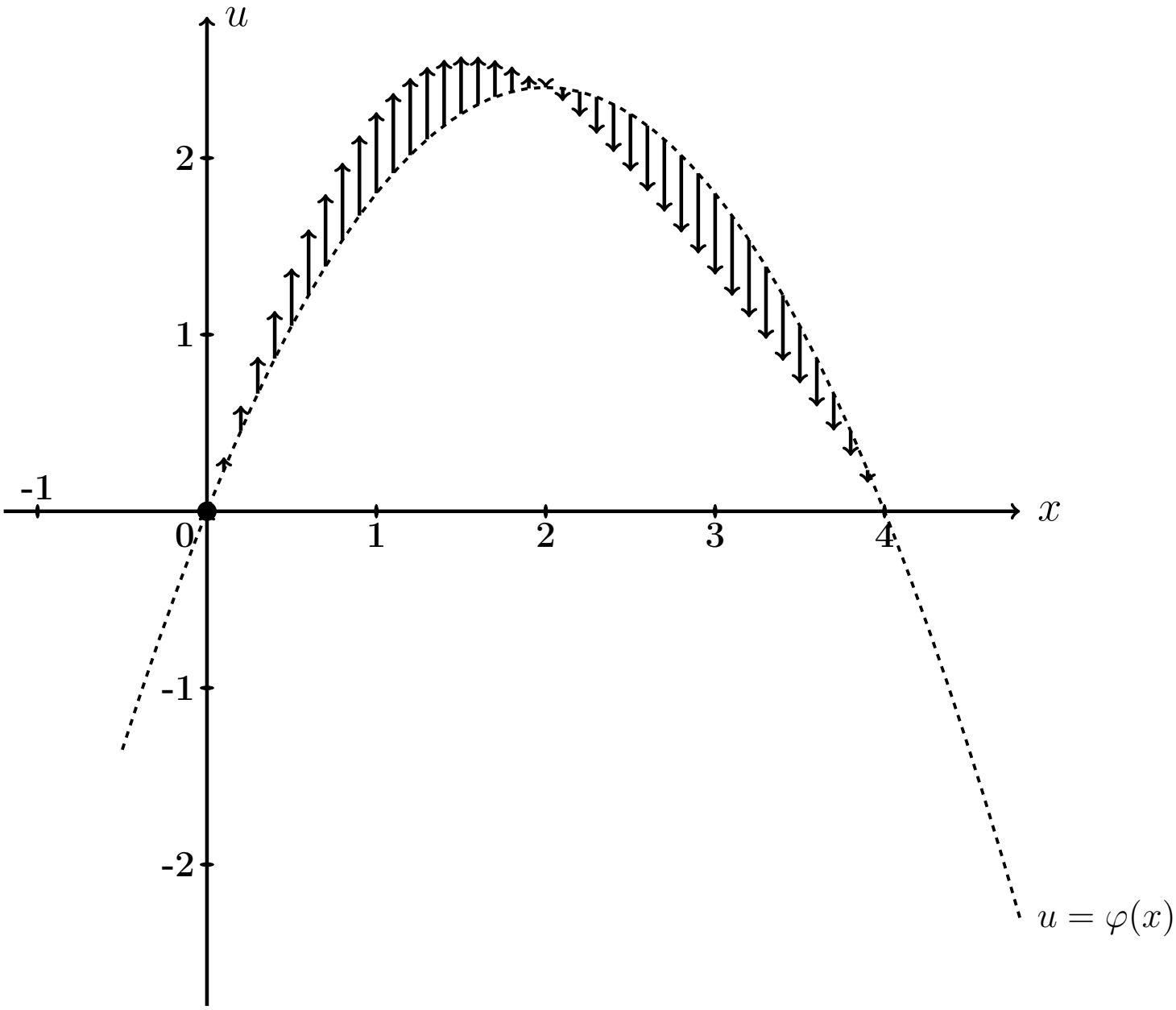


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.20 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 1.20 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{6.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{6.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (6.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{6.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (6.2), (6.3). Затабулировать решение уравнения (6.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (6.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (6.2), (6.3). Затабулировать решение уравнения (6.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (6.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 6.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (6.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{6.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (6.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (6.4) при граничных условиях (6.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{6.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{6.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (6.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (6.9). Следовательно, по формуле (6.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{6.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{6.11}$$

Шаг 6.

Таблица 6.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 6.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (6.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 6.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 6.9

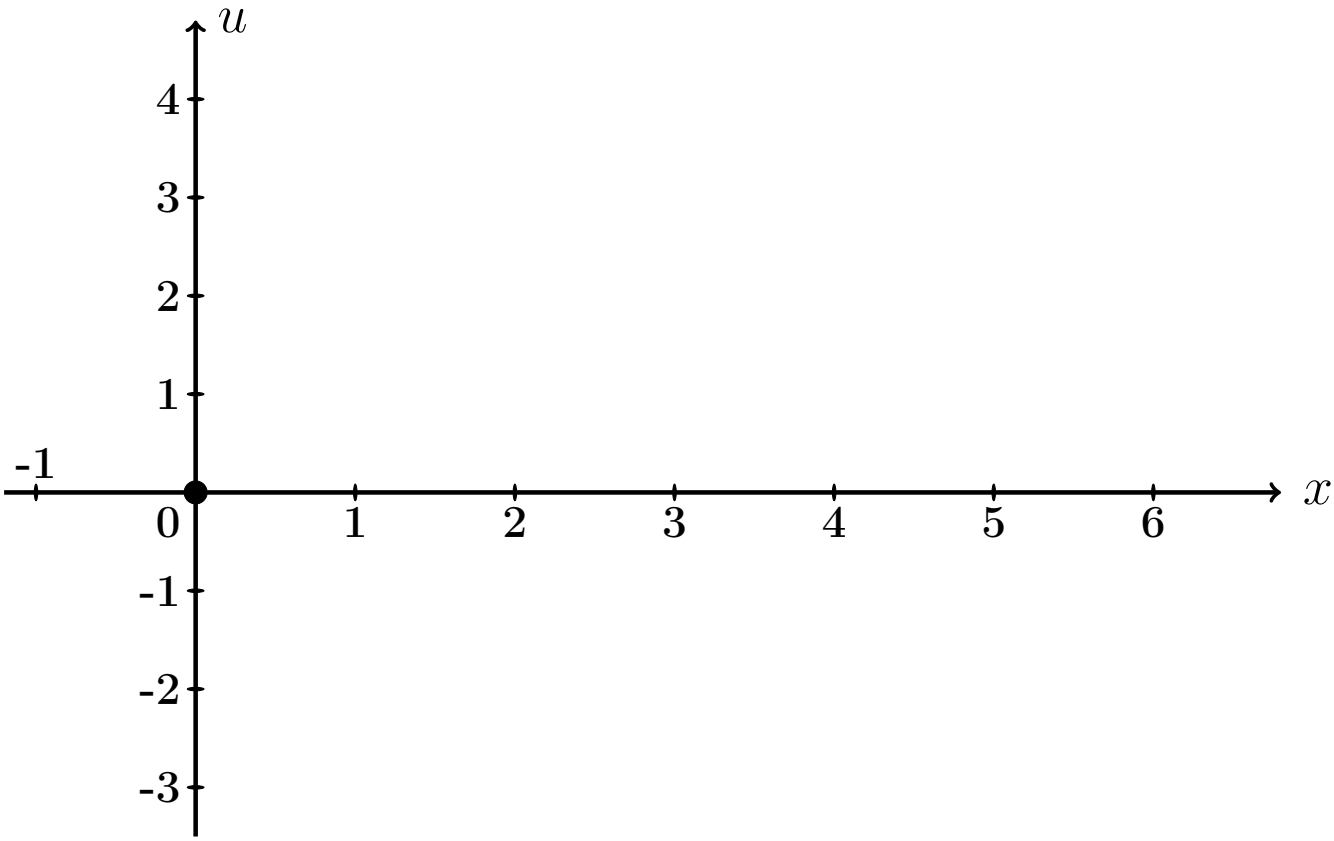


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 6 задача 7 (по Таб. 6.7, 6.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 6 задача 7 (по таблице 6.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (6.6) и (6.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (6.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (6.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (6.9). Следовательно, по формуле (6.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (6.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (6.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 6.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (6.5),

$C_1' =$ по формуле (6.12)

и $C_3 =$ по таблице 6.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 6.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,72	1,44	2,16	2,88	3,6	2,88	2,16	1,44	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

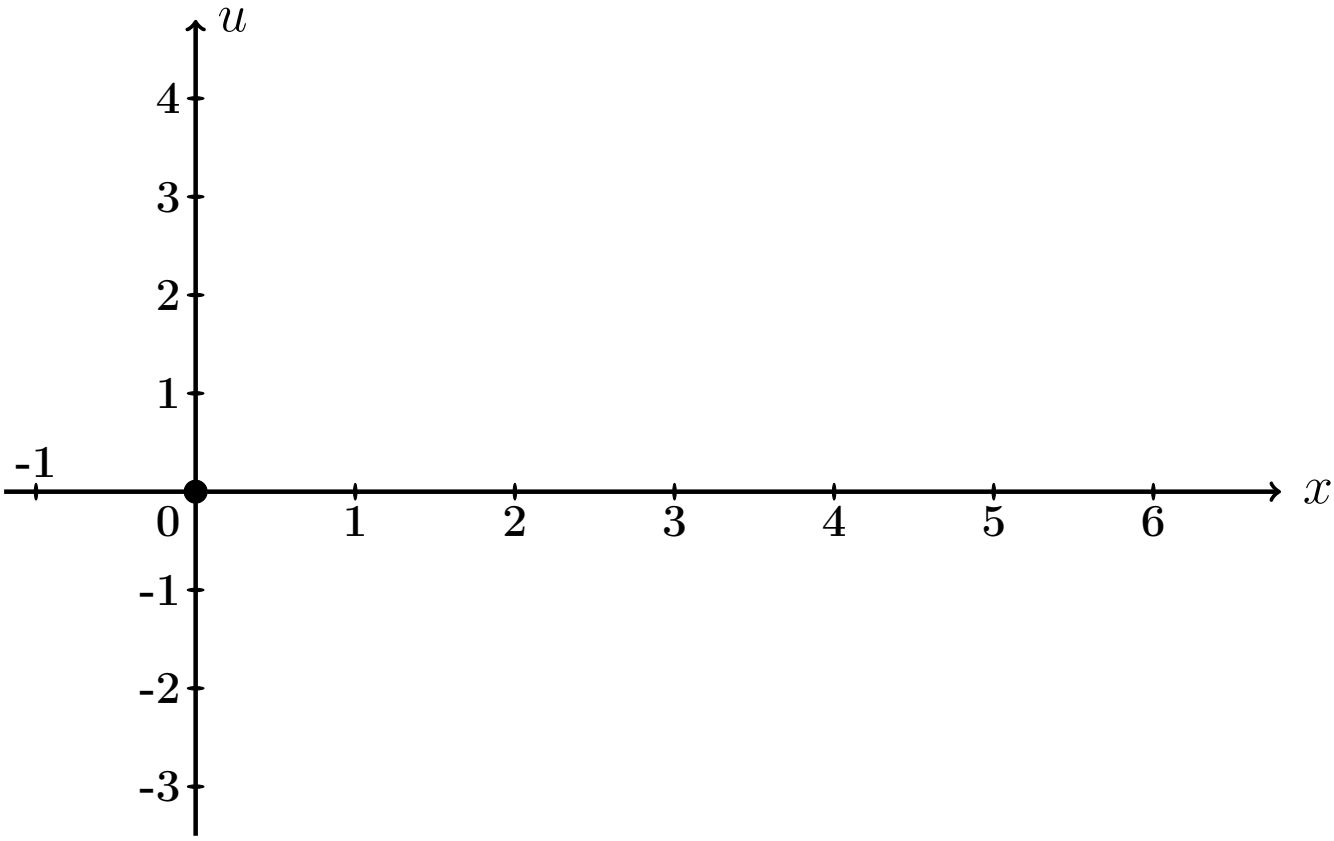


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 6 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (6.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 6 задача 7 (по таблице 6.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{6.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (6.1). Затабулировать решение уравнения (6.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

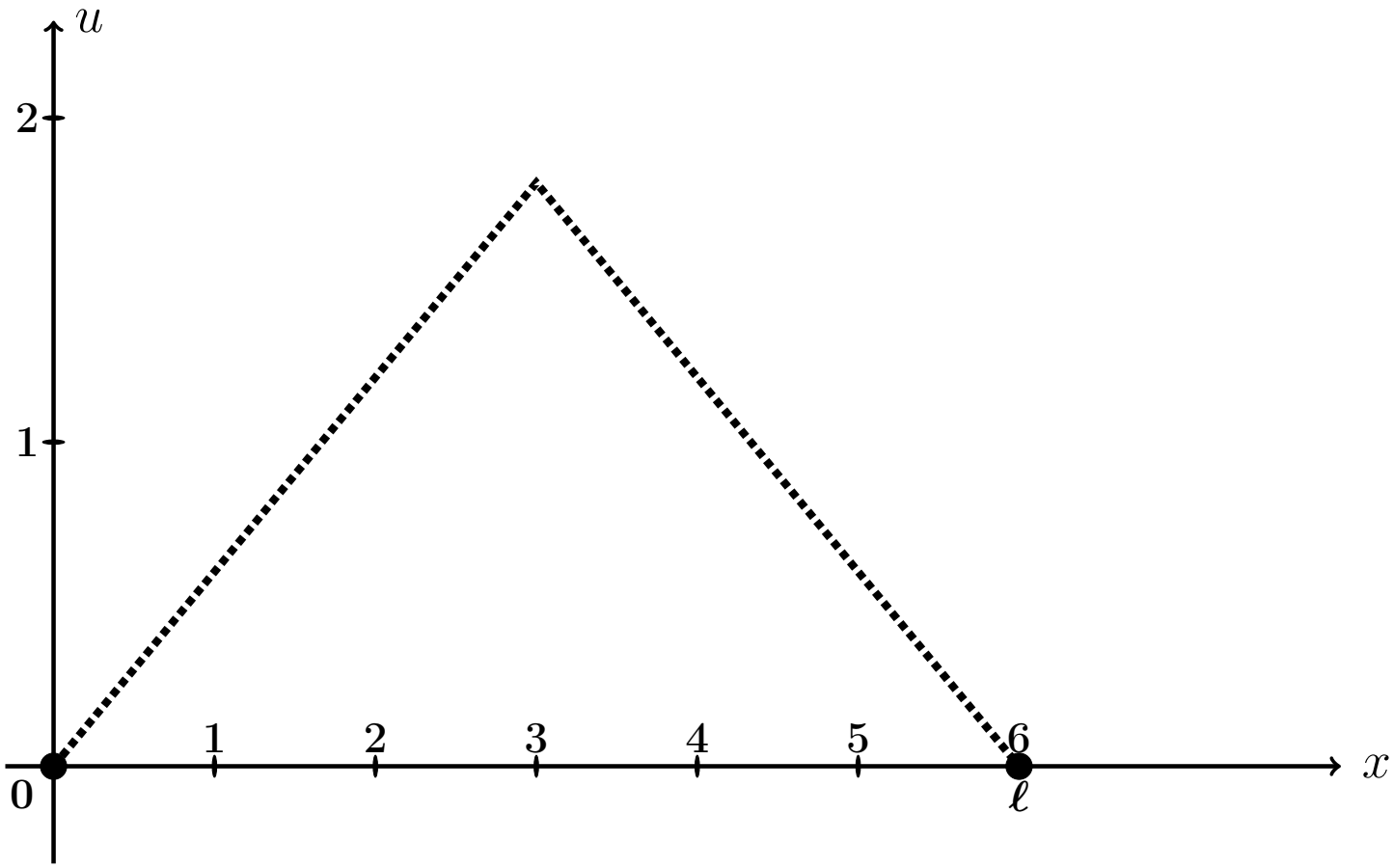


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (6.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 6.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 6.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 6.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 6.12, 6.13) формулы (6.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 6.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 6.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 6.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 6.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

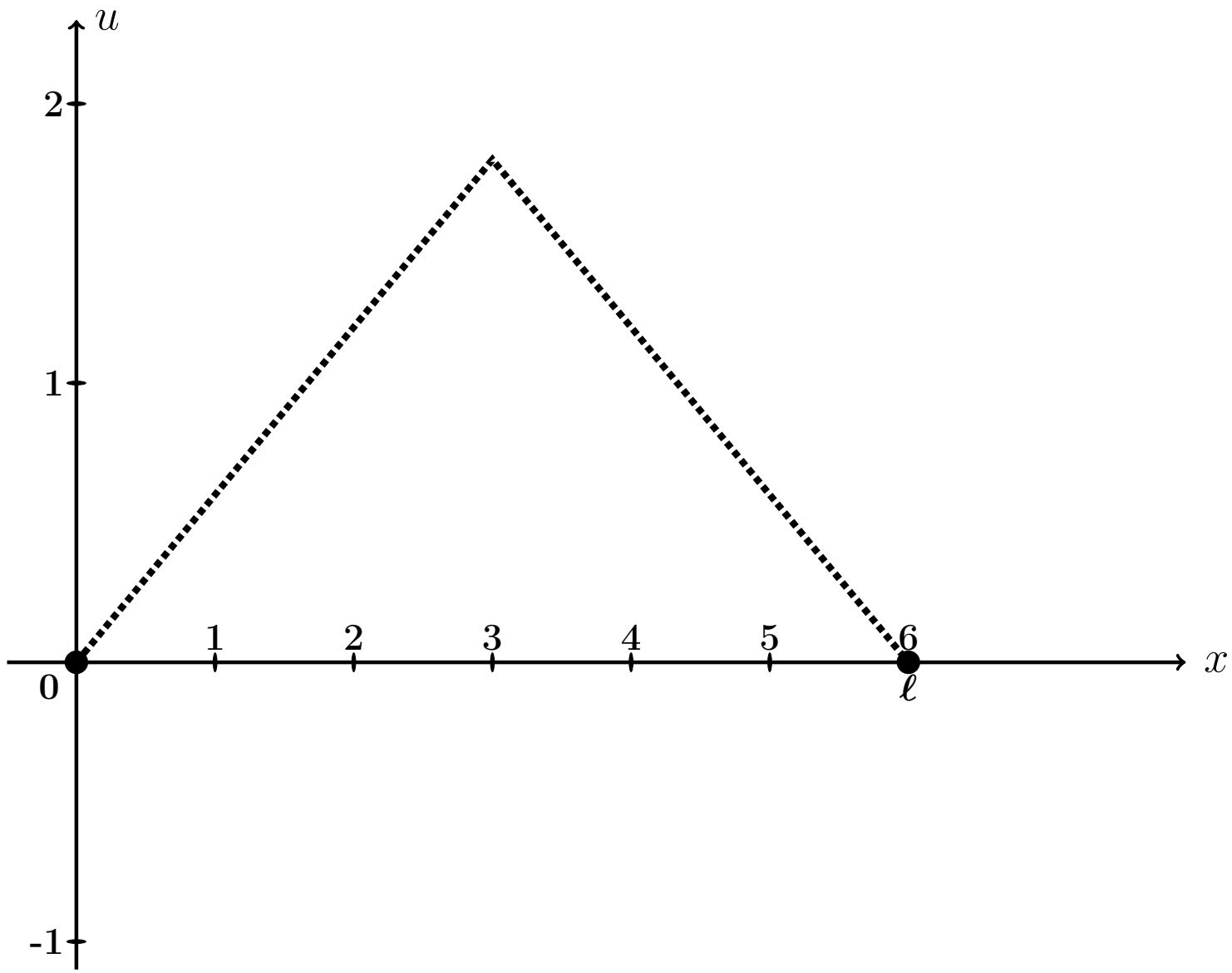


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (6.2).

Выборочная проверка вариант 6 задача 8 (по таблице 6.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 8 (по таблице 6.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 8 (по таблице 6.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 8 (по таблице 6.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.17)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.17)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(2.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{6.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{6.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

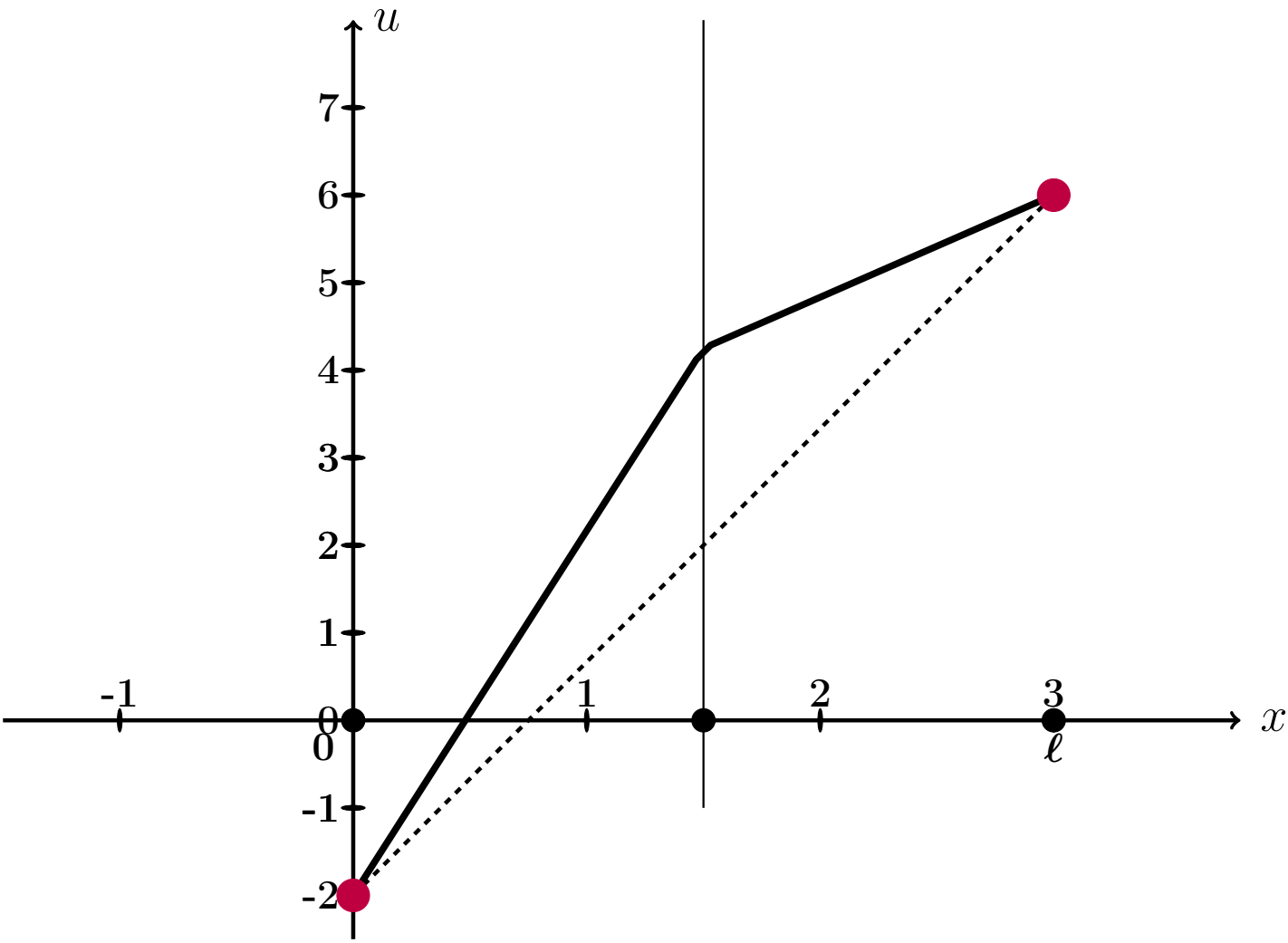


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (6.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (6.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (6.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{6.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)}\cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)}\cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{6.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (6.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (6.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{6.7}$$

Таблица 6.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (6.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (6.1) с начальным условием (6.2) и граничными условиями (6.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (6.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_3 = 6.0$ — значения граничных условий (6.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 6.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 6.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}75$	0,5	1,75	3	4,25	4,6	4,95	5,3	5,65	6
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 6.16.

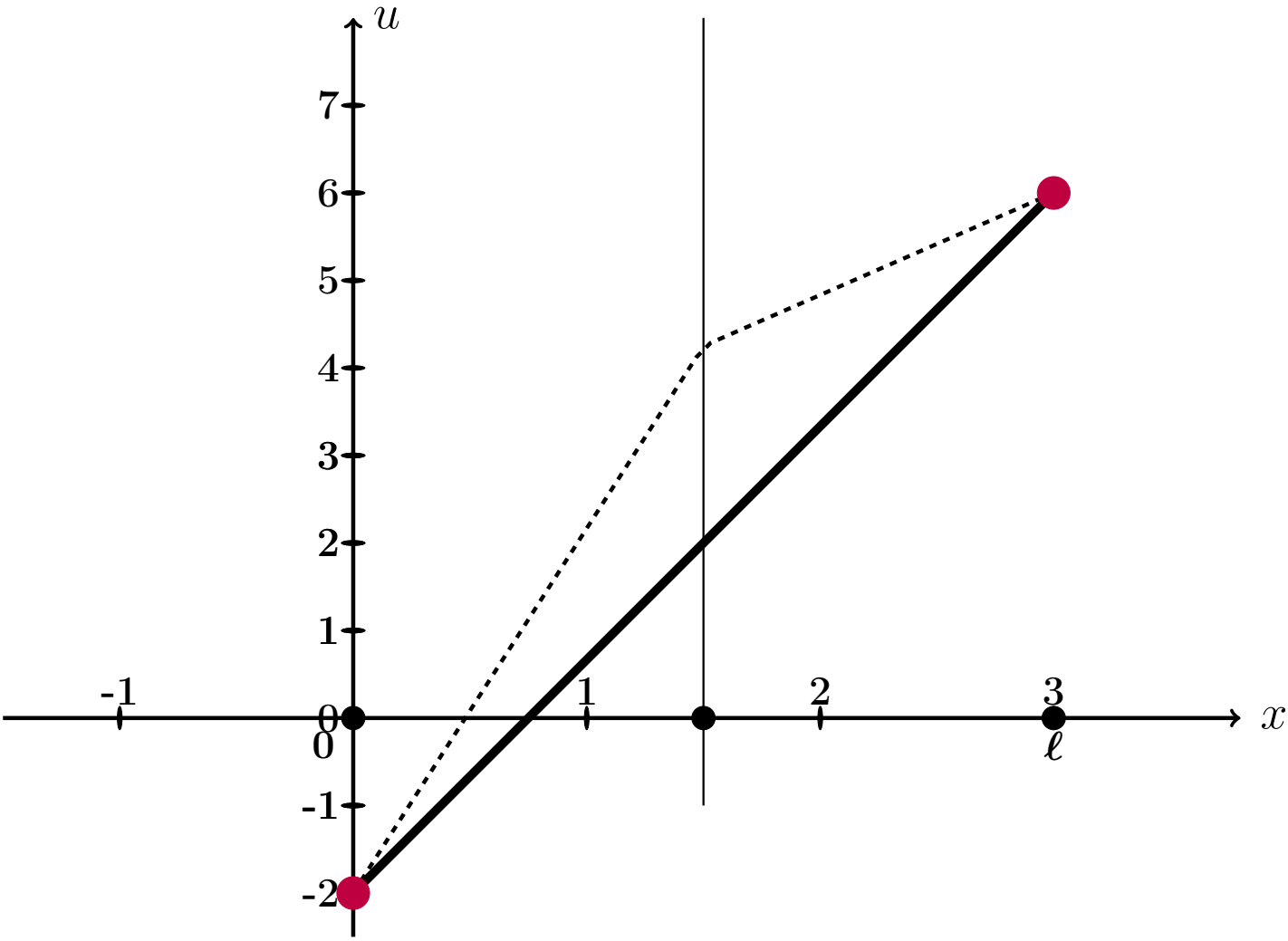


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (6.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (6.3).

Выборочная проверка вариант 6 задача 9 (по формулам (6.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 9 (по таблице 6.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 6 задача 9 (по таблице 6.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 7

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{7}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{7}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

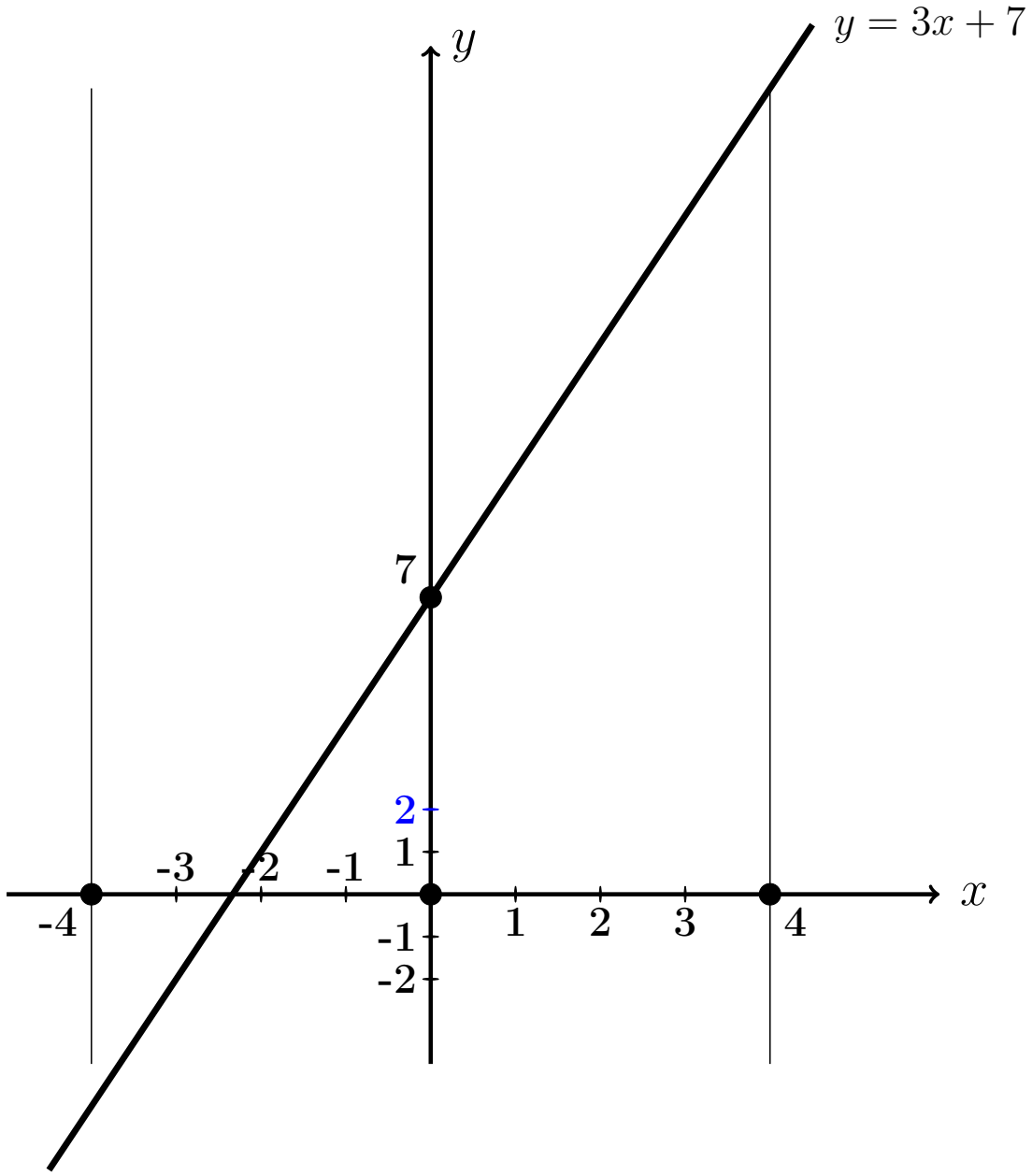
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 7.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+7$	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 7.1



Выборочная проверка вариант 7 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 1 (по Таблице 7.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 8\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 12\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 8\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 8\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 12\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x^2 + 8t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x^2 + 8t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x^2 + 8t)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 4x^2 \\ \qquad = 3e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 7 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

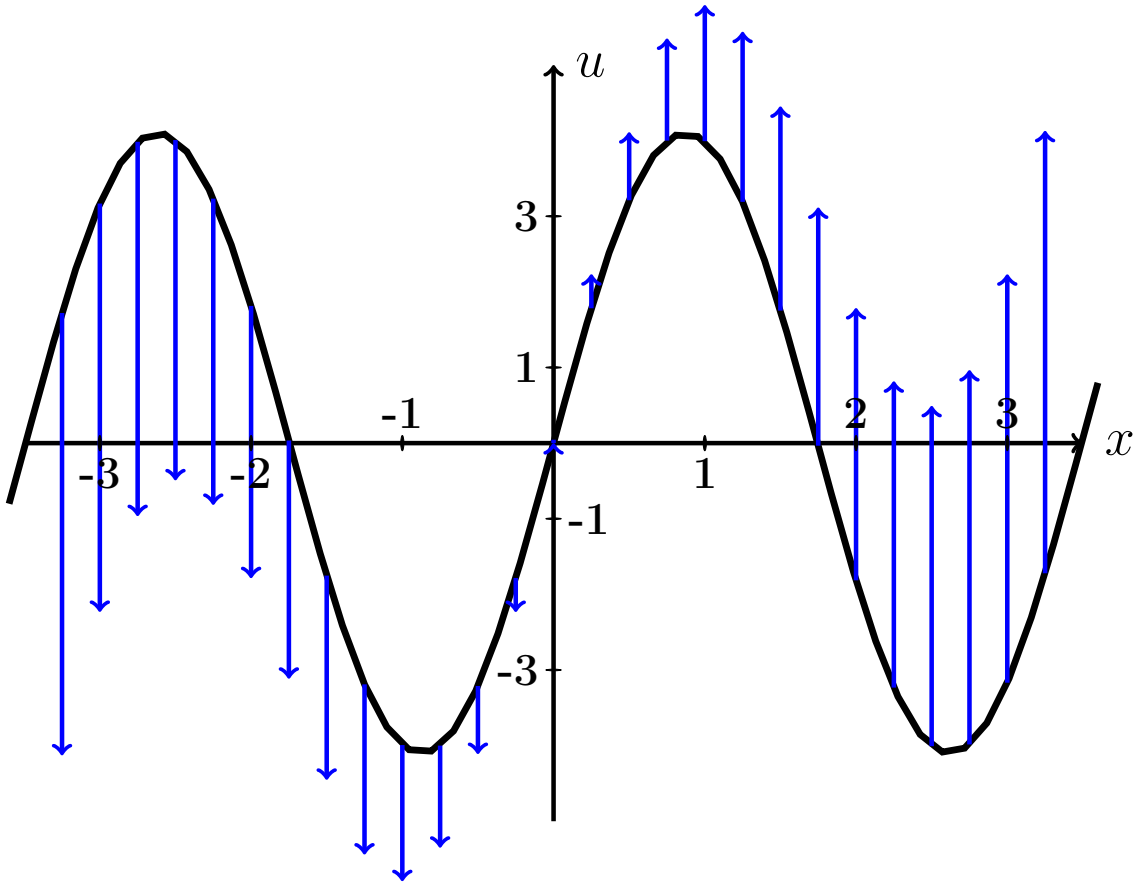


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 7.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 7 задача 4 (по Таблице 7.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 7.2.

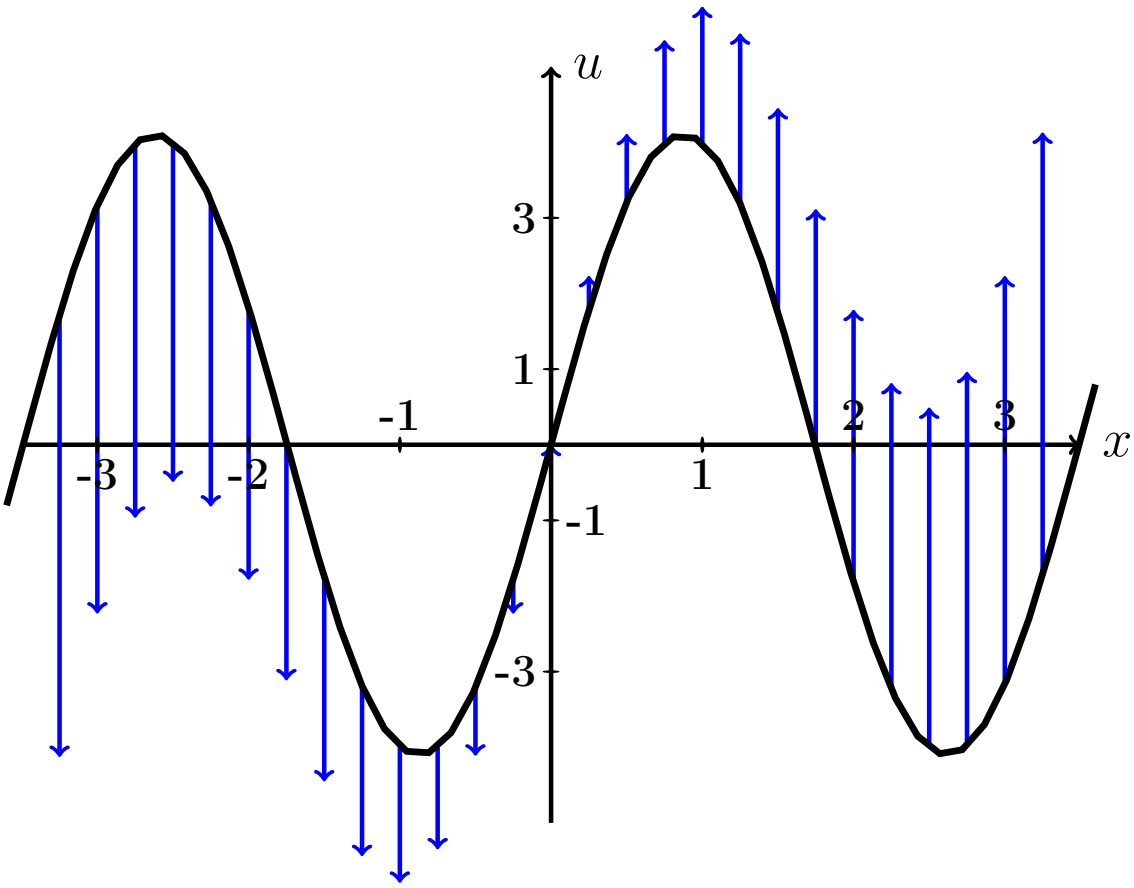


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

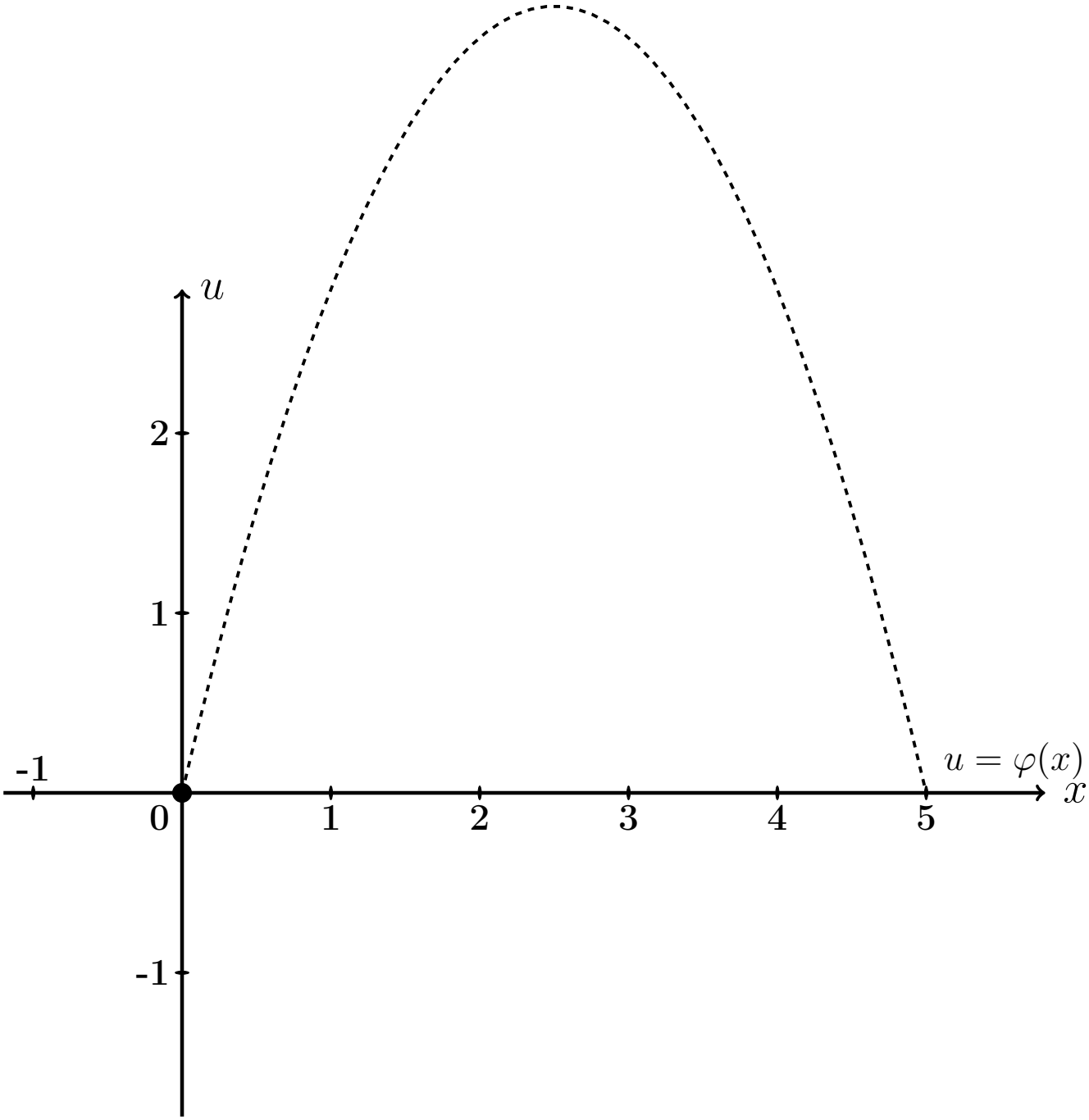


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 7.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 7.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 7.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 7.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 7 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 5 (красные клетки таб. 7.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 7.4.

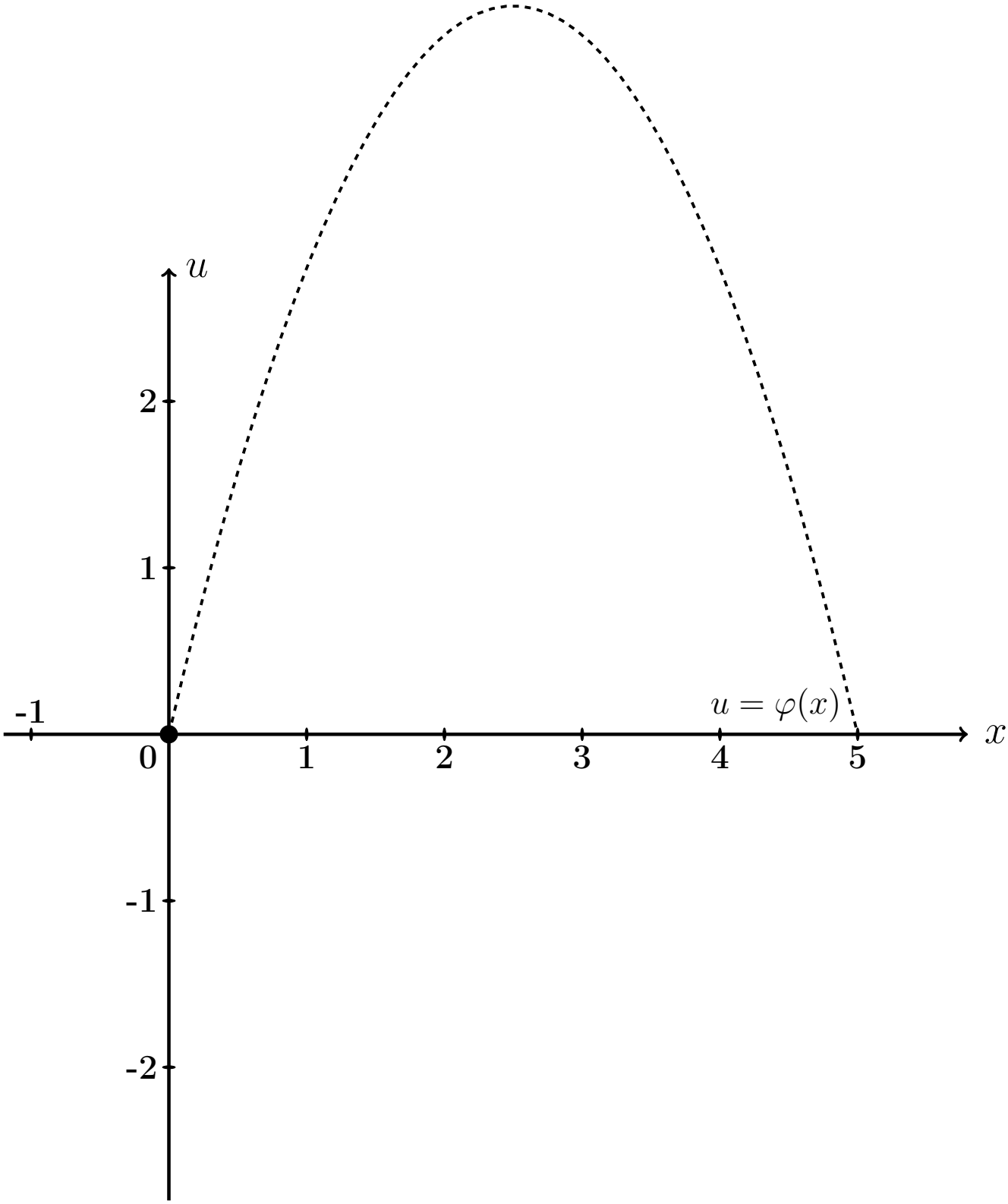


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

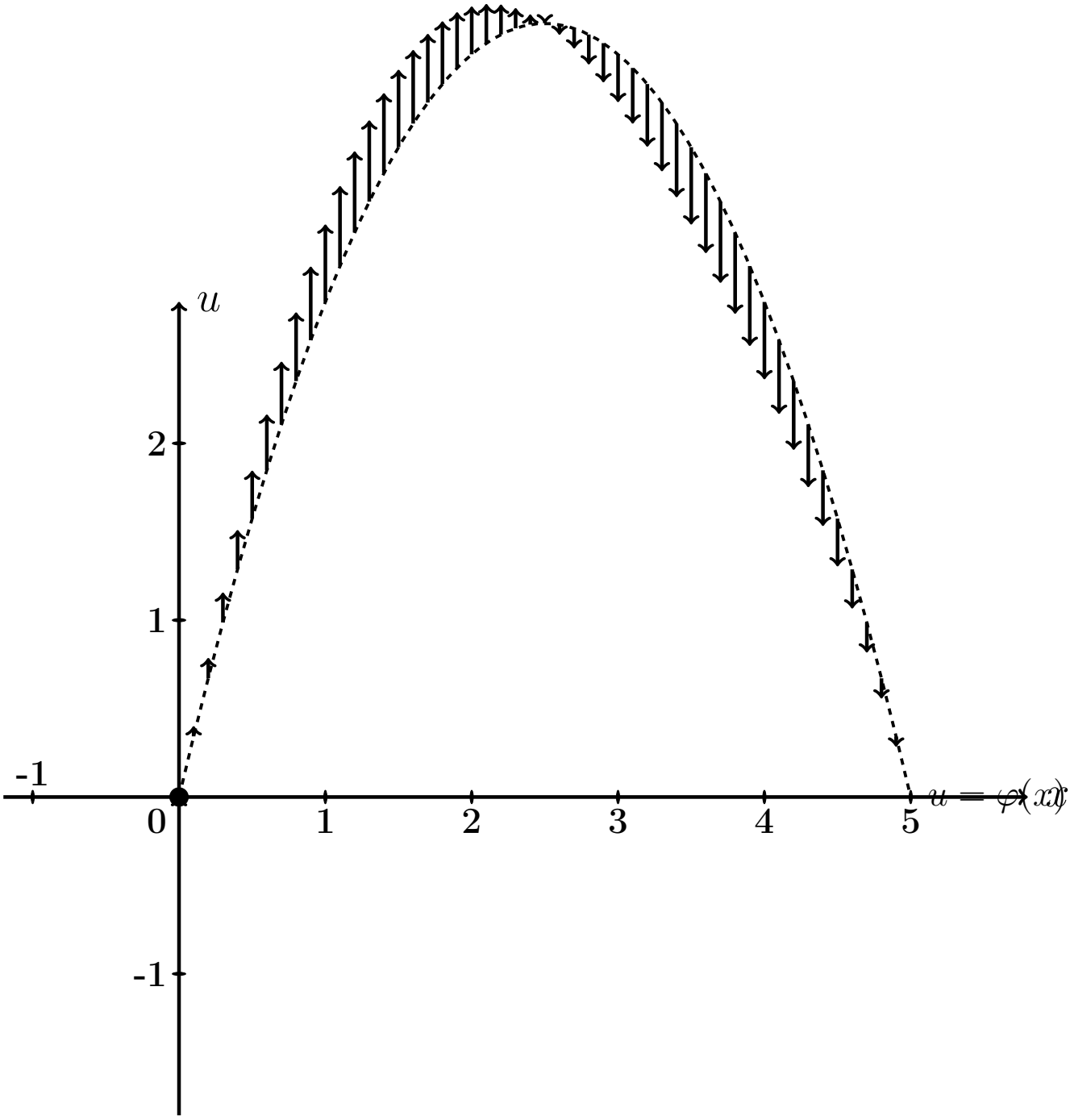


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 7.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.3\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.47$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 7.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 7.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 7.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 7 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 6 (красные клетки Таблицы 7.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 7.6.

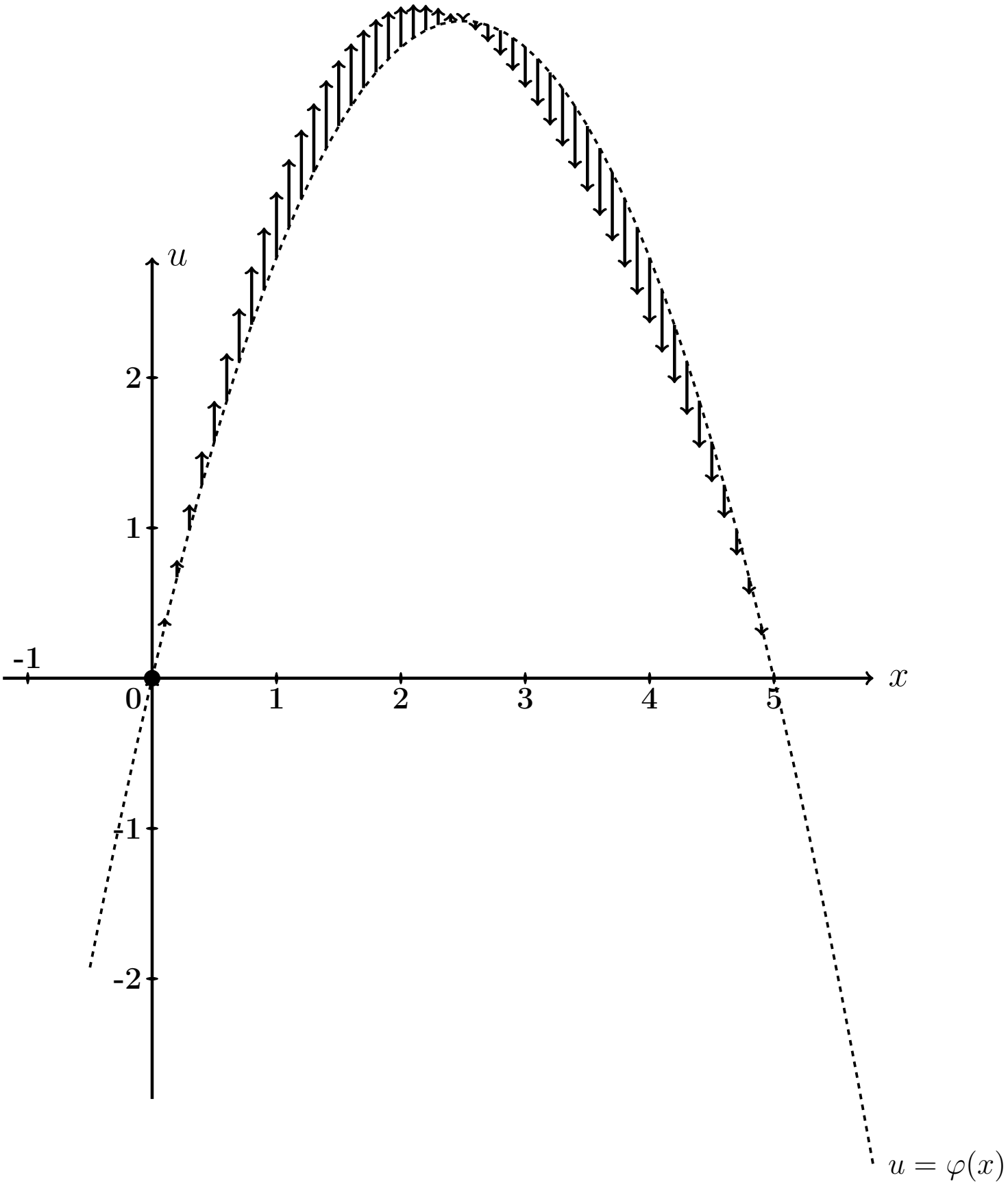


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 1.60 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{7.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{7.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (7.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{7.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (7.2), (7.3). Затабулировать решение уравнения (7.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (7.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (7.2), (7.3). Затабулировать решение уравнения (7.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (7.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 7.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (7.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{7.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (7.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (7.4) при граничных условиях (7.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{7.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{7.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{7.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (7.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (7.9). Следовательно, по формуле (7.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{7.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{7.11}$$

Шаг 6.

Таблица 7.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 7.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (7.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 7.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 7.9

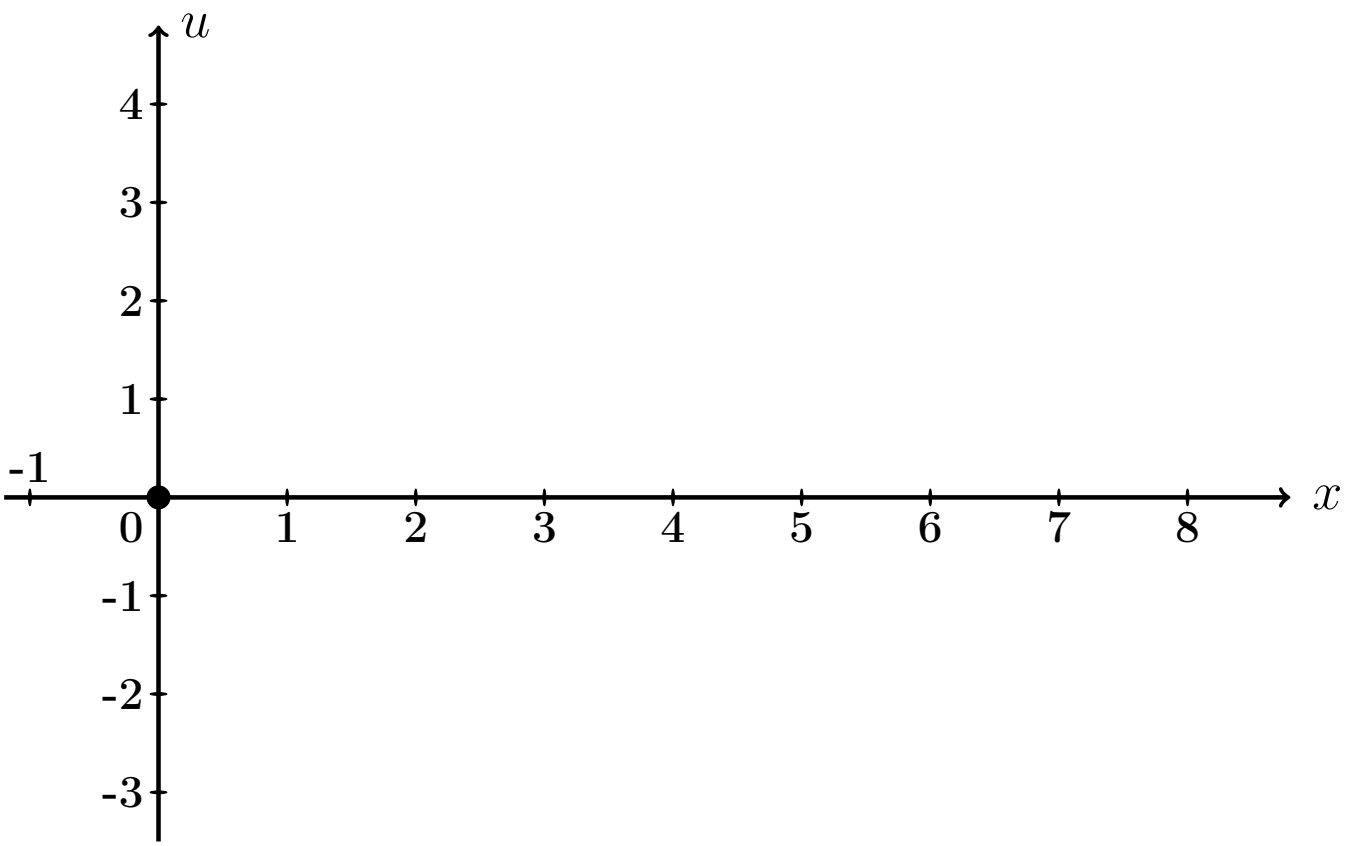


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 7 задача 7 (по Таб. 7.7, 7.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 7 задача 7 (по таблице 7.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (7.6) и (7.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (7.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (7.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (7.9). Следовательно, по формуле (7.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (7.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (7.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 7.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (7.5),

$C_1' =$ по формуле (7.12)

и $C_3 =$ по таблице 7.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 7.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	1,28	2,56	3,84	5,12	6,4	5,12	3,84	2,56	1,28	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

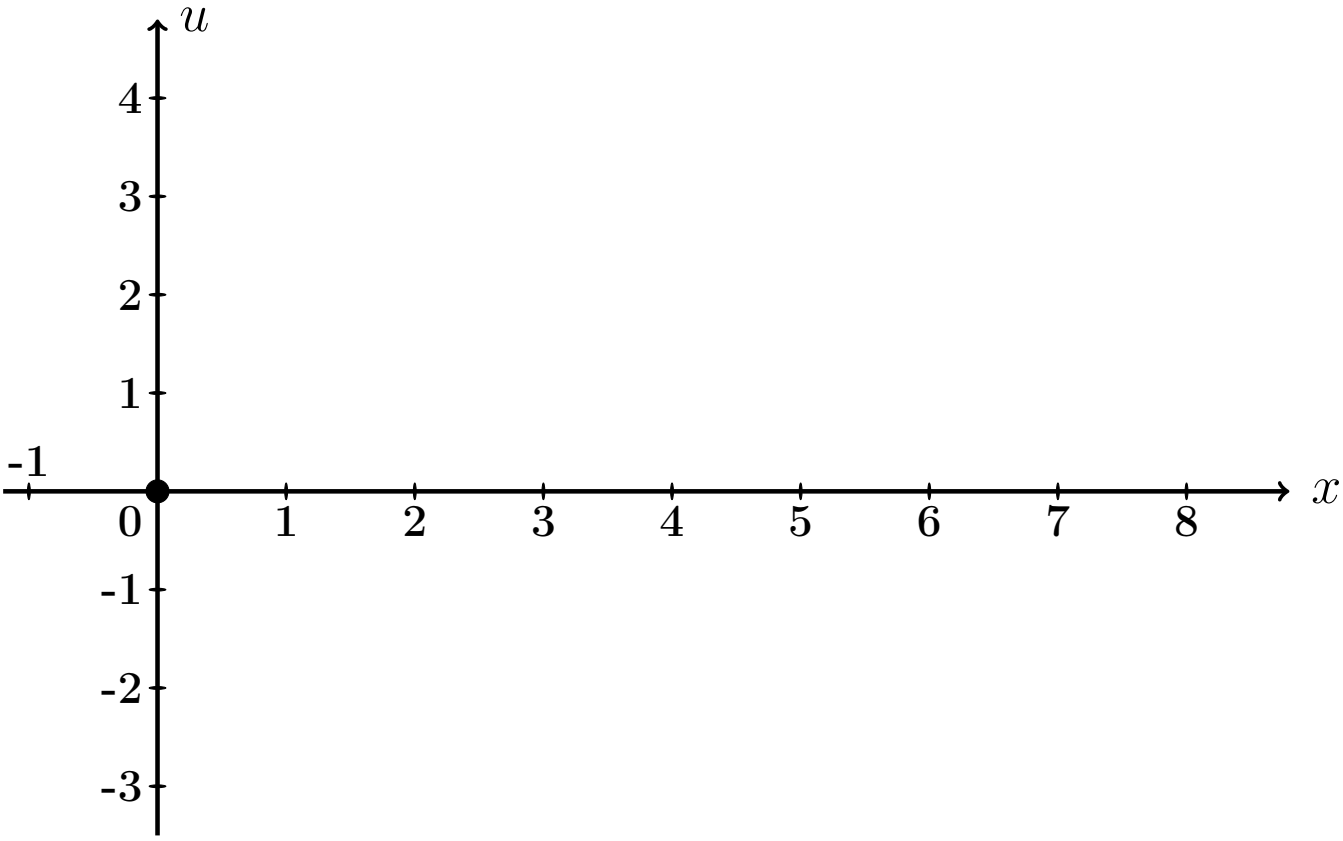


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 7 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (7.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 7 задача 7 (по таблице 7.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{7.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (7.1). Затабулировать решение уравнения (7.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

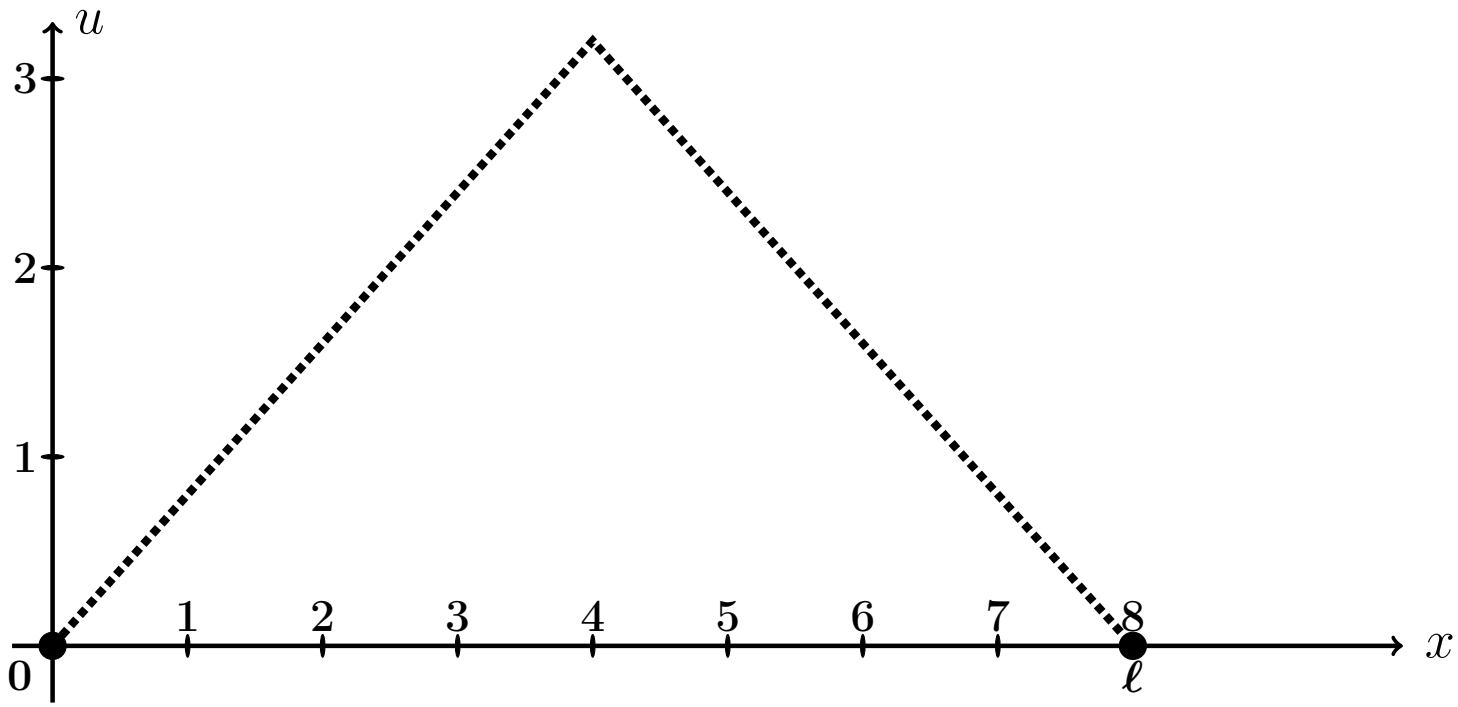


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (7.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

где $\ell = 8$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 7.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 7.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 7.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 7.12, 7.13) формулы (7.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 7.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 7.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 7.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 7.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

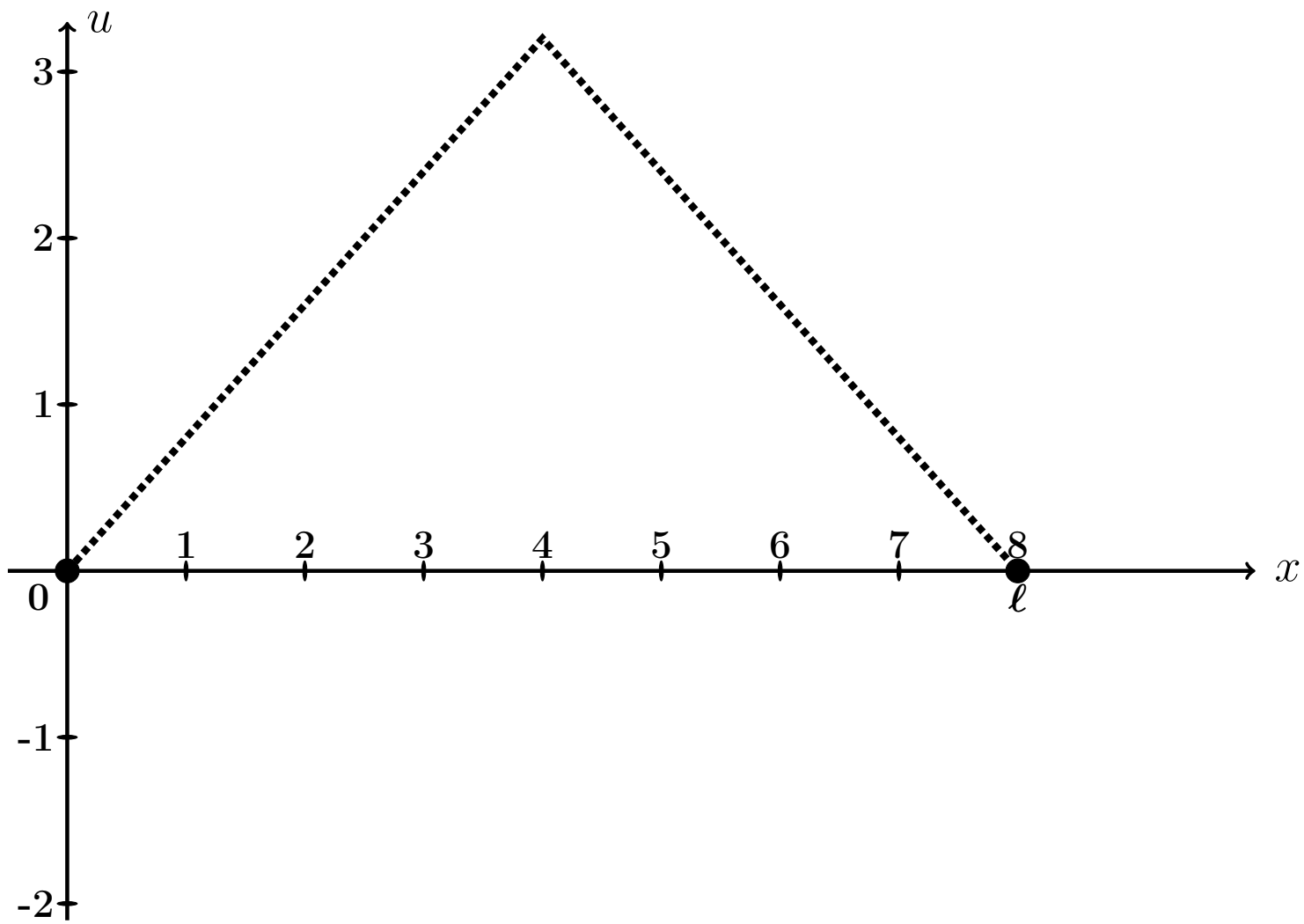


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (7.2).

Выборочная проверка вариант 7 задача 8 (по таблице 7.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 8 (по таблице 7.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 8 (по таблице 7.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 8 (по таблице 7.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.10)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.90)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(10.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{7.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{6.0}_{T_\ell}. \tag{7.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

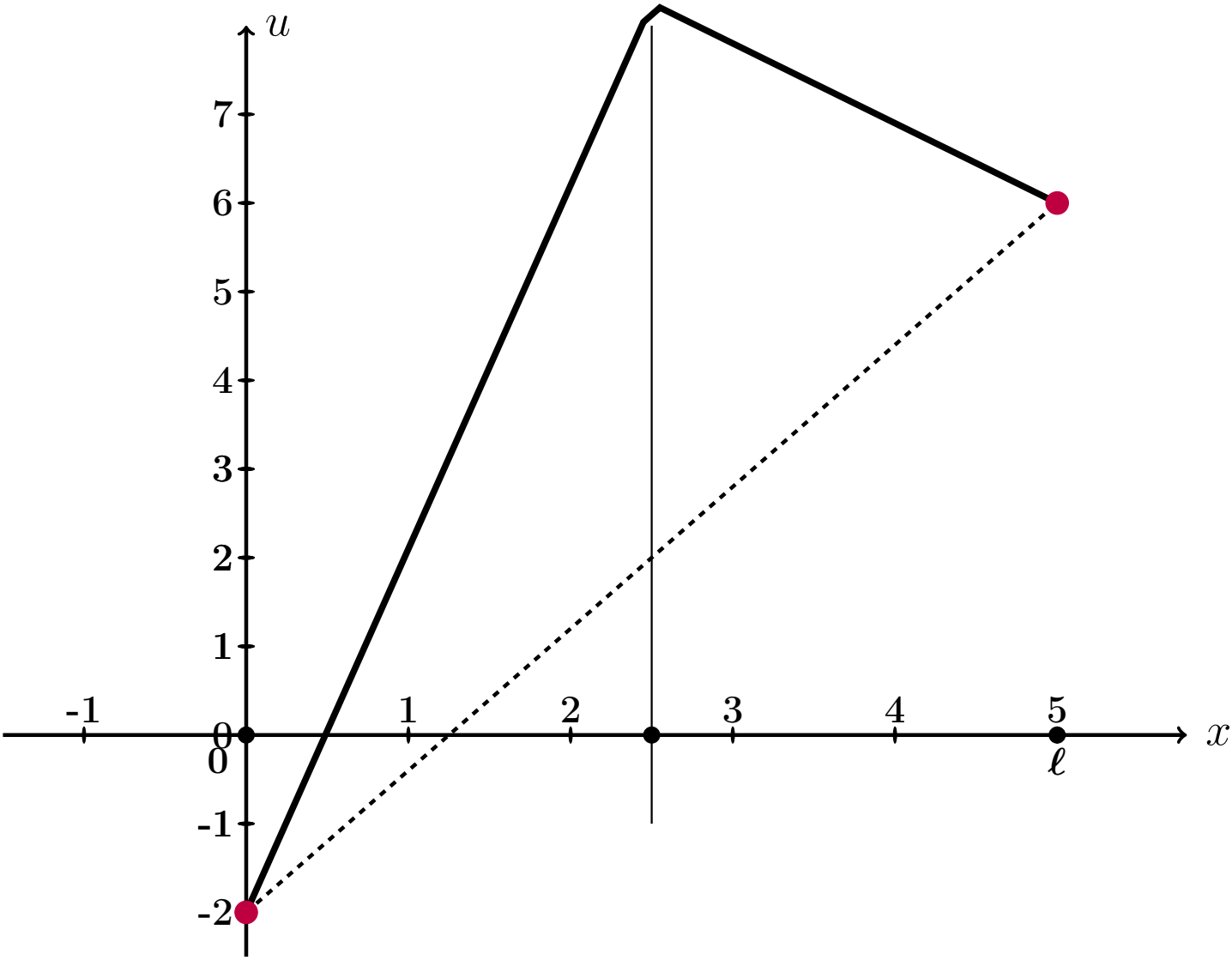


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (7.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (7.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (7.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{7.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{7.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (7.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (7.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{7.7}$$

Таблица 7.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (7.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (7.1) с начальным условием (7.2) и граничными условиями (7.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (7.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_5 = 6.0$ — значения граничных условий (7.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 7.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 7.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-2	0,05	2,1	4,15	6,2	8,25	7,8	7,35	6,9	6,45	6
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 7.16.

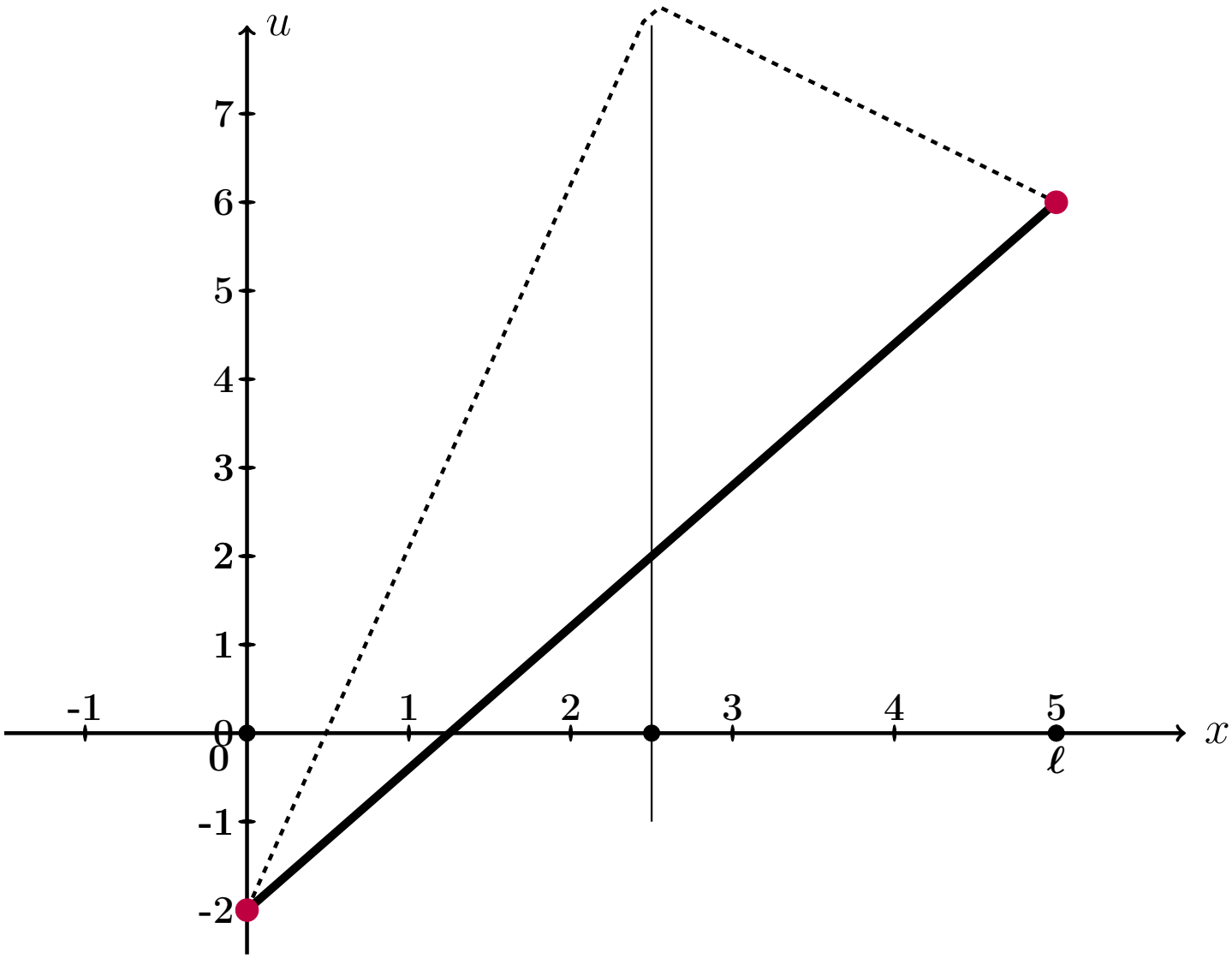


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (7.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (7.3).

Выборочная проверка вариант 7 задача 9 (по формулам (7.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 9 (по таблице 7.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 7 задача 9 (по таблице 7.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 8

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \boxed{\square}.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{8}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{8}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

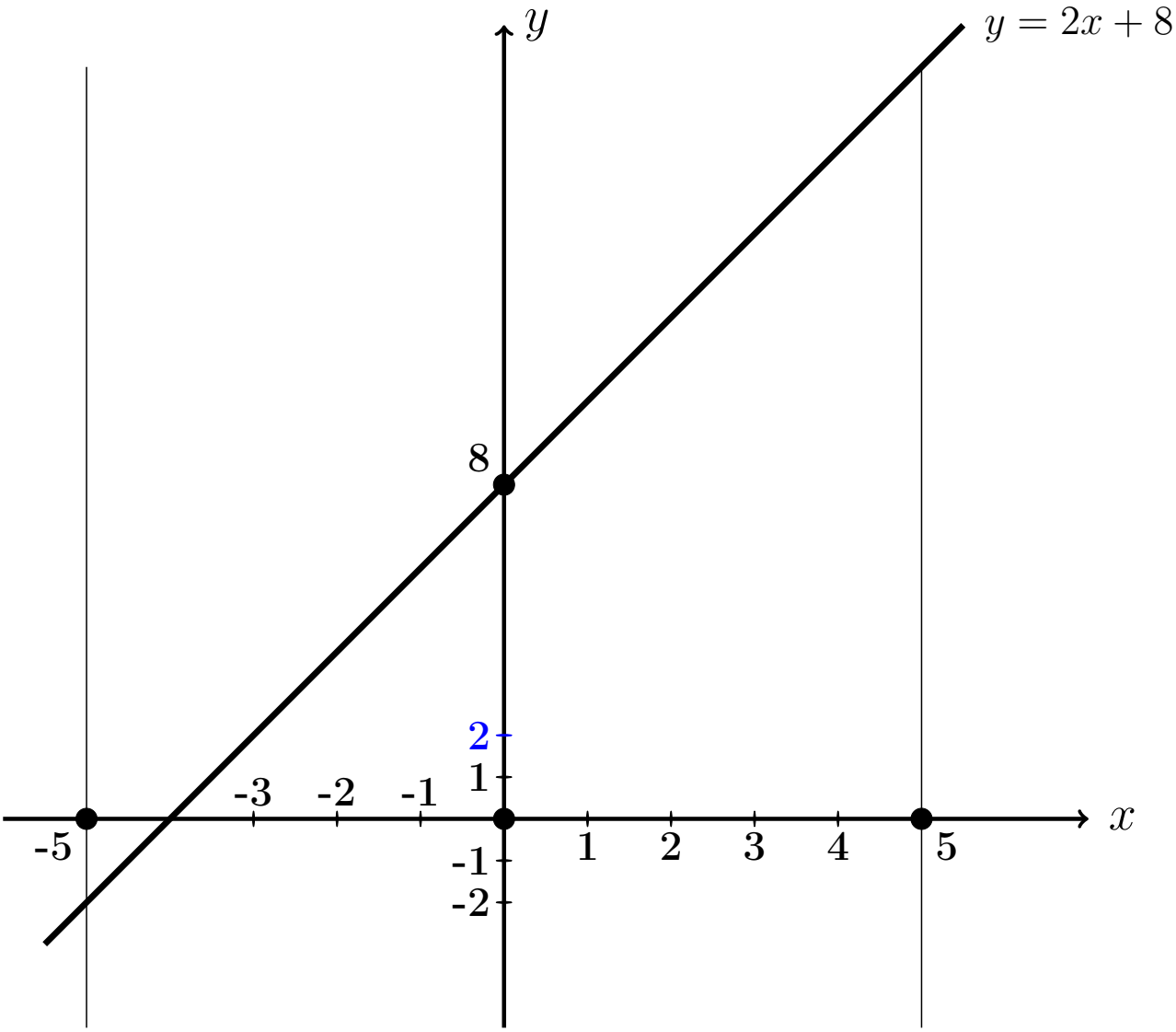
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 8.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+8$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 8.1



Выборочная проверка вариант 8 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 1 (по Таблице 8.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 18\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=7} = 9\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (6x^2+18\sqrt{y})dx = 6\int x^2\,dx+18\int \sqrt{y}\,dx =$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 9\cos y\,,$$

откуда $C(y) =$ $=$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \quad .$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1, 2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 8 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x^2 + 6t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x^2 + 6t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x^2 + 6t)dt = \qquad = \qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \left(\qquad \right) dt = \qquad =$$

$$= \qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad =$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

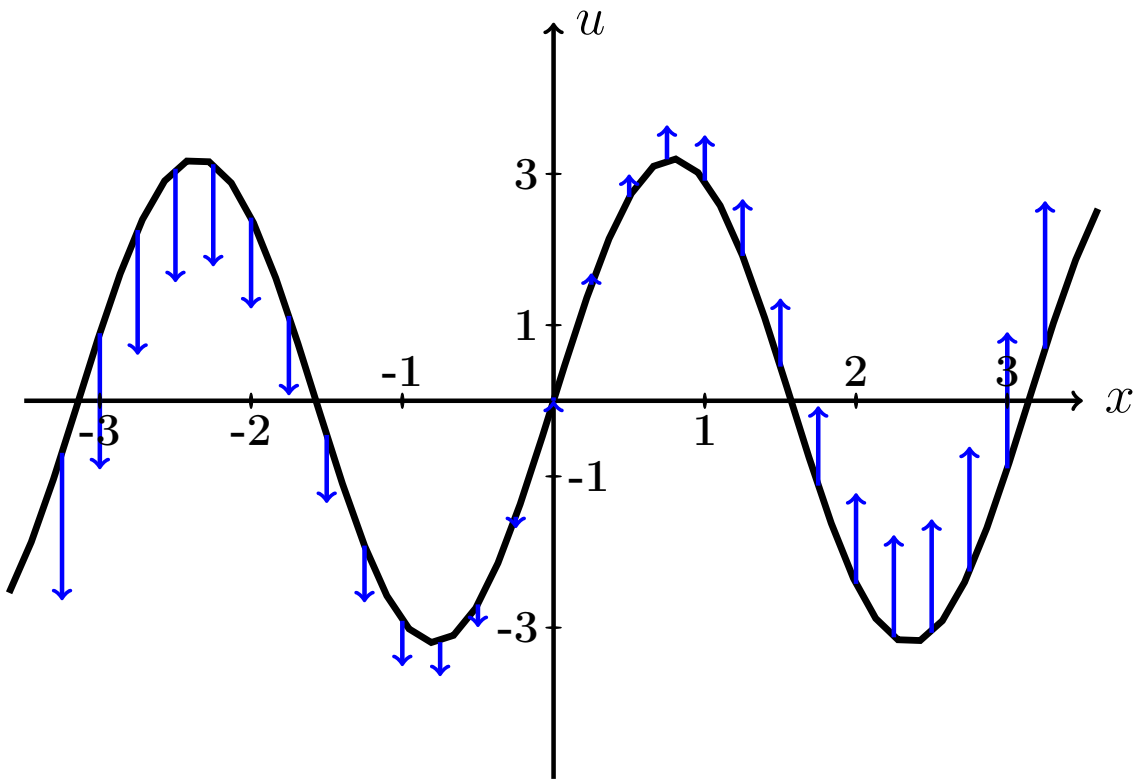


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 8.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 8 задача 4 (по Таблице 8.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 8.2.

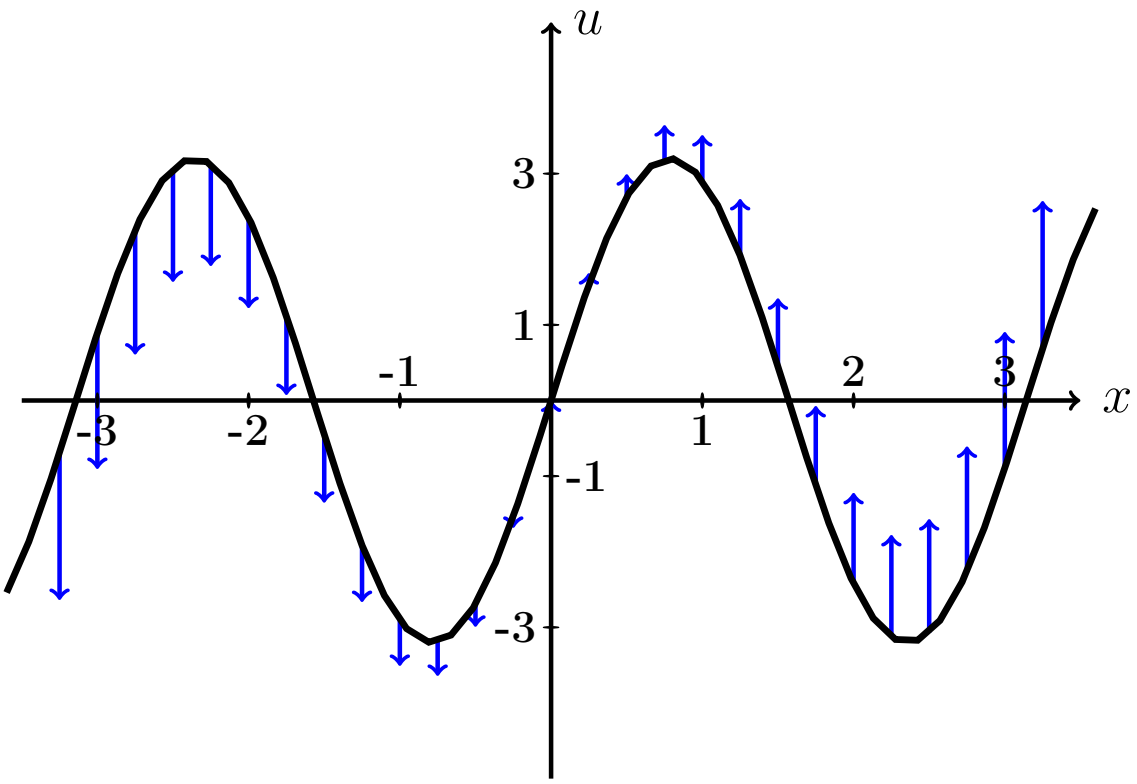


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

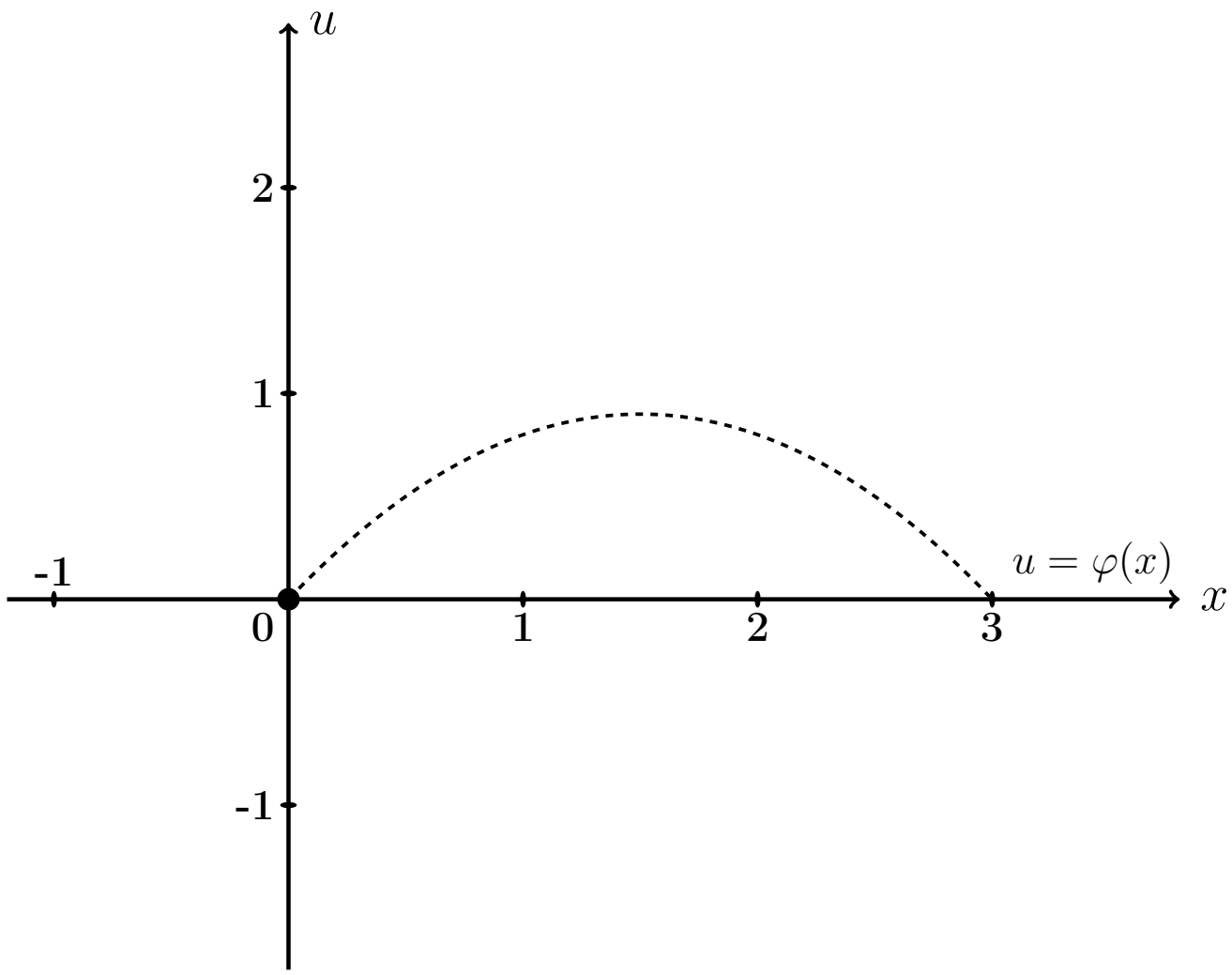


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 8.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 8.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 8.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 8.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 8 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 5 (красные клетки таб. 8.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 8.4.

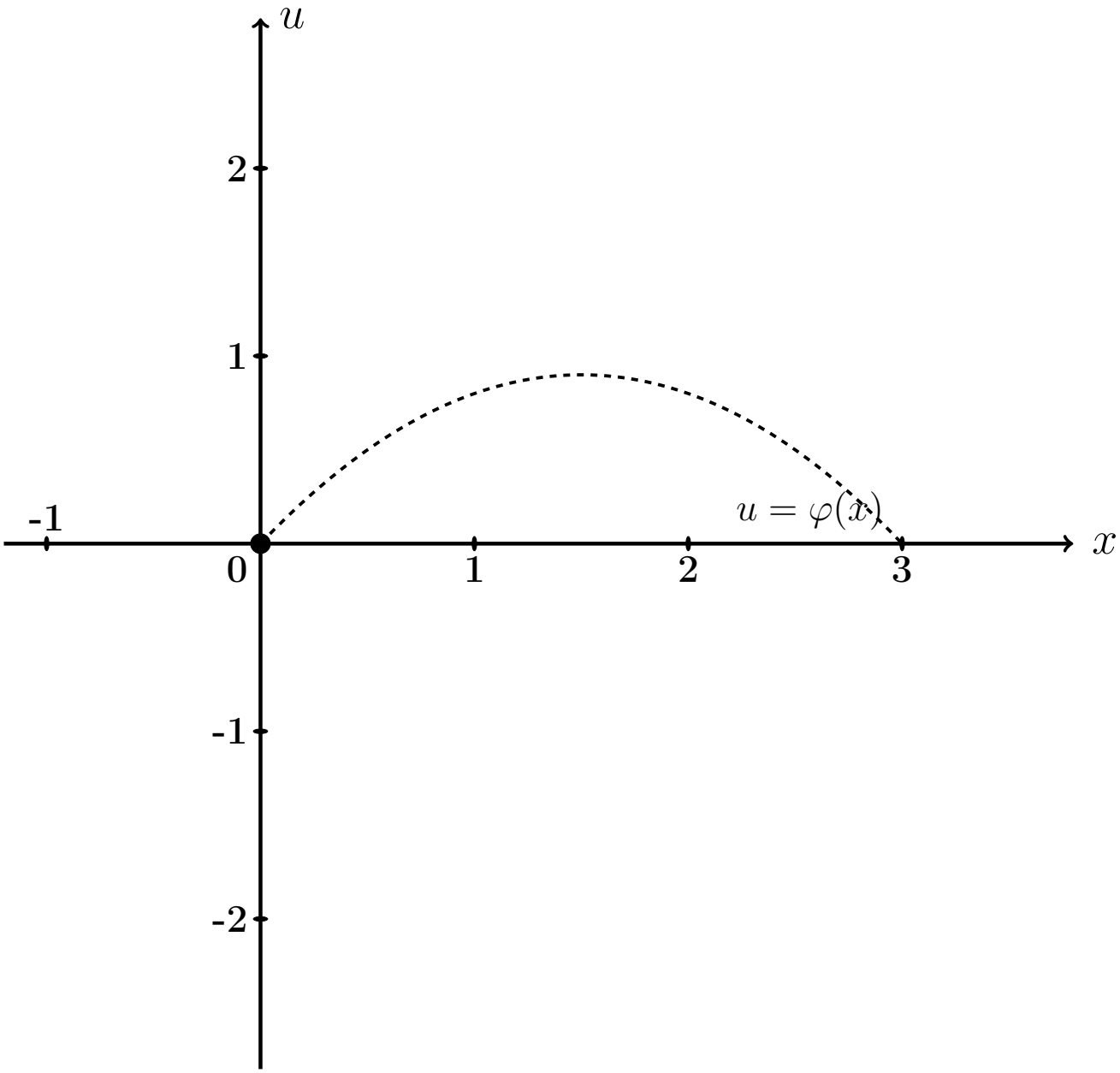


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

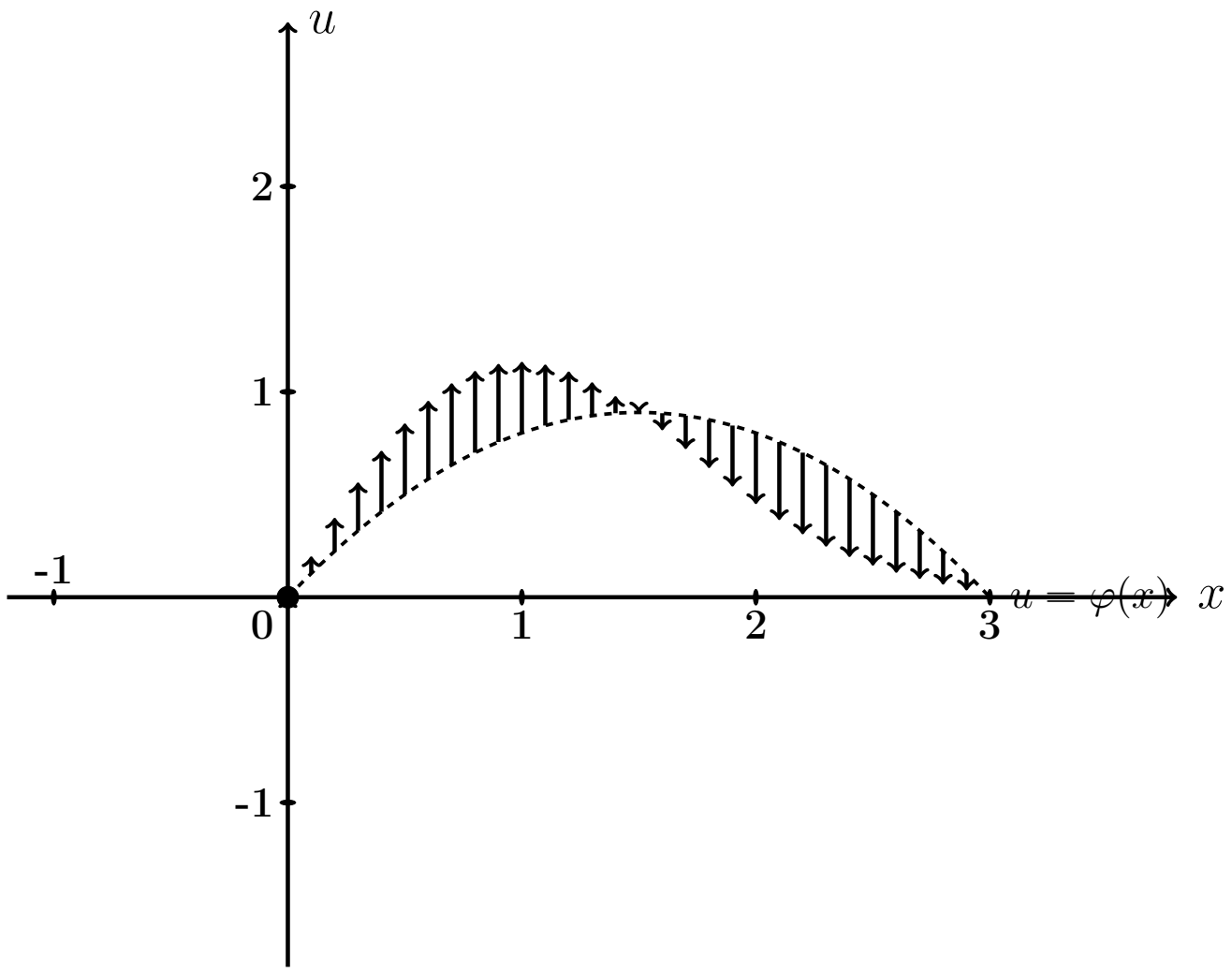


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 8.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.0\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.27$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 8.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 8.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 8.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 8 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 6 (красные клетки Таблицы 8.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 8.6.

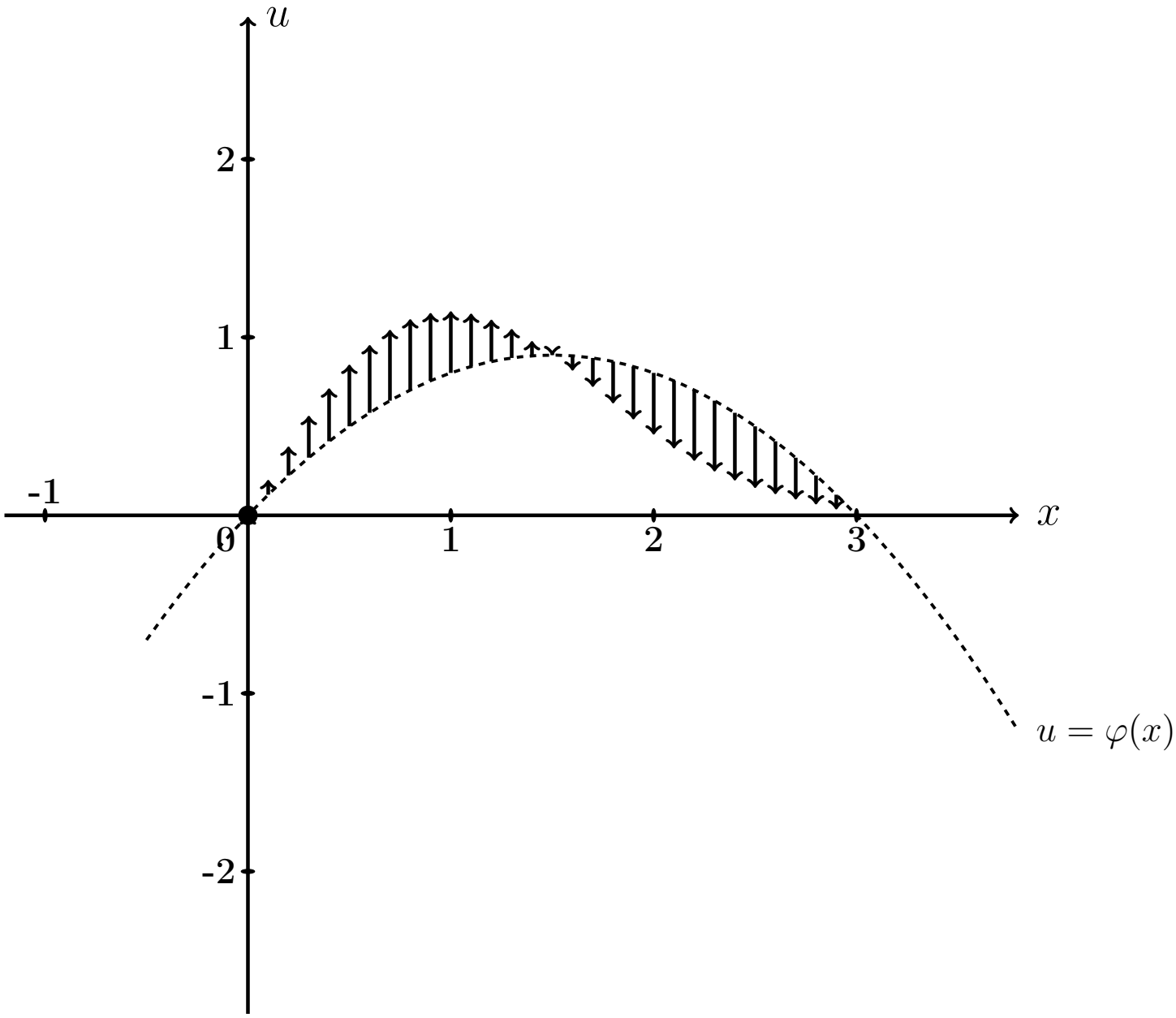


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{8.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{8.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (8.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{8.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (8.2), (8.3). Затабулировать решение уравнения (8.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (8.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (8.2), (8.3). Затабулировать решение уравнения (8.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (8.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 8.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (8.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{8.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (8.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (8.4) при граничных условиях (8.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{8.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{8.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{8.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (8.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (8.9). Следовательно, по формуле (8.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{8.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{8.11}$$

Шаг 6.

Таблица 8.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 8.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (8.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 8.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 8.9

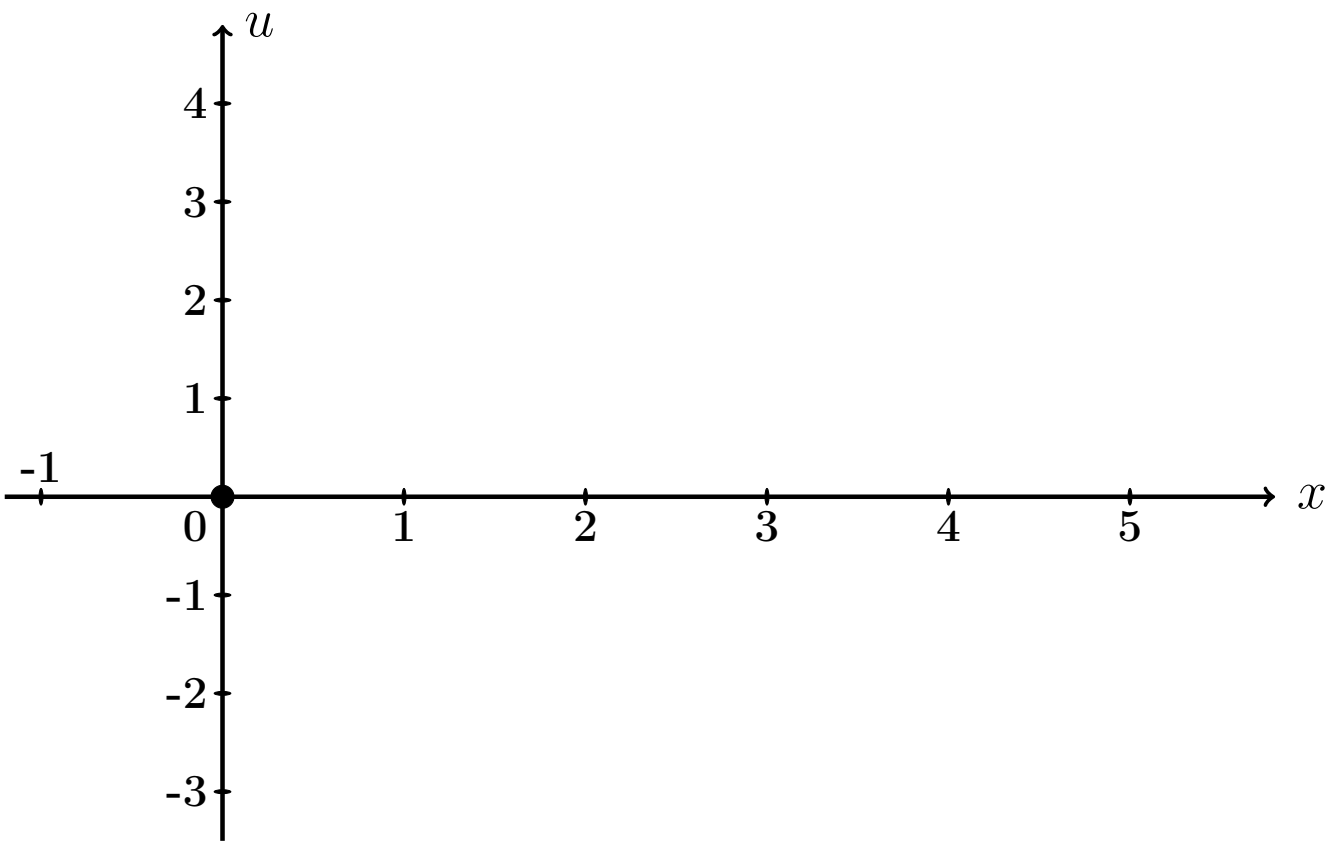


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 8 задача 7 (по Таб. 8.7, 8.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 7 (по таблице 8.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (8.6) и (8.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (8.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (8.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (8.9). Следовательно, по формуле (8.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

где C_k вычисляется по формулам (8.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (8.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 8.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (8.5),

$C_1' =$ по формуле (8.12)

и $C_3 =$ по таблице 8.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 8.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

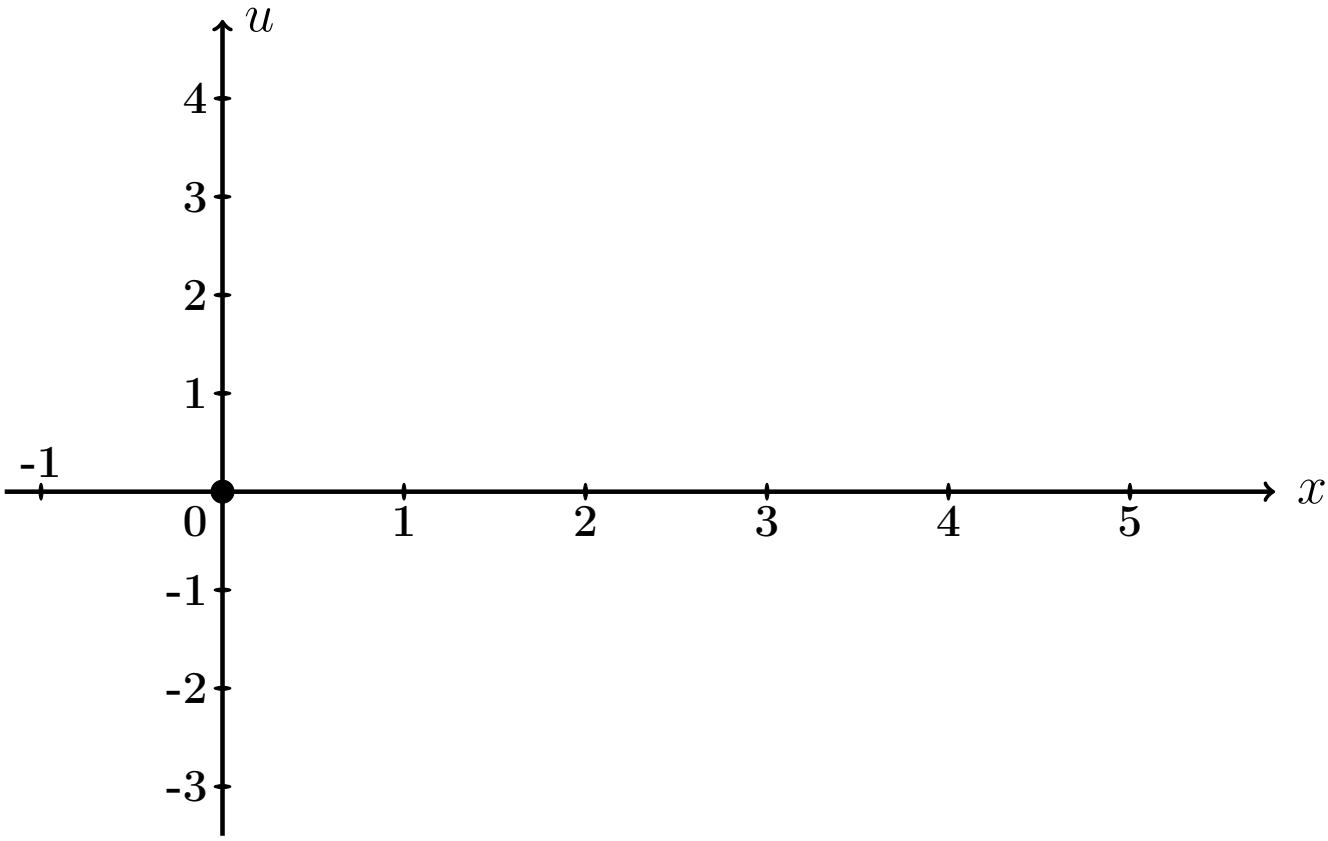


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 8 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (8.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 8 задача 7 (по таблице 8.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{8.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (8.1). Затабулировать решение уравнения (8.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

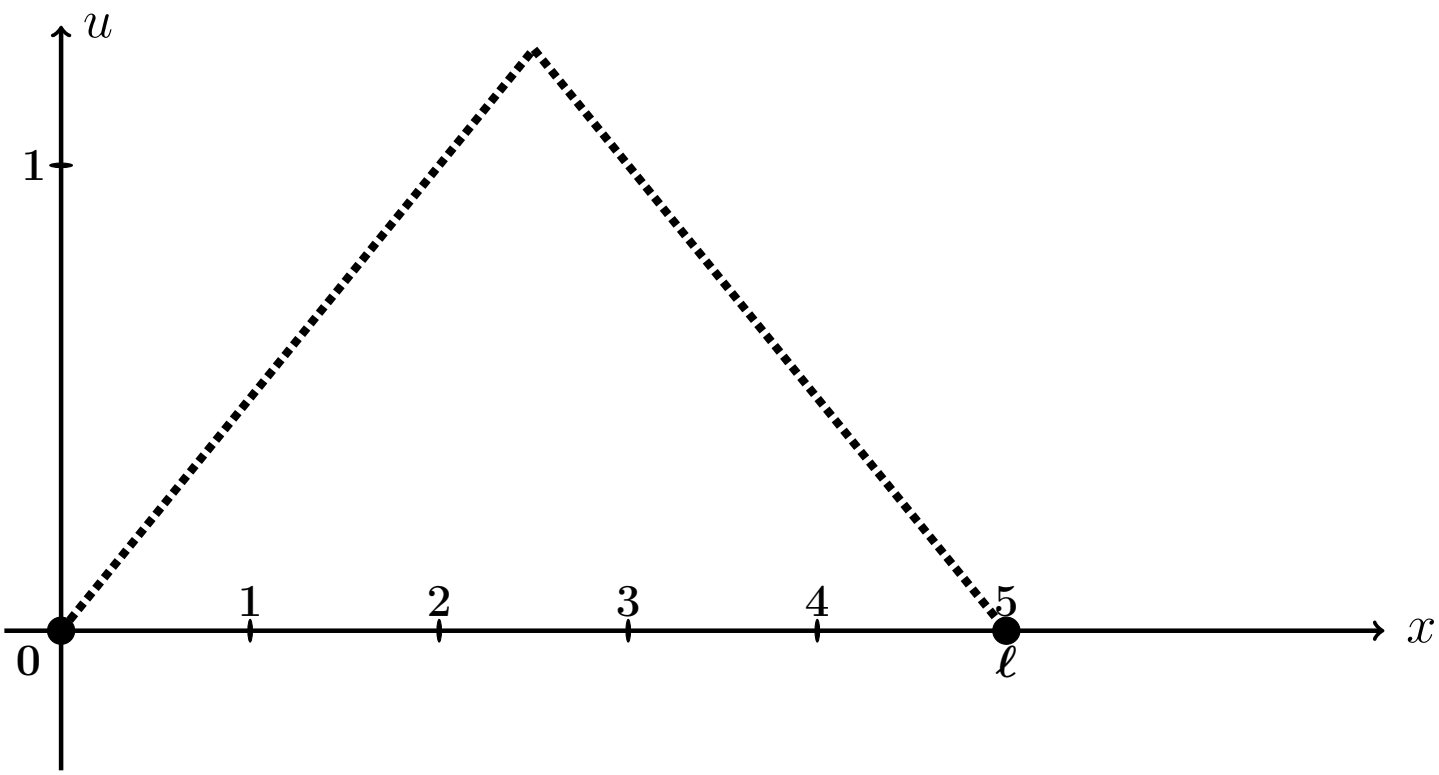


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (8.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5} , \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

где $\ell = 5$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 8.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 8.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 8.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 8.12, 8.13) формулы (8.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 8.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 8.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 8.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 8.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

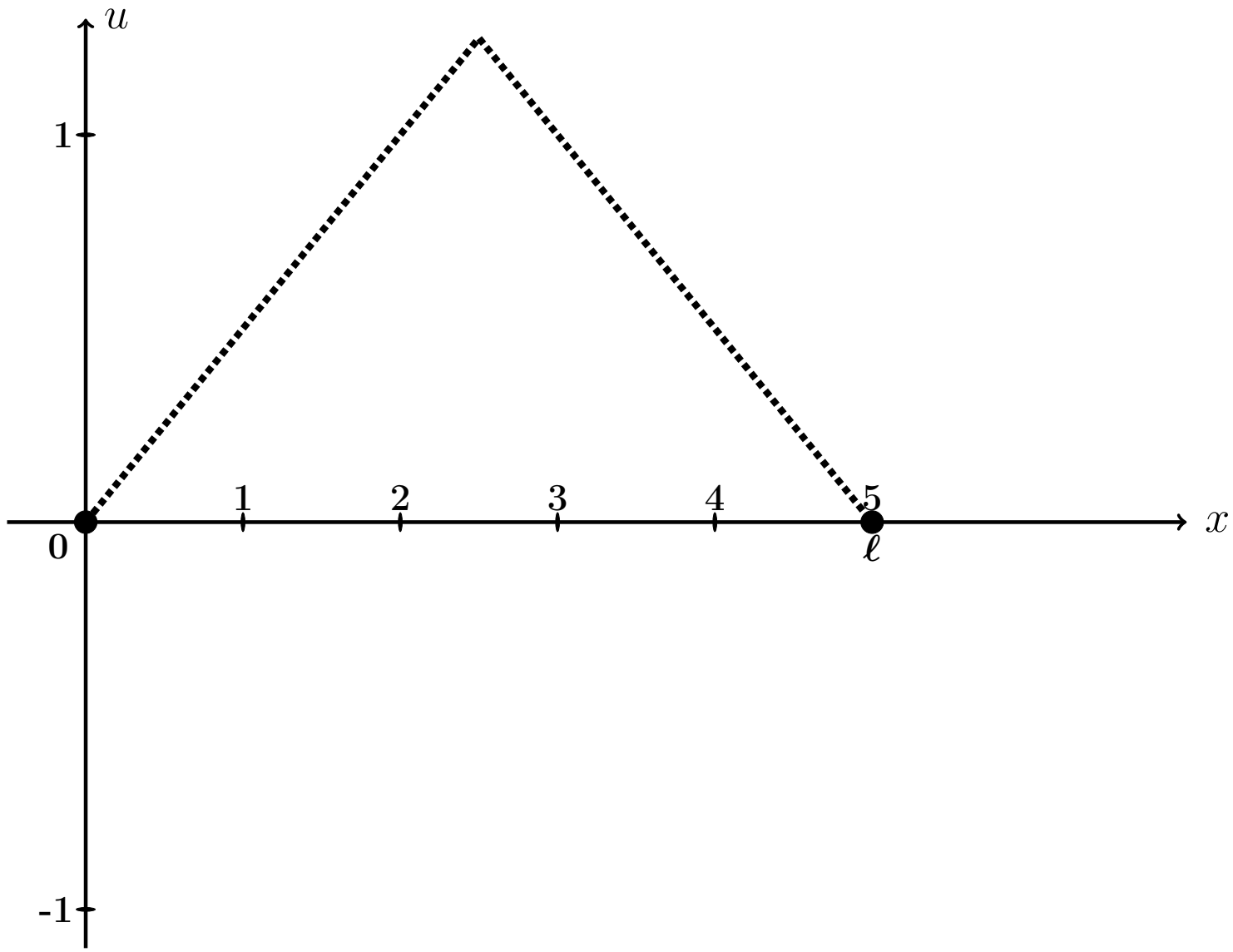


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (8.2).

Выборочная проверка вариант 8 задача 8 (по таблице 8.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 8 (по таблице 8.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 8 (по таблице 8.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 8 (по таблице 8.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.00)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.00)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(7.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{8.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{8.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

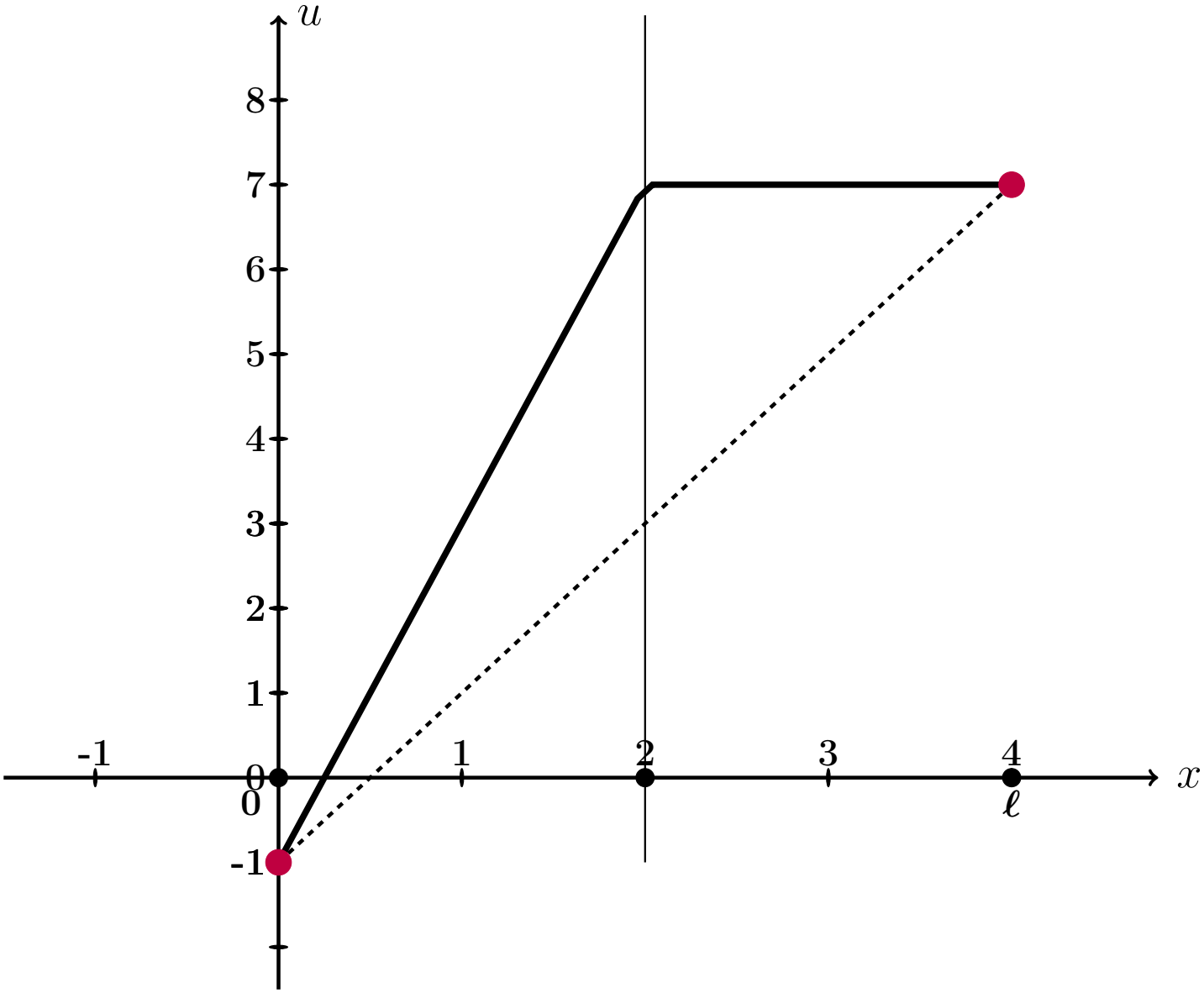


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (8.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (8.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (8.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{8.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)}\cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)}\cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{8.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (8.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (8.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{8.7}$$

Таблица 8.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (8.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (8.1) с начальным условием (8.2) и граничными условиями (8.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (8.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_4 = 7.0$ — значения граничных условий (8.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 8.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 8.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-1	0,6	2,2	3,8	5,4	7	7	7	7	7	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 8.16.

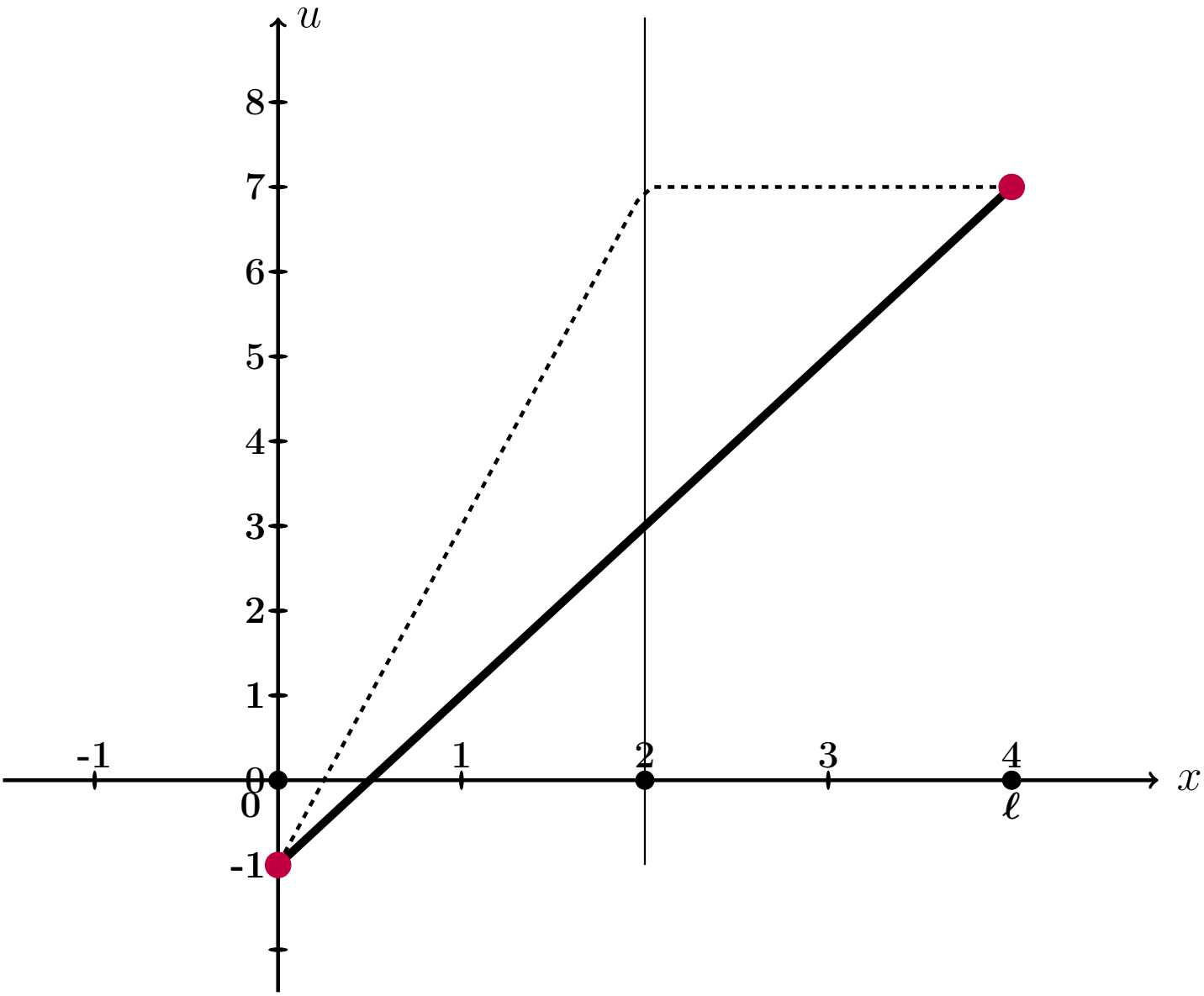


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (8.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (8.3).

Выборочная проверка вариант 8 задача 9 (по формулам (8.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 9 (по таблице 8.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 8 задача 9 (по таблице 8.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 9

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{7}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{7}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

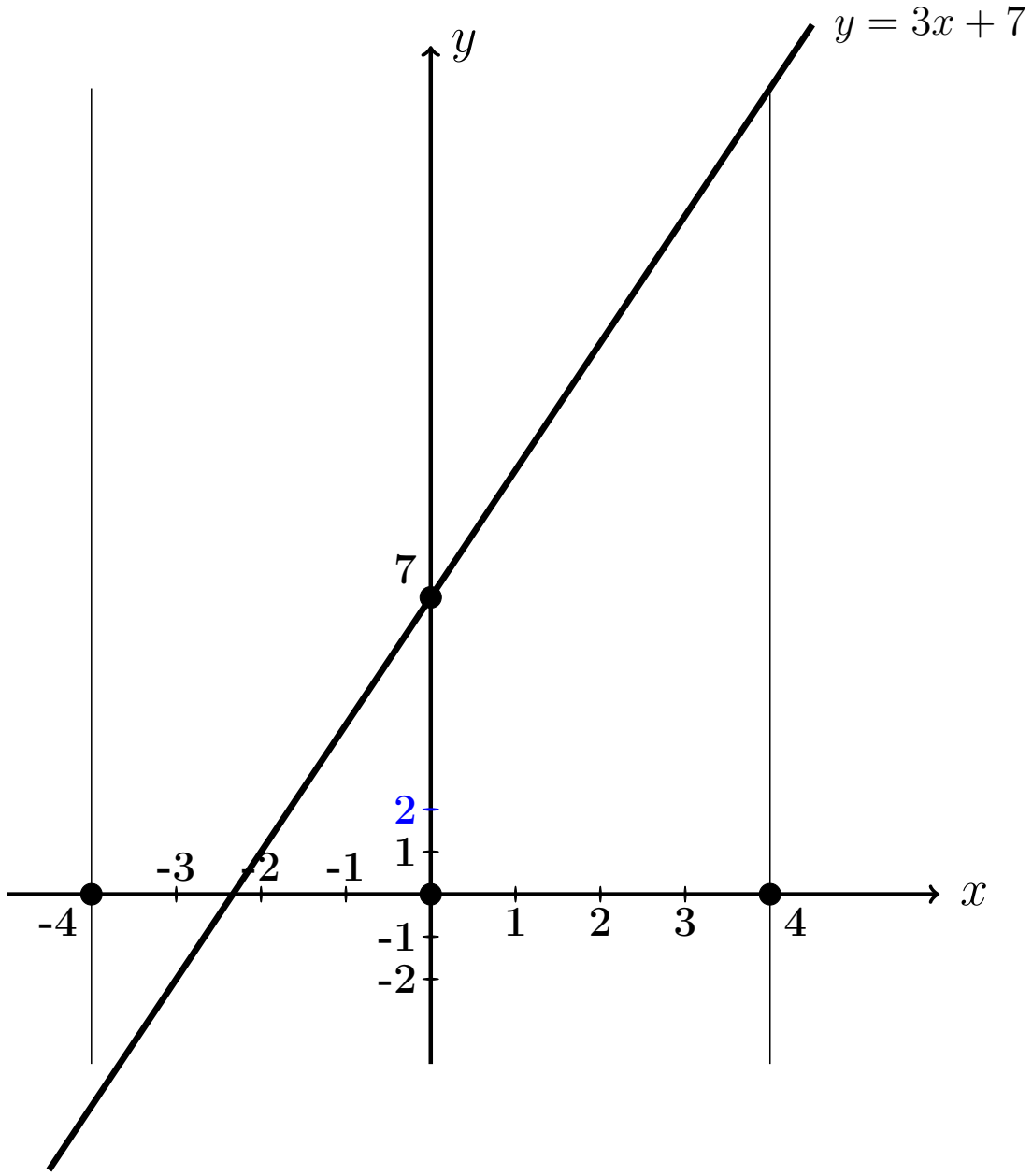
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 9.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+7$	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 9.1



Выборочная проверка вариант 9 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 1 (по Таблице 9.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sin x + 24y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (8\sin x + 24y^3)dx = 8\int \sin x\,dx + 24\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad = 12\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x + 8t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x + 8t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x + 8t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 9 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

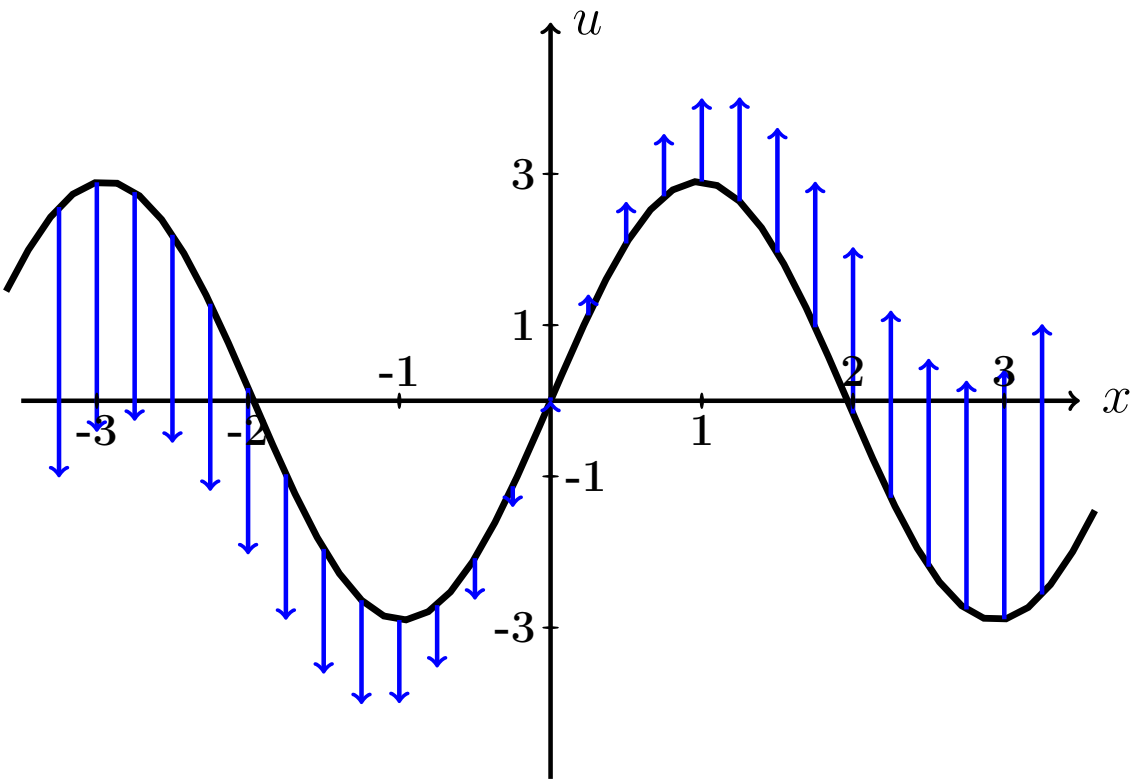


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 9.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 9 задача 4 (по Таблице 9.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 9.2.

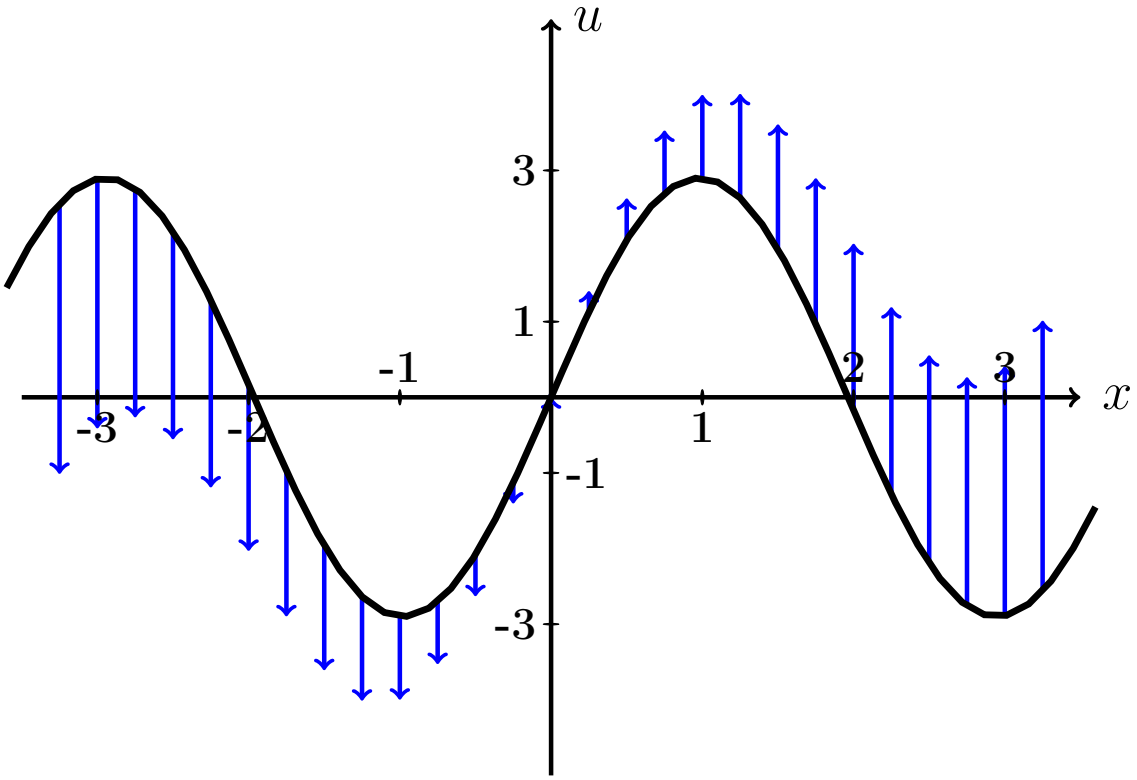


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

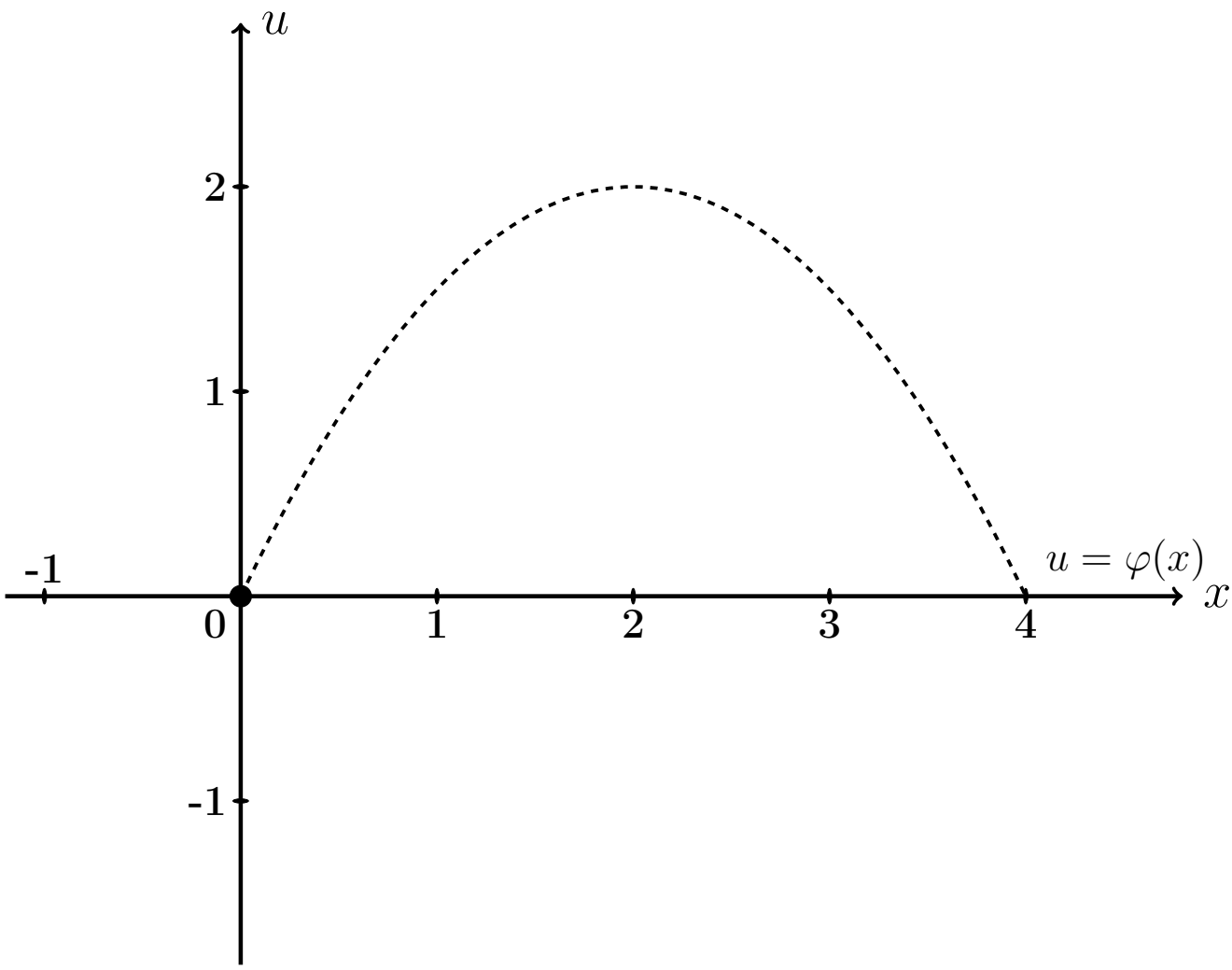


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 9.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 9.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 9.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 9.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 9 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 5 (красные клетки таб. 9.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 9.4.

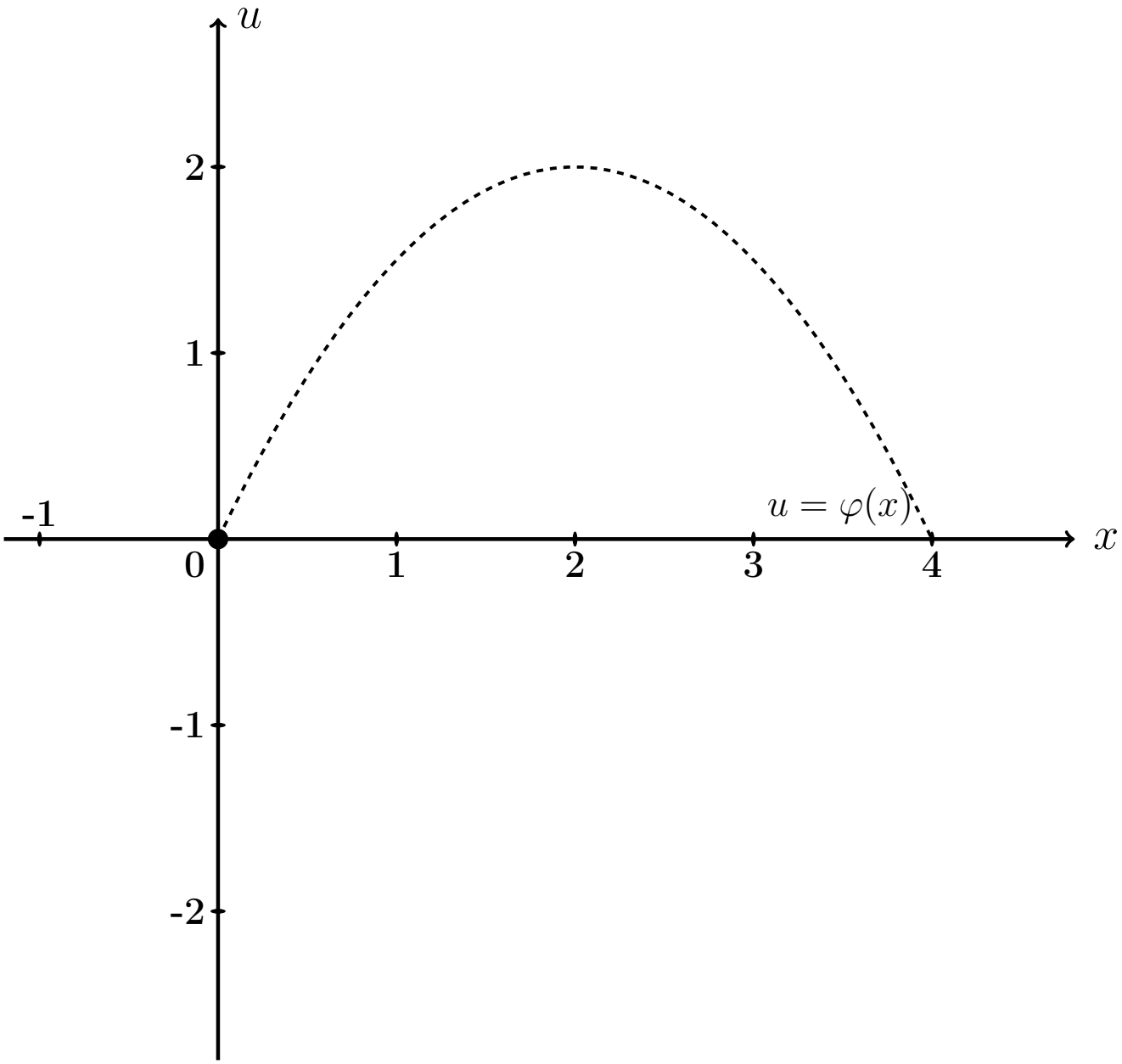


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

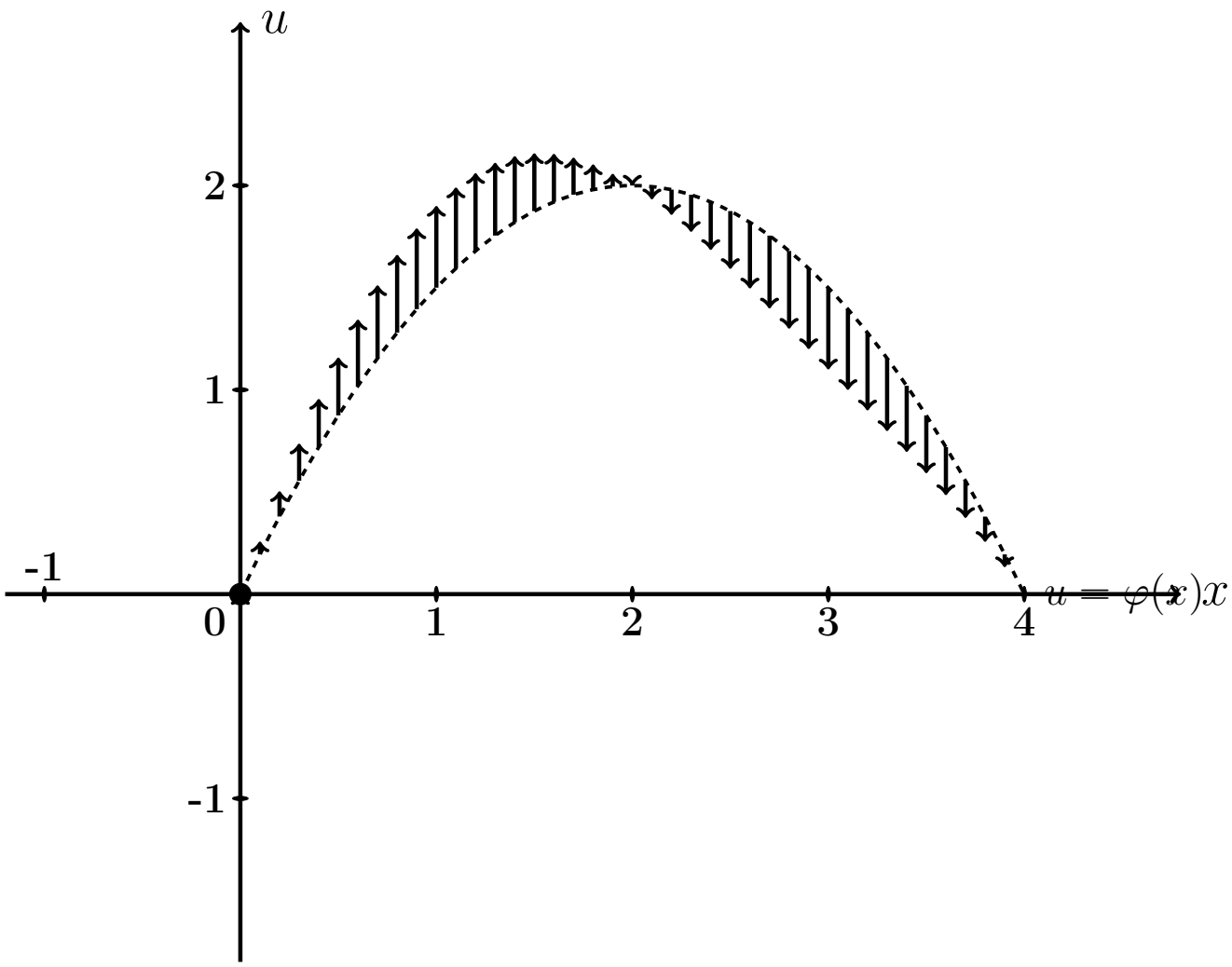


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 9.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 9.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 9.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 9.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 9 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 6 (красные клетки Таблицы 9.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 9.6.

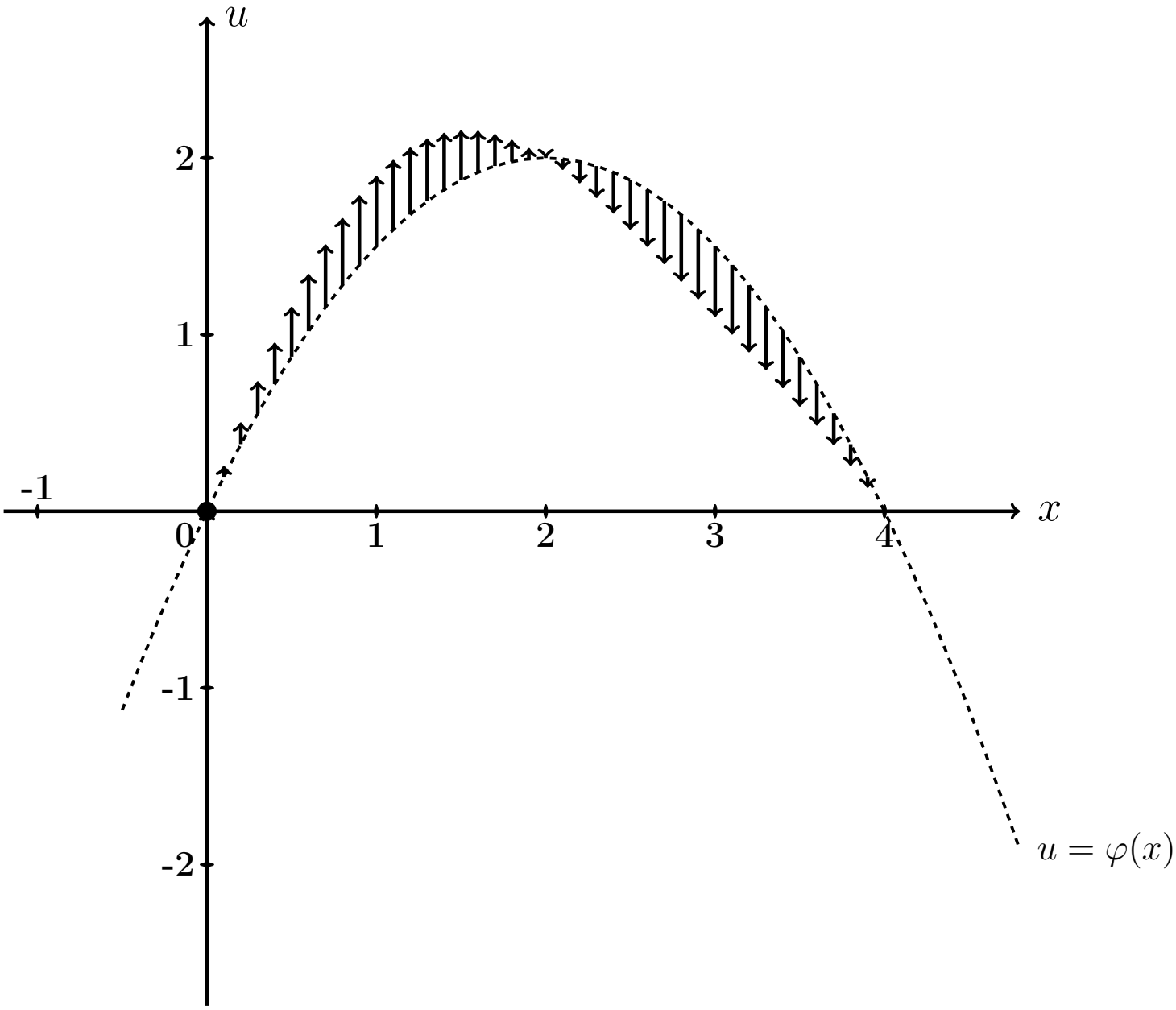


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{9.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{9.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (9.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{9.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (9.2), (9.3). Затабулировать решение уравнения (9.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (9.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (9.2), (9.3). Затабулировать решение уравнения (9.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (9.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 9.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (9.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{9.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (9.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (9.4) при граничных условиях (9.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{9.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{9.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \left(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{9.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (9.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (9.9). Следовательно, по формуле (9.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{9.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{9.11}$$

Шаг 6.

Таблица 9.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 9.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (9.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 9.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 9.9

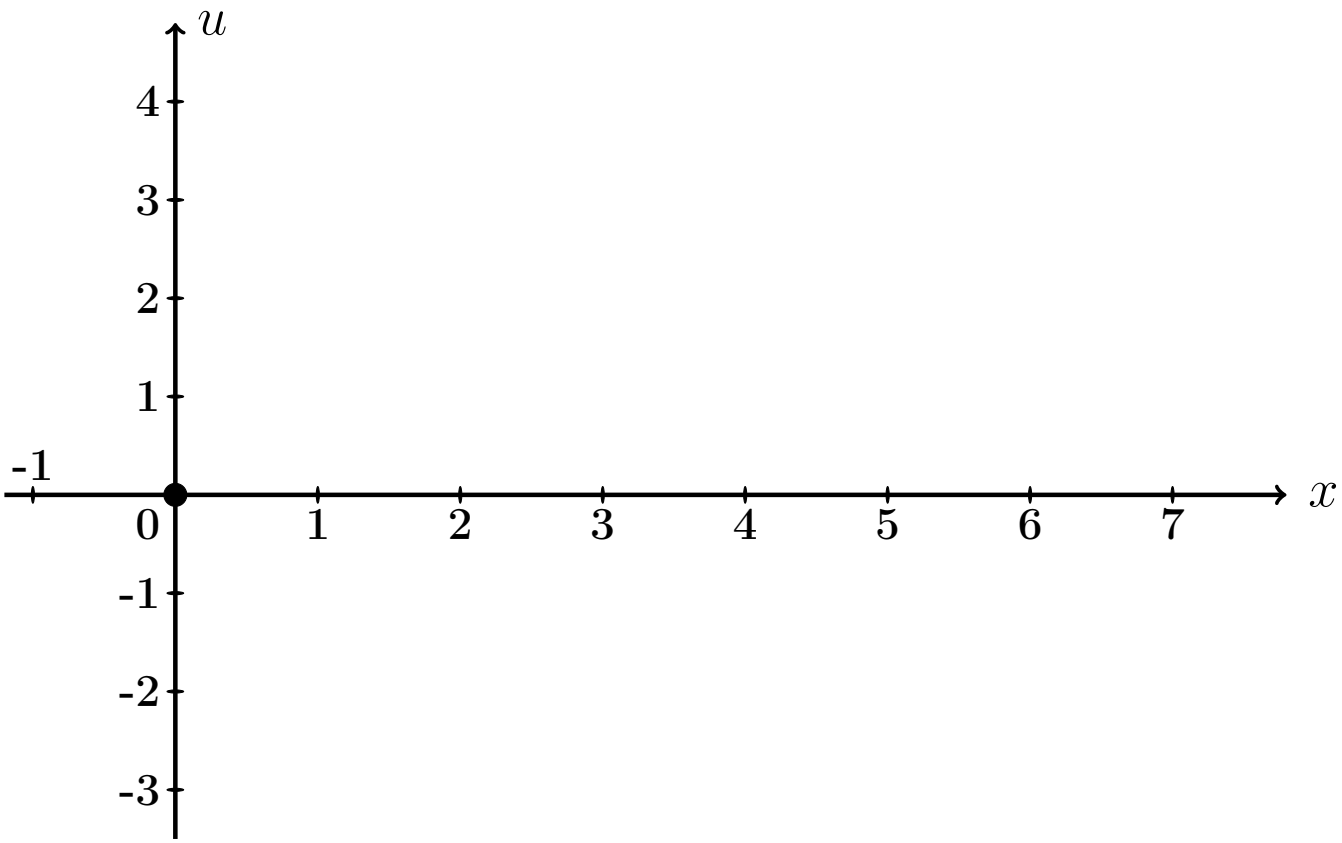


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 9 задача 7 (по Таб. 9.7, 9.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 9 задача 7 (по таблице 9.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (9.6) и (9.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (9.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (9.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (9.9). Следовательно, по формуле (9.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (9.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (9.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 9.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (9.5),

$C_1' =$ по формуле (9.12)

и $C_3 =$ по таблице 9.8 . Окончательно

$u_{\text{прибл}}(x,t) =$ $+$ $+$

$+$ $+$

$+$.

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 9.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

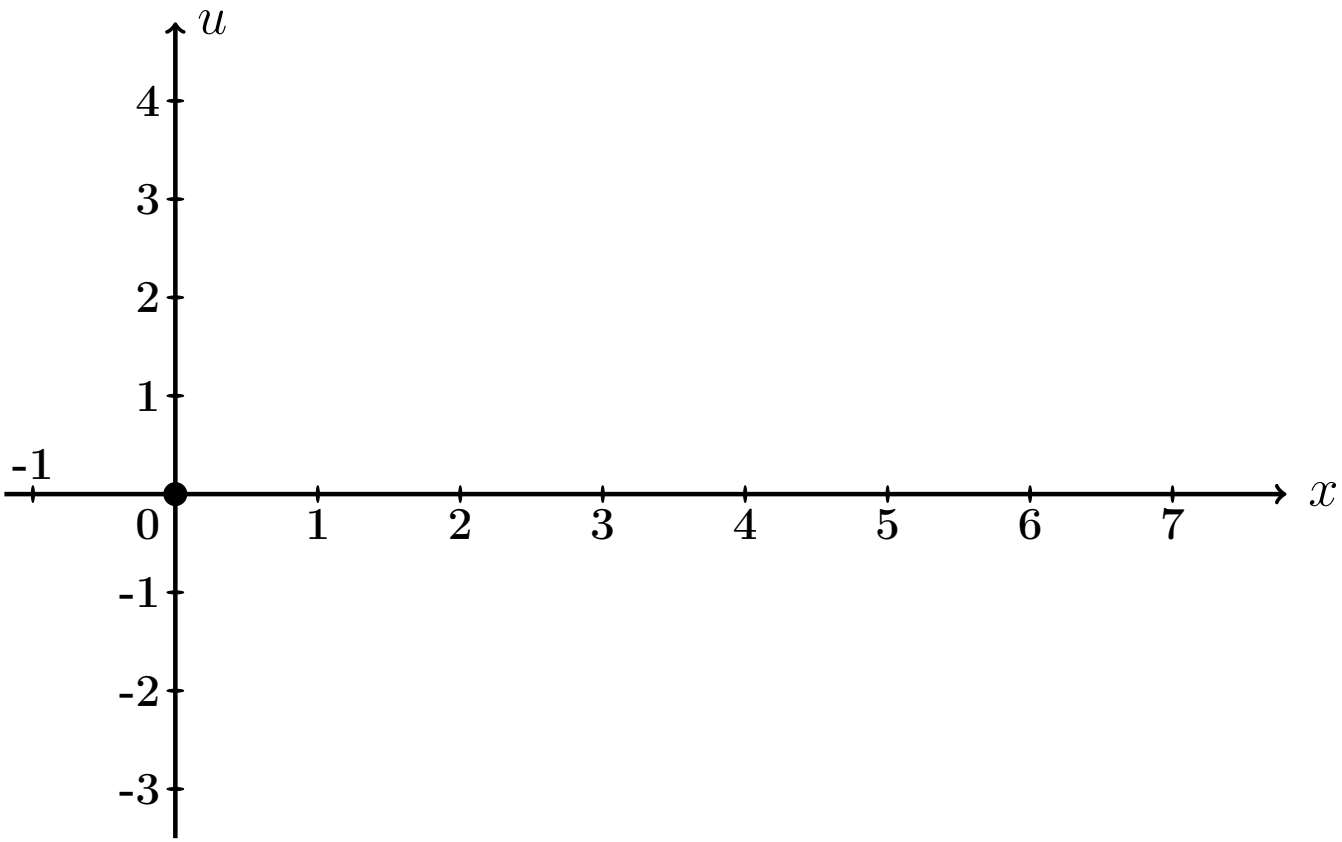


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 9 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (9.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 9 задача 7 (по таблице 9.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{9.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (9.1). Затабулировать решение уравнения (9.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

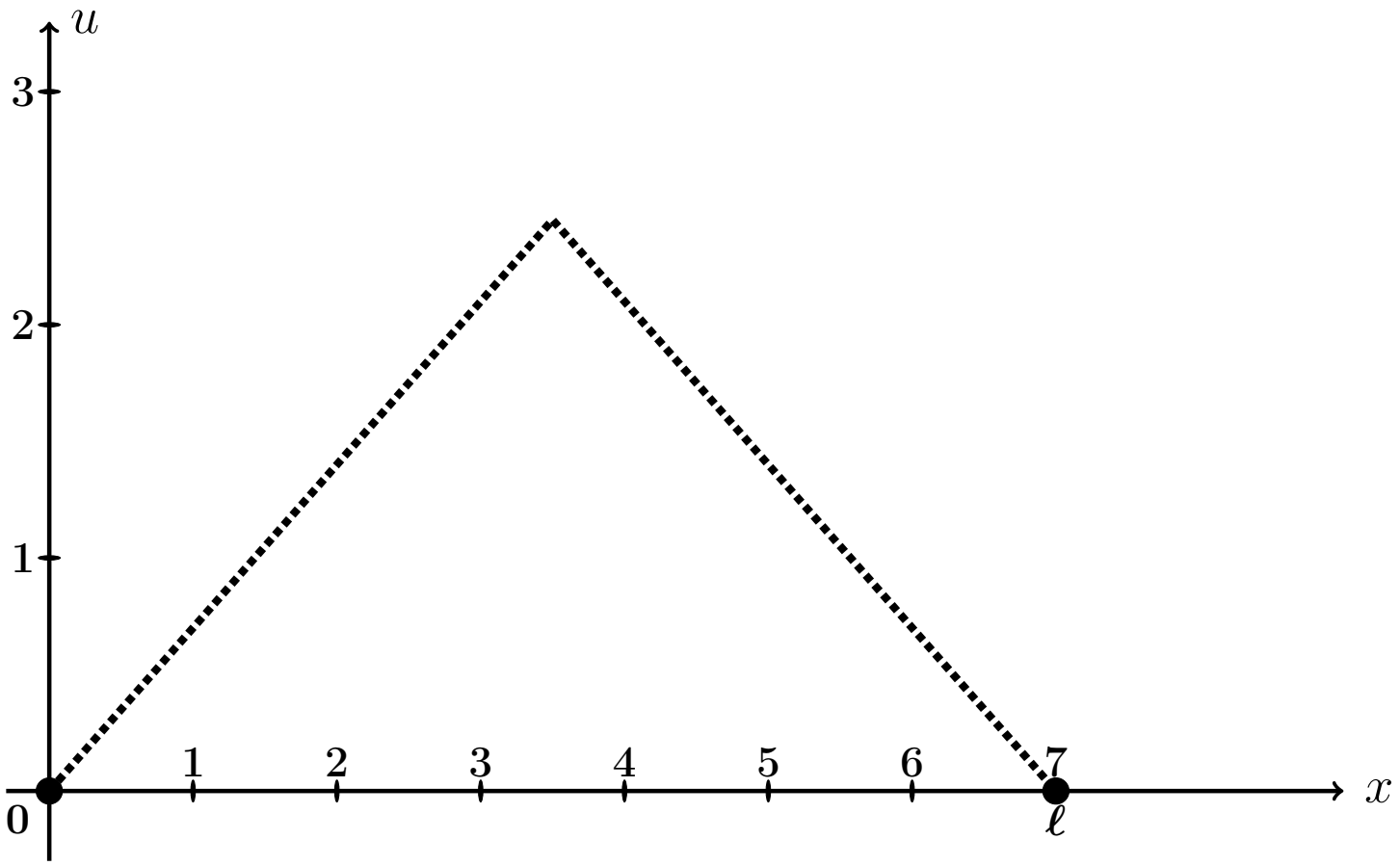


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (9.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

где $\ell = 7$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 9.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 9.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 9.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 9.12, 9.13) формулы (9.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 9.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 9.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 9.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 9.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

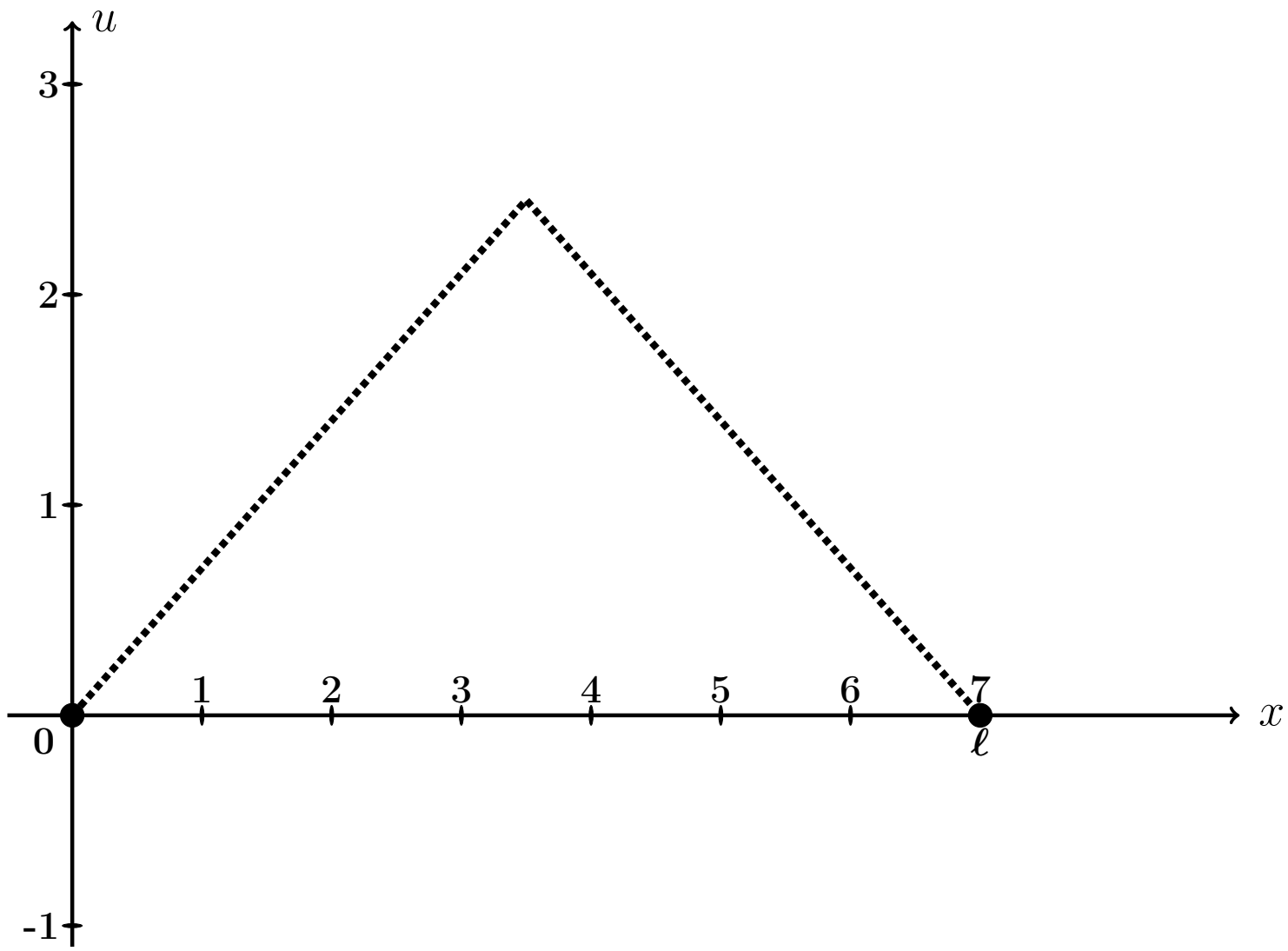


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (9.2).

Выборочная проверка вариант 9 задача 8 (по таблице 9.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 8 (по таблице 9.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 8 (по таблице 9.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 8 (по таблице 9.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.33)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.67)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(17.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{9.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{9.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

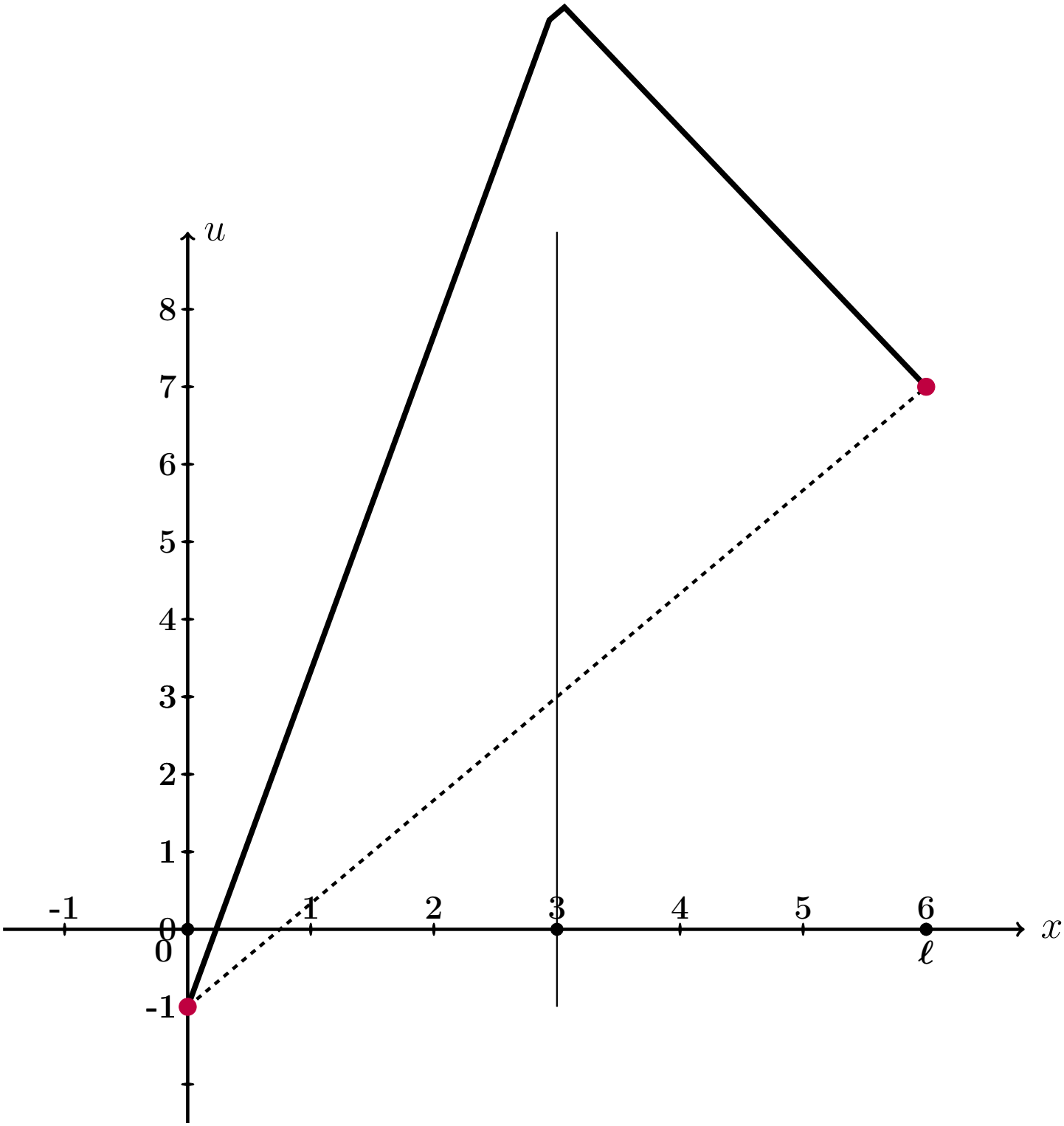


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (9.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (9.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (9.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{9.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{9.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (9.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (9.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{9.7}$$

Таблица 9.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (9.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (9.1) с начальным условием (9.2) и граничными условиями (9.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (9.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_6 = 7.0$ — значения граничных условий (9.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 9.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 9.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-1	1,6	4,2	6,8	9,4	12	11	10	9	8	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 9.16.

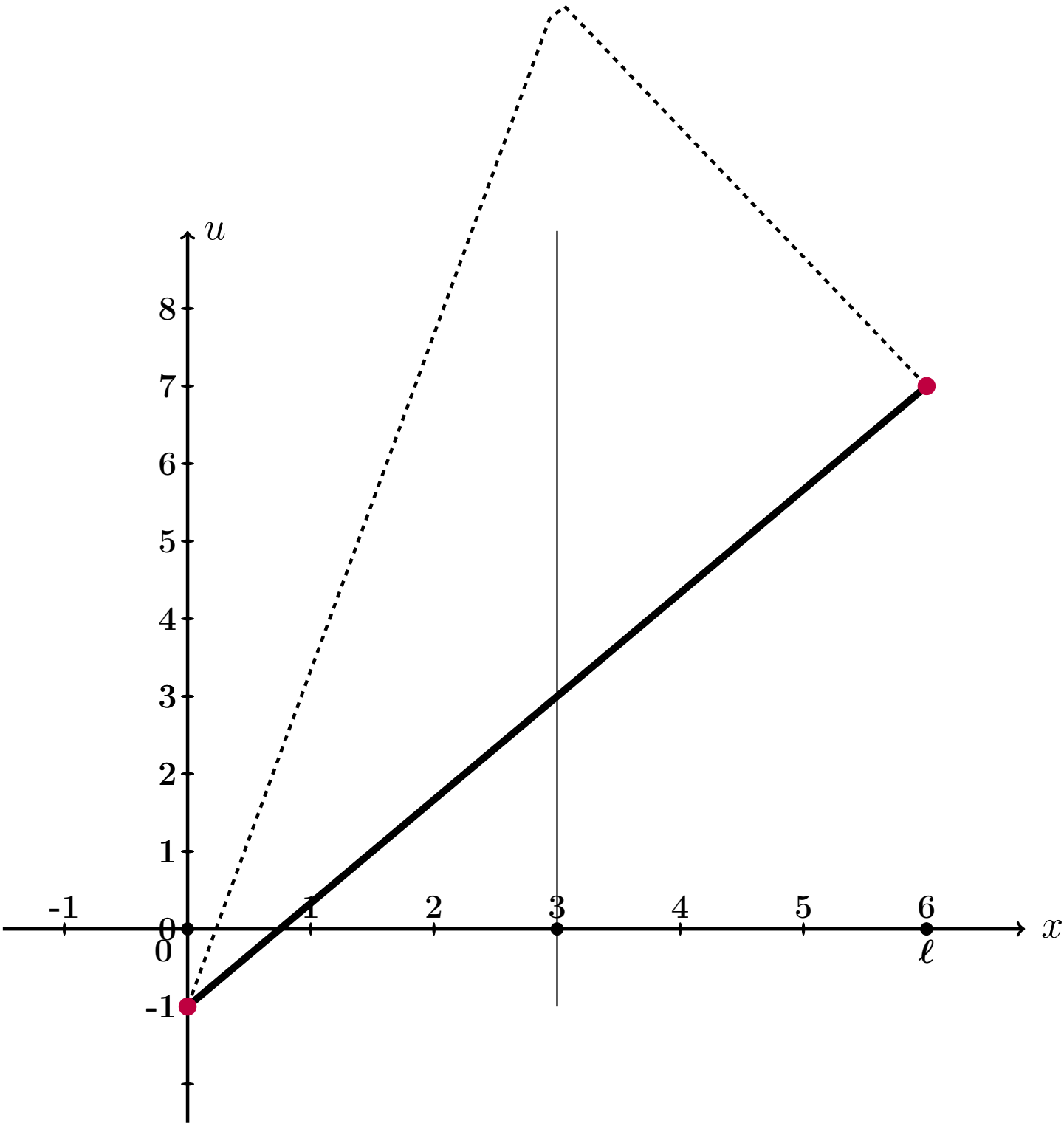


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (9.2), а черной сплошной линией — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (9.3).

Выборочная проверка вариант 9 задача 9 (по формулам (9.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 9 (по таблице 9.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 9 задача 9 (по таблице 9.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 10

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 1 \cdot x + 10$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 1 \cdot x + 10$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 1 \cdot x + 10$.

$$y = 1 \cdot x + 10 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x + 10)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{10}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{10}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x + 10)\cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{10}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{10}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$1 \cdot x + 10 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right) = \boxed{} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k = 1, 2, 3$:

$$S_1(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5}$$

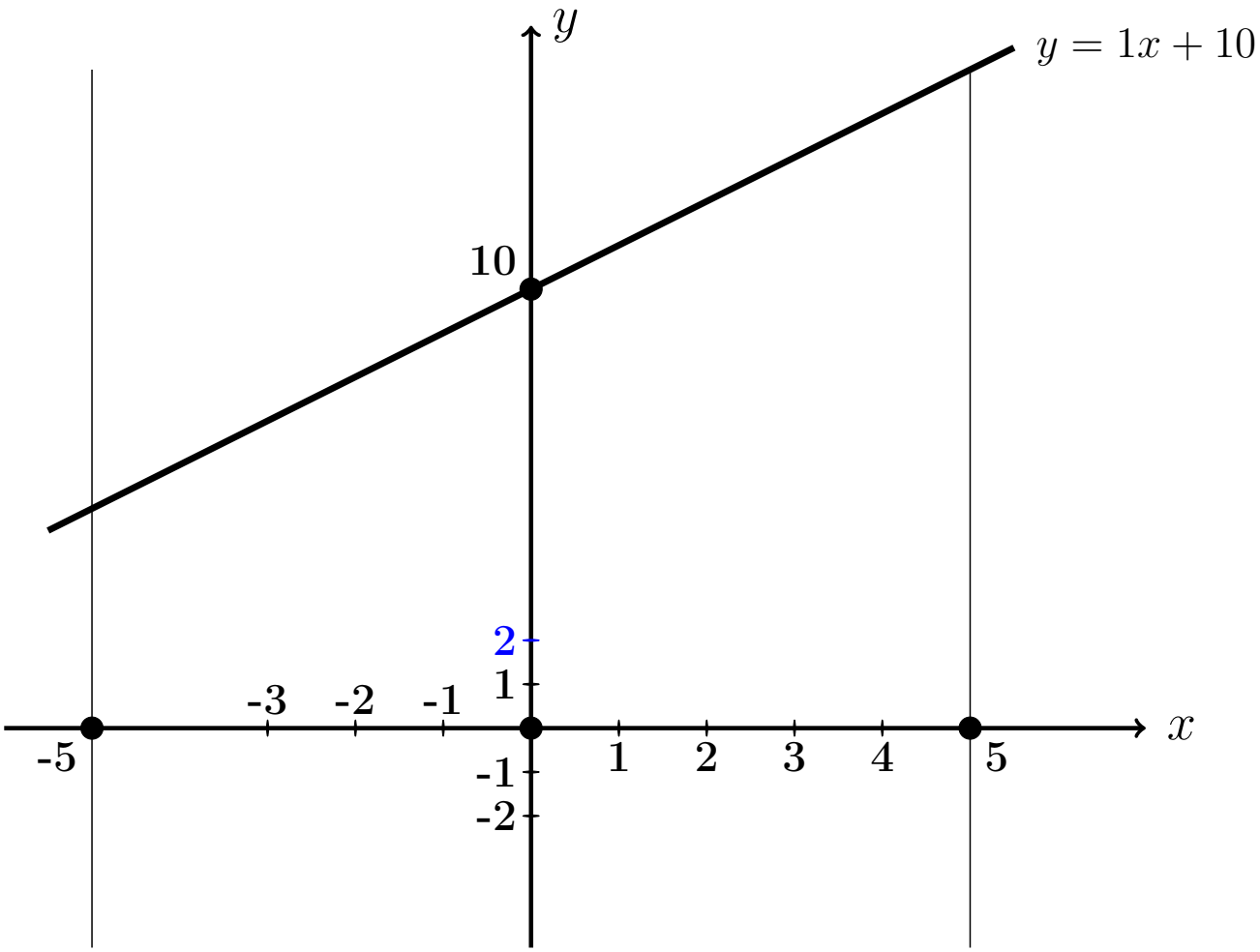
$$S_3(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + B_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{5} =$$
$$= \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + \boxed{} \cdot \sin \frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 10.1 (Табулировка $y = 1x + 10$ и $y = S_n(x)$, $n = 1, 2, 3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1x + 10$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$y = S_1(x)$		*									
$y = S_2(x)$					*						
$y = S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 10.1



Выборочная проверка вариант 10 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 1 (по Таблице 10.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sqrt{x} + \frac{24}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(8\sqrt{x} + \frac{24}{y}\right)dx = 8\int x^{1/2}dx + 24\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad + C(y) = \qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad + C(y) = 12\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 8x^3 + 7\sin 3t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x \ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 8x^3 + 7\sin 3t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (8x^3 + 7\sin 3t)dt = \qquad + C(x) \ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = \qquad = \qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = \qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad$

Выборочная проверка вариант 10 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

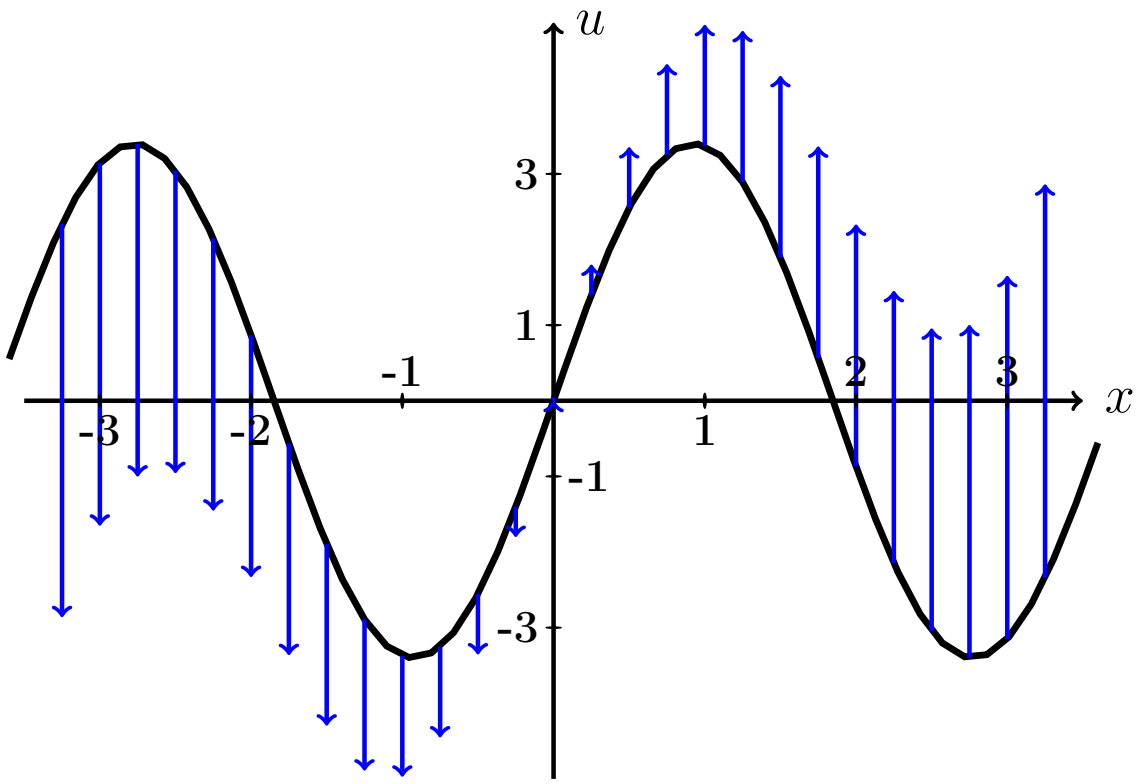


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 10.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 10 задача 4 (по Таблице 10.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 10.2.

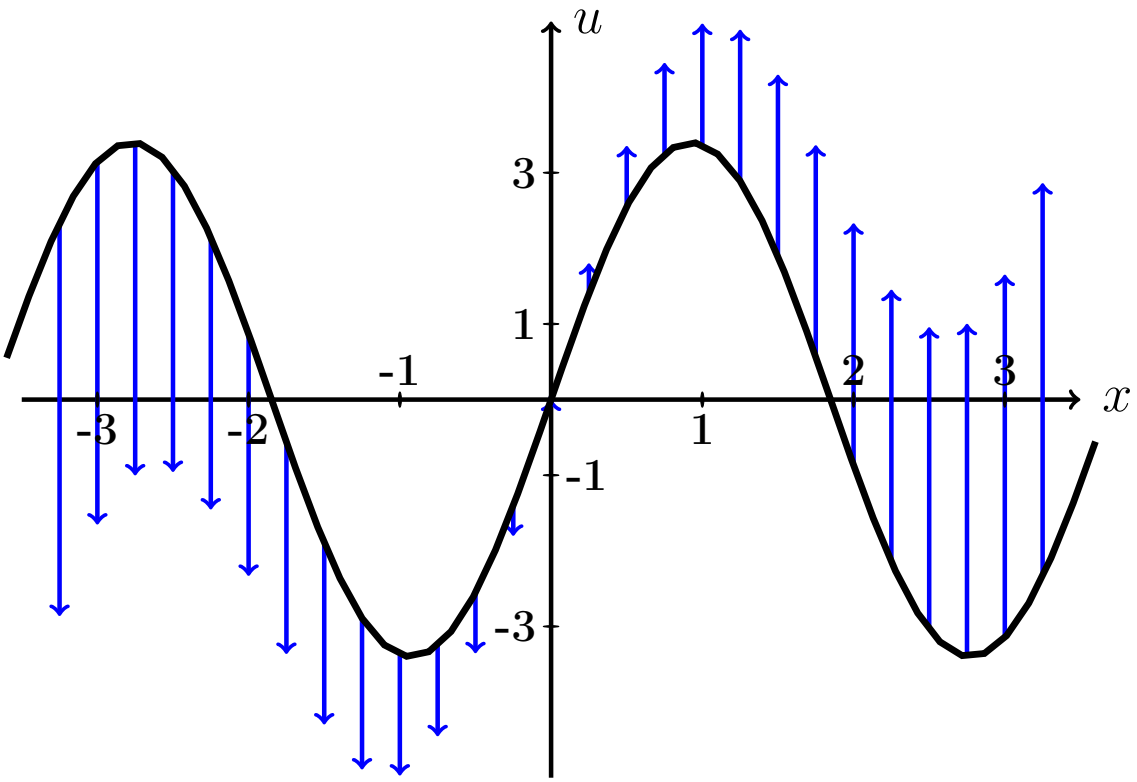


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

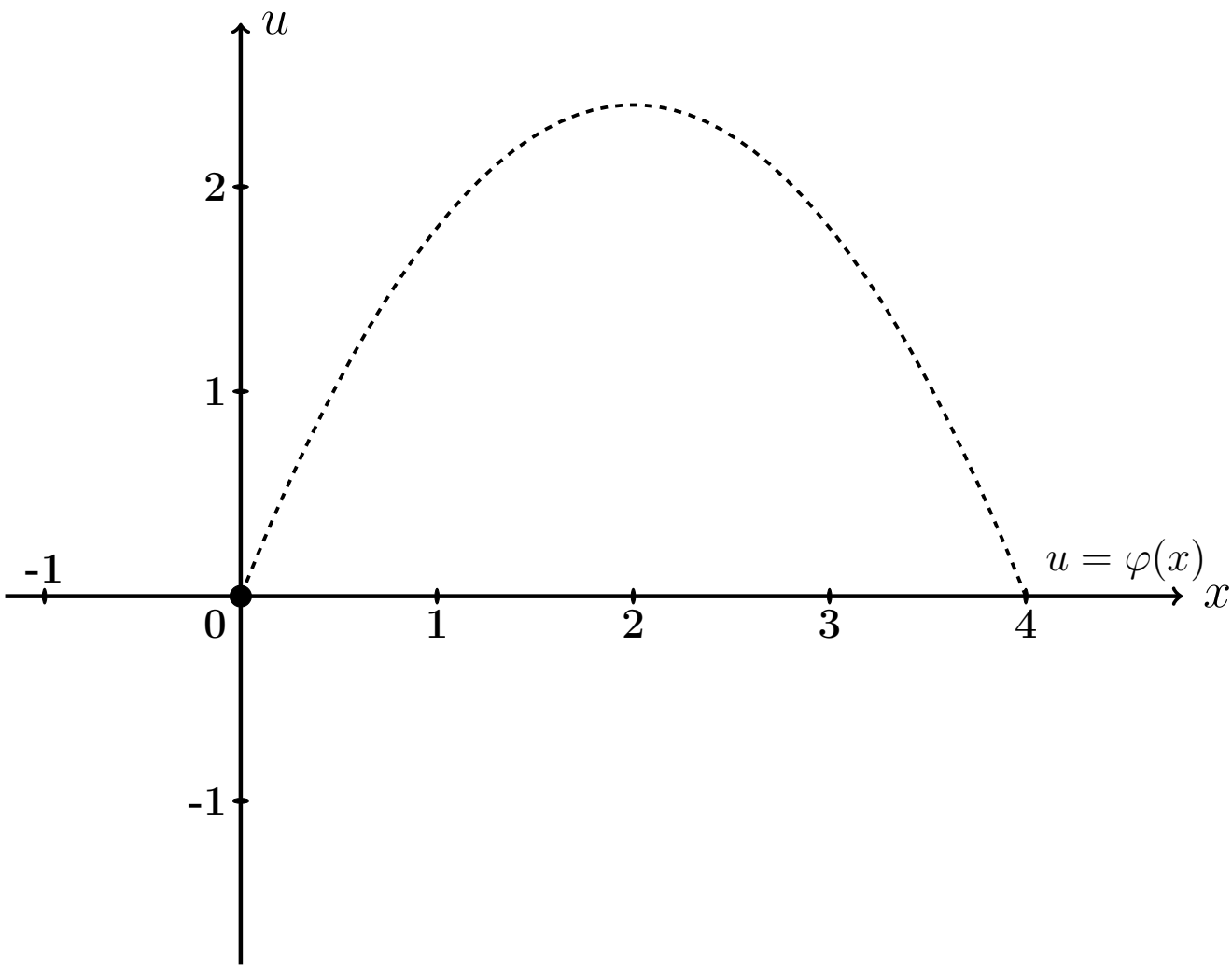


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 10.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 10.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 10.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 10.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 10 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 5 (красные клетки таб. 10.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 10.4.

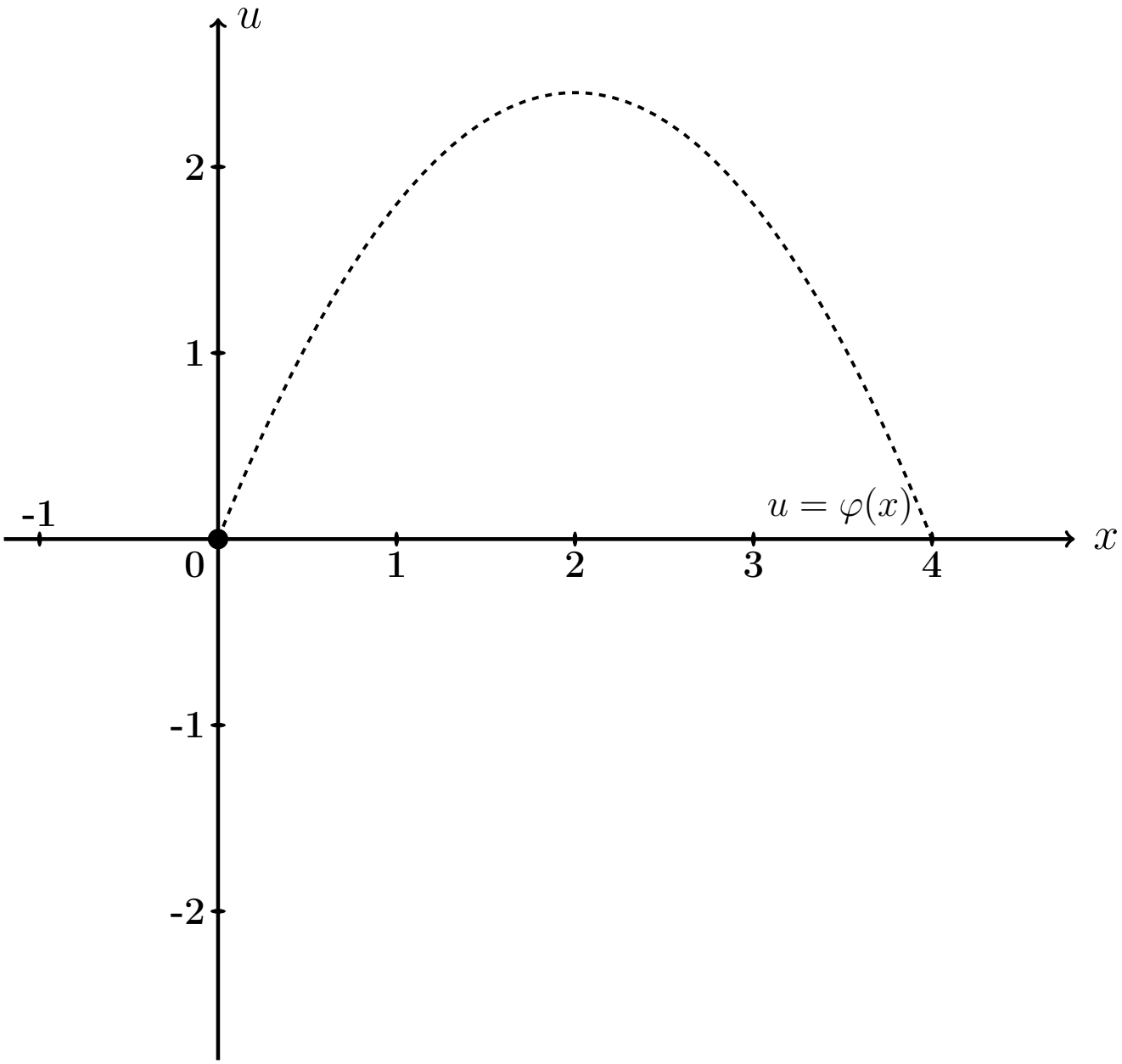


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

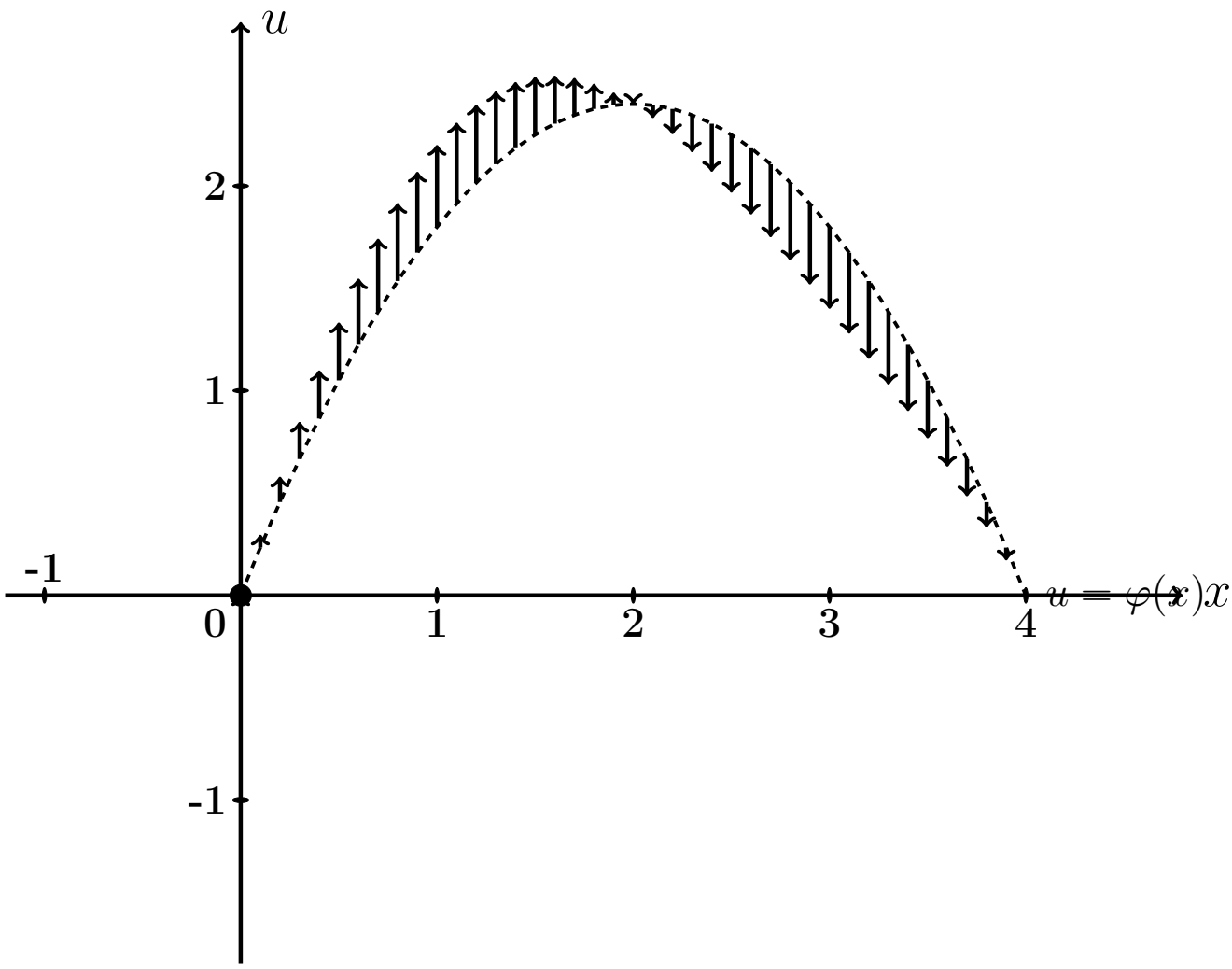


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 10.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\square}{\square}\sin\frac{k\pi x}{\square} + B_2\sin\frac{\square}{\square}\sin\frac{\square}{\square}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 10.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \square + \square +$$

$$+ \square + \square$$

где $A_1 = \square$, $A_3 = \square$, $A_5 = \square$ по таблице 10.5, а $B_2 = \square$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \square + \square +$$

$$+ \square + \square$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 10.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 10 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 6 (красные клетки Таблицы 10.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 10.6.

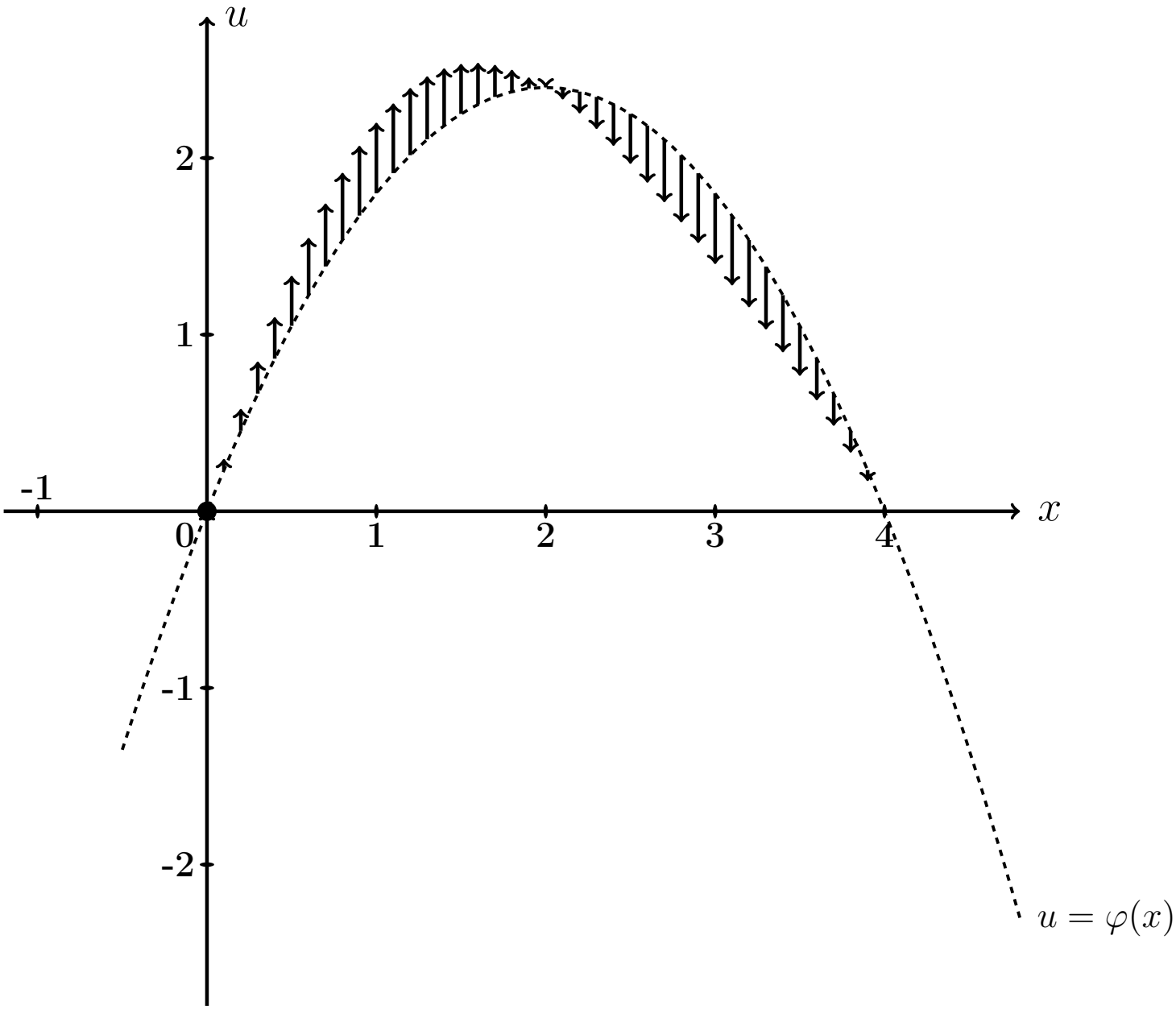


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{10.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{10.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (10.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{10.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (10.2), (10.3). Затабулировать решение уравнения (10.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (10.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (10.2), (10.3). Затабулировать решение уравнения (10.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (10.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 10.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (10.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{10.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (10.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (10.4) при граничных условиях (10.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{10.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{10.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{10.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (10.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (10.9). Следовательно, по формуле (10.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{10.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{10.11}$$

Шаг 6.

Таблица 10.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 10.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (10.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 10.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 10.9

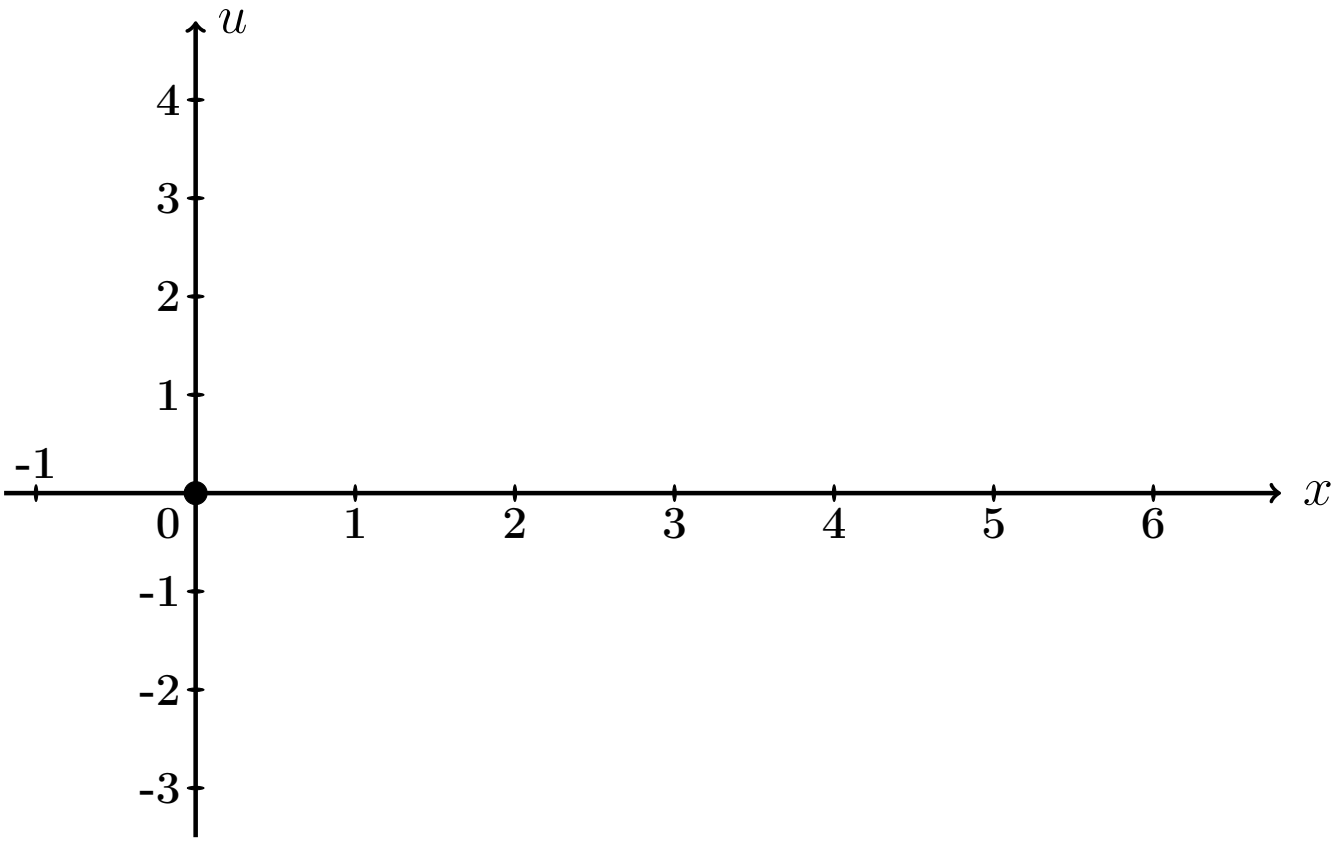


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 10 задача 7 (по Таб. 10.7, 10.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 7 (по таблице 10.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (10.6) и (10.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (10.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (10.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (10.9). Следовательно, по формуле (10.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (10.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (10.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 10.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (10.5),

$C_1' =$ по формуле (10.12)

и $C_3 =$ по таблице 10.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 10.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

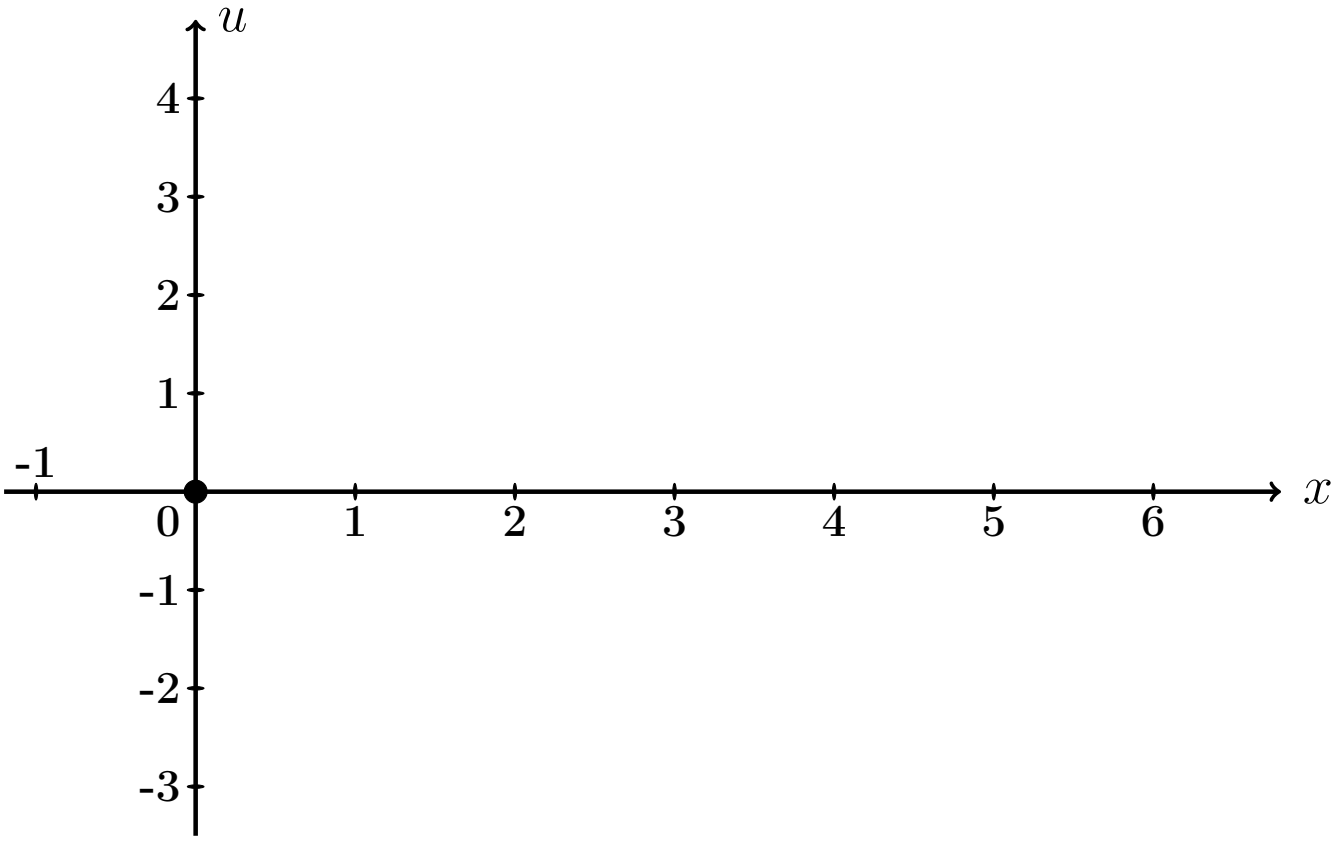


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 10 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (10.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 10 задача 7 (по таблице 10.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{10.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (10.1). Затабулировать решение уравнения (10.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

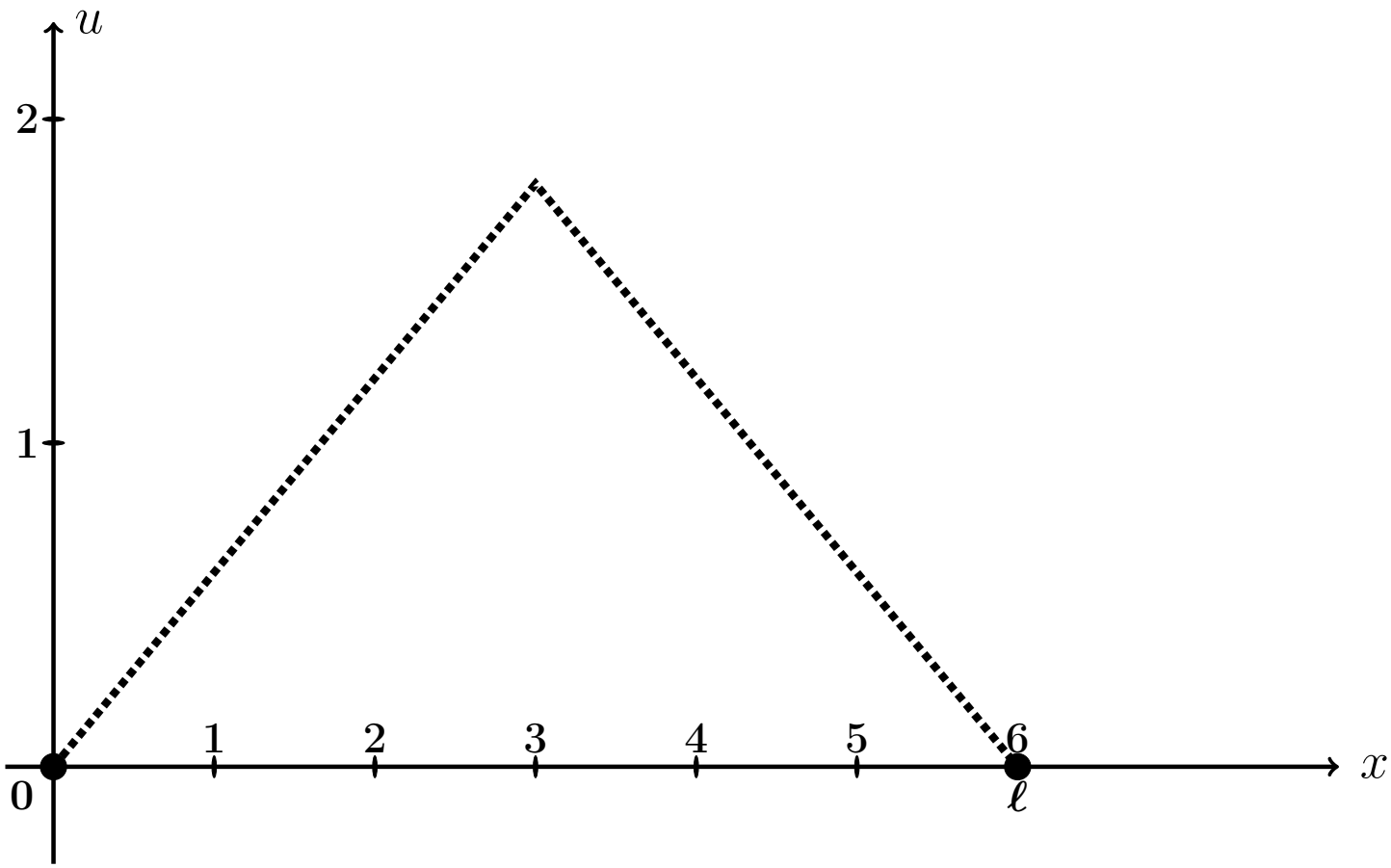


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (10.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 10.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 10.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 10.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 10.12, 10.13) формулы (10.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 10.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 10.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 10.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 10.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

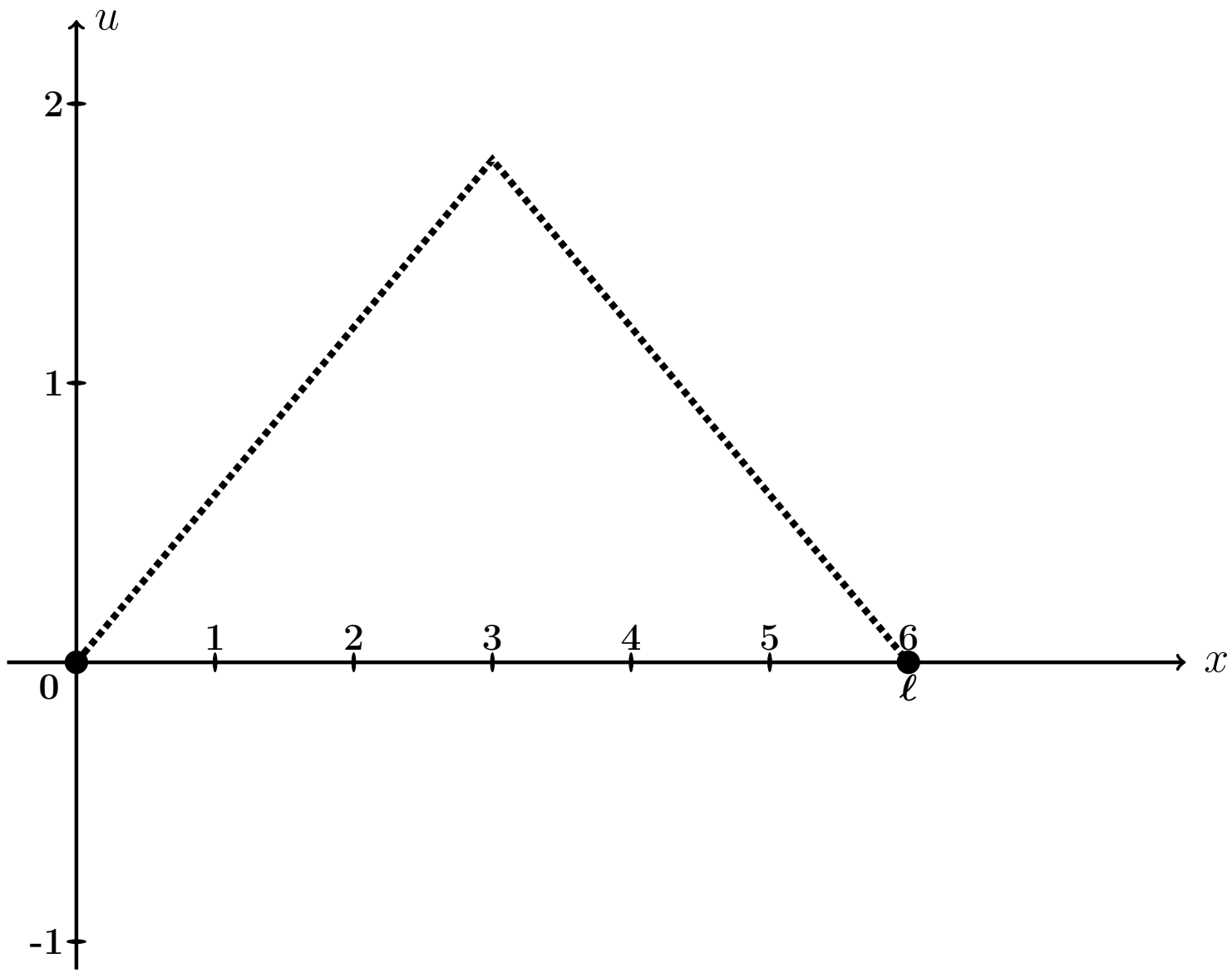


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (10.2).

Выборочная проверка вариант 10 задача 8 (по таблице 10.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 8 (по таблице 10.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 8 (по таблице 10.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 8 (по таблице 10.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.17)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.17)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(3.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{10.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{10.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

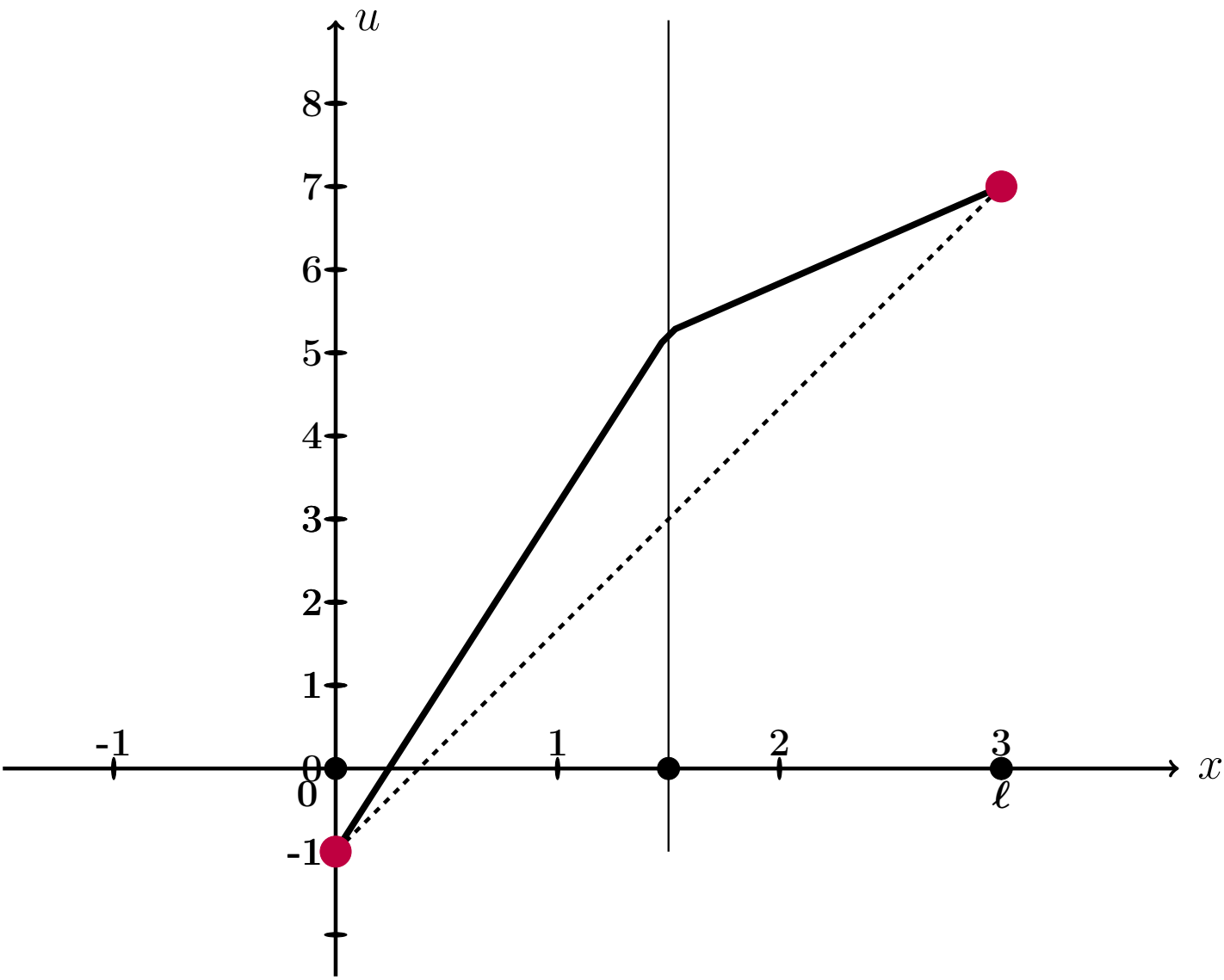


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (10.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (10.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (10.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{10.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{10.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (10.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (10.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{10.7}$$

Таблица 10.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (10.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (10.1) с начальным условием (10.2) и граничными условиями (10.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (10.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_3 = 7.0$ — значения граничных условий (10.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 10.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 10.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-1	0,25	1,5	2,75	4	5,25	5,6	5,95	6,3	6,65	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 10.16.

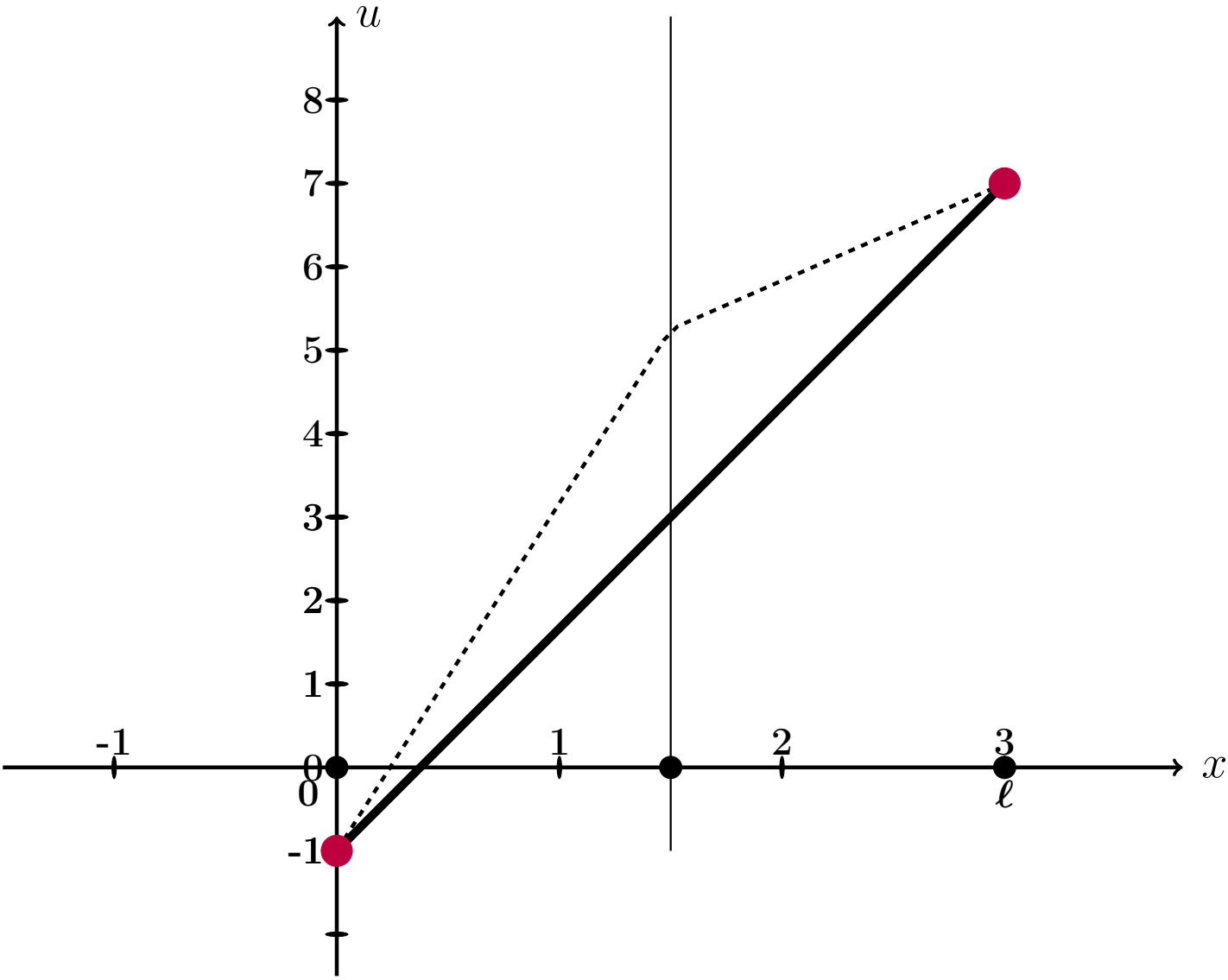


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (10.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (10.3).

Выборочная проверка вариант 10 задача 9 (по формулам (10.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 9 (по таблице 10.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 10 задача 9 (по таблице 10.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 11

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 2 \cdot x + 9$.

$$y = 2 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{9}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{9}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{9}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{9}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+9=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

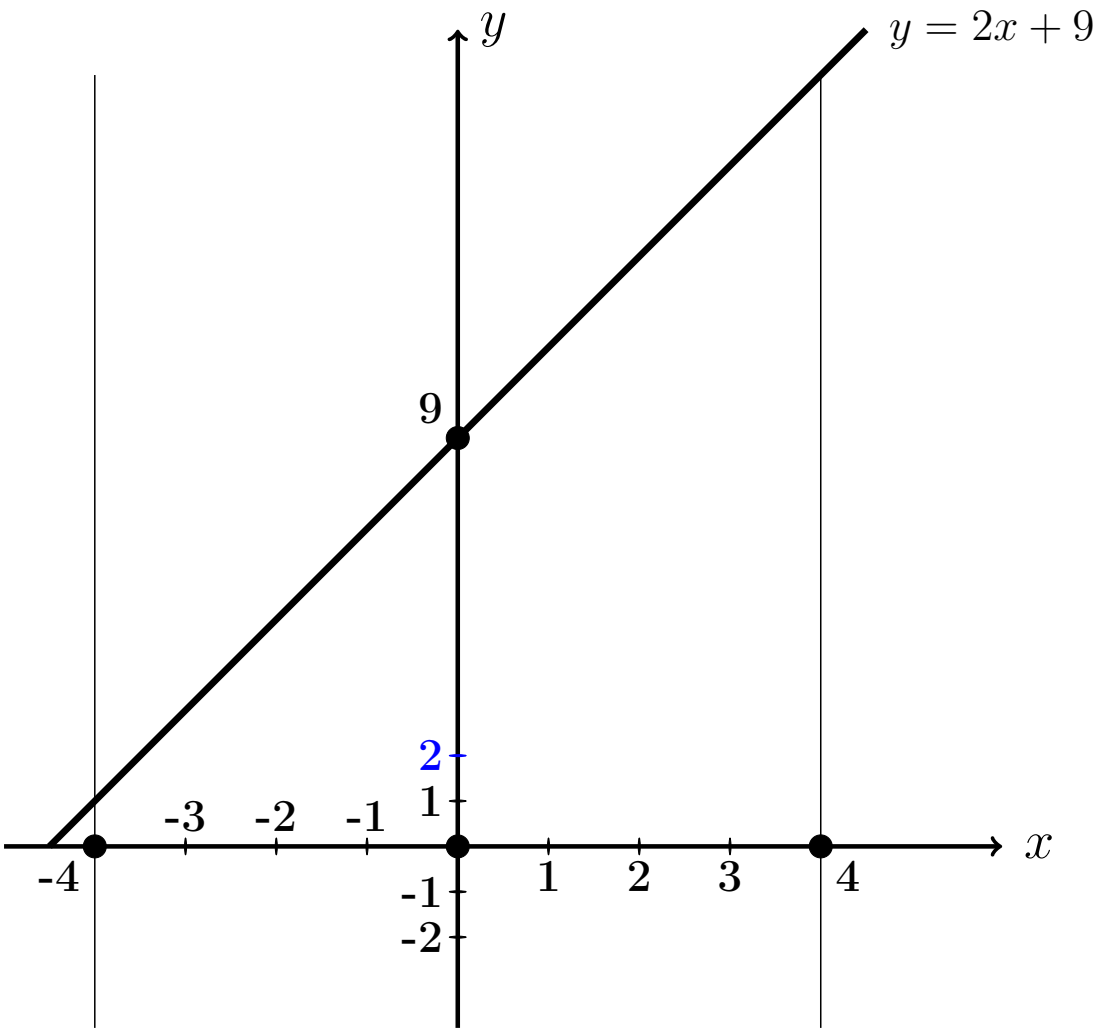
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 11.1 (Табулировка $y=2x+9$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x+9$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y=S_1(x)$		*							
$y=S_2(x)$					*				
$y=S_3(x)$								*	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 11.1



Выборочная проверка вариант 11 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 1 (по Таблице 11.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 10\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 15\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 10\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 10\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 15\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 15x^2 + 15t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 5x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 15x^2 + 15t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (15x^2+15t)\,dt = \qquad\qquad + C(x) = \qquad\qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 5x^2 \\ \qquad = 4e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 11 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

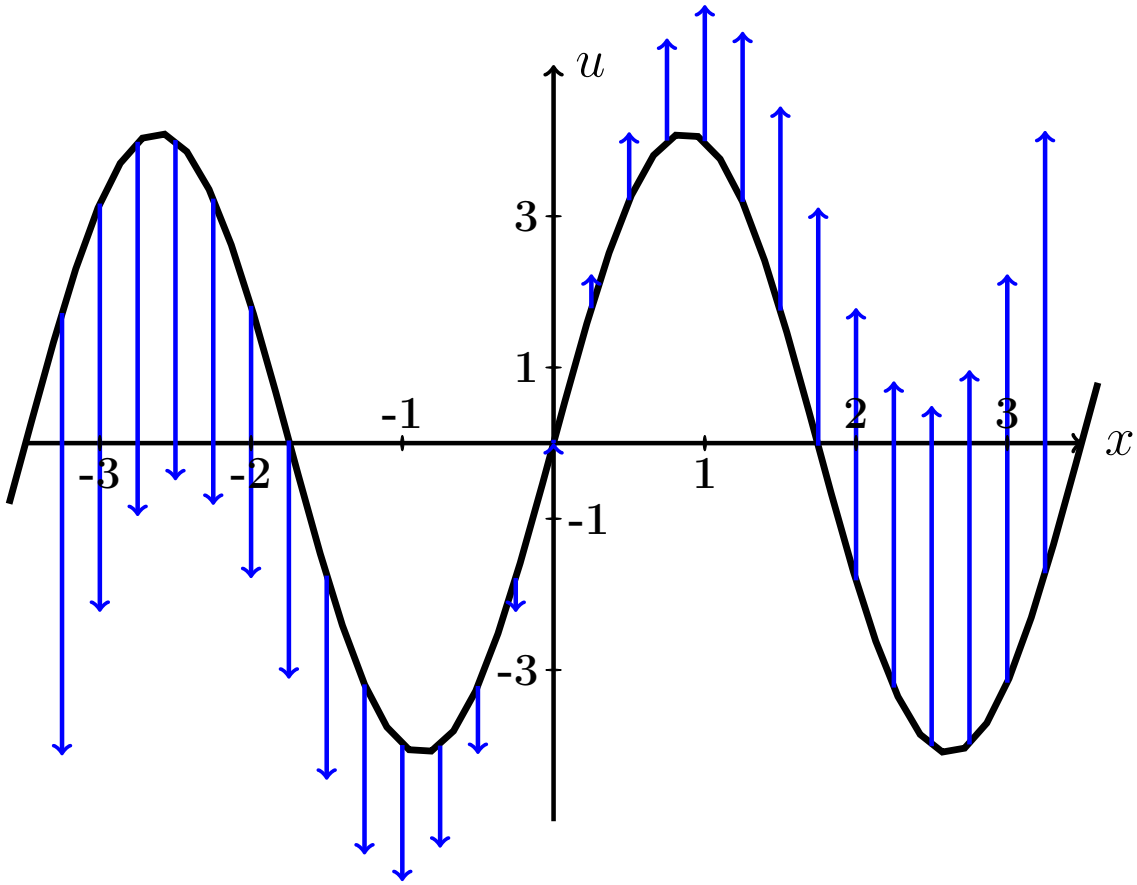


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 11.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 11 задача 4 (по Таблице 11.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 11.2.

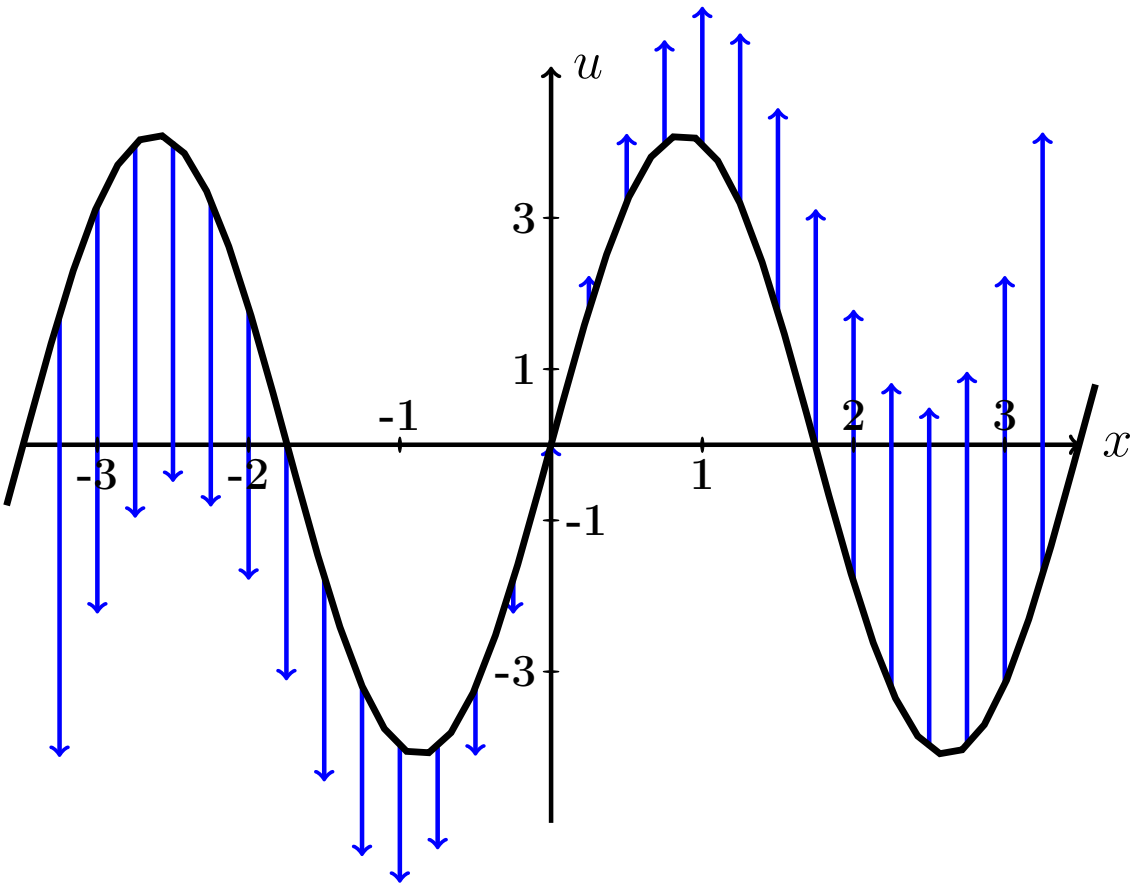


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

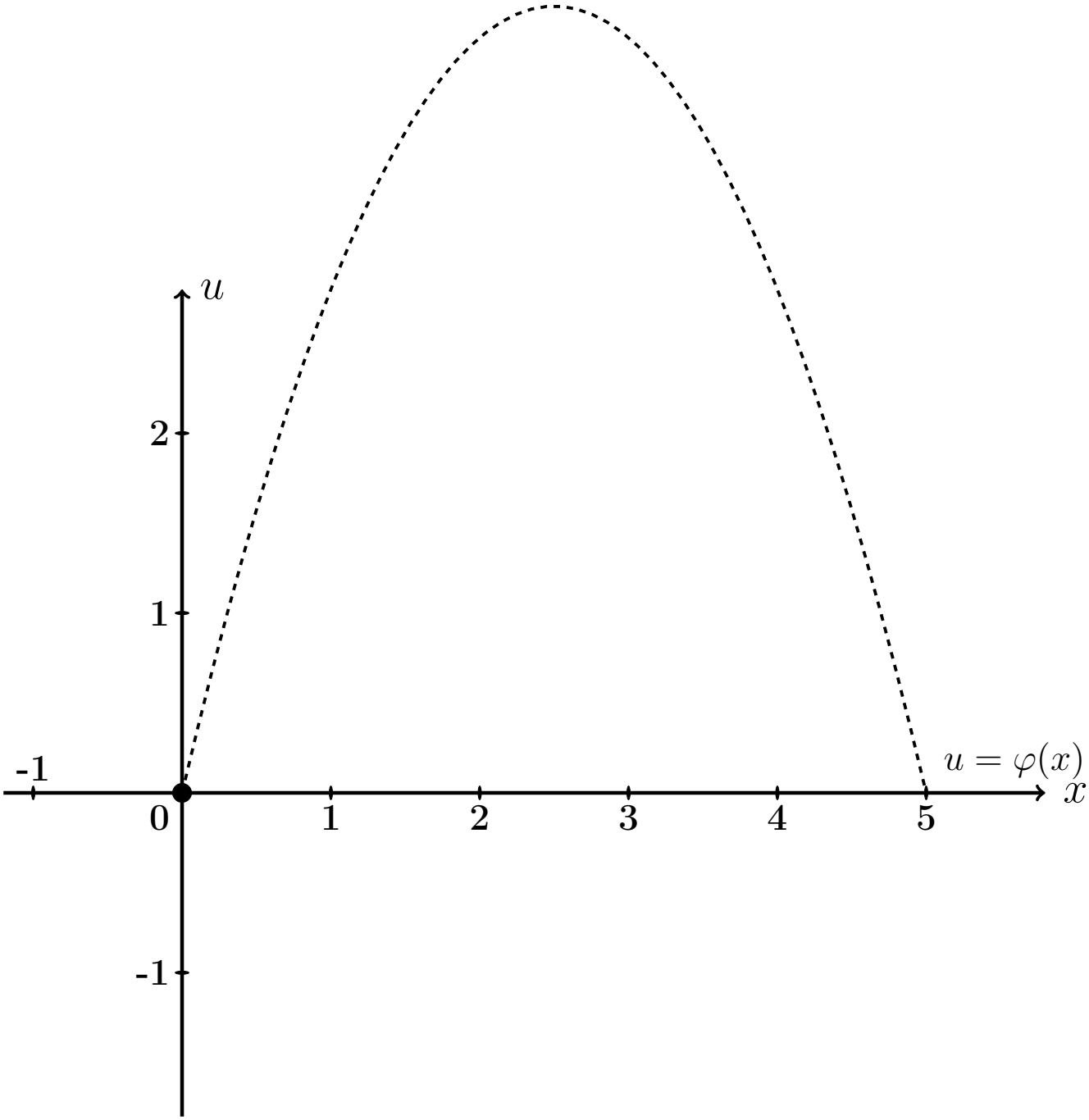


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 11.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 11.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 11.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 11.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 11 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 5 (красные клетки таб. 11.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 11.4.

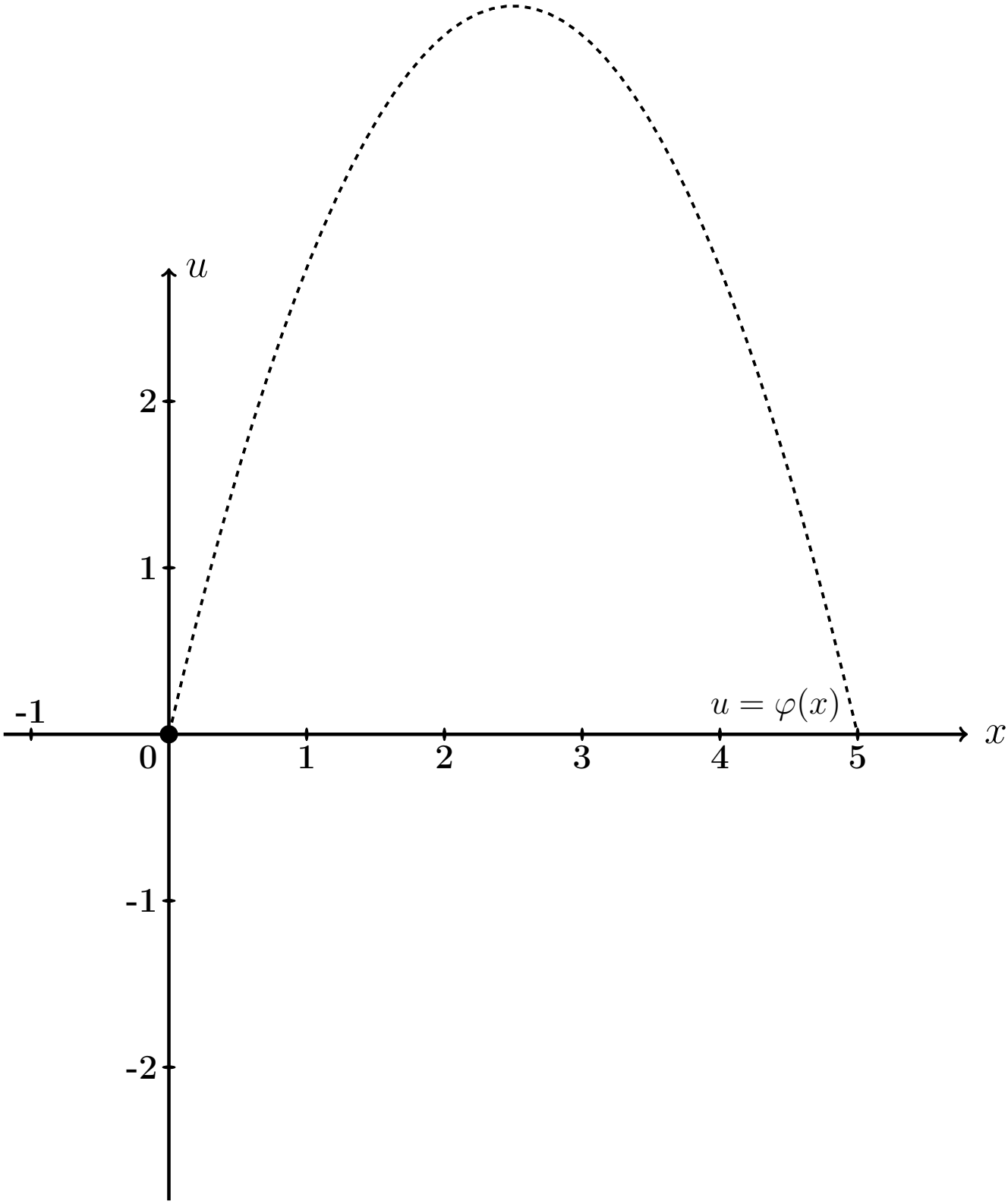


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

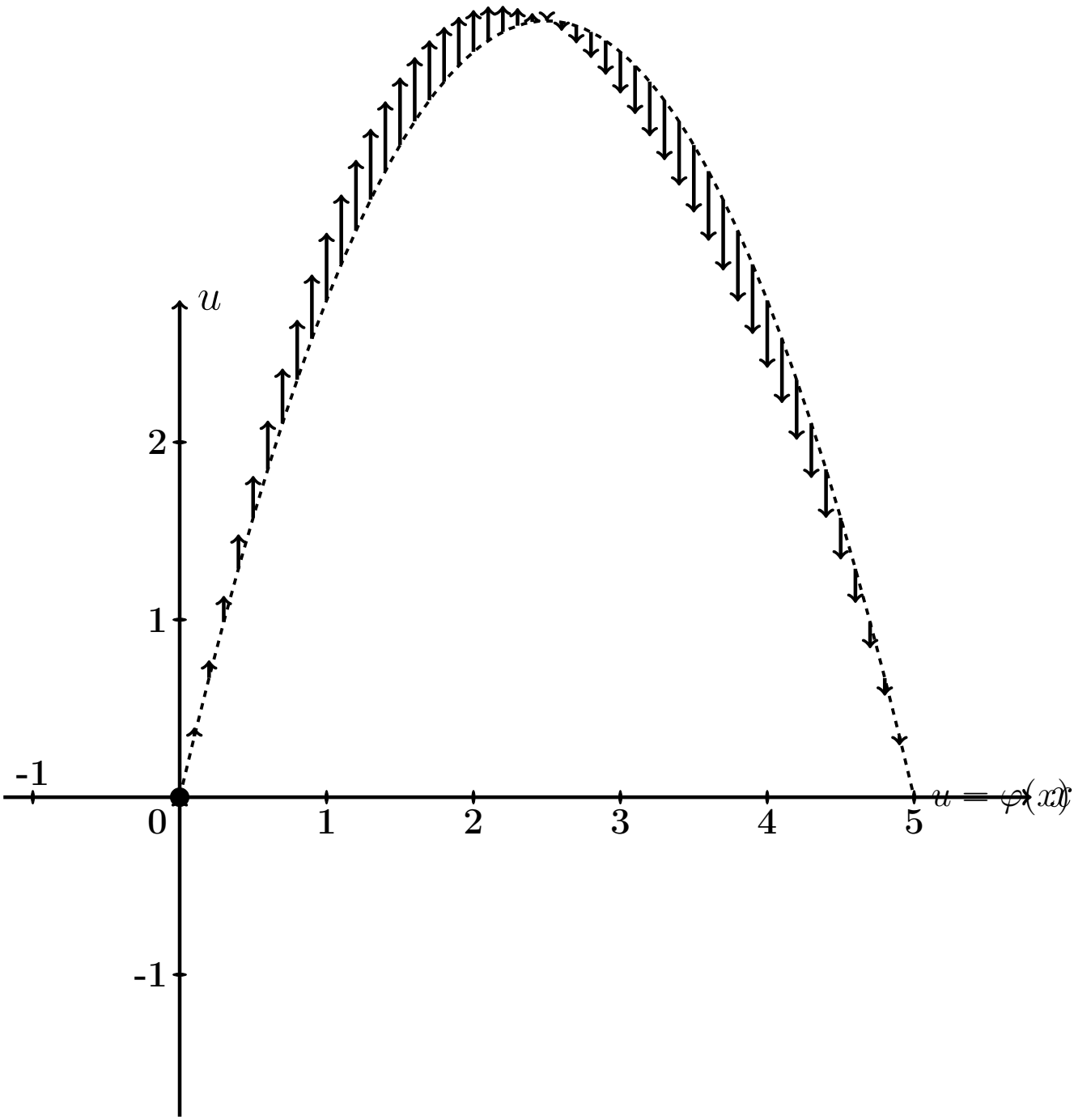


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 11.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.0\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.41$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 11.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 11.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 11.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 11 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 6 (красные клетки Таблицы 11.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 11.6.

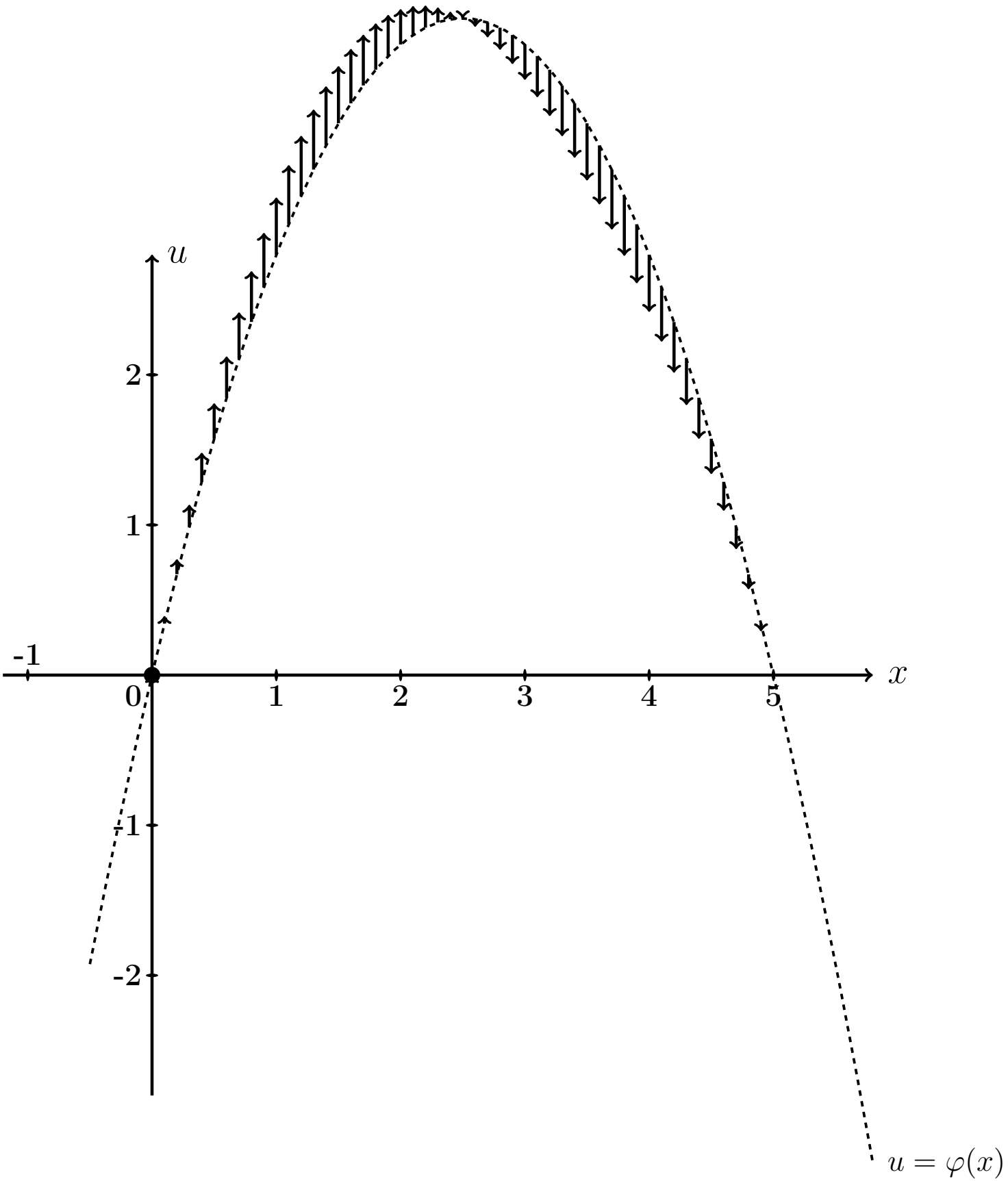


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{11.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{11.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (11.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{11.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (11.2), (11.3). Затабулировать решение уравнения (11.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (11.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (11.2), (11.3). Затабулировать решение уравнения (11.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (11.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 11.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (11.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{11.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (11.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (11.4) при граничных условиях (11.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{11.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{11.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{11.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (11.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (11.9). Следовательно, по формуле (11.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{11.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{11.11}$$

Шаг 6.

Таблица 11.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 11.7,

$$\ell = ___\,, \quad a = ___\,, \quad \Omega = ___\,,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (11.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 11.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 11.9

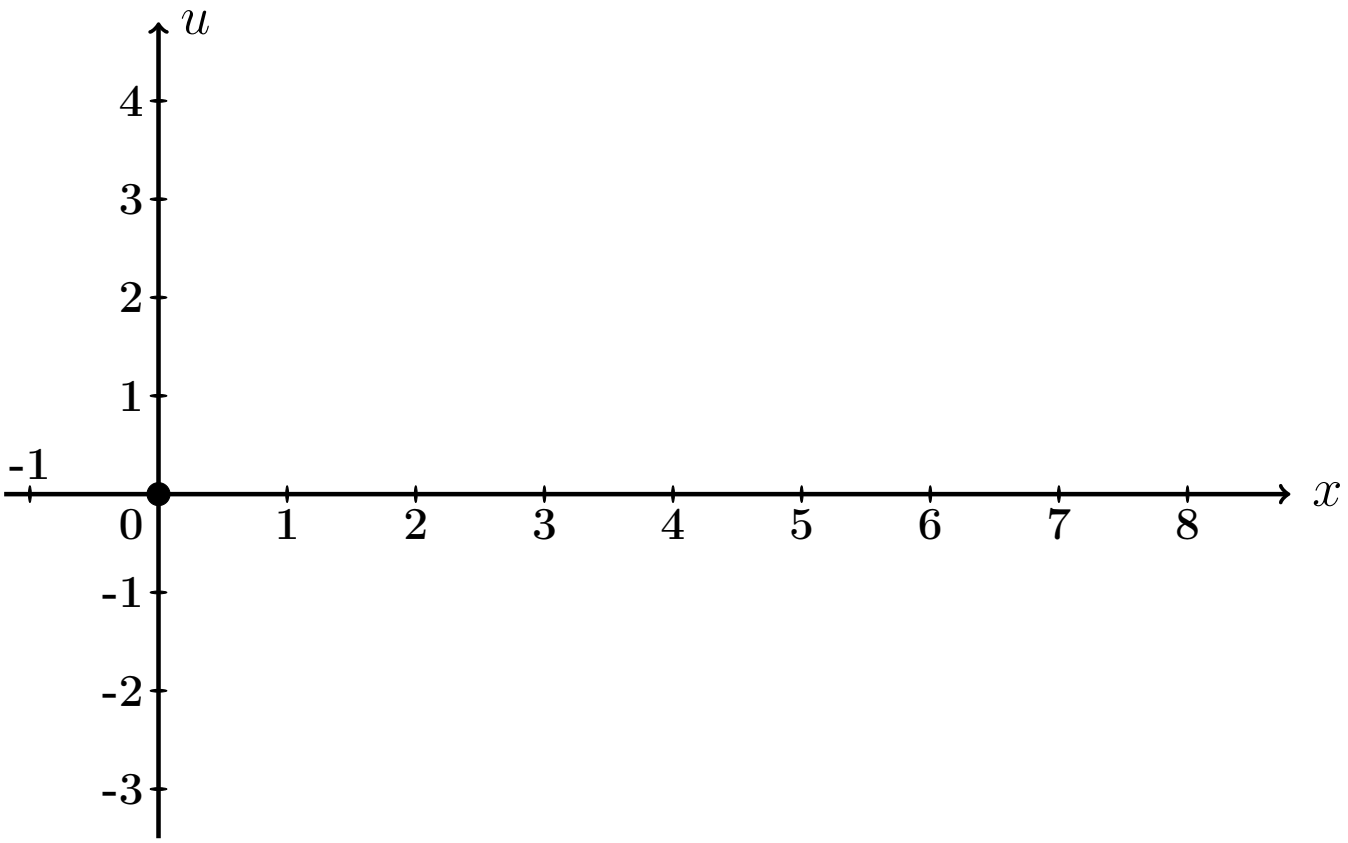


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 11 задача 7 (по Таб. 11.7, 11.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 11 задача 7 (по таблице 11.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (11.6) и (11.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (11.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (11.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (11.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (11.9). Следовательно, по формуле (11.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (11.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (11.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (11.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 11.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (11.5),

$C_1' =$ по формуле (11.12)

и $C_3 =$ по таблице 11.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 11.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

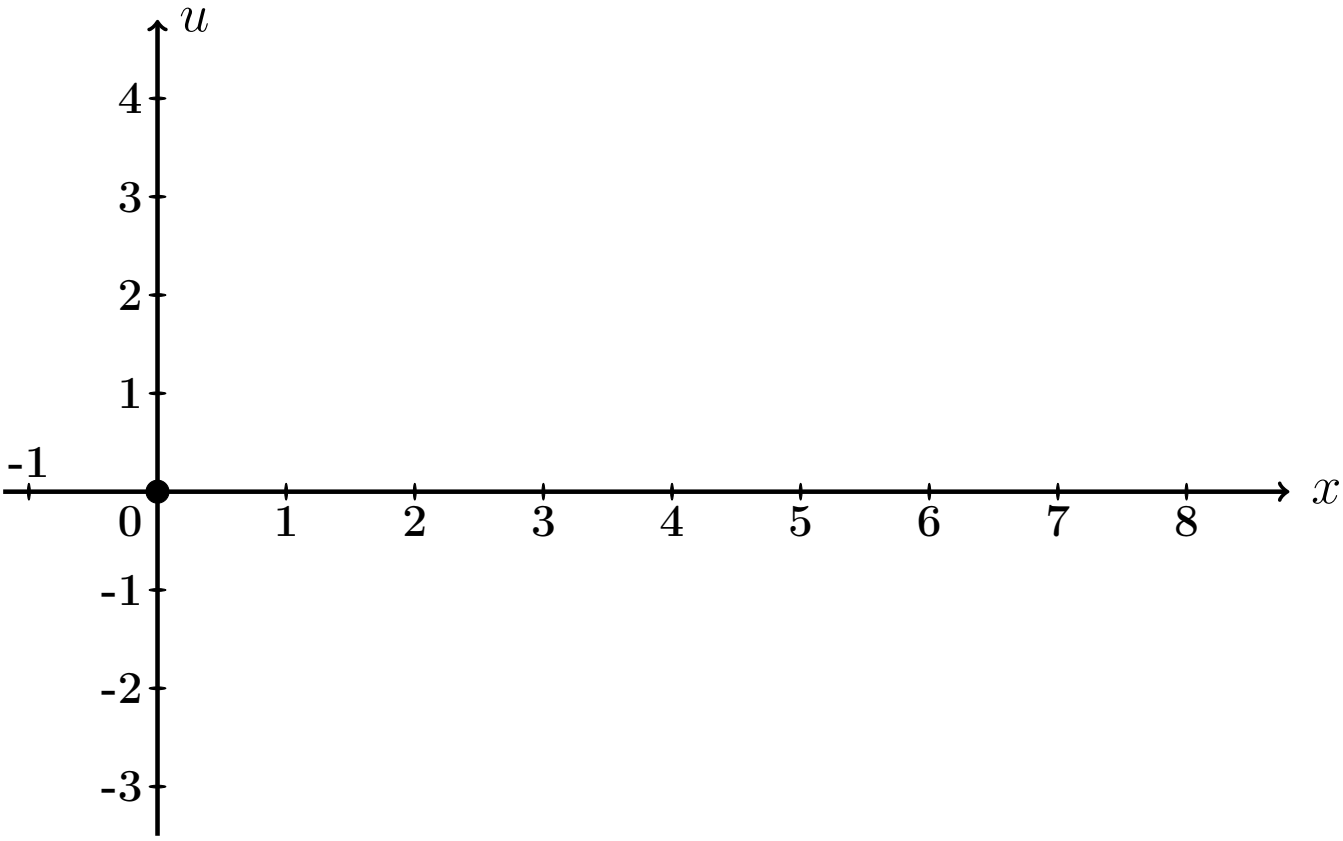


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 11 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (11.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 11 задача 7 (по таблице 11.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{11.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (11.1). Затабулировать решение уравнения (11.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

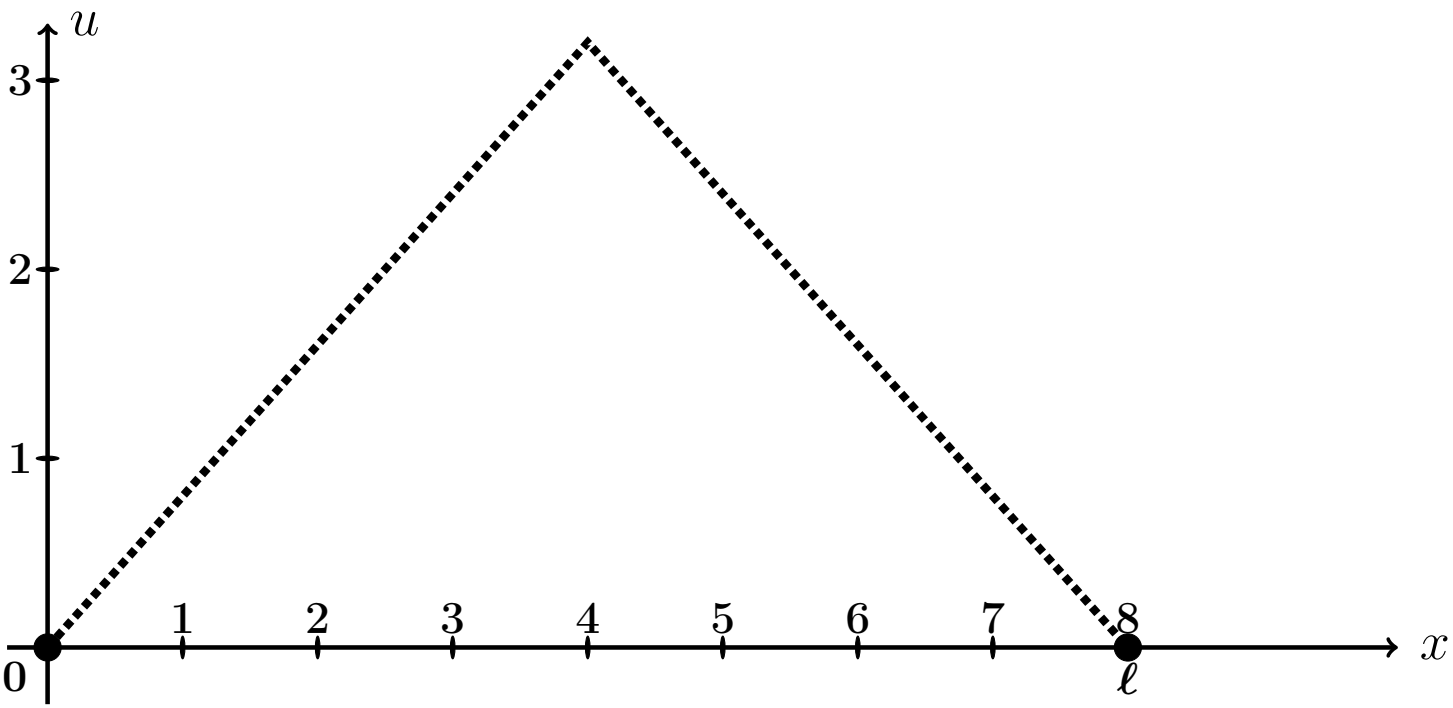


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (11.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 11.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad\qquad =$

$$= \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 11.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 11.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 11.12, 11.13) формулы (11.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 11.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 11.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 11.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 11.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

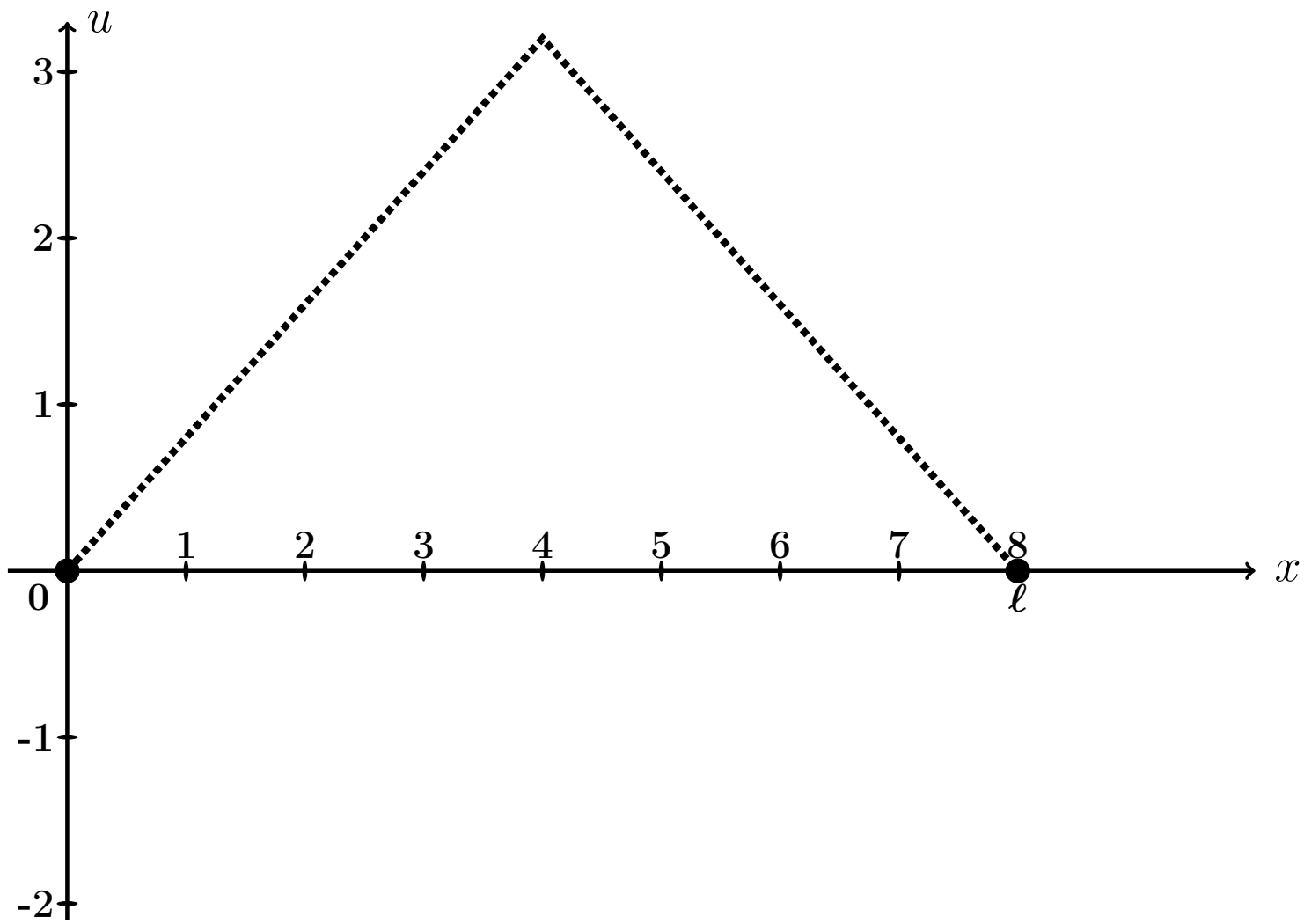


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (11.2).

Выборочная проверка вариант 11 задача 8 (по таблице 11.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 8 (по таблице 11.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 8 (по таблице 11.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 8 (по таблице 11.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.10)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.90)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(11.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{11.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{11.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

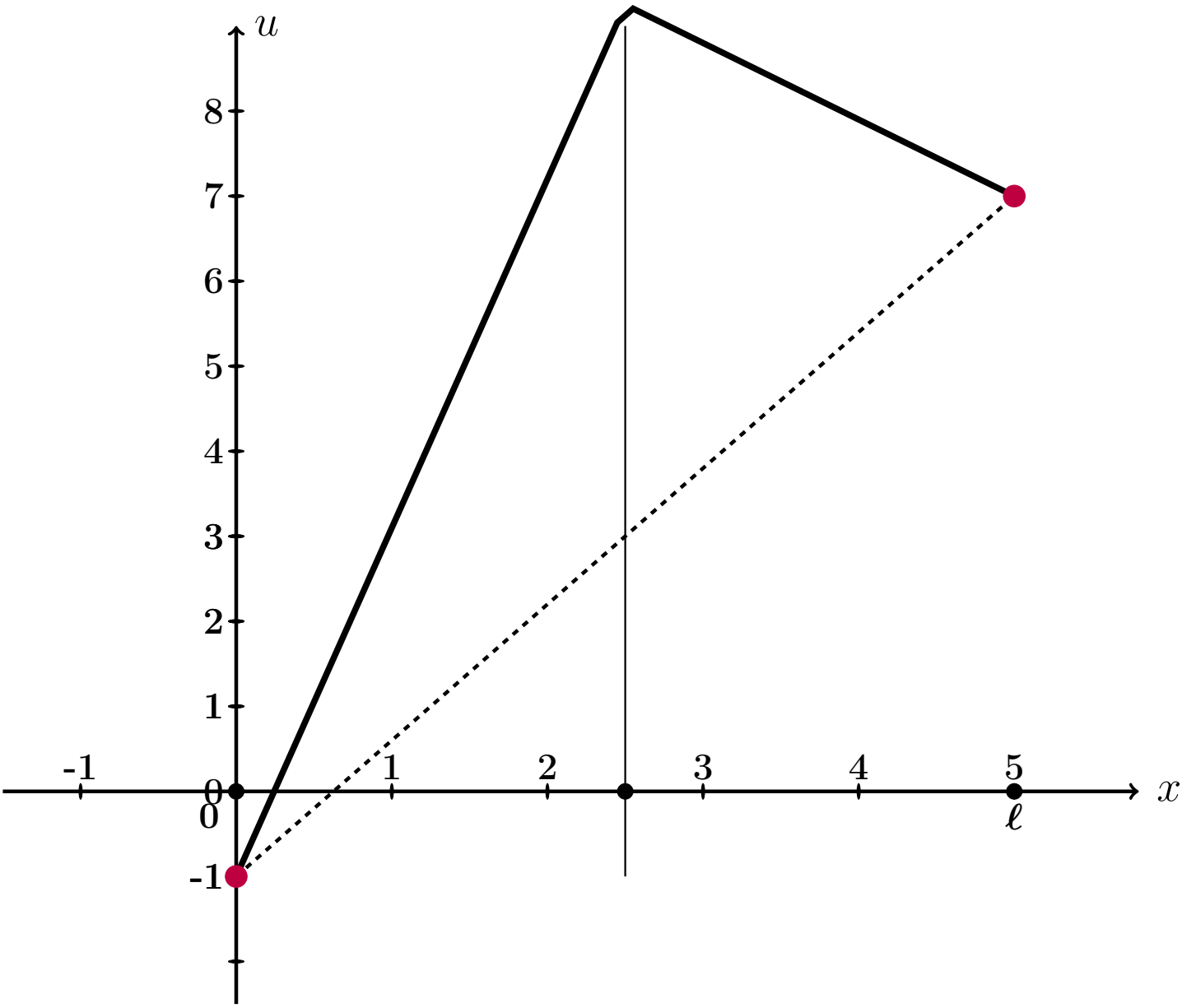


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (11.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (11.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (11.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{11.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{11.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (11.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (11.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{11.7}$$

Таблица 11.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (11.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (11.1) с начальным условием (11.2) и граничными условиями (11.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (11.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_5 = 7.0$ — значения граничных условий (11.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 11.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 11.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-1	1,05	3,1	5,15	7,2	9,25	8,8	8,35	7,9	7,45	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 11.16.

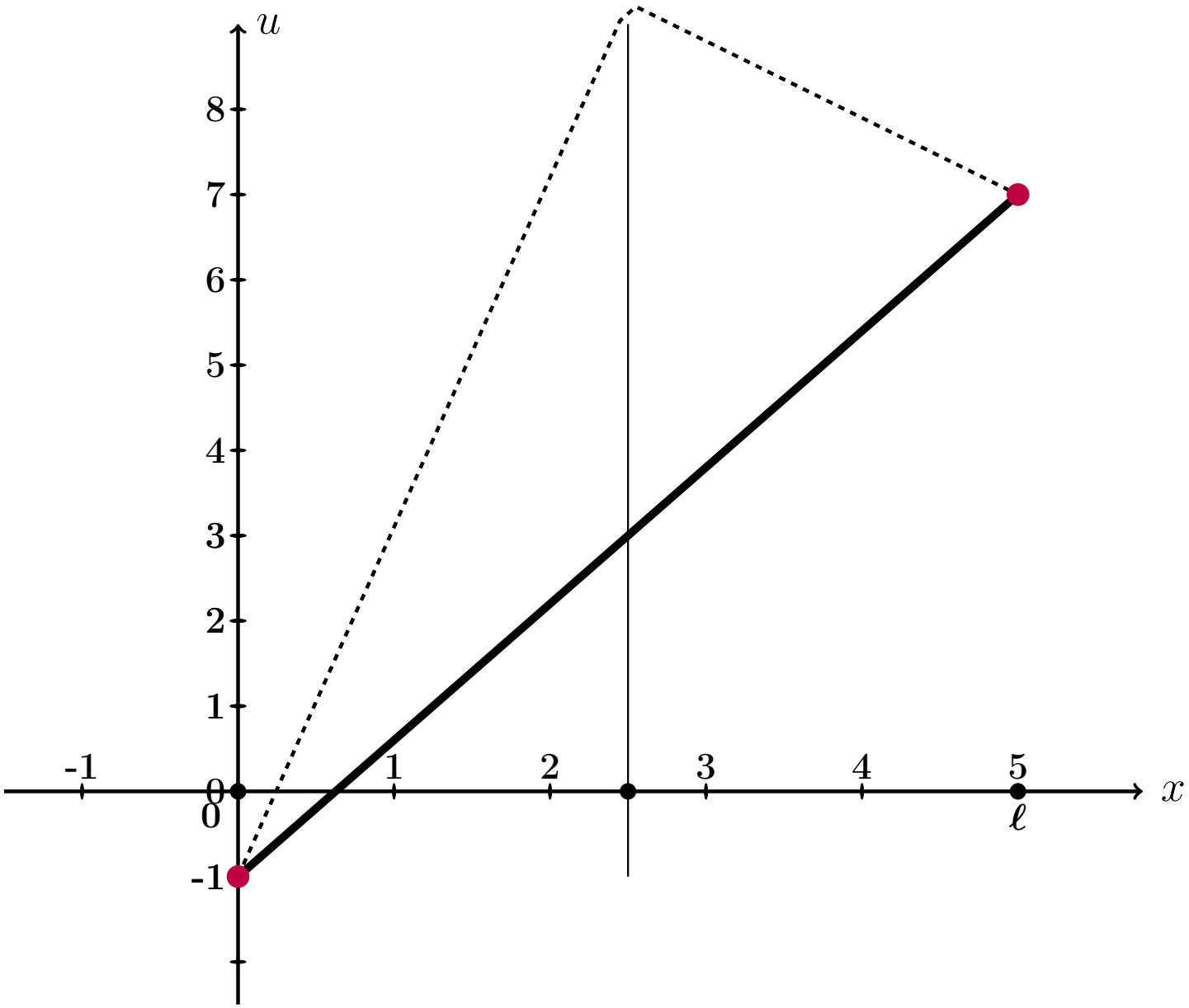


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (11.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (11.3).

Выборочная проверка вариант 11 задача 9 (по формулам (11.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 9 (по таблице 11.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 11 задача 9 (по таблице 11.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 12

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \boxed{\square}.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{7}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{7}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

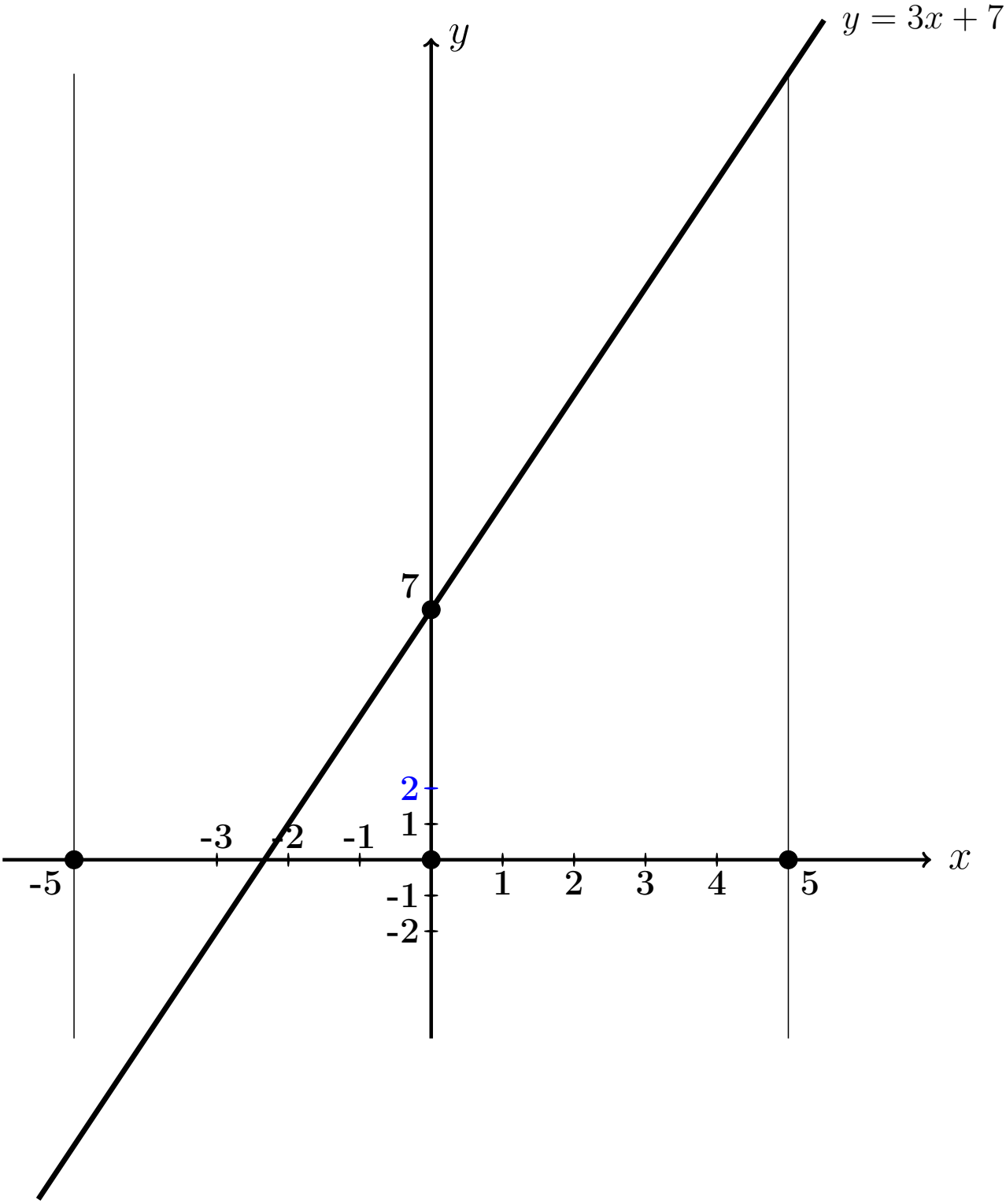
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 12.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=3x+7$	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 12.1



Выборочная проверка вариант 12 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 1 (по Таблице 12.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 18\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=7} = 9\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (6x^2+18\sqrt{y})dx = 6\int x^2\,dx+18\int \sqrt{y}\,dx = \qquad\qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad\qquad\qquad = 9\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x^2 + 6t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x^2 + 6t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x^2 + 6t)dt = \qquad = \qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

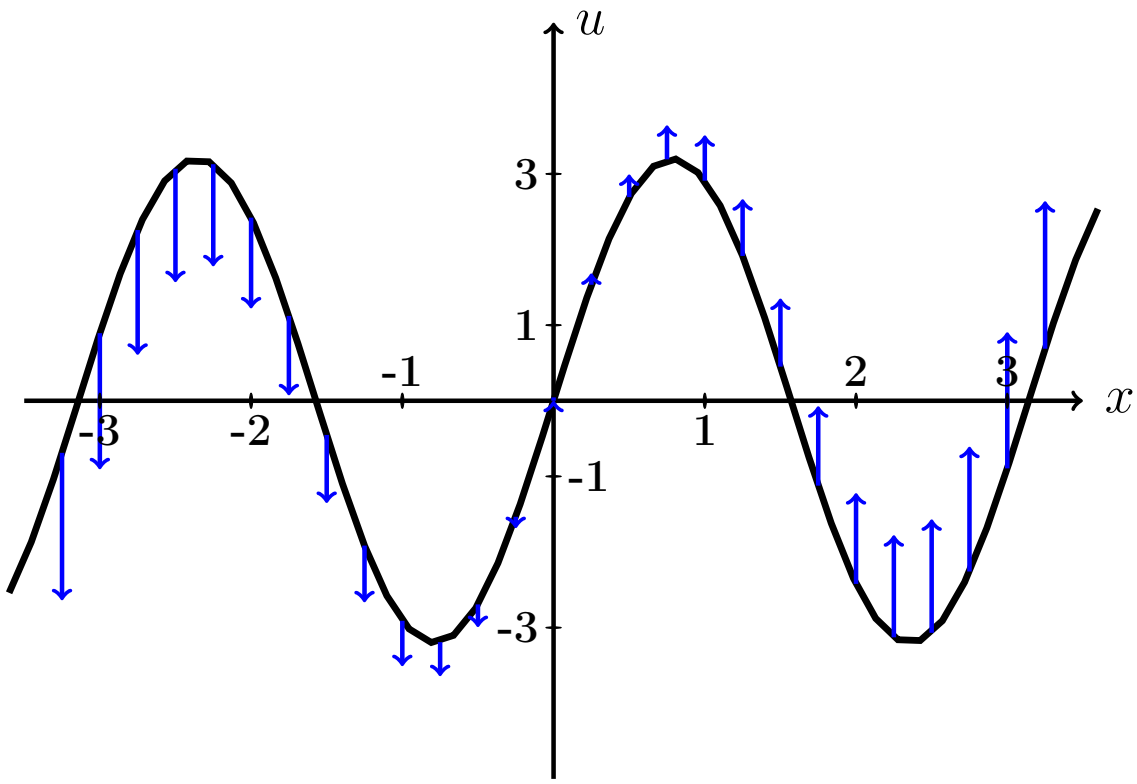


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 12.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 12 задача 4 (по Таблице 12.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 12.2.

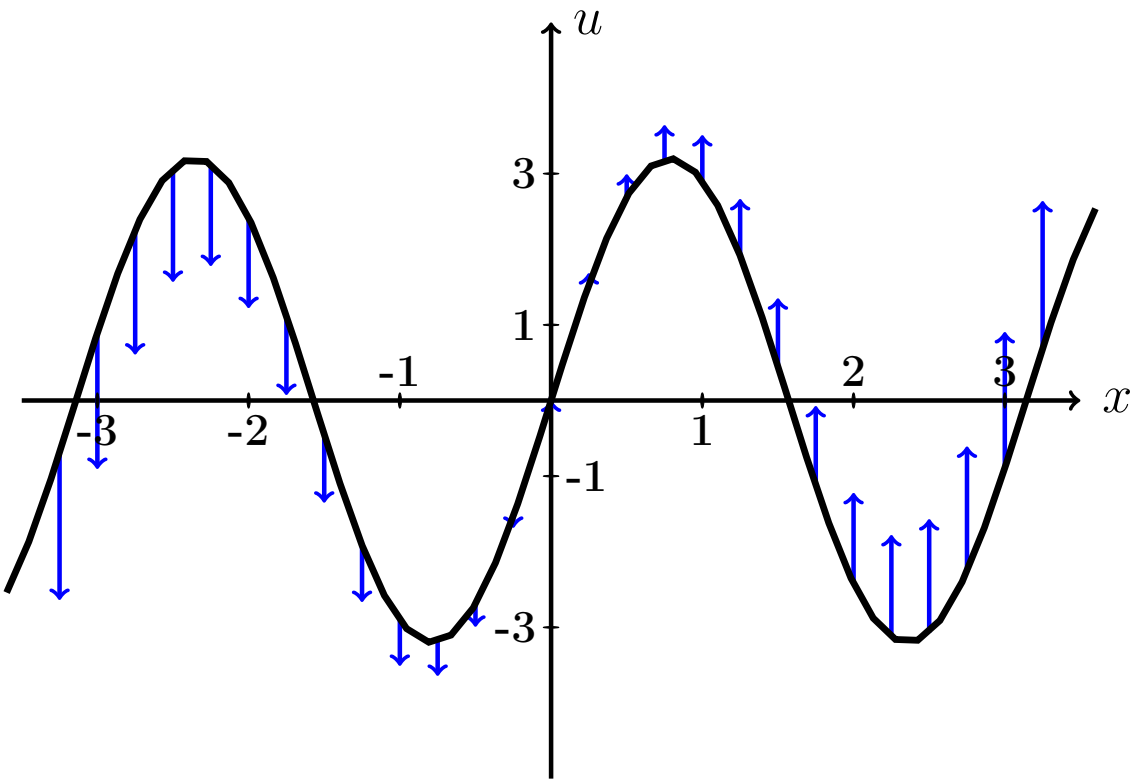


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

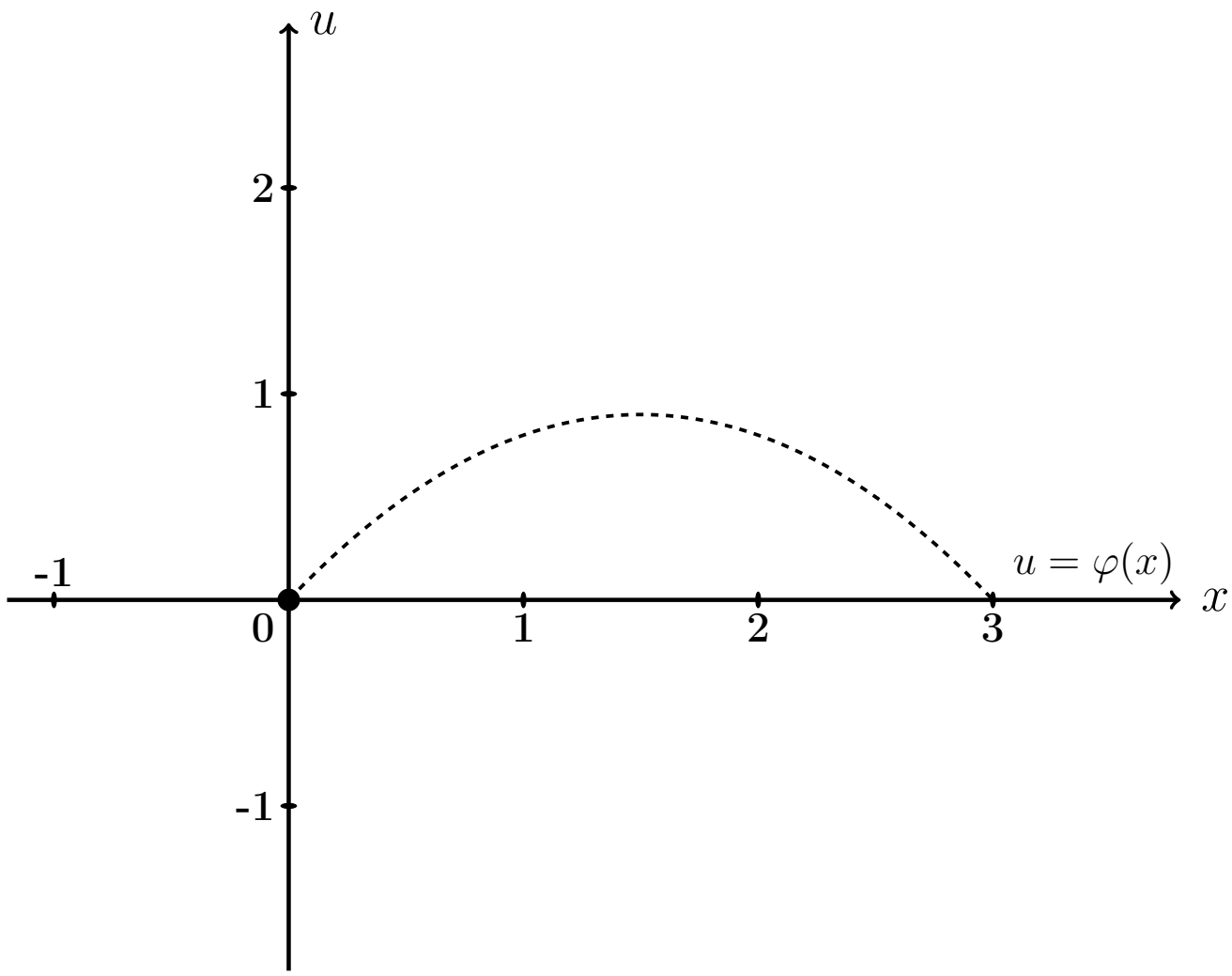


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 12.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 12.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 12.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 12.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 12 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 5 (красные клетки таб. 12.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 12.4.

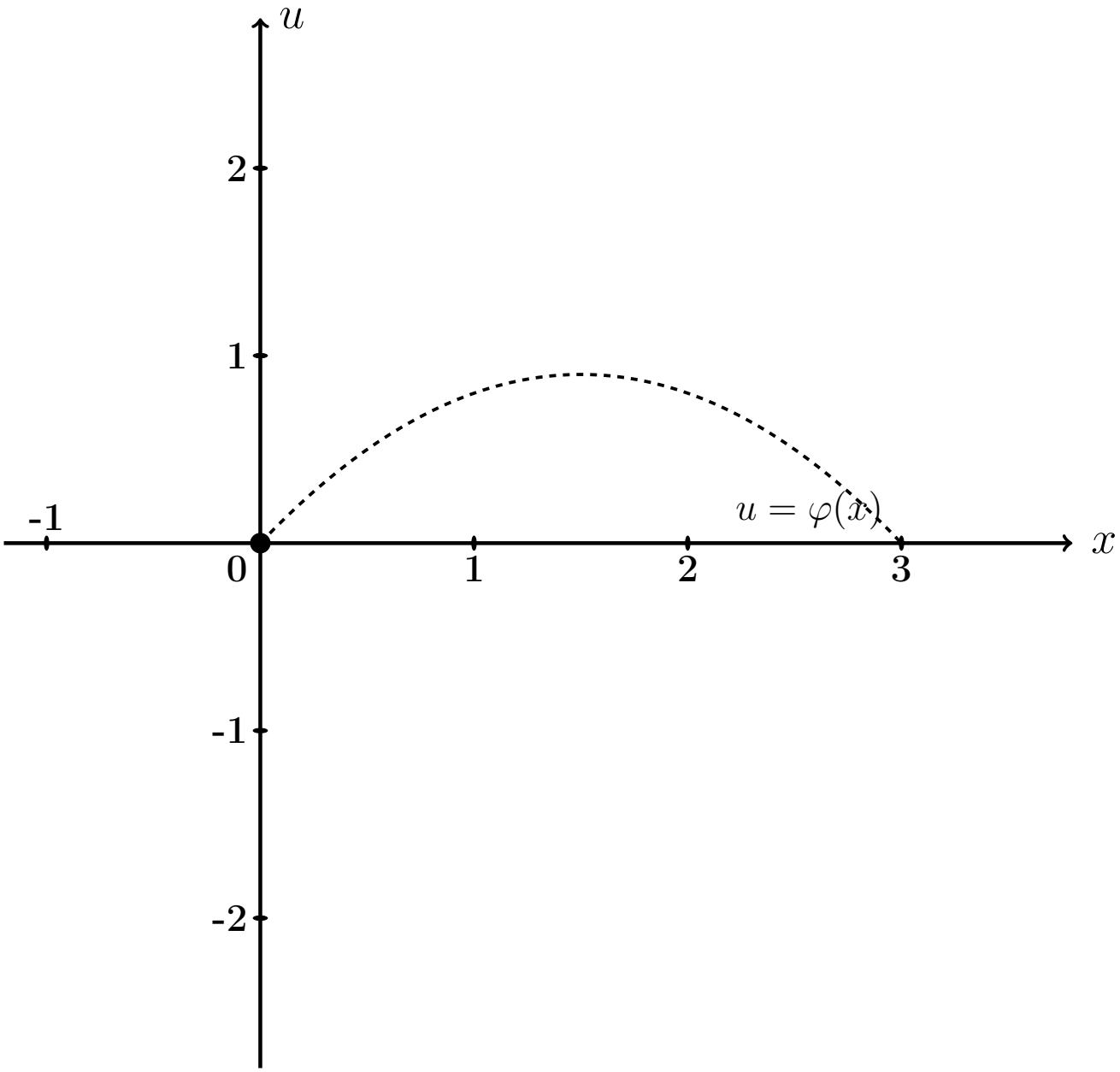


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

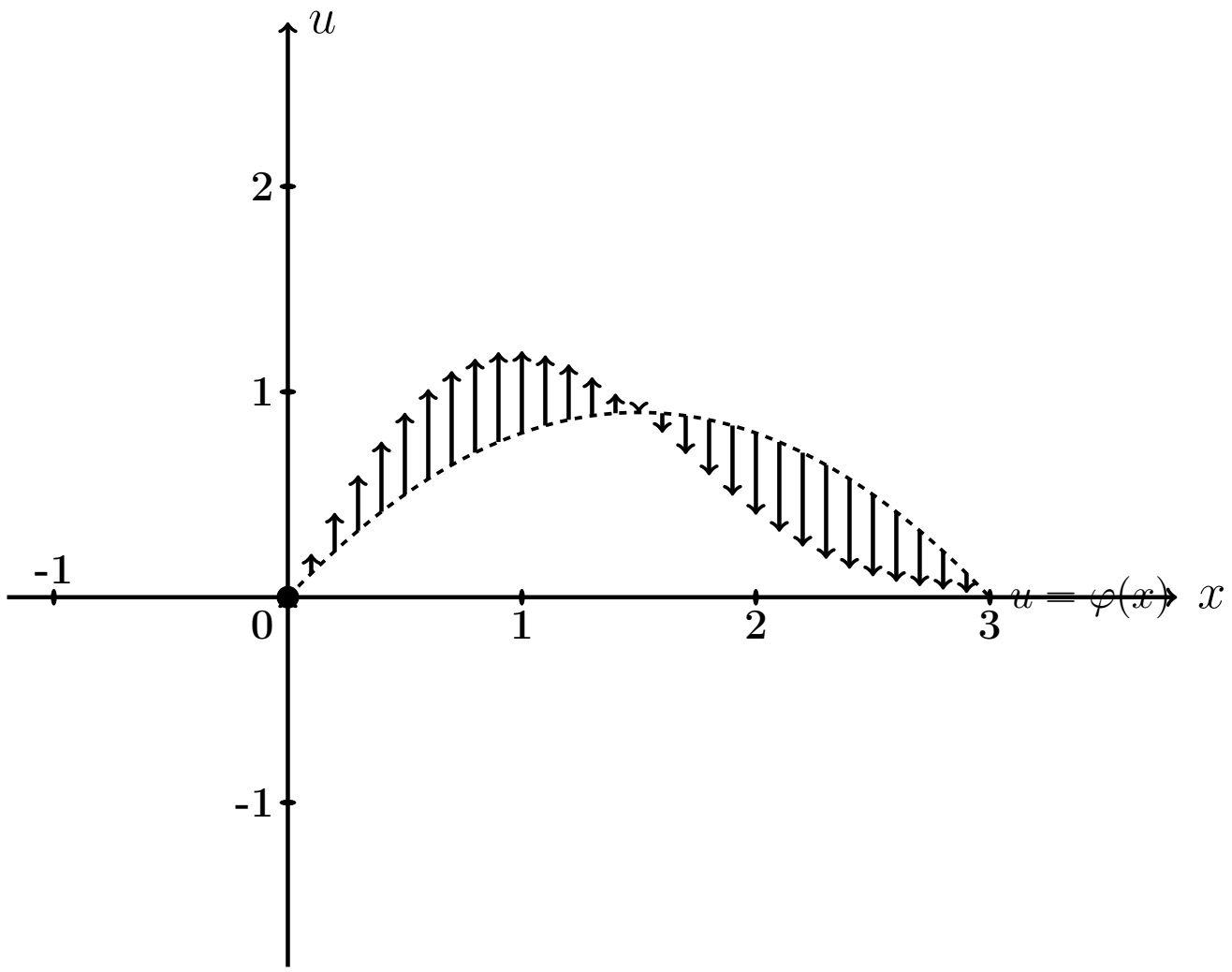


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 12.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.3\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.31$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 12.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 12.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 12.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 12 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 6 (красные клетки Таблицы 12.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 12.6.

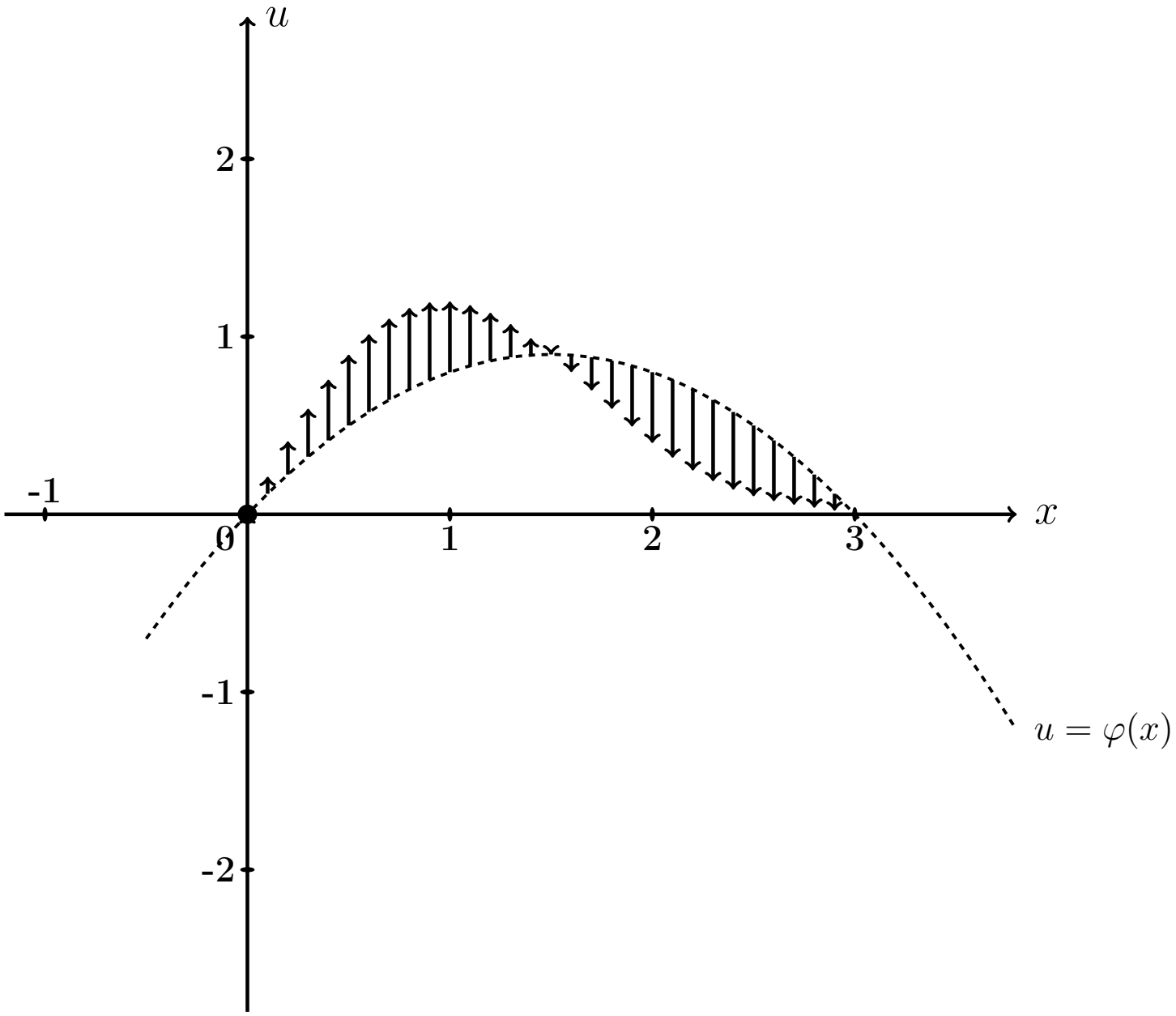


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.00 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 1.00 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{12.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{12.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (12.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{12.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (12.2), (12.3). Затабулировать решение уравнения (12.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (12.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (12.2), (12.3). Затабулировать решение уравнения (12.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (12.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 12.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (12.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{12.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (12.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (12.4) при граничных условиях (12.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{12.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{12.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{12.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (12.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (12.9). Следовательно, по формуле (12.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{12.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{12.11}$$

Шаг 6.

Таблица 12.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 12.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (12.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 12.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 12.9

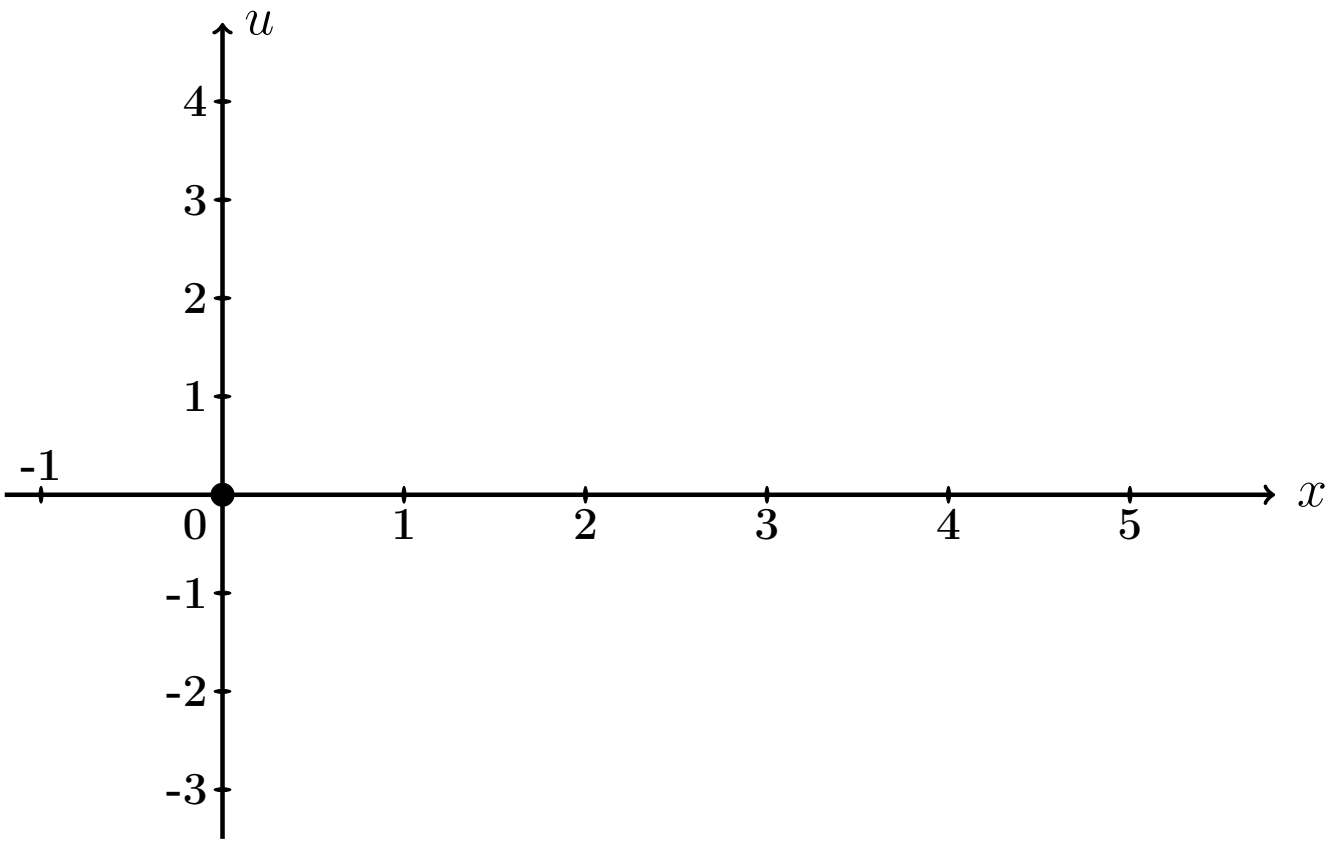


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 12 задача 7 (по Таб. 12.7, 12.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 12 задача 7 (по таблице 12.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (12.6) и (12.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (12.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (12.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (12.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (12.9). Следовательно, по формуле (12.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (12.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (12.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (12.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 12.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (12.5),

$C_1' =$ по формуле (12.12)

и $C_3 =$ по таблице 12.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 12.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2	1,5	1	0,5	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

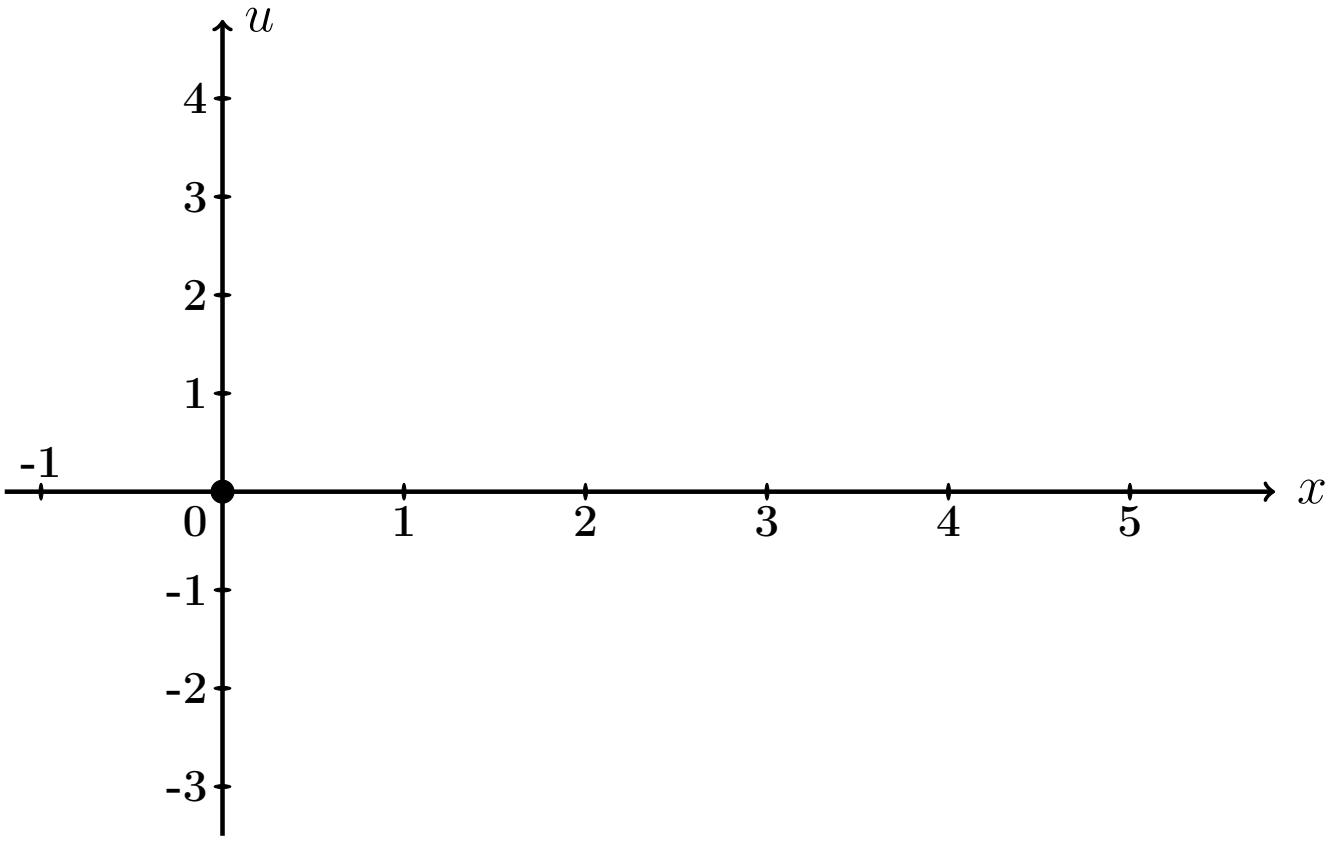


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 12 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (12.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 12 задача 7 (по таблице 12.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{12.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (12.1). Затабулировать решение уравнения (12.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

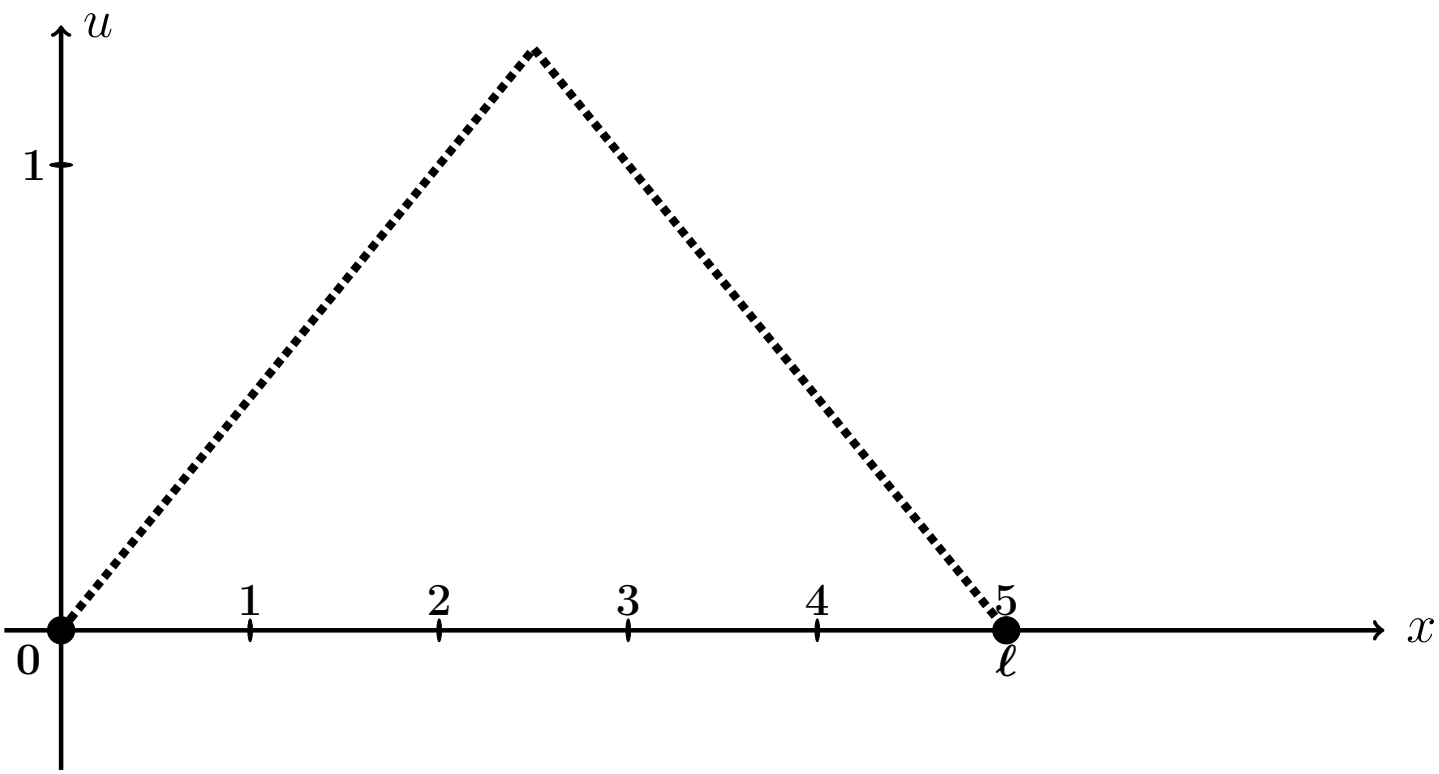


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (12.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (12.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 12.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 12.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 12.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 12.12, 12.13) формулы (12.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 12.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 12.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 12.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 12.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

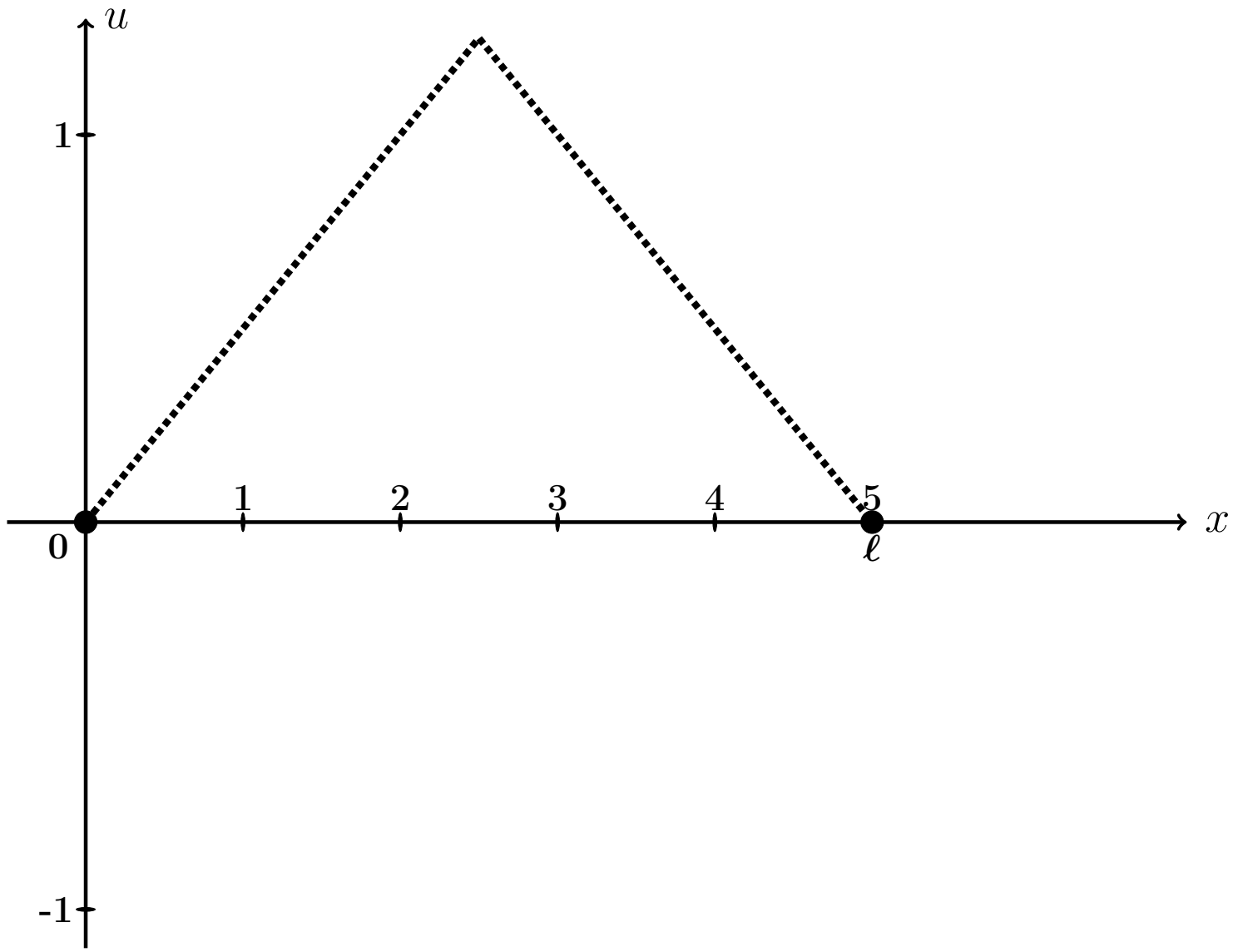


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (12.2).

Выборочная проверка вариант 12 задача 8 (по таблице 12.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 8 (по таблице 12.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 8 (по таблице 12.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 8 (по таблице 12.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{12.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.25)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.25)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(6.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{12.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{12.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

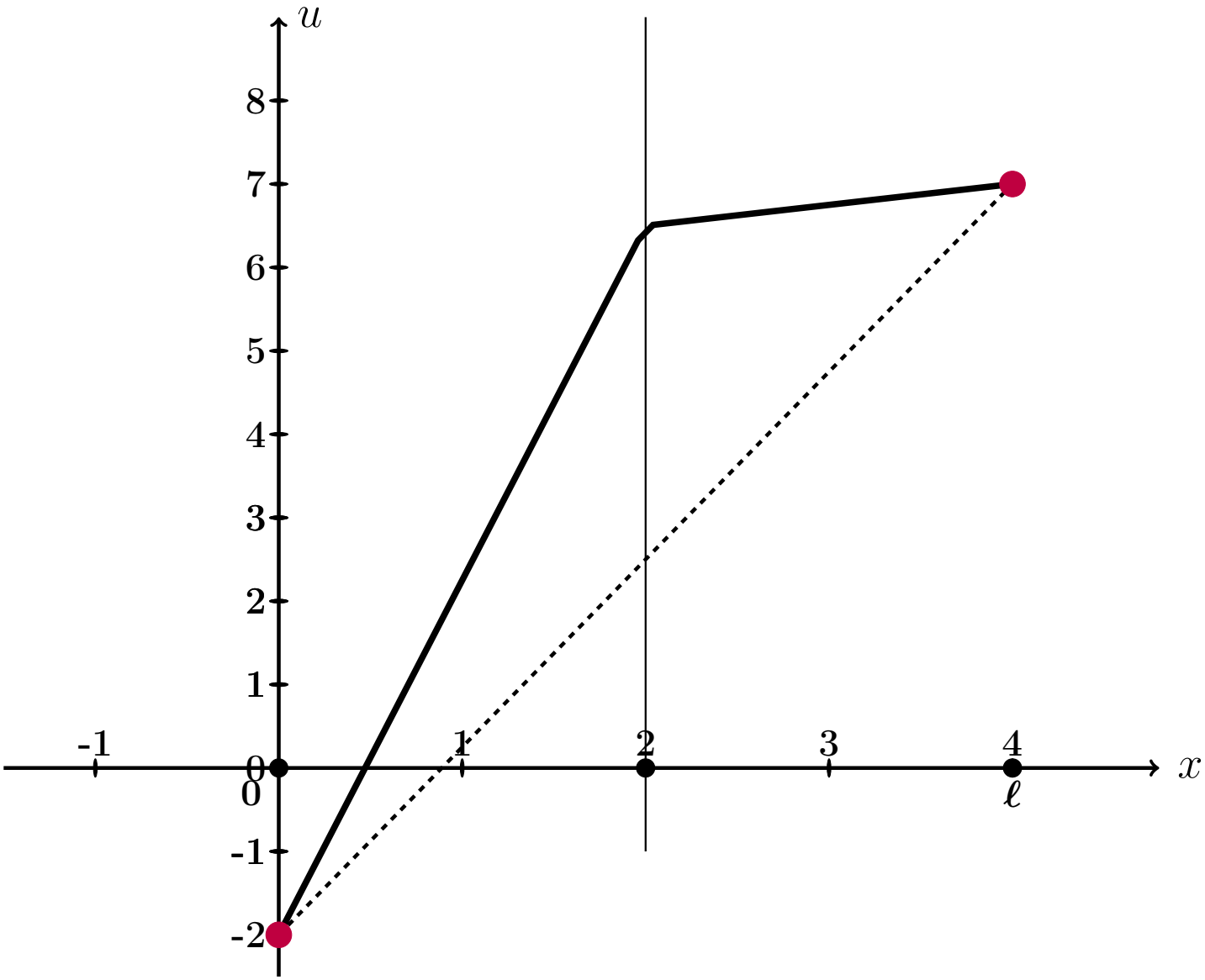


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (12.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (12.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (12.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{12.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{12.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (12.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (12.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{12.7}$$

Таблица 12.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (12.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (12.1) с начальным условием (12.2) и граничными условиями (12.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (12.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_4 = 7.0$ — значения граничных условий (12.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 12.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 12.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}3$	1,4	3,1	4,8	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
$u(x,0)$	-2	$*$									
$u(x,1)$	-2				$*$						
$u(x,2)$	-2									$*$	

Шаг 8. Графики по Таблице 12.16.

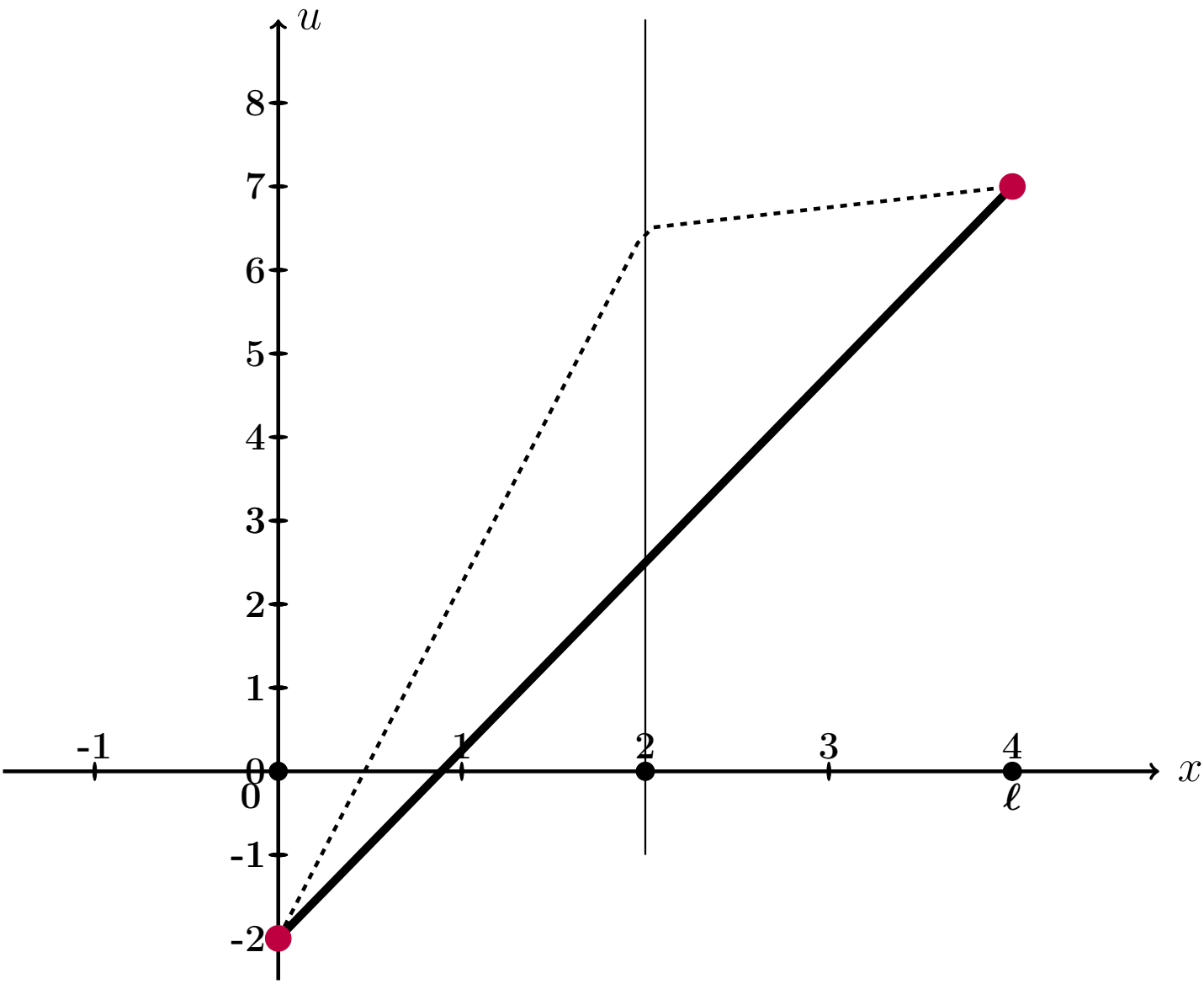


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (12.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (12.3).

Выборочная проверка вариант 12 задача 9 (по формулам (12.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 9 (по таблице 12.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 12 задача 9 (по таблице 12.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 13

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 4 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 4 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 4 \cdot x + 6$.

$$y = 4 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \boxed{\square}.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{6}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{6}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$4\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

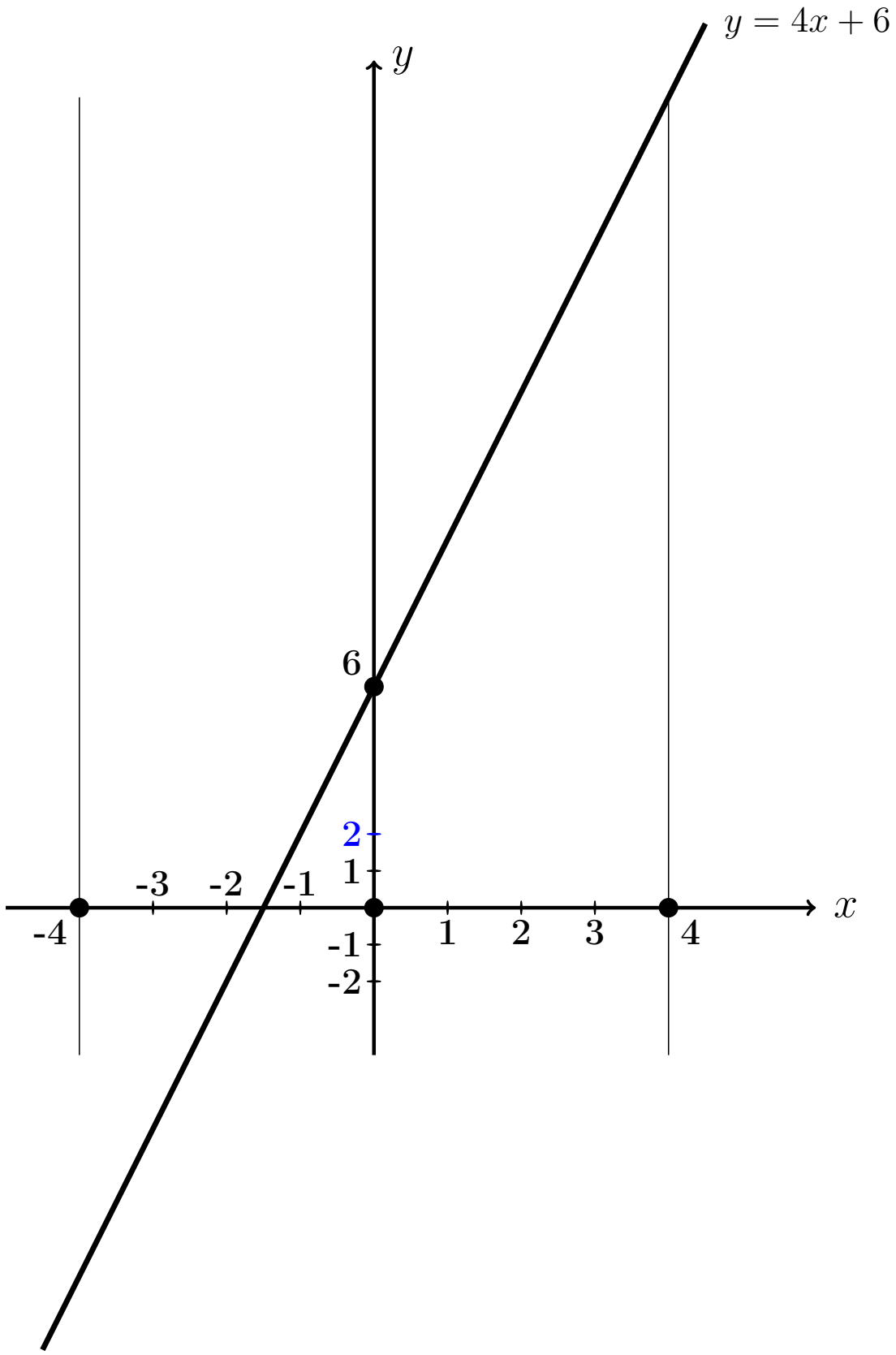
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 13.1 (Табулировка $y=4x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=4x+6$	-10	-6	-2	2	6	10	14	18	22
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 13.1



Выборочная проверка вариант 13 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 1 (по Таблице 13.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sin x + 24y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (8\sin x + 24y^3)dx = 8\int \sin x\,dx + 24\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad = 12\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x + 8t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x + 8t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x + 8t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 13 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

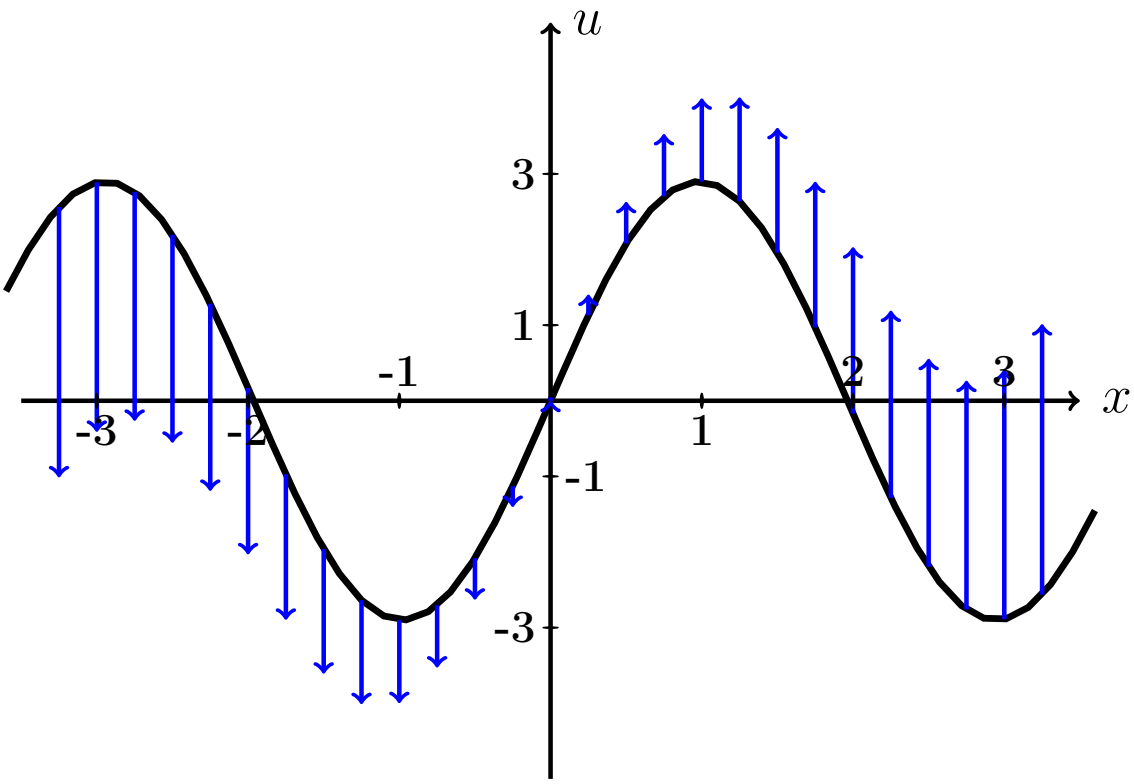


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 13.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 13 задача 4 (по Таблице 13.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 13.2.

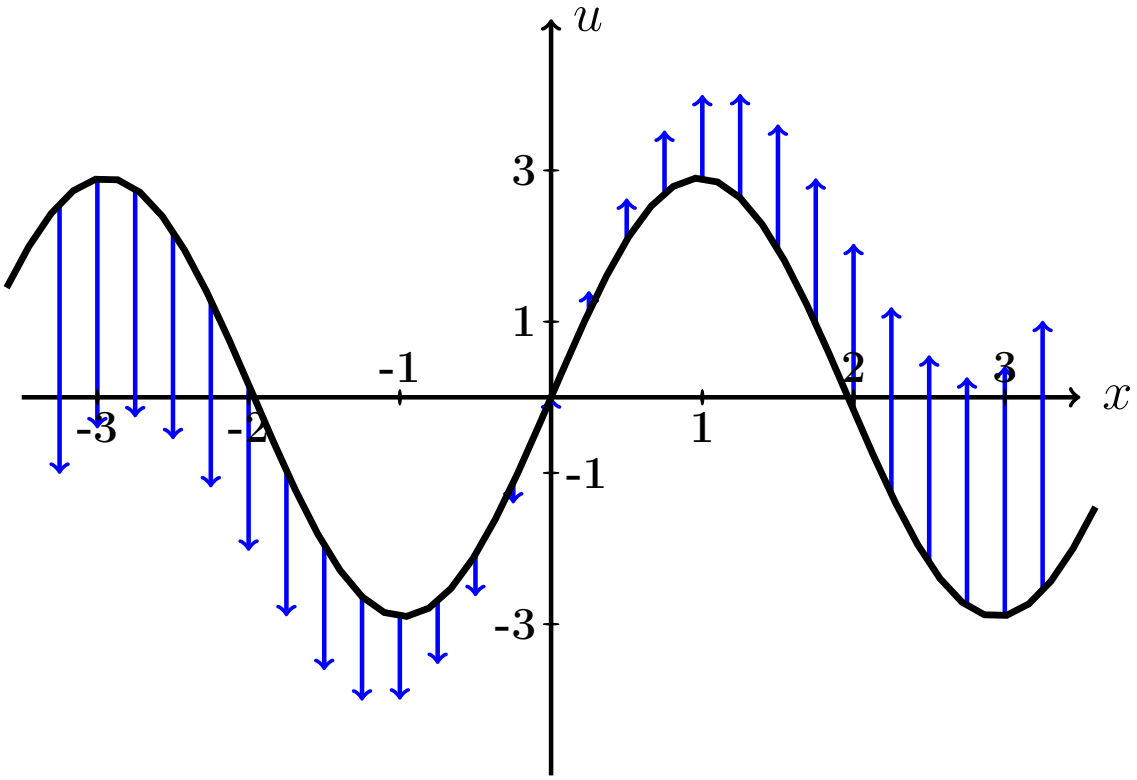


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

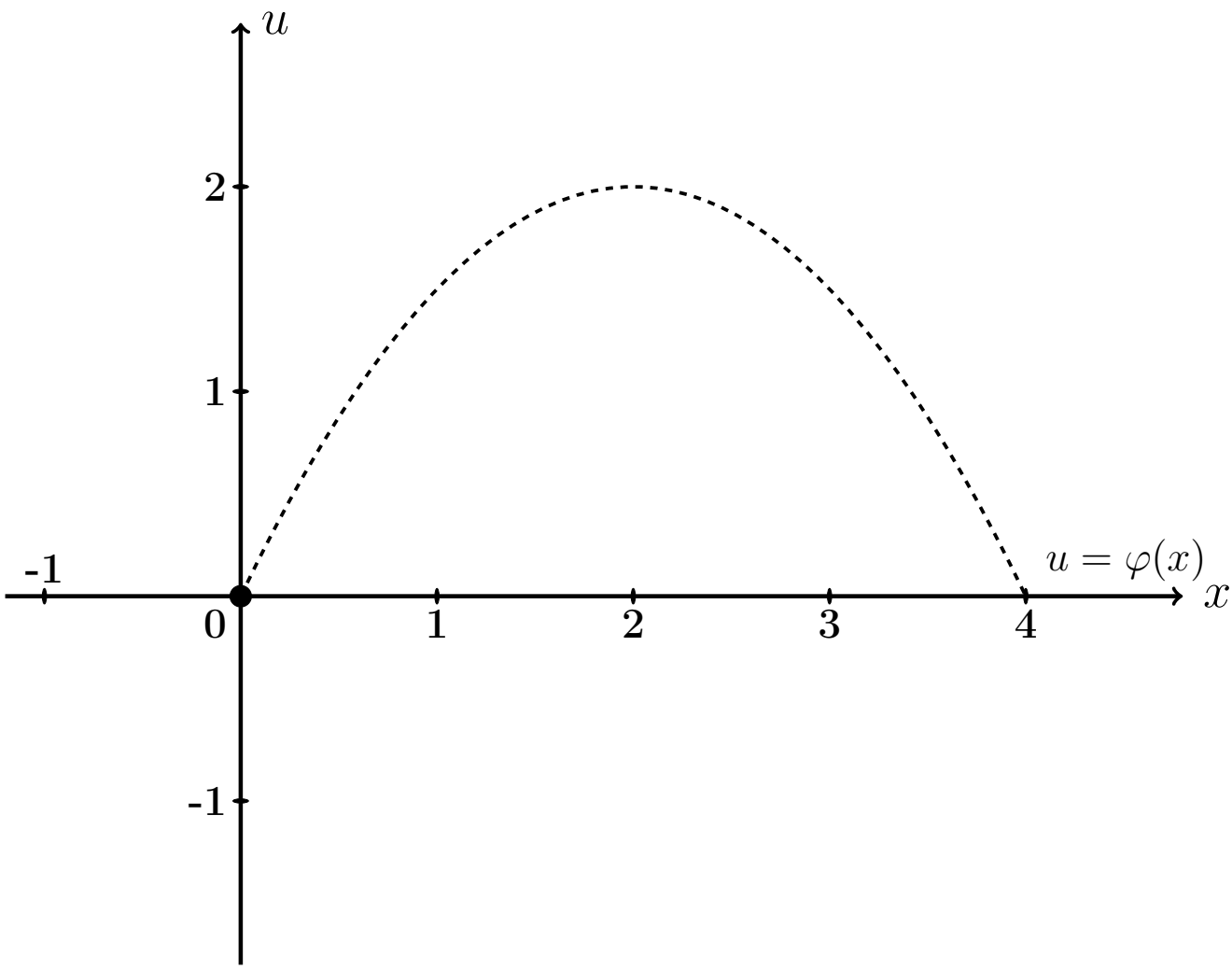


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 13.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 13.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 13.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 13.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 13 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 5 (красные клетки таб. 13.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 13.4.

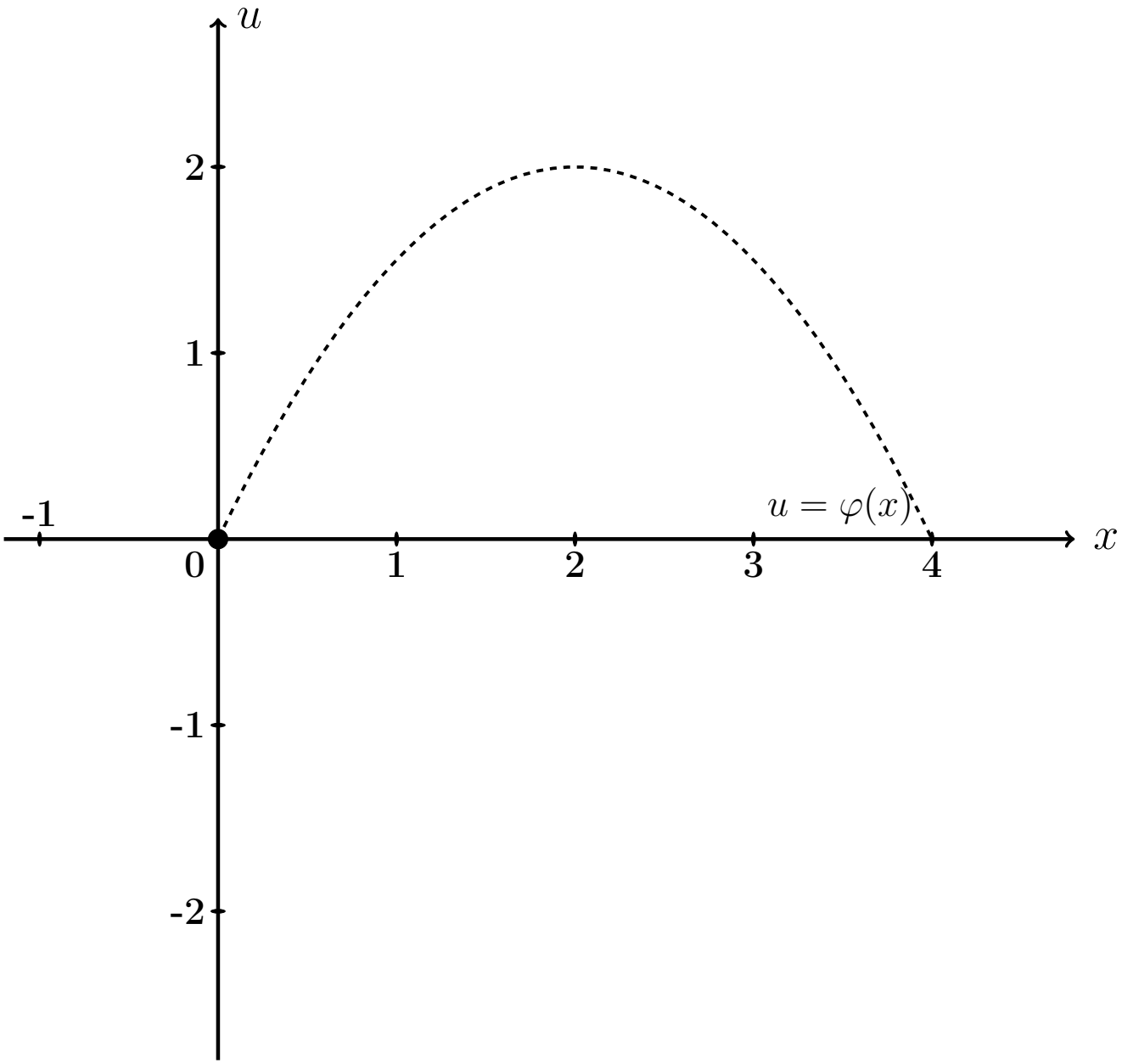


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

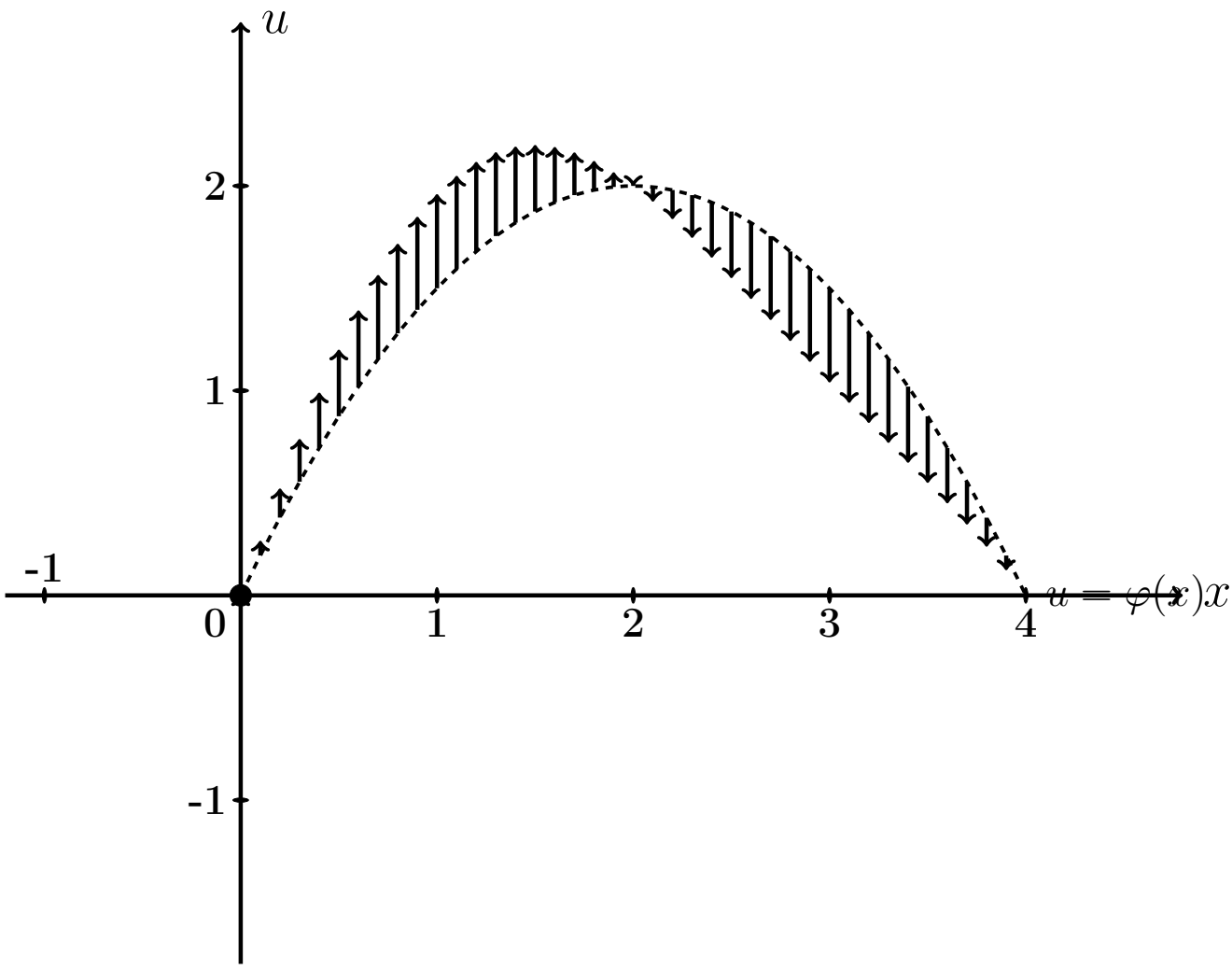


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 13.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.40$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 13.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 13.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 13.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 13 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 6 (красные клетки Таблицы 13.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 13.6.

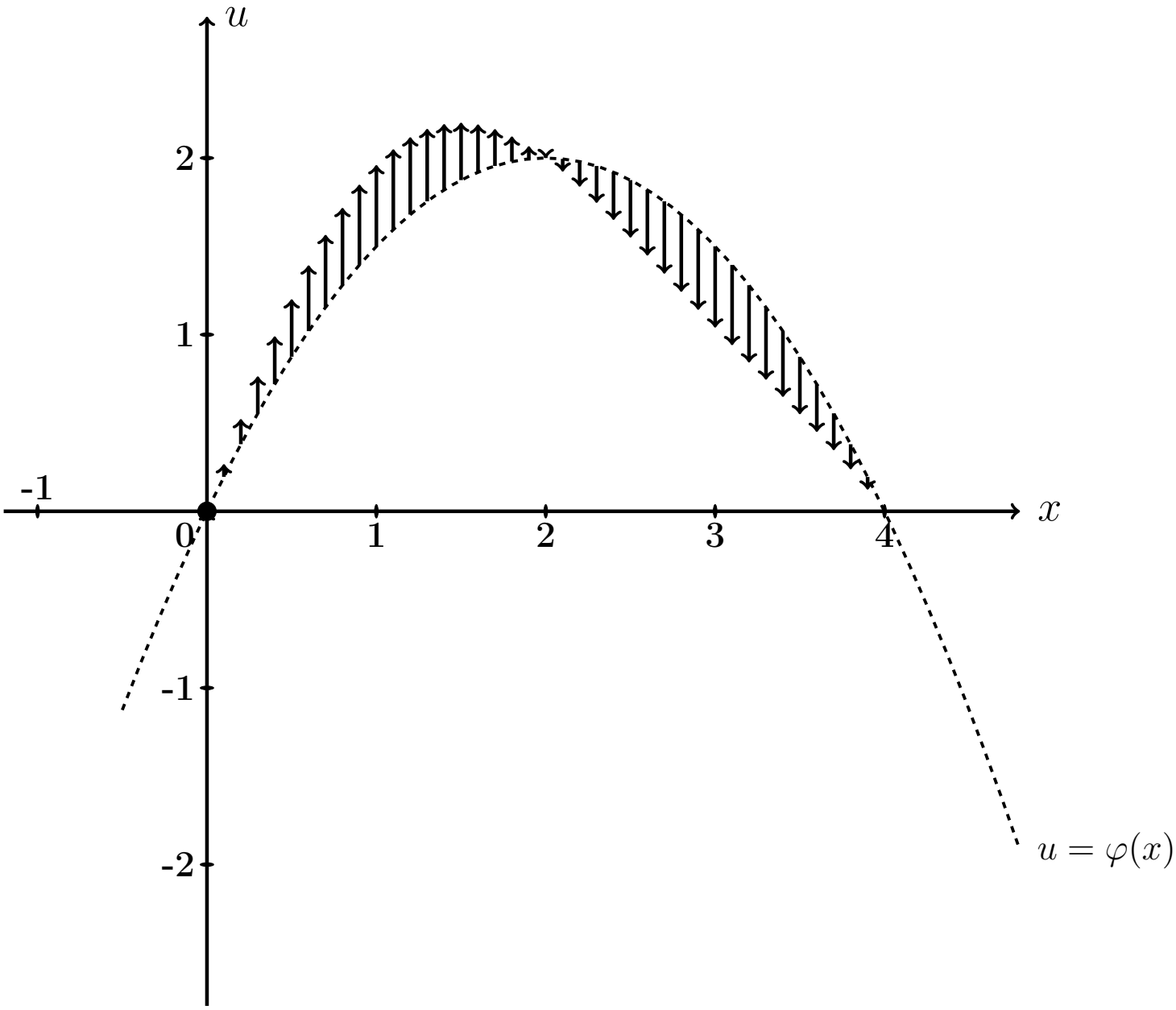


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.40 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 1.40 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{13.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{13.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (13.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{13.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (13.2), (13.3). Затабулировать решение уравнения (13.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (13.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (13.2), (13.3). Затабулировать решение уравнения (13.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (13.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 13.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (13.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{13.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (13.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (13.4) при граничных условиях (13.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{13.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{13.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{13.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (13.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (13.9). Следовательно, по формуле (13.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{13.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{13.11}$$

Шаг 6.

Таблица 13.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 13.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (13.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 13.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 13.9

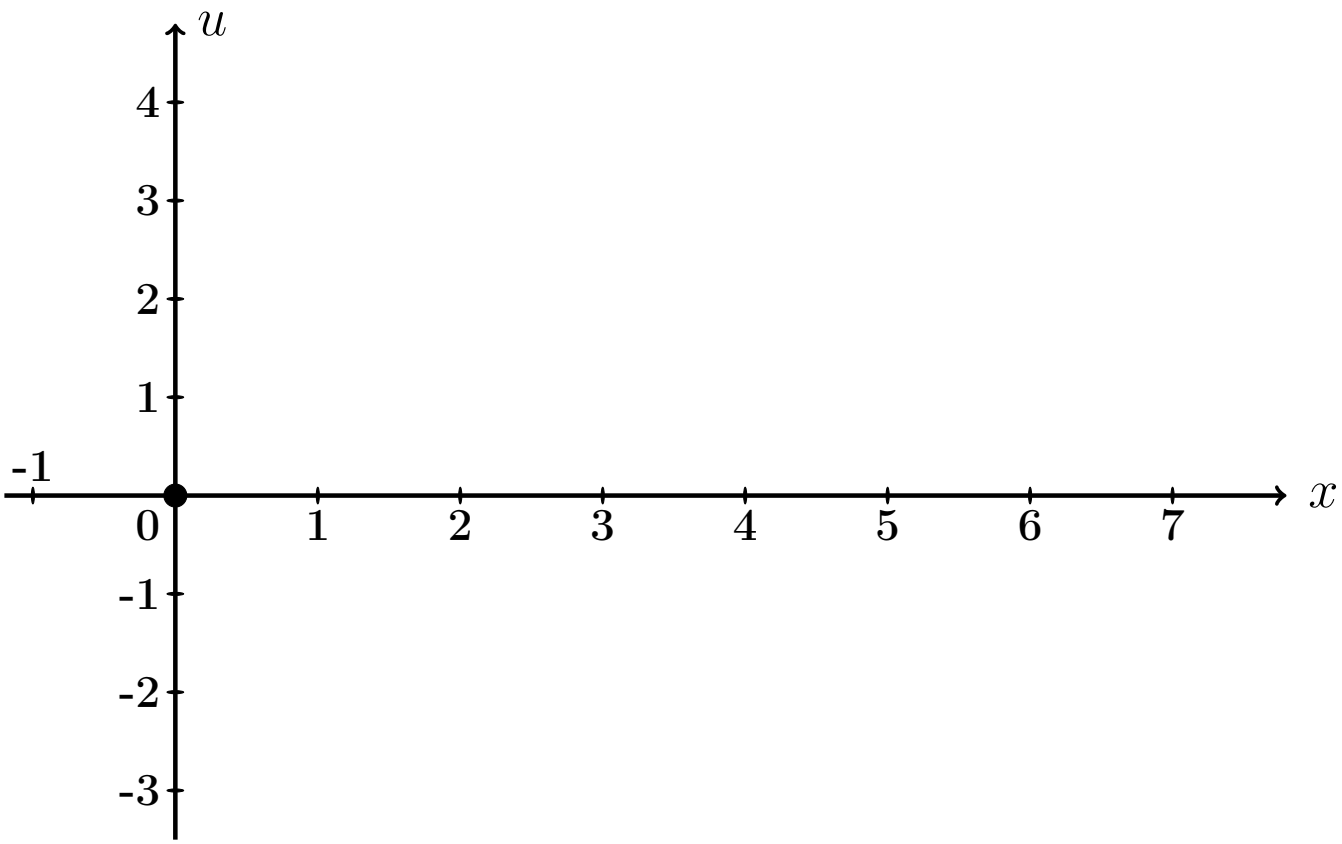


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 13 задача 7 (по Таб. 13.7, 13.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 13 задача 7 (по таблице 13.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (13.6) и (13.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (13.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (13.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (13.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (13.9). Следовательно, по формуле (13.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (13.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (13.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (13.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 13.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (13.5),

$C_1' =$ по формуле (13.12)

и $C_3 =$ по таблице 13.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 13.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,98	1,96	2,94	3,92	4,9	3,92	2,94	1,96	0,98	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

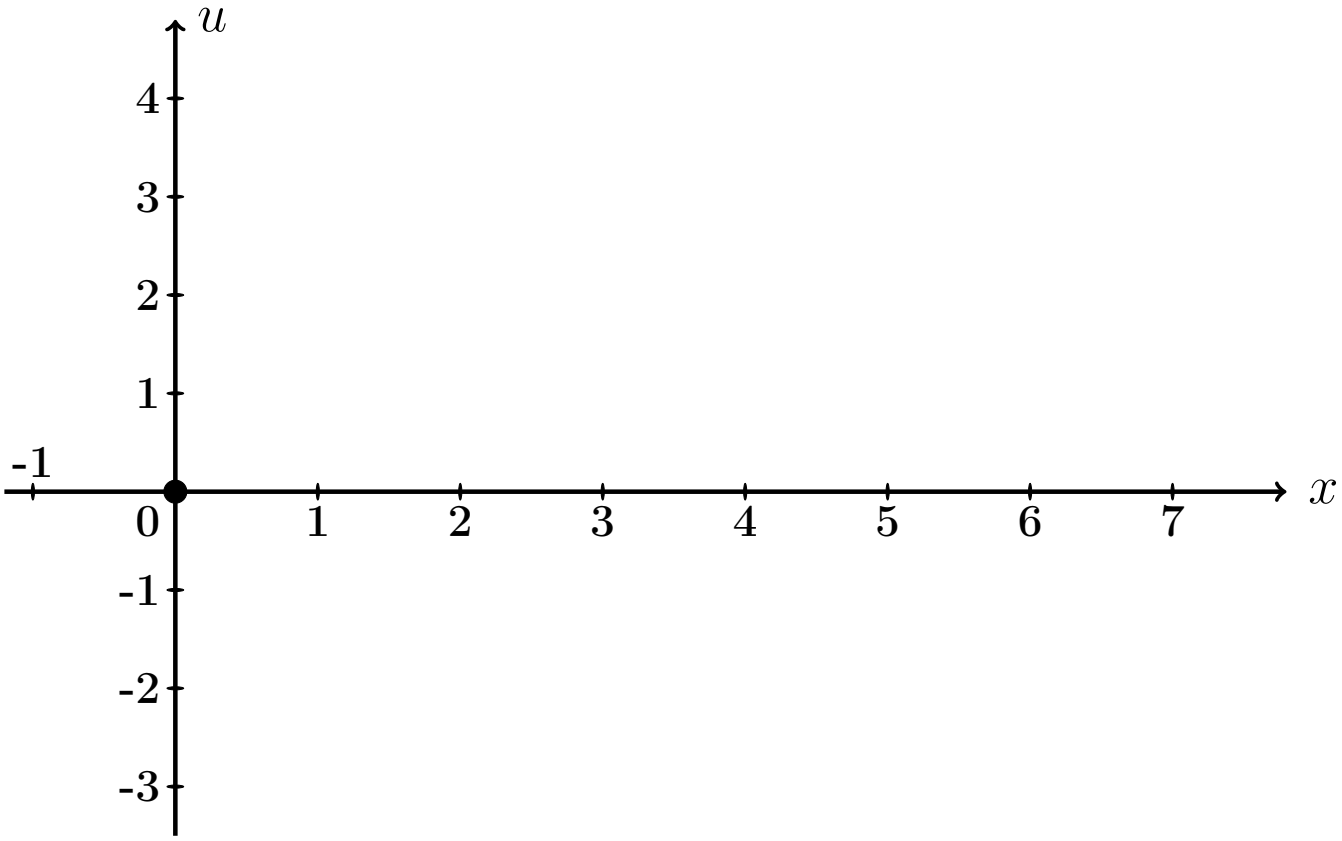


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 13 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (13.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 13 задача 7 (по таблице 13.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{13.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (13.1). Затабулировать решение уравнения (13.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

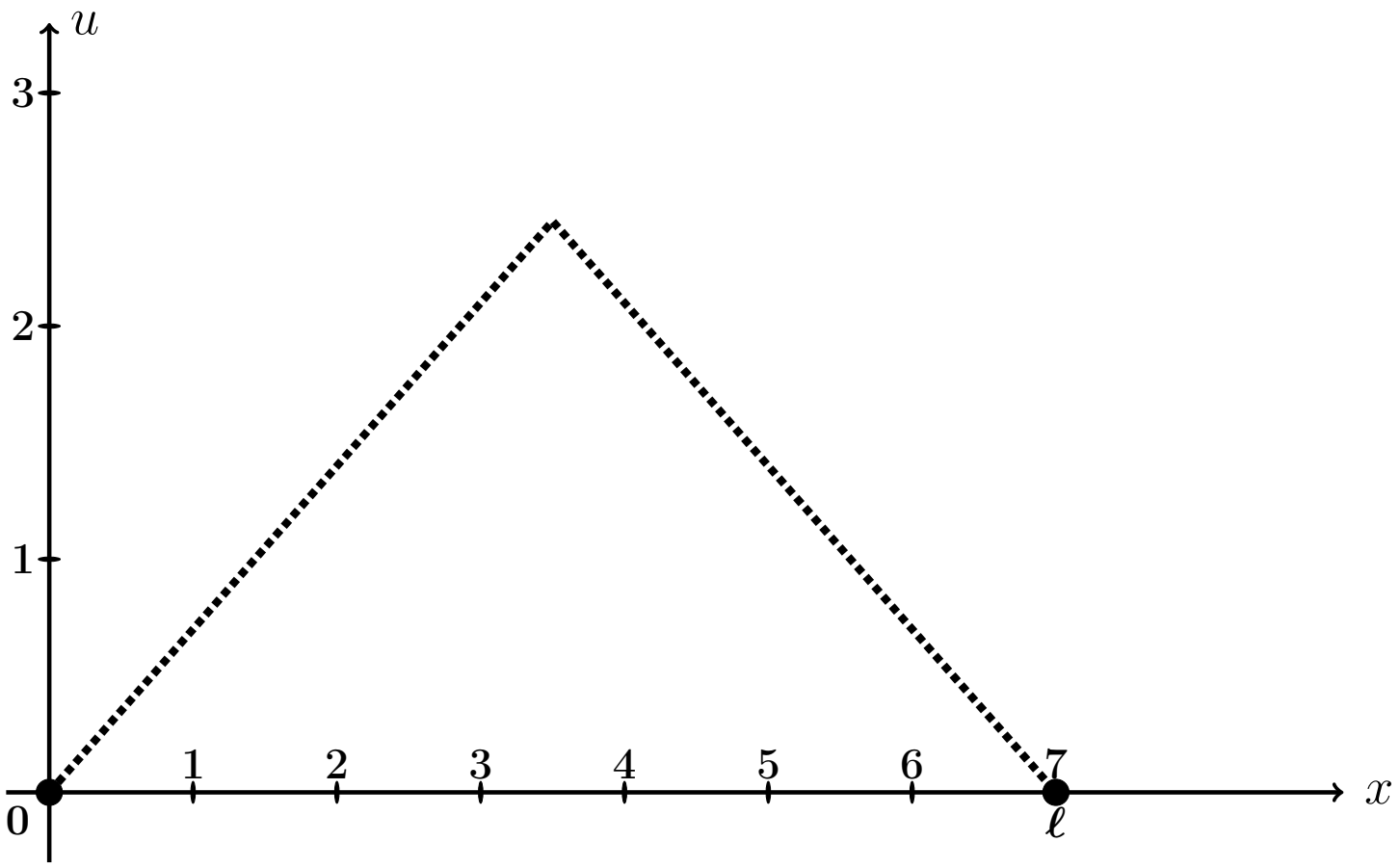


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (13.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \qquad (13.3)$$

где $\ell = 7$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 13.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad\qquad =$

$$= \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 13.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 13.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 13.12, 13.13) формулы (13.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 13.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 13.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 13.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 13.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

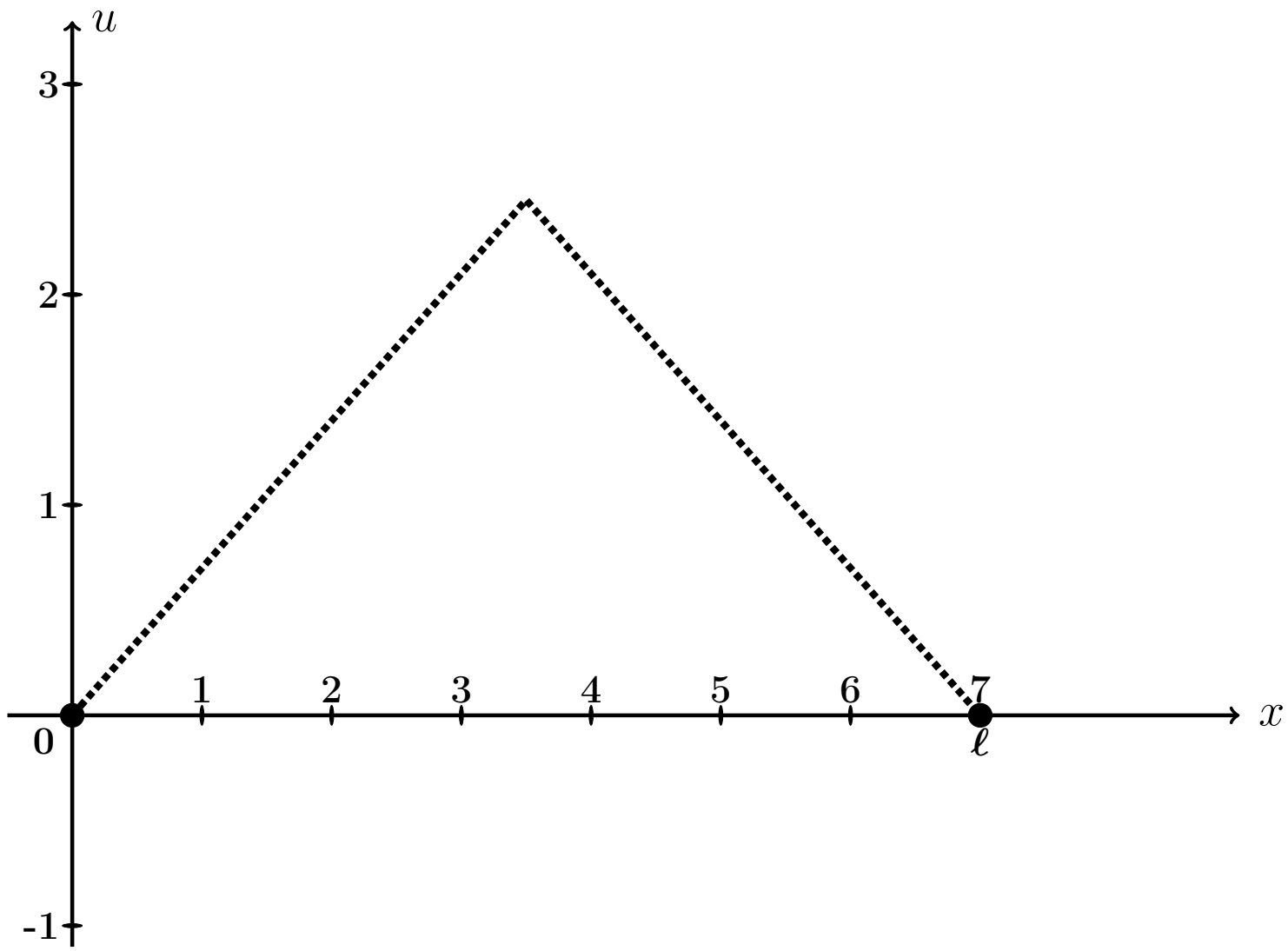


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (13.2).

Выборочная проверка вариант 13 задача 8 (по таблице 13.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 8 (по таблице 13.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 8 (по таблице 13.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 8 (по таблице 13.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(16.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{13.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{13.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

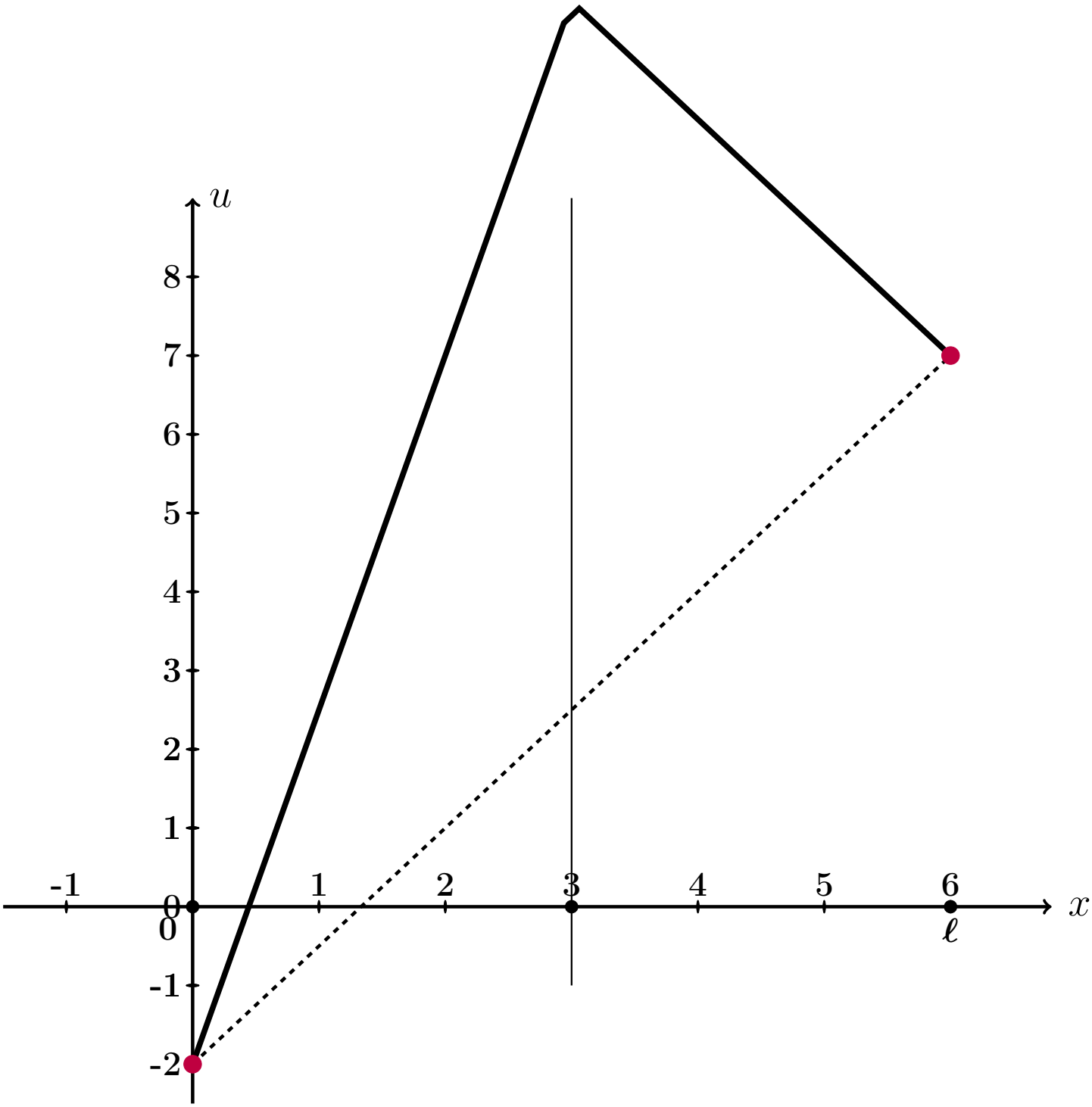


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (13.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (13.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (13.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{13.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{13.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (13.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (13.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{13.7}$$

Таблица 13.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (13.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (13.1) с начальным условием (13.2) и граничными условиями (13.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (13.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_6 = 7.0$ — значения граничных условий (13.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 13.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 13.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-2	0,7	3,4	6,1	8,8	11,5	10,6	9,7	8,8	7,9	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 13.16.

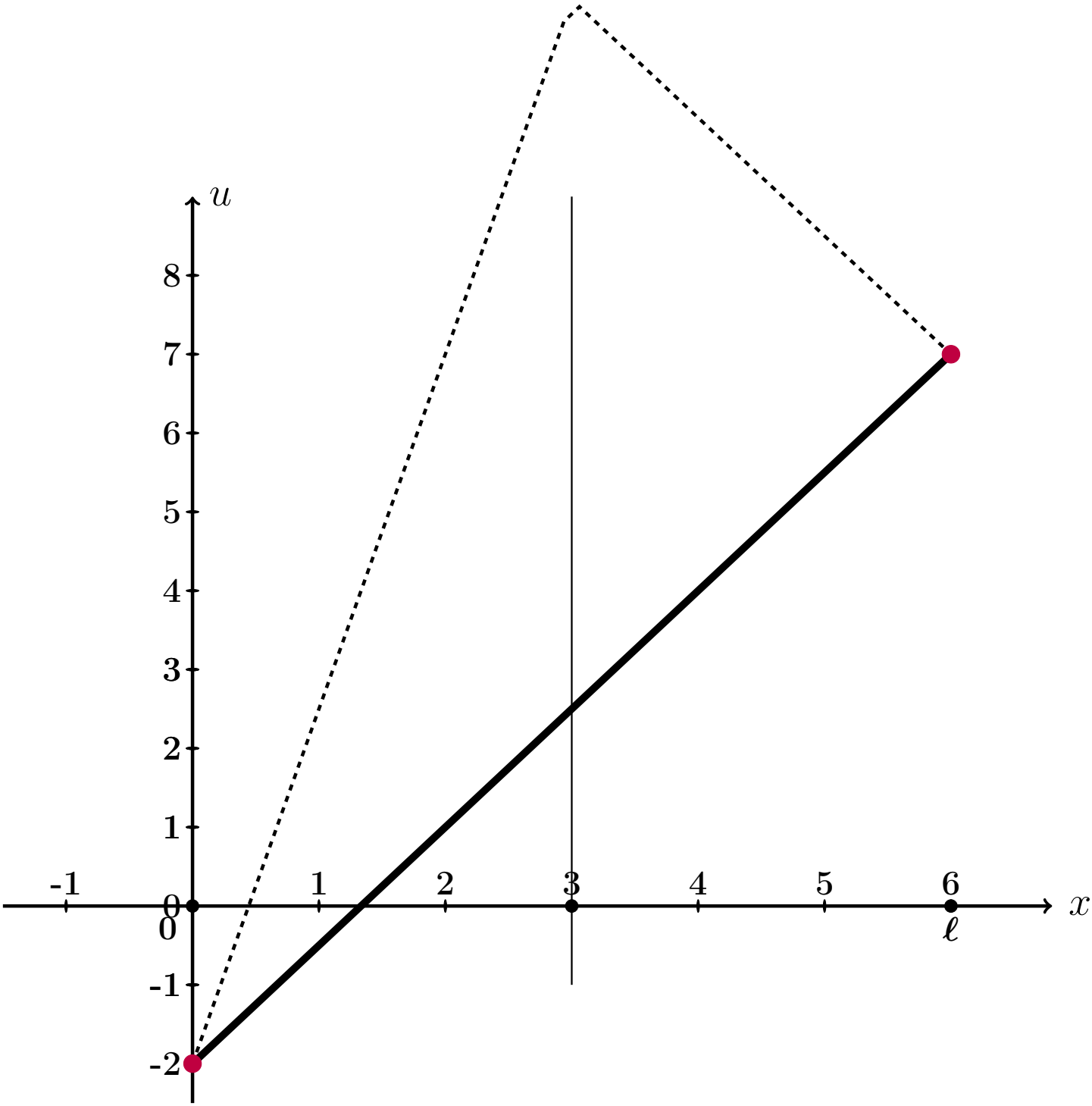


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (13.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (13.3).

Выборочная проверка вариант 13 задача 9 (по формулам (13.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 9 (по таблице 13.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 13 задача 9 (по таблице 13.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 14

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 9$.

$$y = 2 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{9}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{9}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+9=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

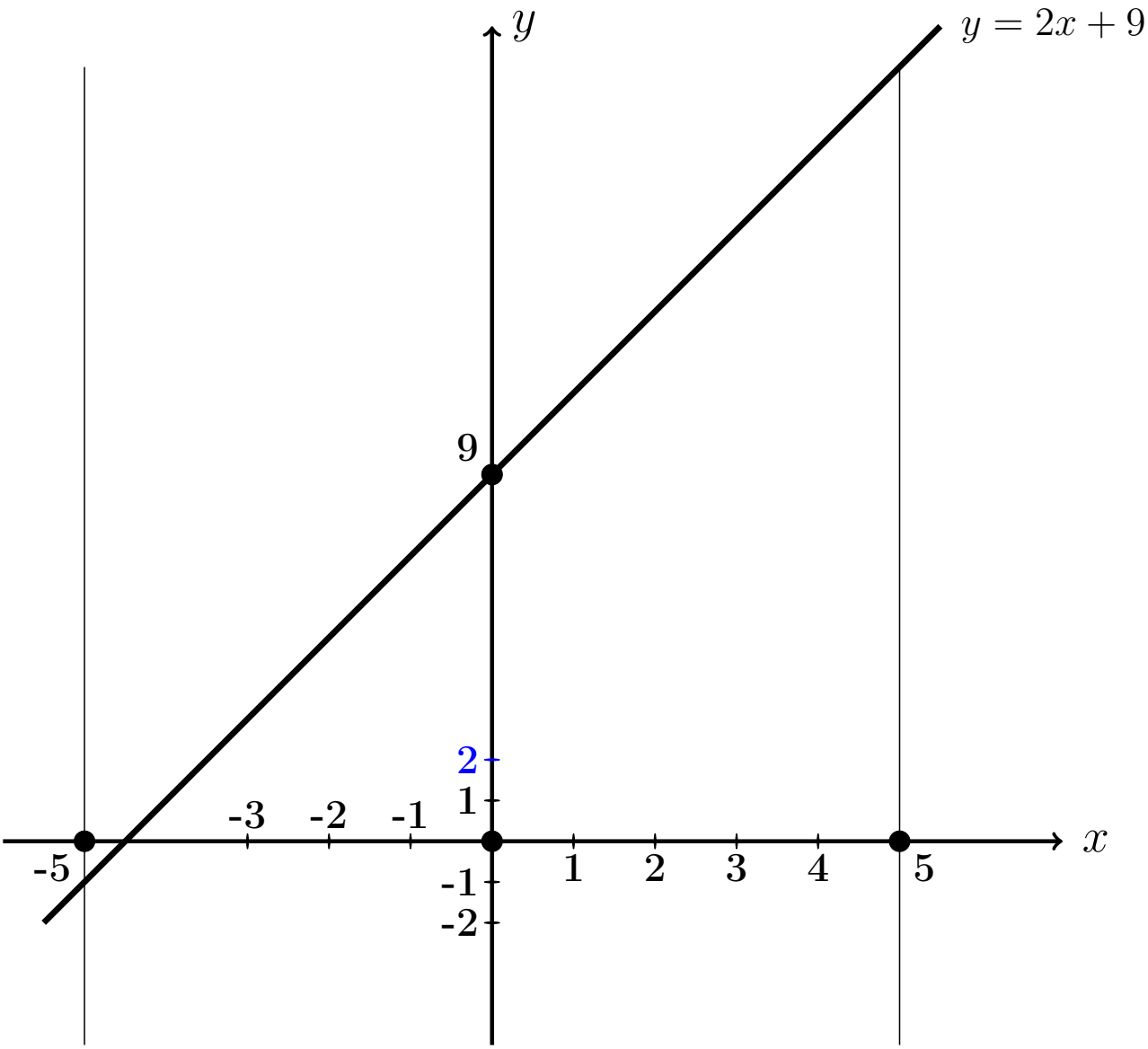
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 14.1 (Табулировка $y=2x+9$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+9$	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$y=S_1(x)$		*									
$y=S_2(x)$					*						
$y=S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 14.1



Выборочная проверка вариант 14 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 1 (по Таблице 14.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sqrt{x} + \frac{24}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(8\sqrt{x} + \frac{24}{y}\right)dx = 8\int x^{1/2}dx + 24\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad + C(y) = \qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad + C(y) = 12\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 8x^3 + 7\sin 4t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x \ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 8x^3 + 7\sin 4t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (8x^3 + 7\sin 4t)dt = \qquad + C(x) \ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$ $\qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$

Выборочная проверка вариант 14 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи $\qquad$ Клик $\qquad$

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

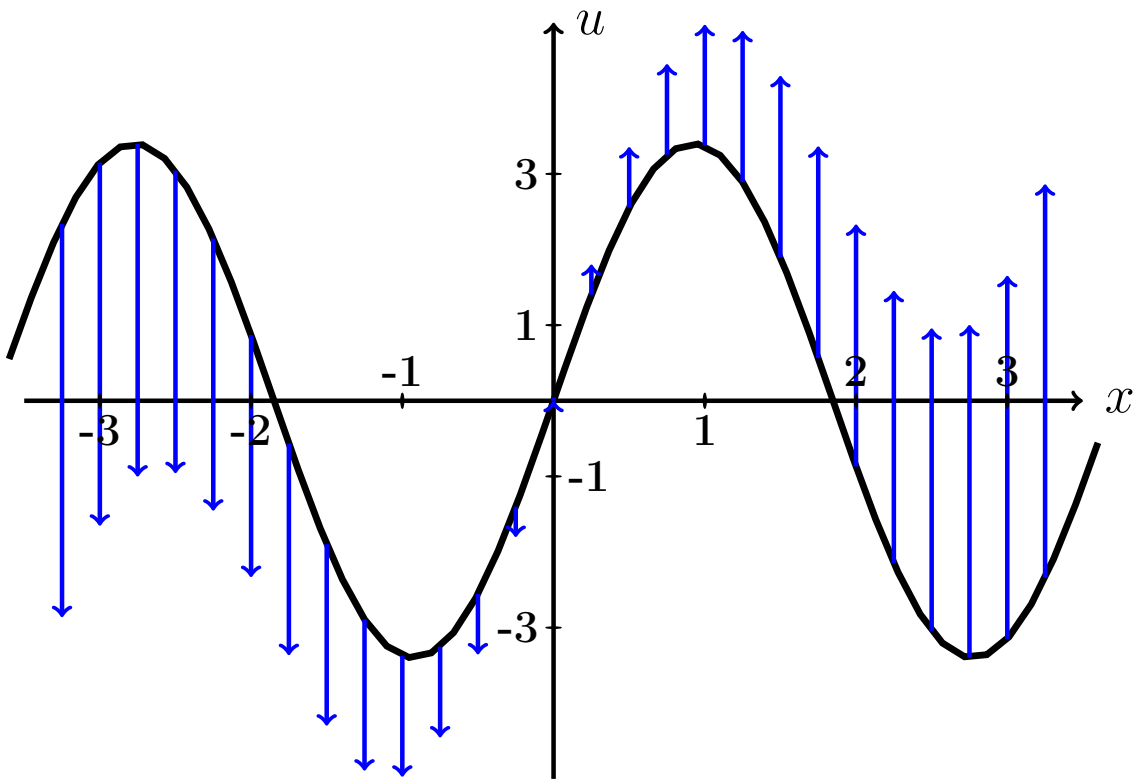


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 14.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 14 задача 4 (по Таблице 14.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 14.2.

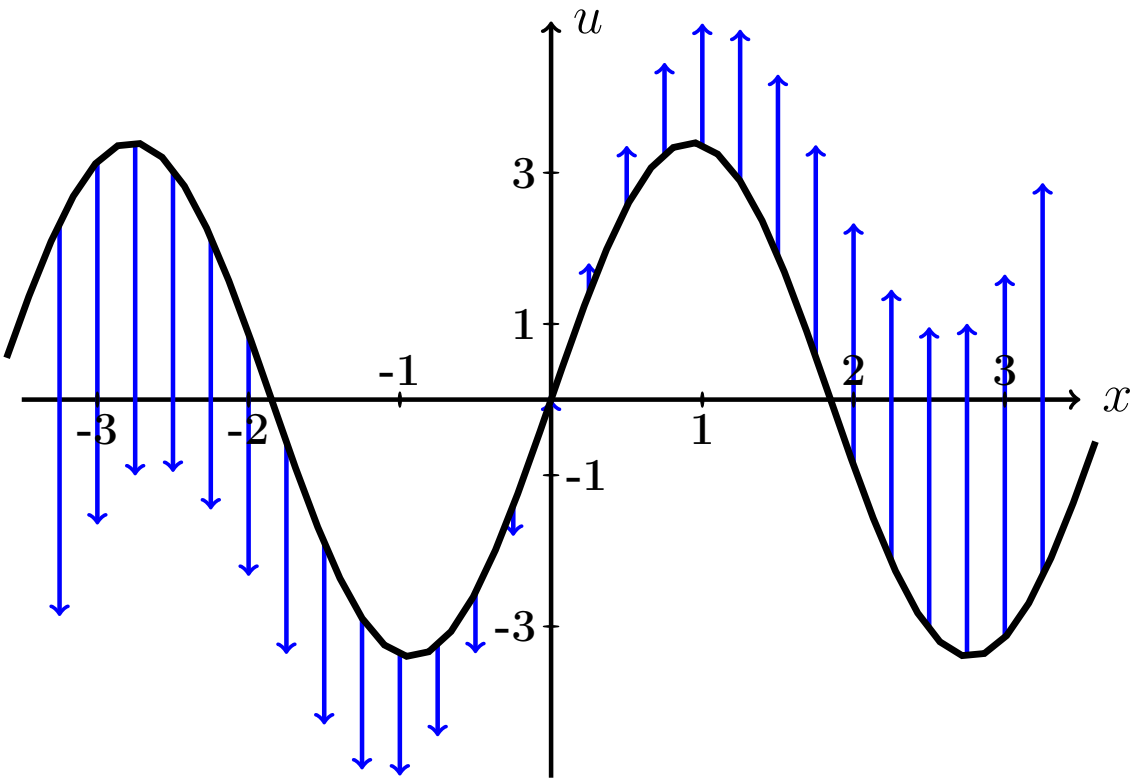


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

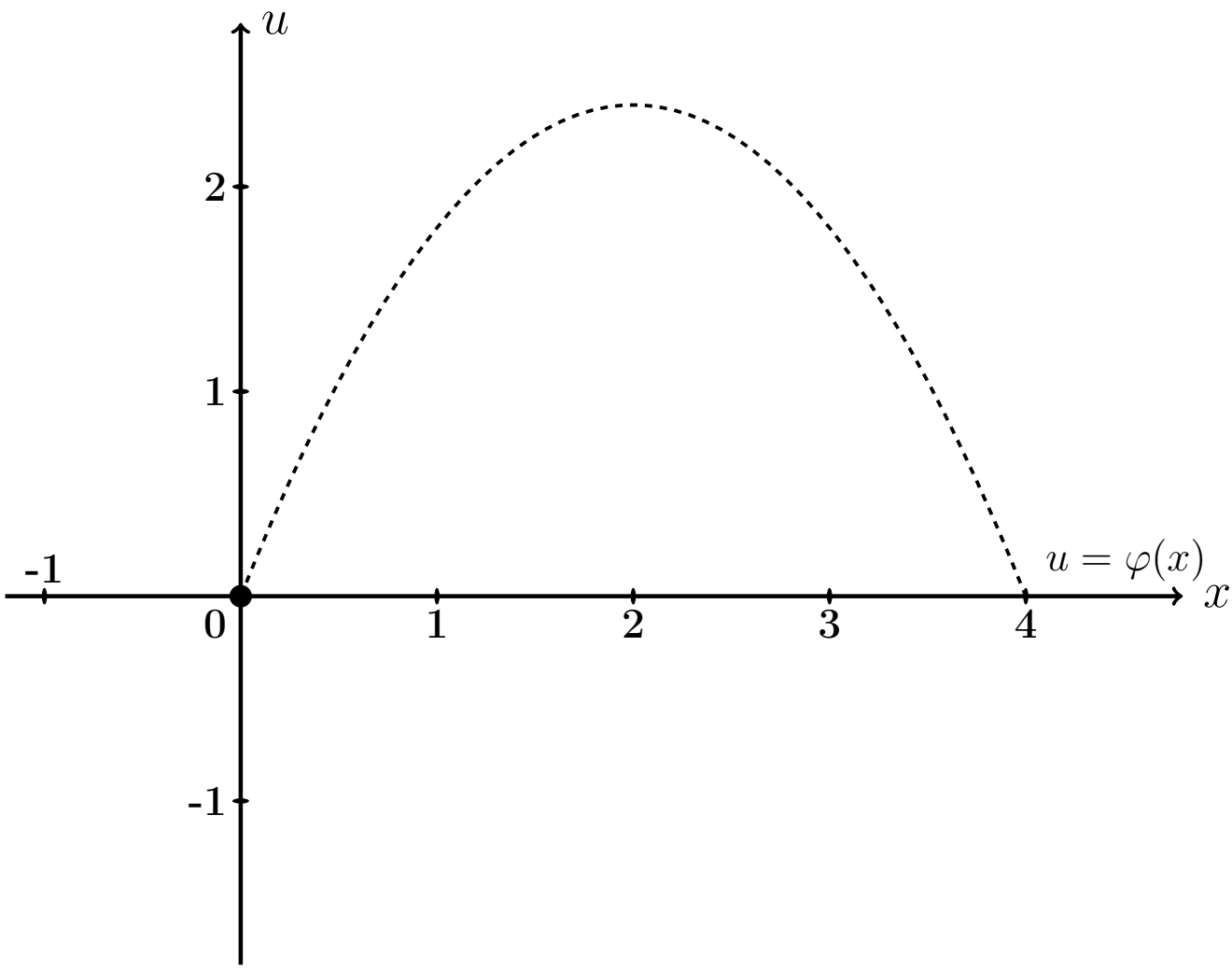


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 14.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 14.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 14.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 14.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 14 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 5 (красные клетки таб. 14.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 14.4.

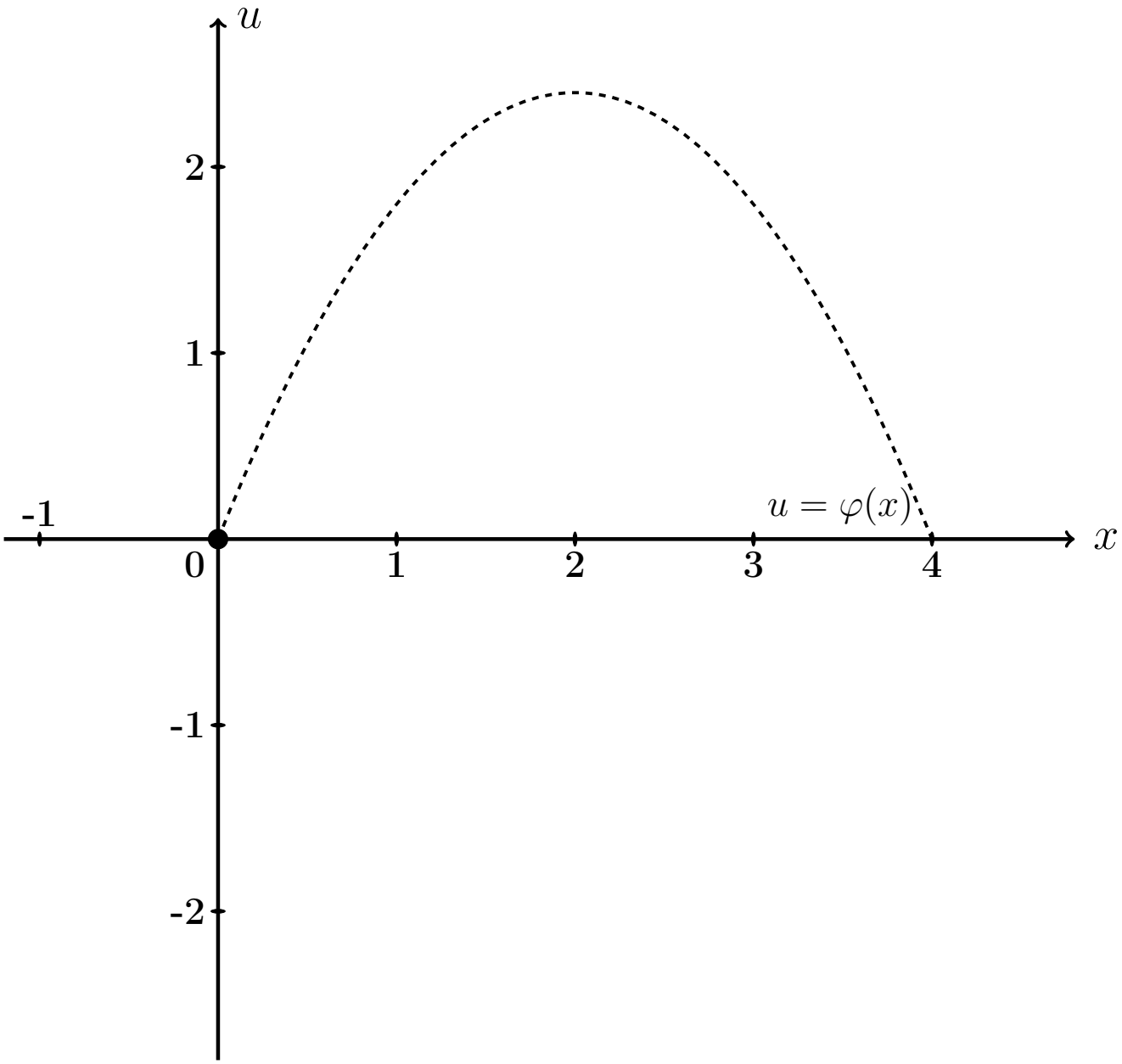


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

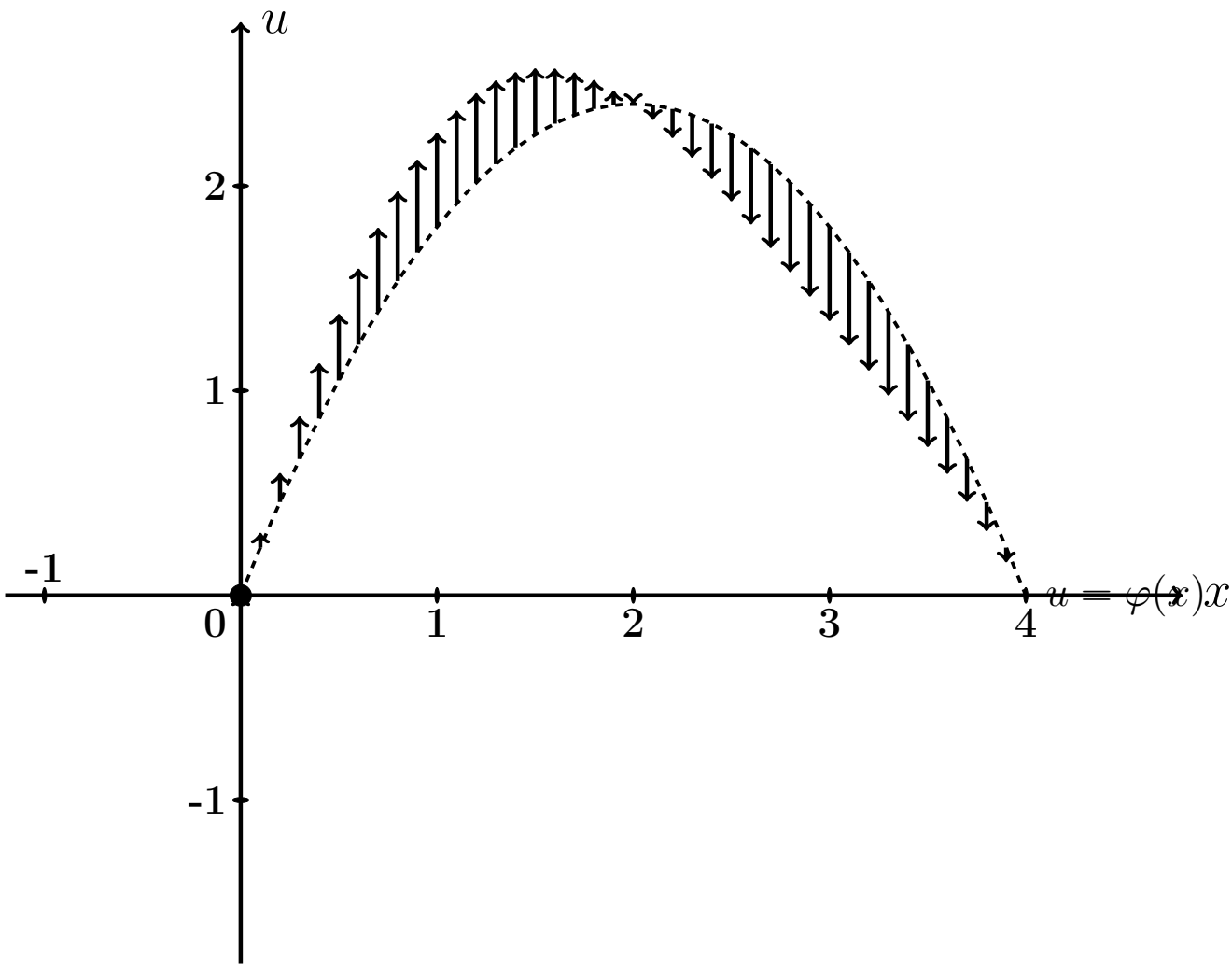


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 14.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\square}{\square}\sin\frac{k\pi x}{\square} + B_2\sin\frac{\square}{\square}\sin\frac{\square}{\square}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.39$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 14.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \square + \square +$$

$$+ \square + \square$$

где $A_1 = \square$, $A_3 = \square$, $A_5 = \square$ по таблице 14.5, а $B_2 = \square$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \square + \square +$$

$$+ \square + \square$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 14.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 14 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 6 (красные клетки Таблицы 14.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 14.6.

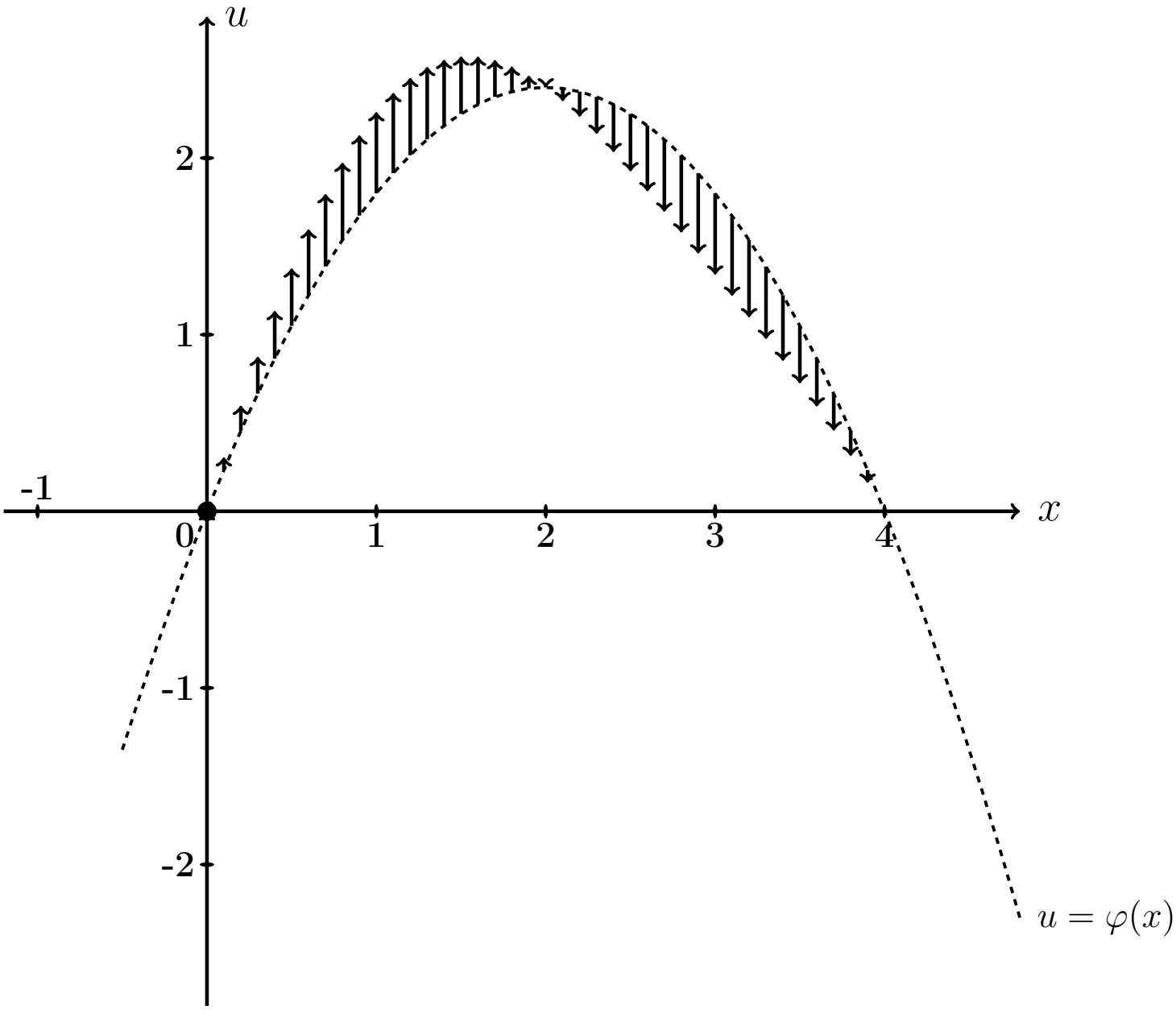


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.20 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 1.20 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{14.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{14.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (14.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{14.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (14.2), (14.3). Затабулировать решение уравнения (14.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (14.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (14.2), (14.3). Затабулировать решение уравнения (14.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (14.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 14.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (14.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{14.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (14.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (14.4) при граничных условиях (14.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{14.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{14.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{14.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (14.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (14.9). Следовательно, по формуле (14.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{14.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{14.11}$$

Шаг 6.

Таблица 14.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 14.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (14.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 14.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 14.9

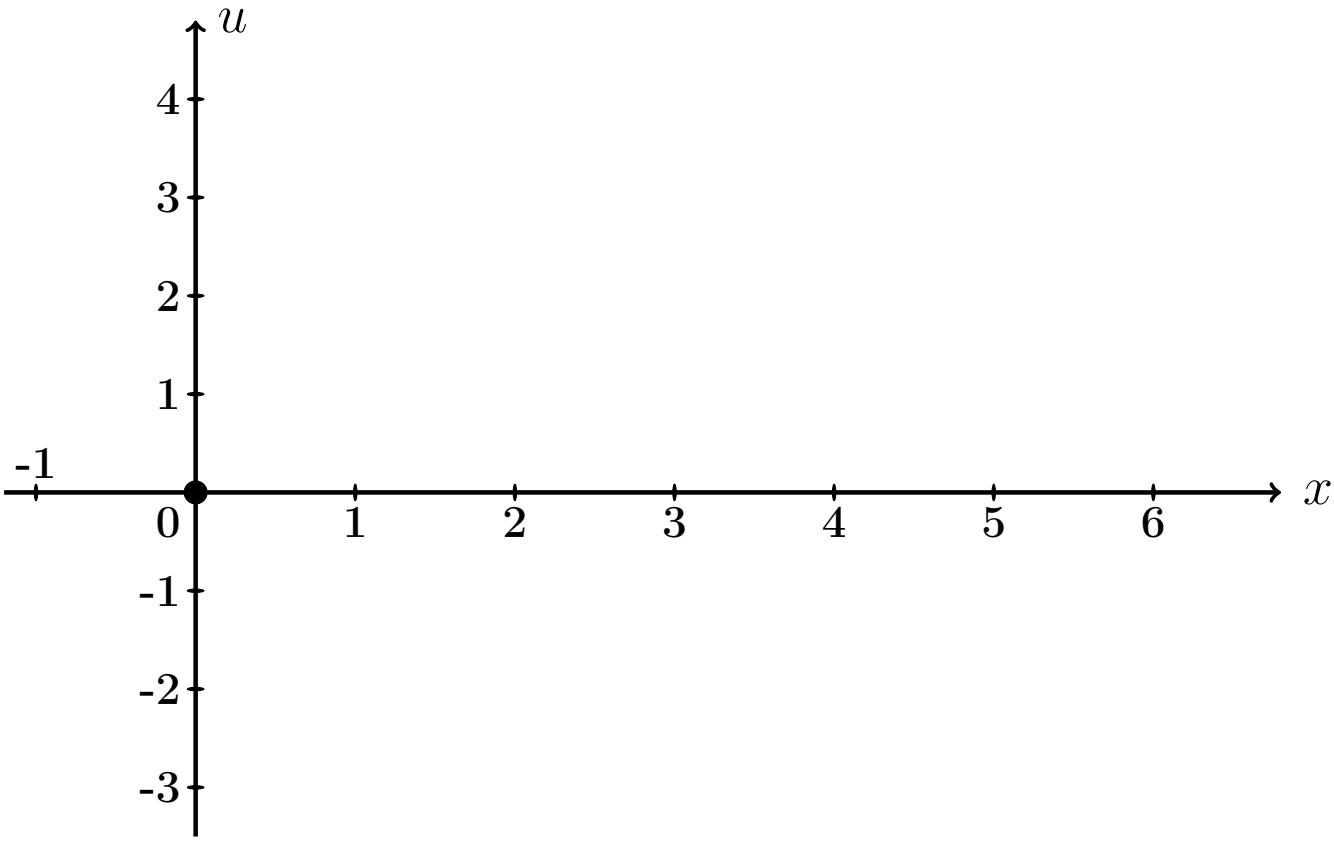


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 14 задача 7 (по Таб. 14.7, 14.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 14 задача 7 (по таблице 14.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (14.6) и (14.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (14.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (14.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (14.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (14.9). Следовательно, по формуле (14.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (14.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (14.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (14.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 14.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (14.5),

$C_1' =$ по формуле (14.12)

и $C_3 =$ по таблице 14.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 14.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,72	1,44	2,16	2,88	3,6	2,88	2,16	1,44	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

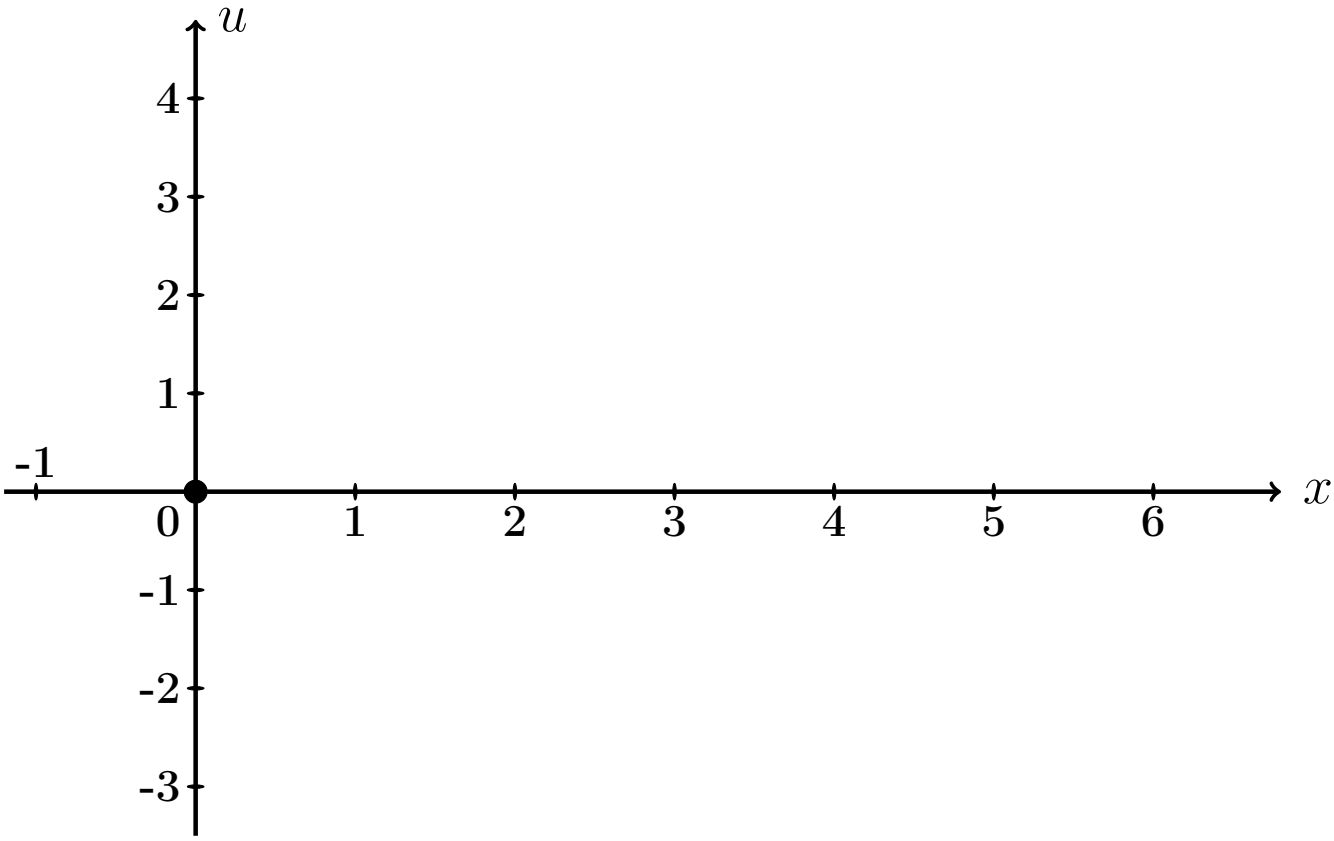


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 14 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (14.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 14 задача 7 (по таблице 14.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{14.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (14.1). Затабулировать решение уравнения (14.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

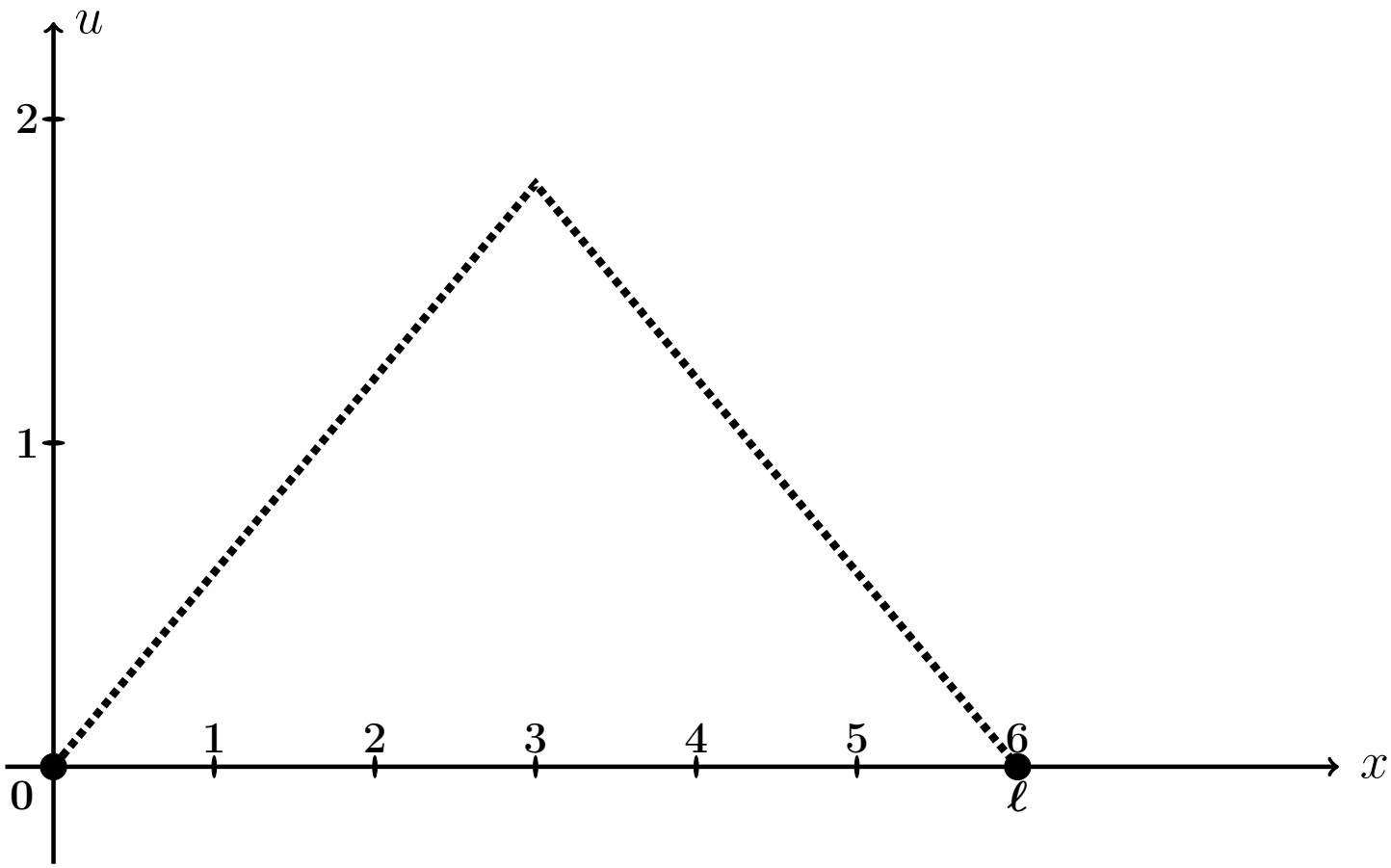


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (14.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (14.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 14.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 14.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 14.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 14.12, 14.13) формулы (14.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 14.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 14.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 14.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 14.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

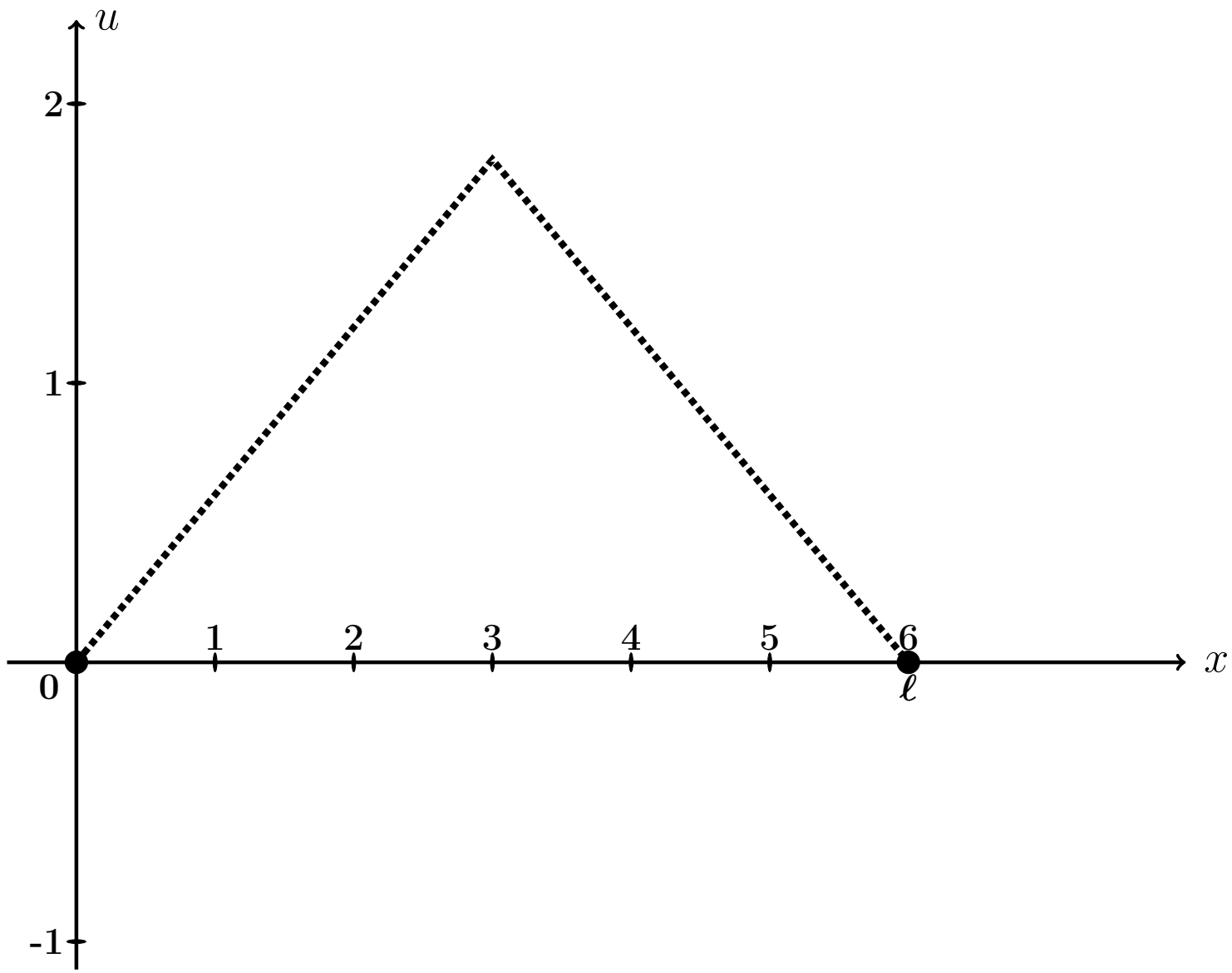


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (14.2).

Выборочная проверка вариант 14 задача 8 (по таблице 14.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 8 (по таблице 14.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 8 (по таблице 14.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 8 (по таблице 14.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(2.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{14.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{14.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

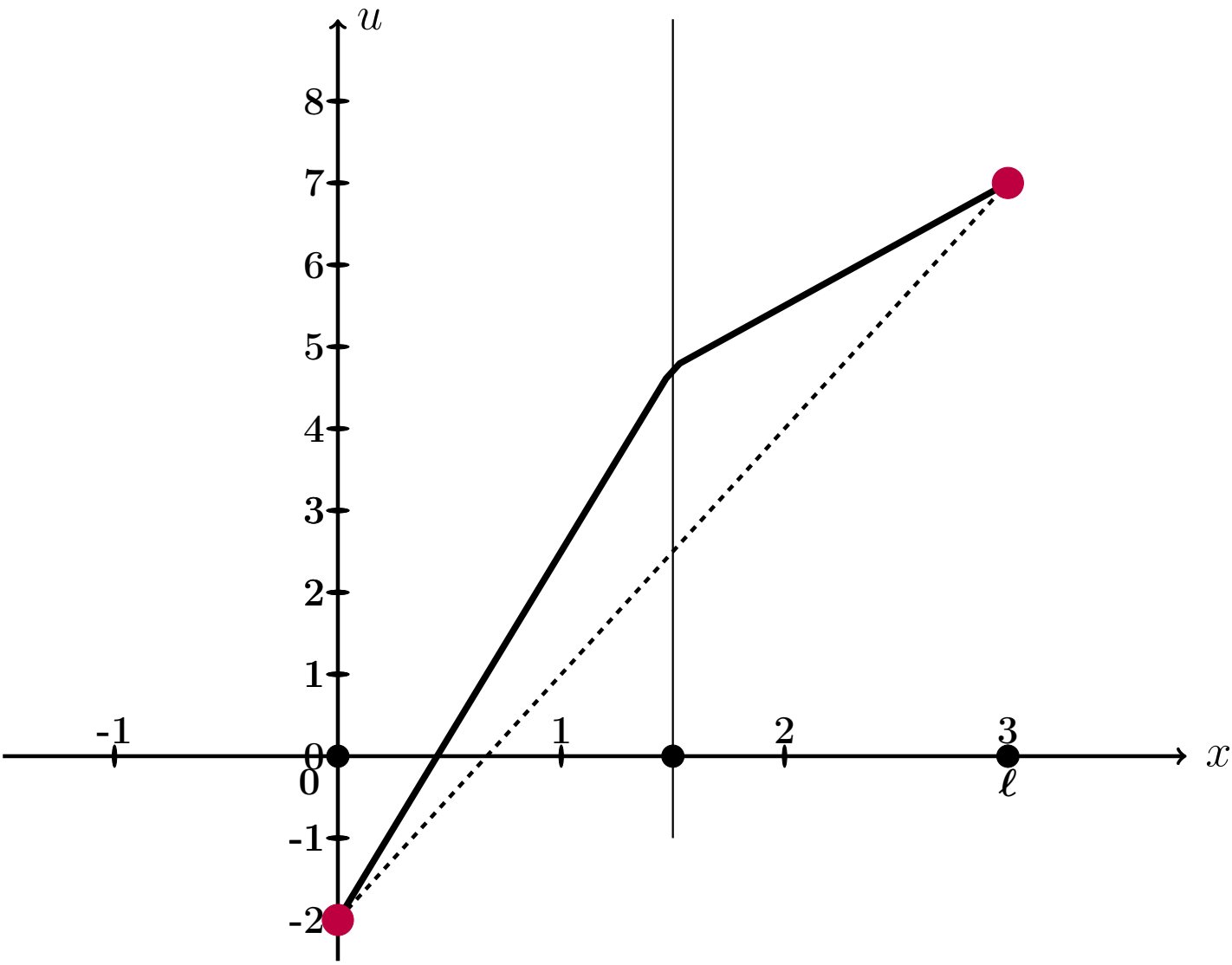


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (14.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (14.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (14.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{14.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{14.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (14.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (14.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{14.7}$$

Таблица 14.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (14.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (14.1) с начальным условием (14.2) и граничными условиями (14.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (14.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_3 = 7.0$ — значения граничных условий (14.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 14.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 14.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}65$	0,7	2,05	3,4	4,75	5,2	5,65	6,1	6,55	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 14.16.

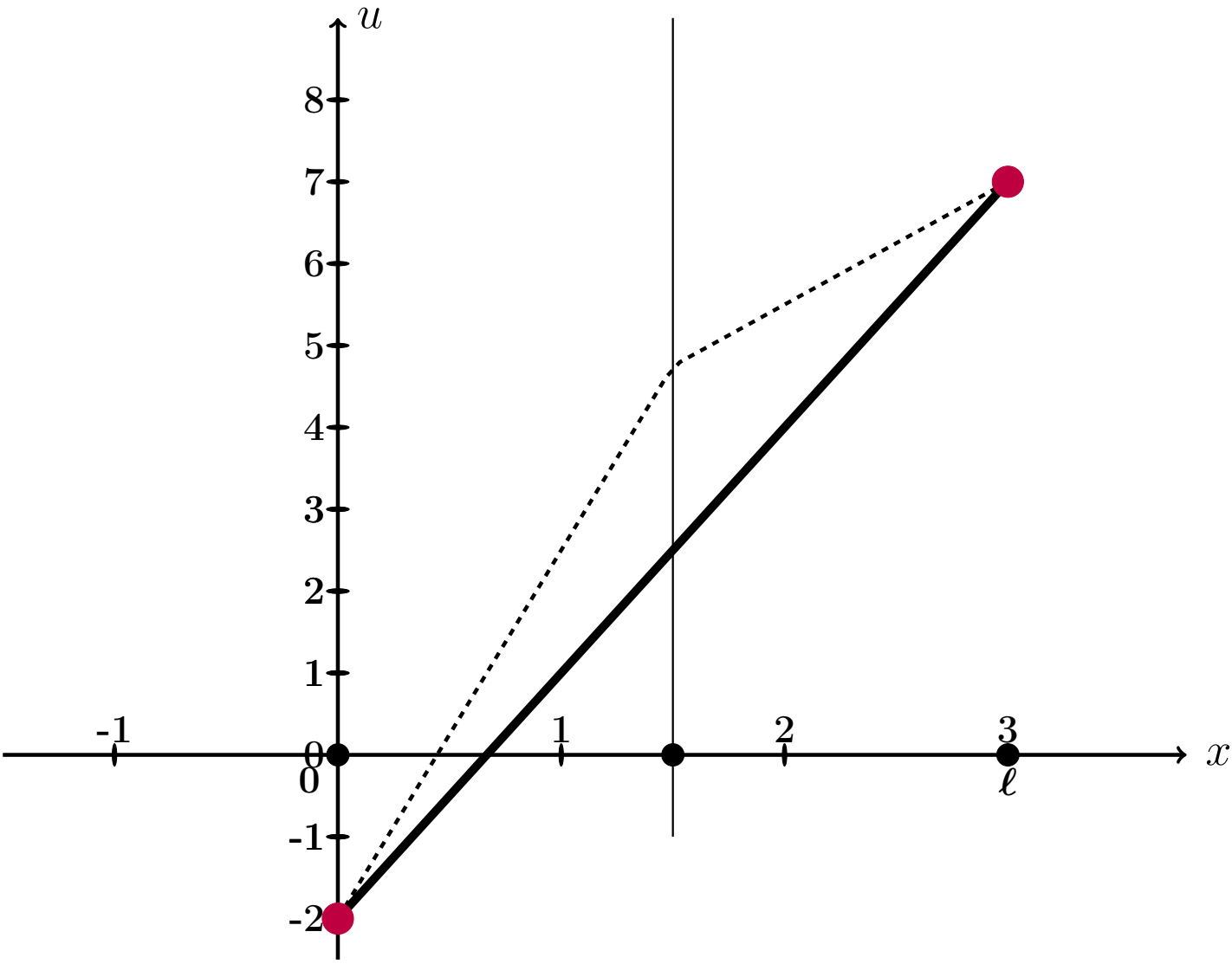


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (14.2), а черной сплошной линией — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (14.3).

Выборочная проверка вариант 14 задача 9 (по формулам (14.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 9 (по таблице 14.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 14 задача 9 (по таблице 14.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 15

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 8$.

$$y = 3 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{8}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{8}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

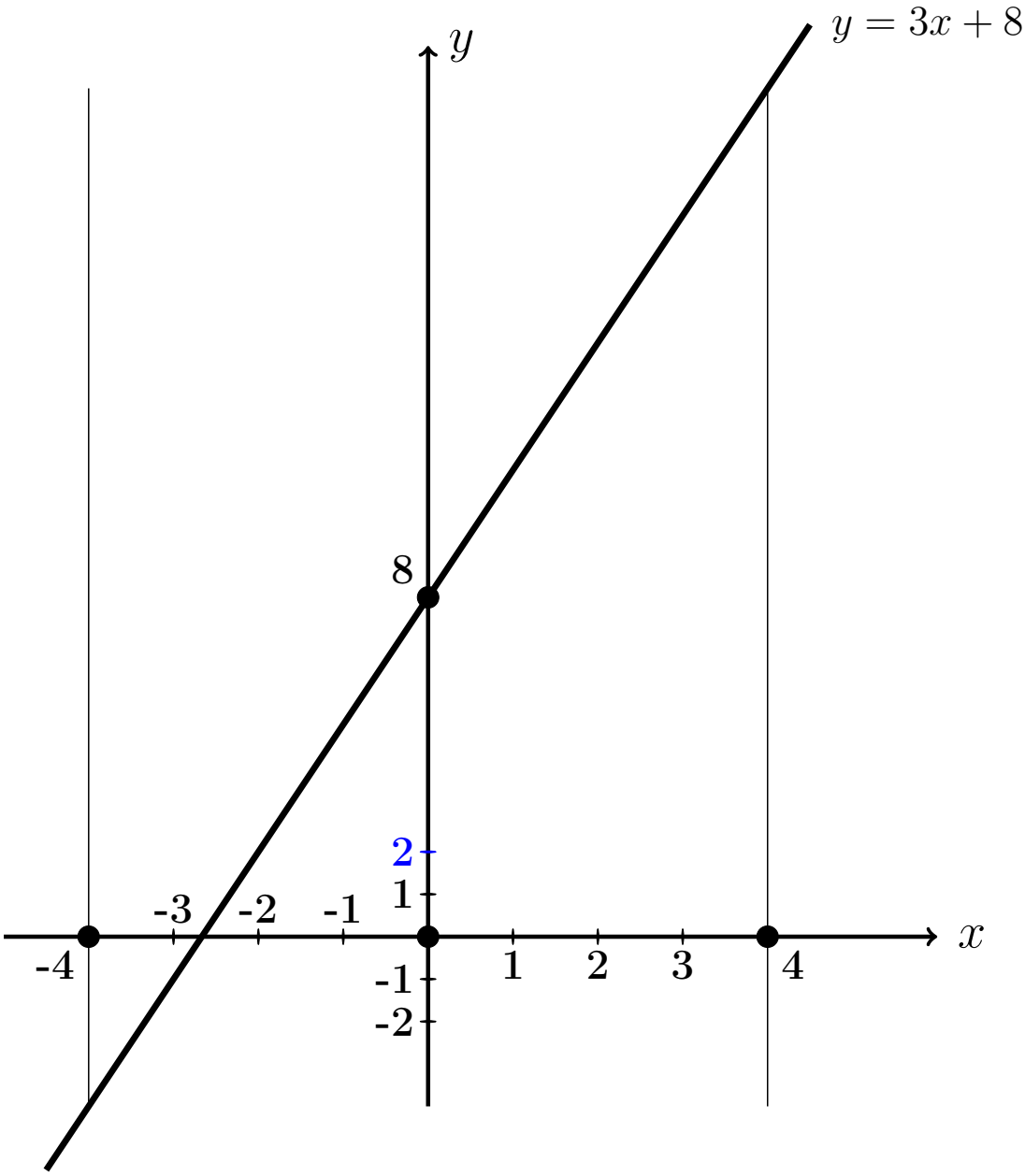
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 15.1 (Табулировка $y=3x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+8$	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 15.1



Выборочная проверка вариант 15 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 1 (по Таблице 15.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 10\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 15\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 10\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 10\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 15\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 15x^2 + 15t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 5x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 15x^2 + 15t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (15x^2+15t)\,dt = \qquad\qquad + C(x) = \qquad\qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \left(\qquad \right) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 5x^2 \\ \qquad = 4e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 15 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

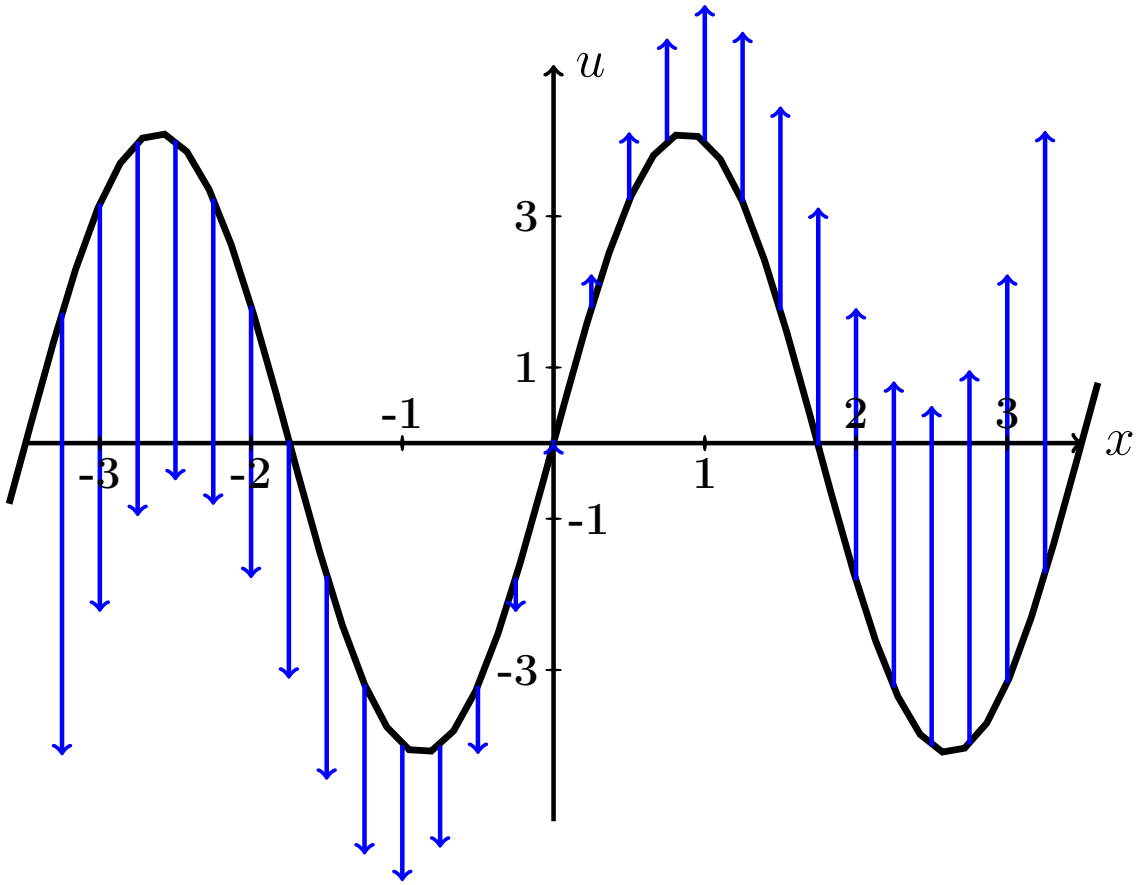


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 15.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 15 задача 4 (по Таблице 15.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 15.2.

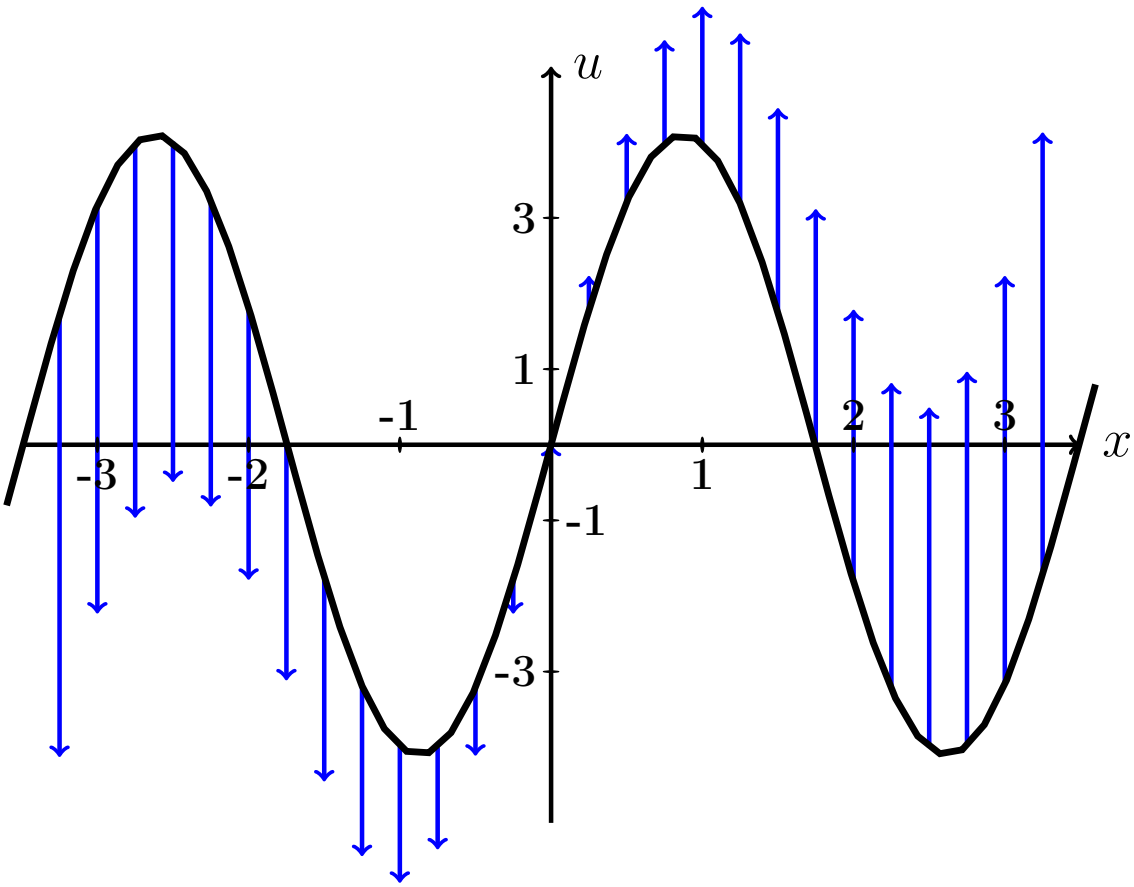


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

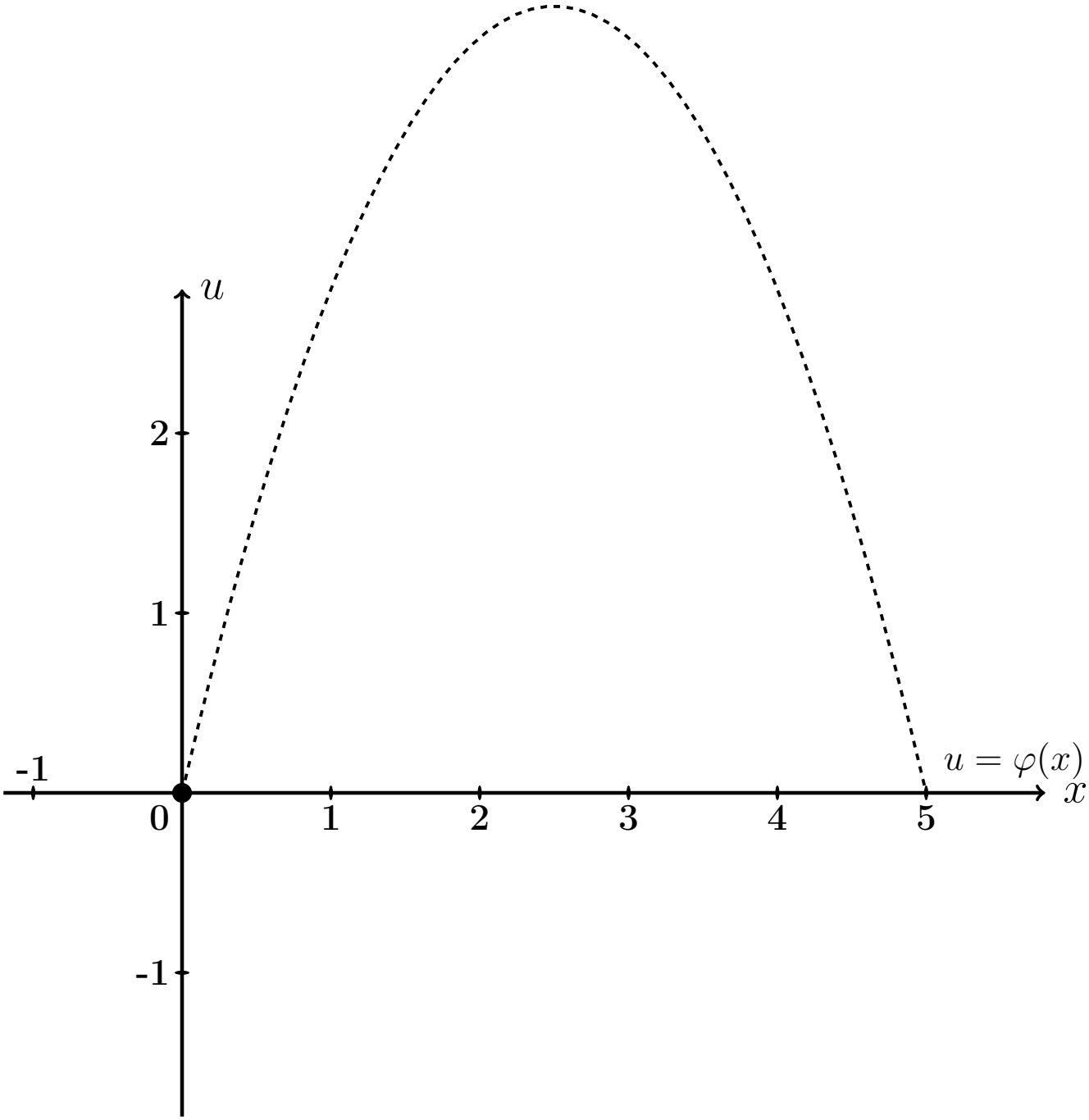


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 15.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 15.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 15.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 15.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 15 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 5 (красные клетки таб. 15.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 15.4.

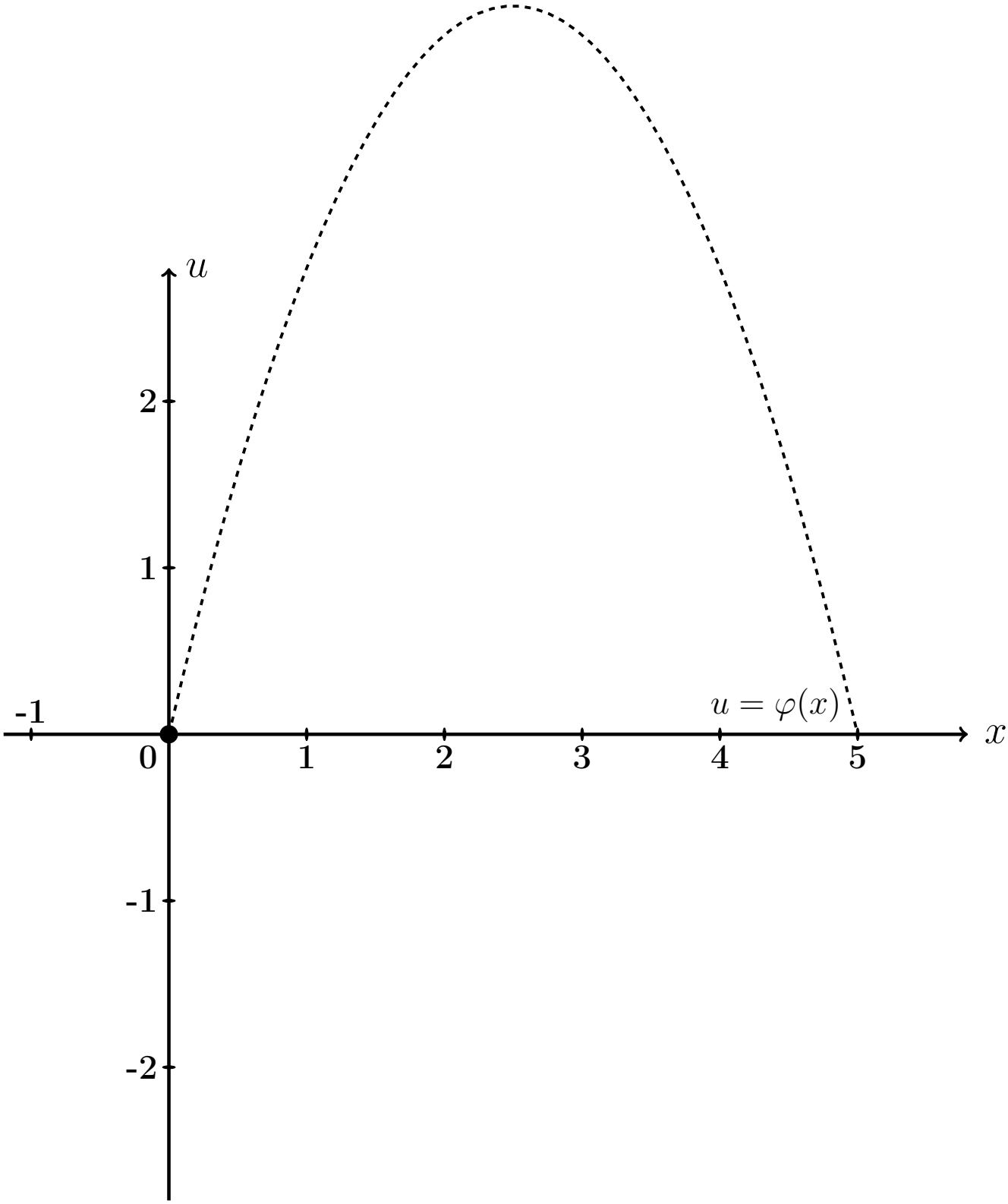


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

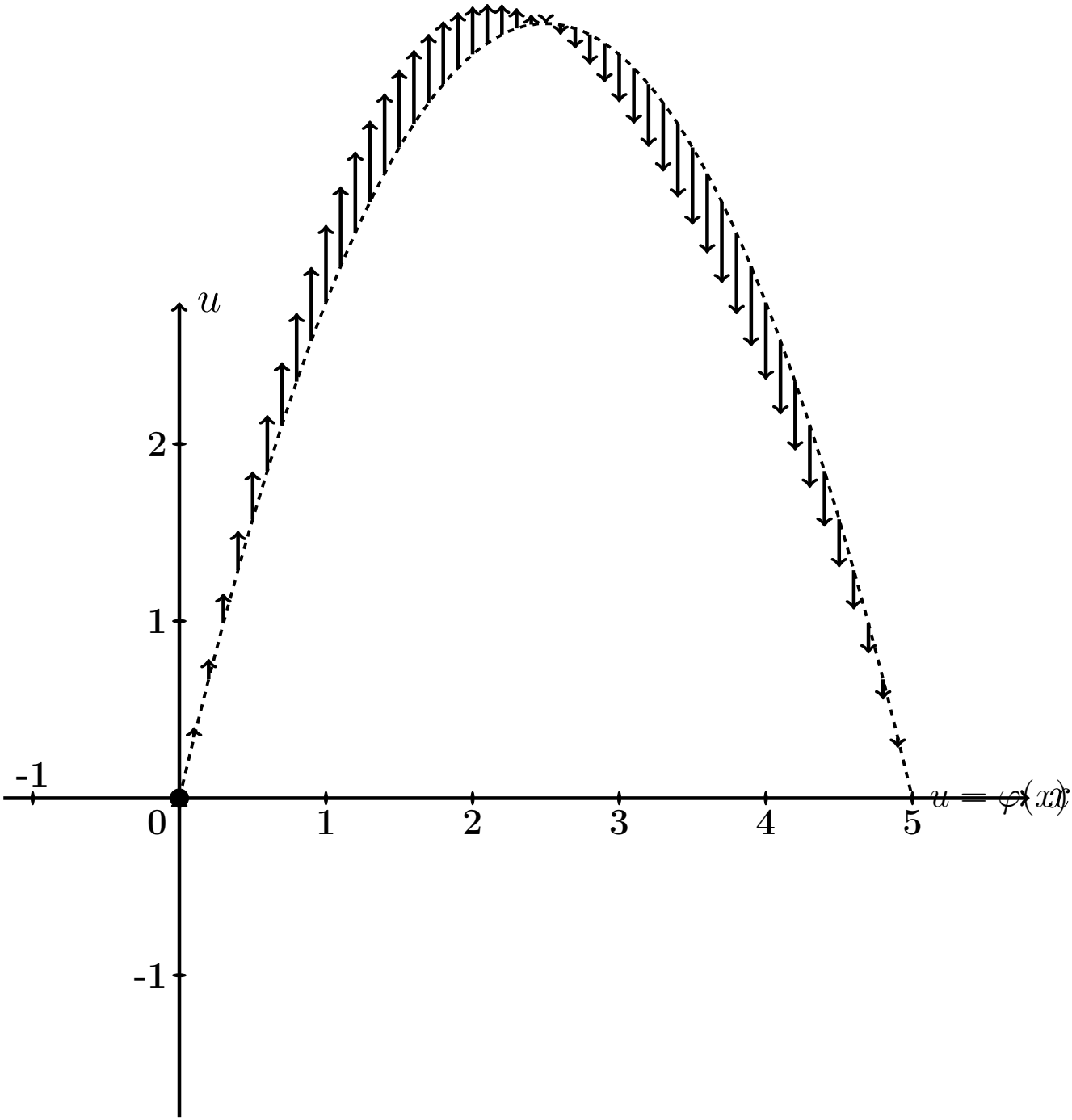


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 15.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.3\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.47$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 15.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 15.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 15.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 15 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 6 (красные клетки Таблицы 15.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 15.6.

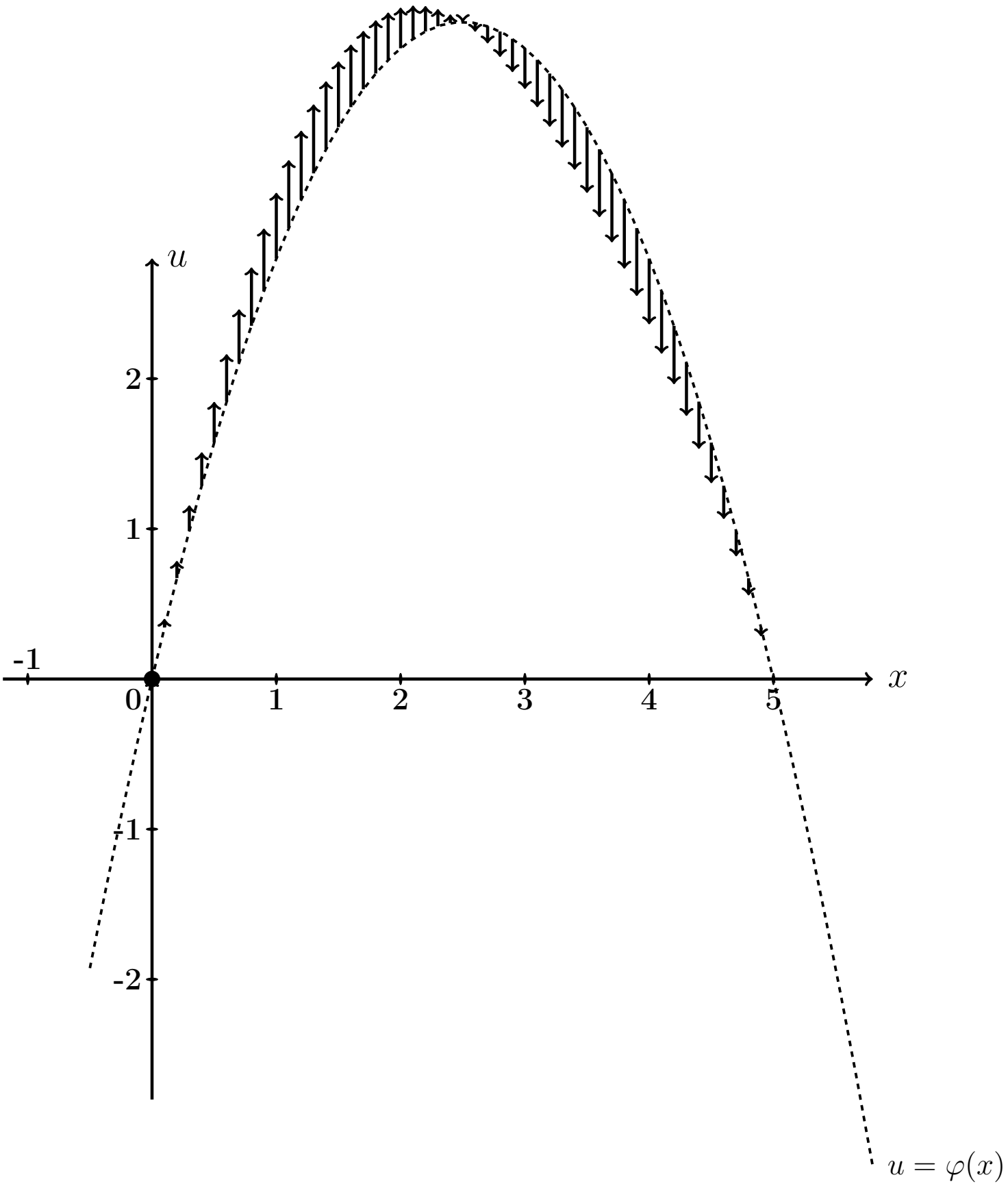


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u_t = \varphi'(x) = 2.8 - \sin\frac{x}{5}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 1.60 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{15.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{15.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (15.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{15.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (15.2), (15.3). Затабулировать решение уравнения (15.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (15.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (15.2), (15.3). Затабулировать решение уравнения (15.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (15.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 15.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{15.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (15.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{15.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (15.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (15.4) при граничных условиях (15.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{15.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{15.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{15.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (15.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (15.9). Следовательно, по формуле (15.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{15.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{15.11}$$

Шаг 6.

Таблица 15.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 15.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (15.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 15.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 15.9

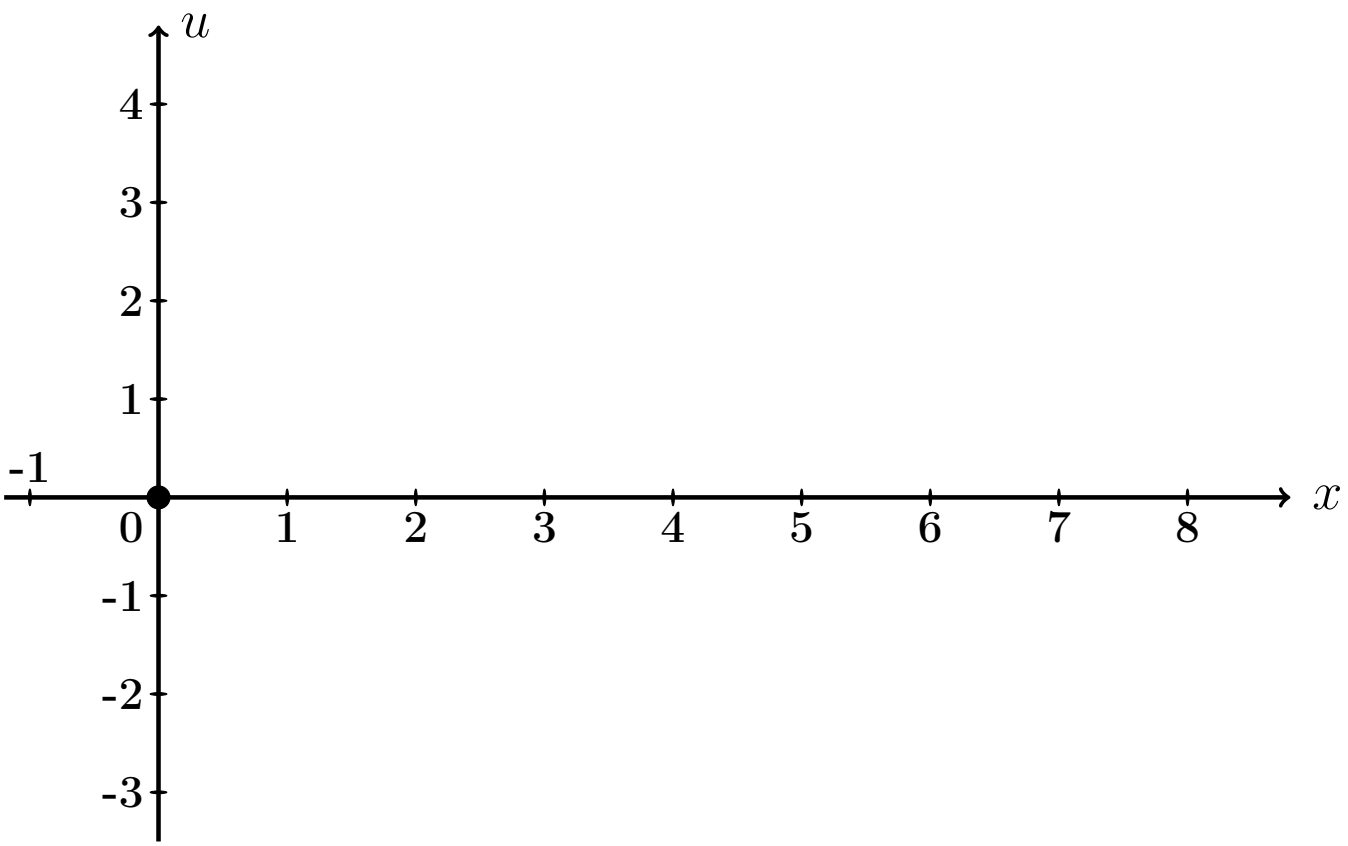


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 15 задача 7 (по Таб. 15.7, 15.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 7 (по таблице 15.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (15.6) и (15.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (15.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (15.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (15.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (15.9). Следовательно, по формуле (15.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (15.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (15.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 15.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (15.5),

$C_1' =$ по формуле (15.12)

и $C_3 =$ по таблице 15.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 15.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	1,28	2,56	3,84	5,12	6,4	5,12	3,84	2,56	1,28	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

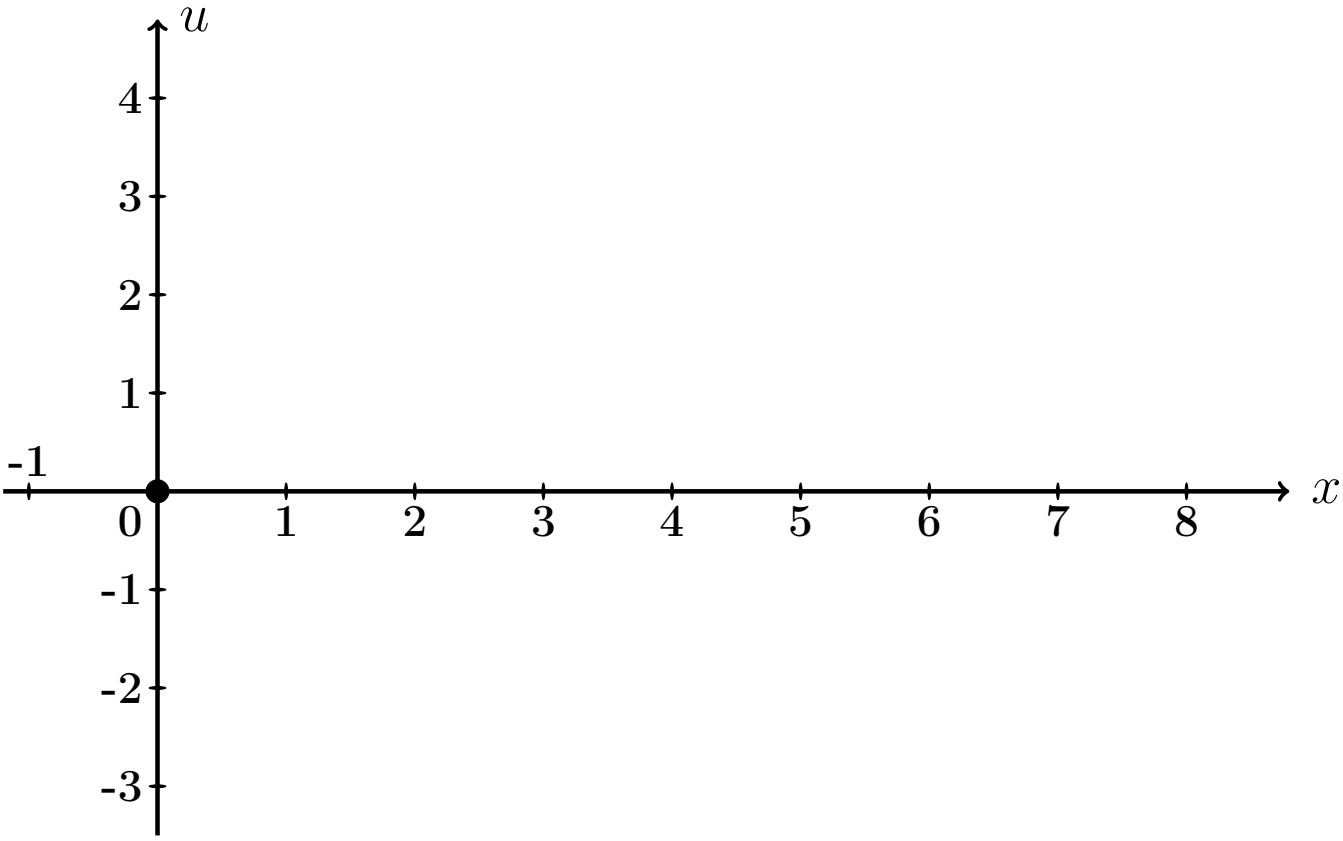


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 15 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (15.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 15 задача 7 (по таблице 15.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{15.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (15.1). Затабулировать решение уравнения (15.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

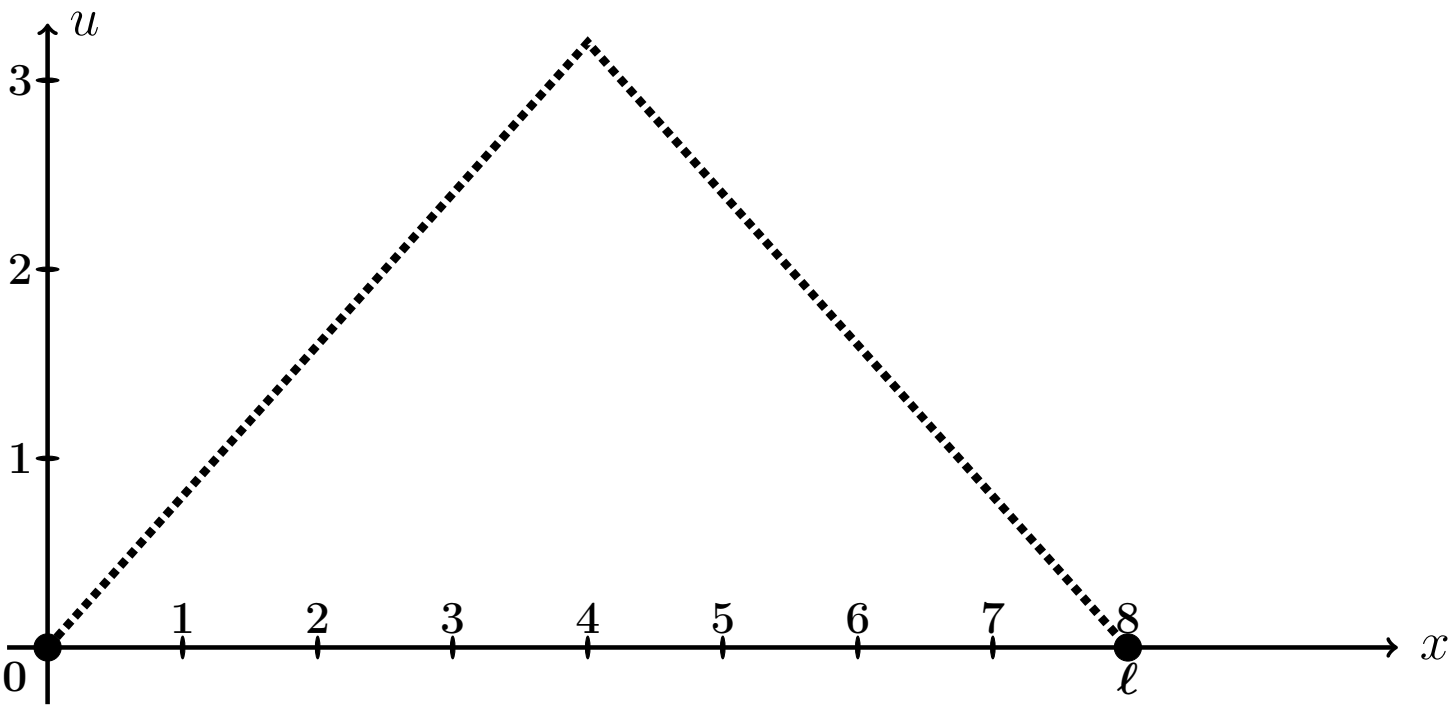


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (15.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (15.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 15.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 15.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 15.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 15.12, 15.13) формулы (15.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 15.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 15.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 15.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 15.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

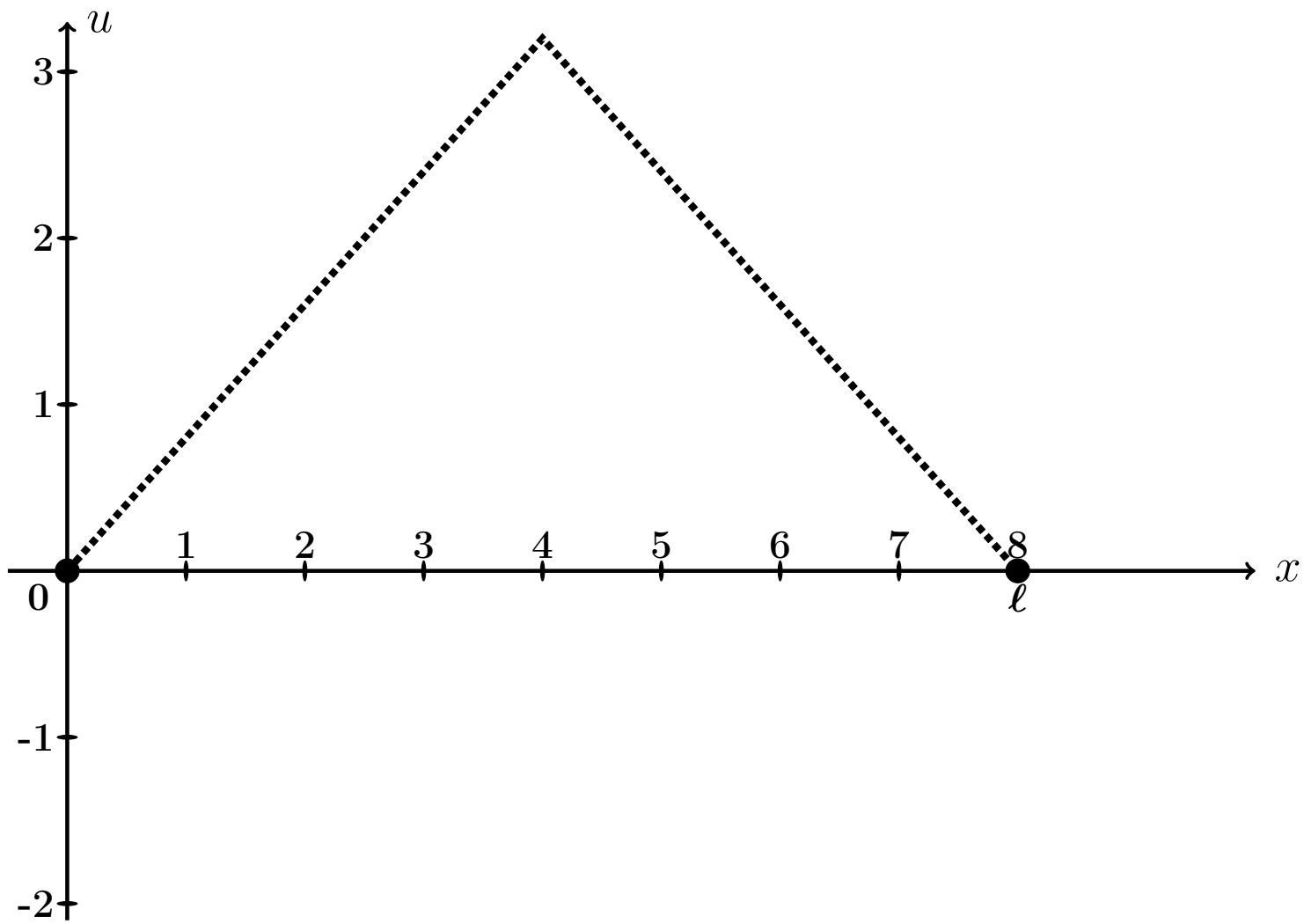


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (15.2).

Выборочная проверка вариант 15 задача 8 (по таблице 15.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 8 (по таблице 15.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 8 (по таблице 15.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 8 (по таблице 15.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.30)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.70)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(10.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{15.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{15.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

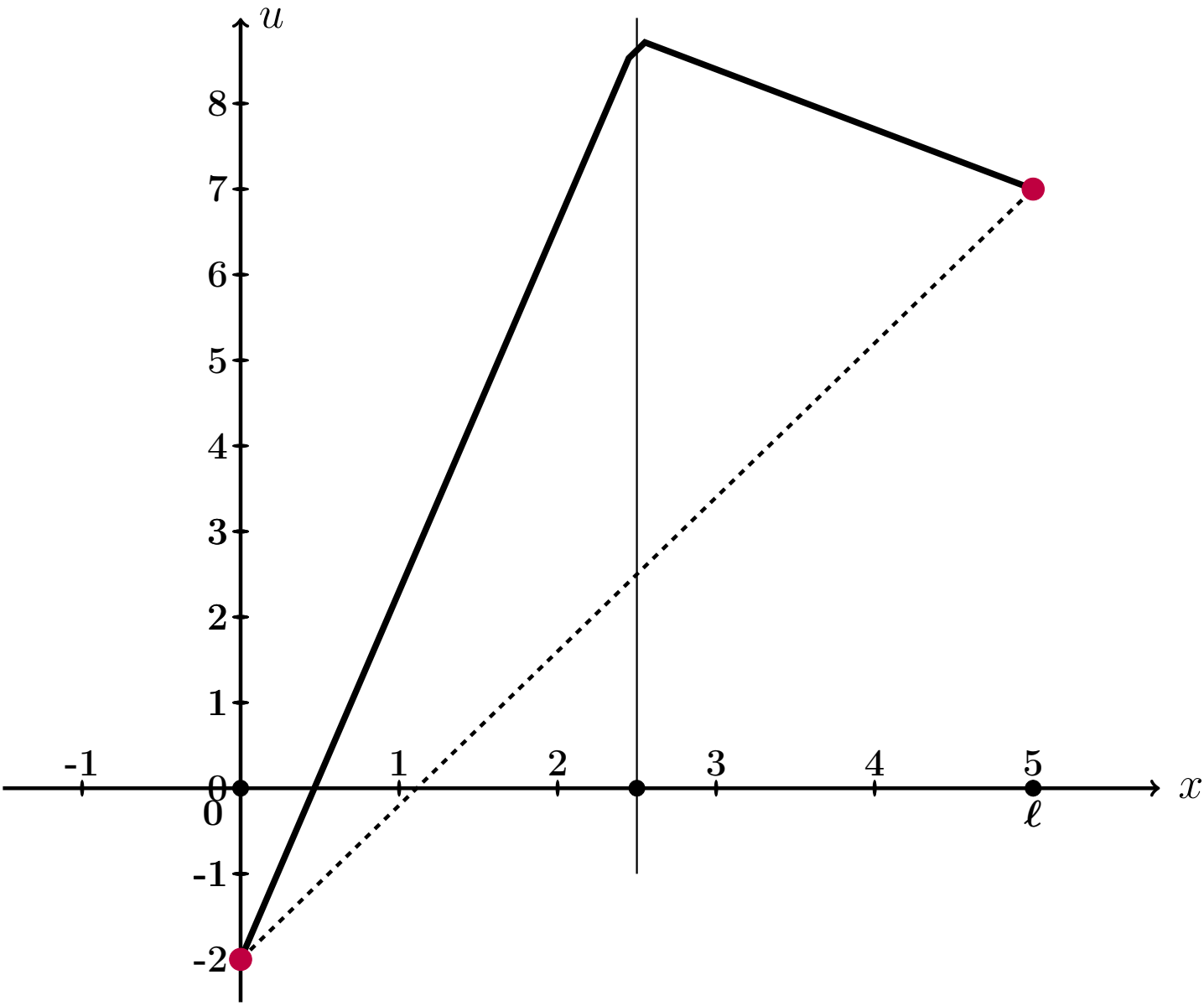


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (15.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (15.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (15.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{15.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{15.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (15.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (15.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{15.7}$$

Таблица 15.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (15.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (15.1) с начальным условием (15.2) и граничными условиями (15.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (15.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_5 = 7.0$ — значения граничных условий (15.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 15.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 15.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-2	0,15	2,3	4,45	6,6	8,75	8,4	8,05	7,7	7,35	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 15.16.

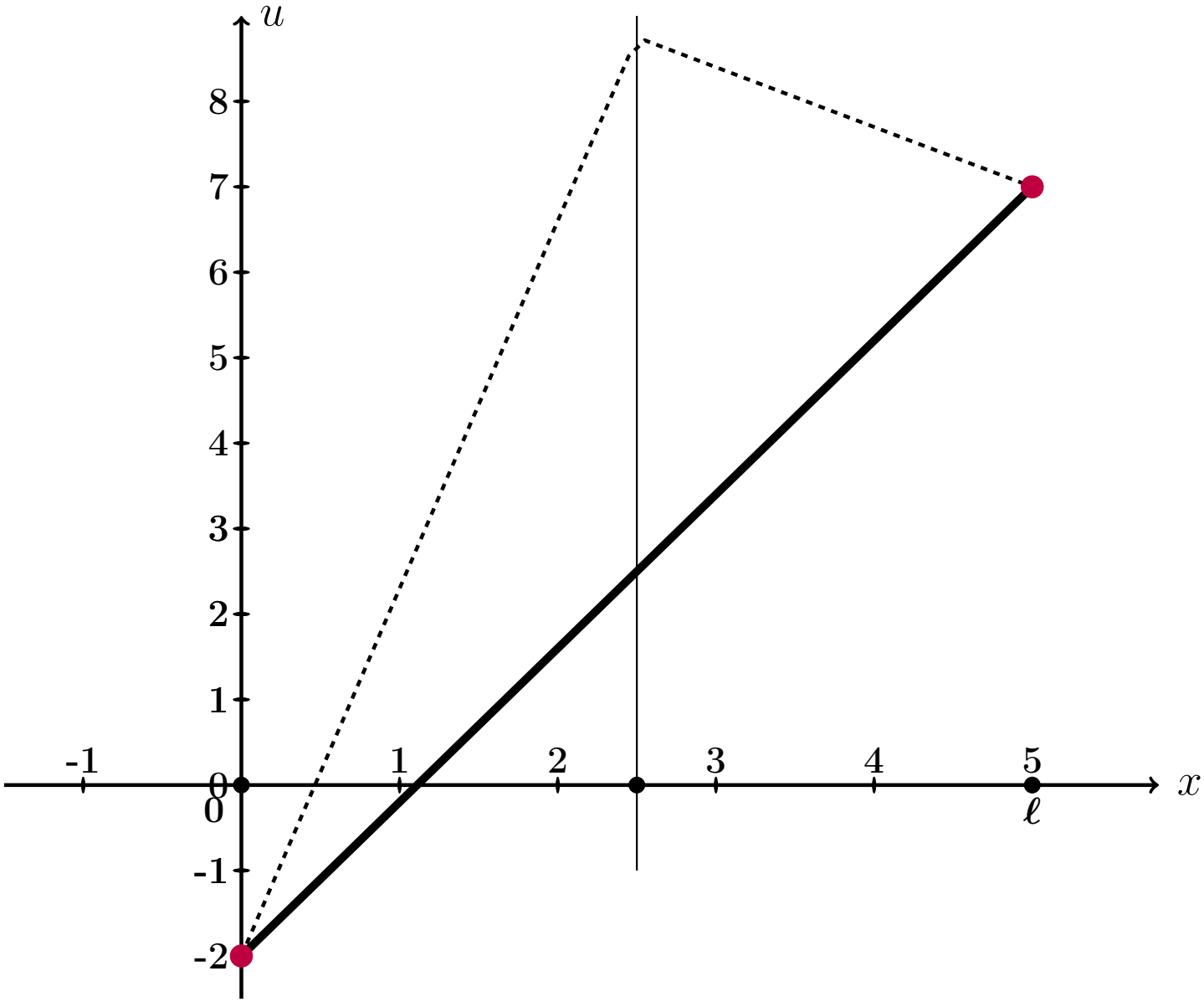


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (15.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (15.3).

Выборочная проверка вариант 15 задача 9 (по формулам (15.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 9 (по таблице 15.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 15 задача 9 (по таблице 15.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 16

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 7$.

$$y = 2 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{7}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{7}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

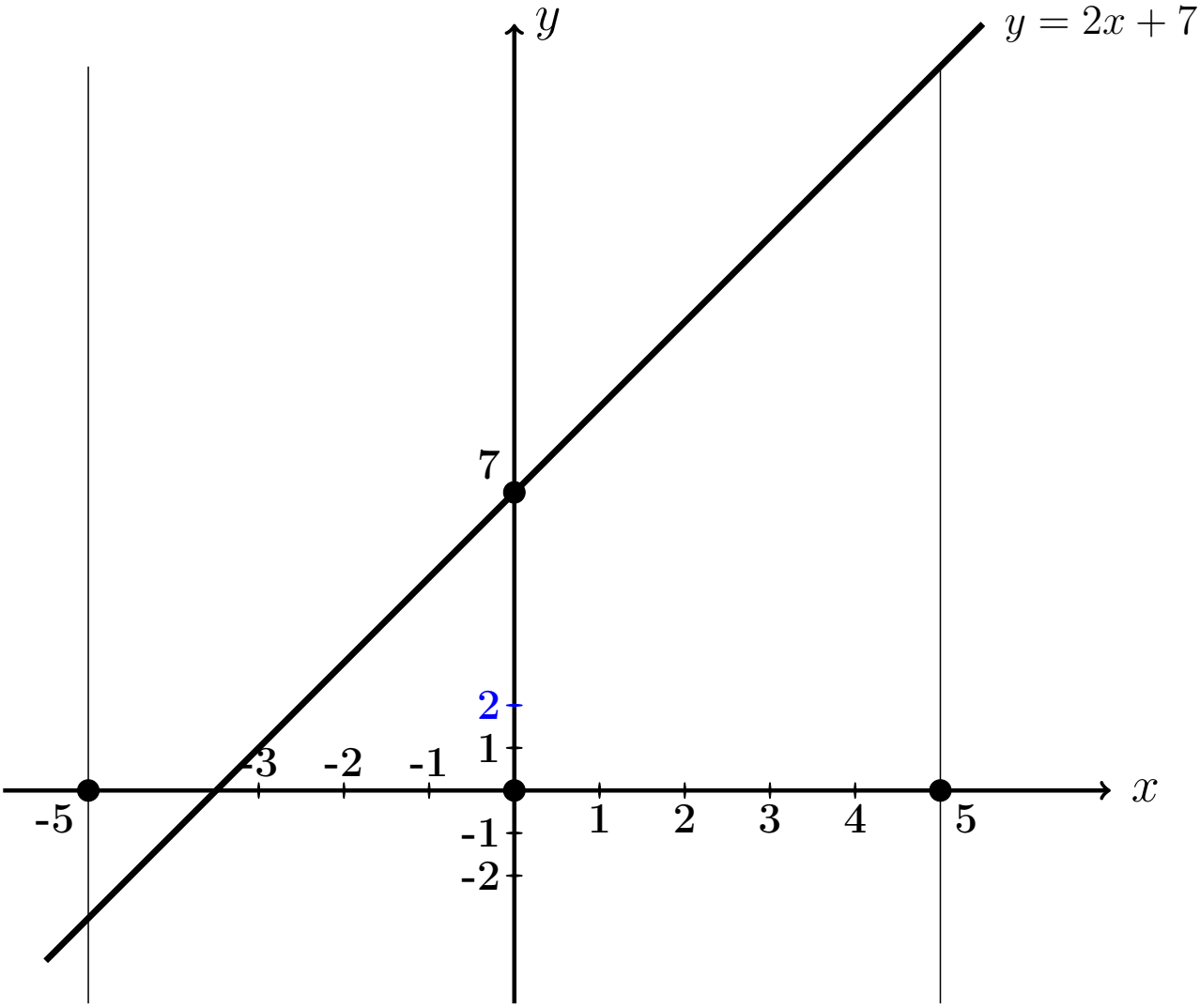
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 16.1 (Табулировка $y=2x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+7$	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y=S_1(x)$		*									
$y=S_2(x)$					*						
$y=S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 16.1



Выборочная проверка вариант 16 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 1 (по Таблице 16.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x^2 + 12\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=5} = 6\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (4x^2+12\sqrt{y})dx = 4\int x^2\,dx+12\int \sqrt{y}\,dx = \qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad = 6\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^2 + 2t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 2\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^2 + 2t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^2 + 2t)dt = \qquad\qquad = \qquad\qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 2\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

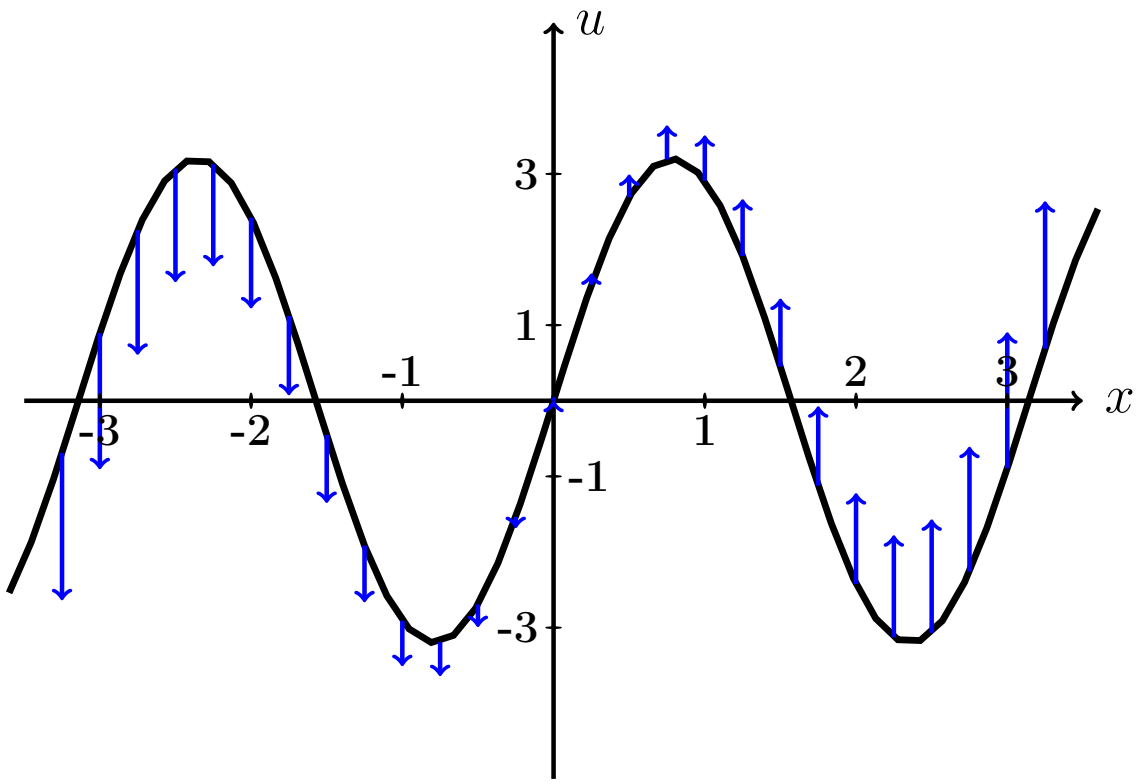


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 16.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 16 задача 4 (по Таблице 16.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 16.2.

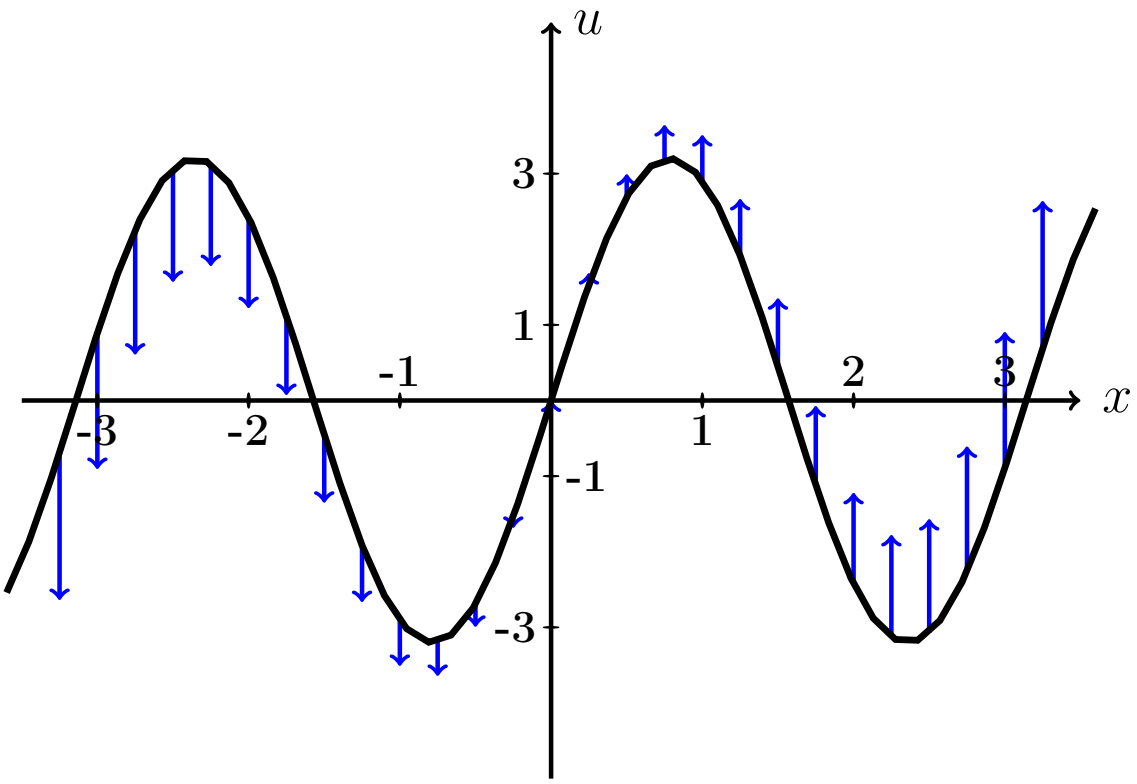


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

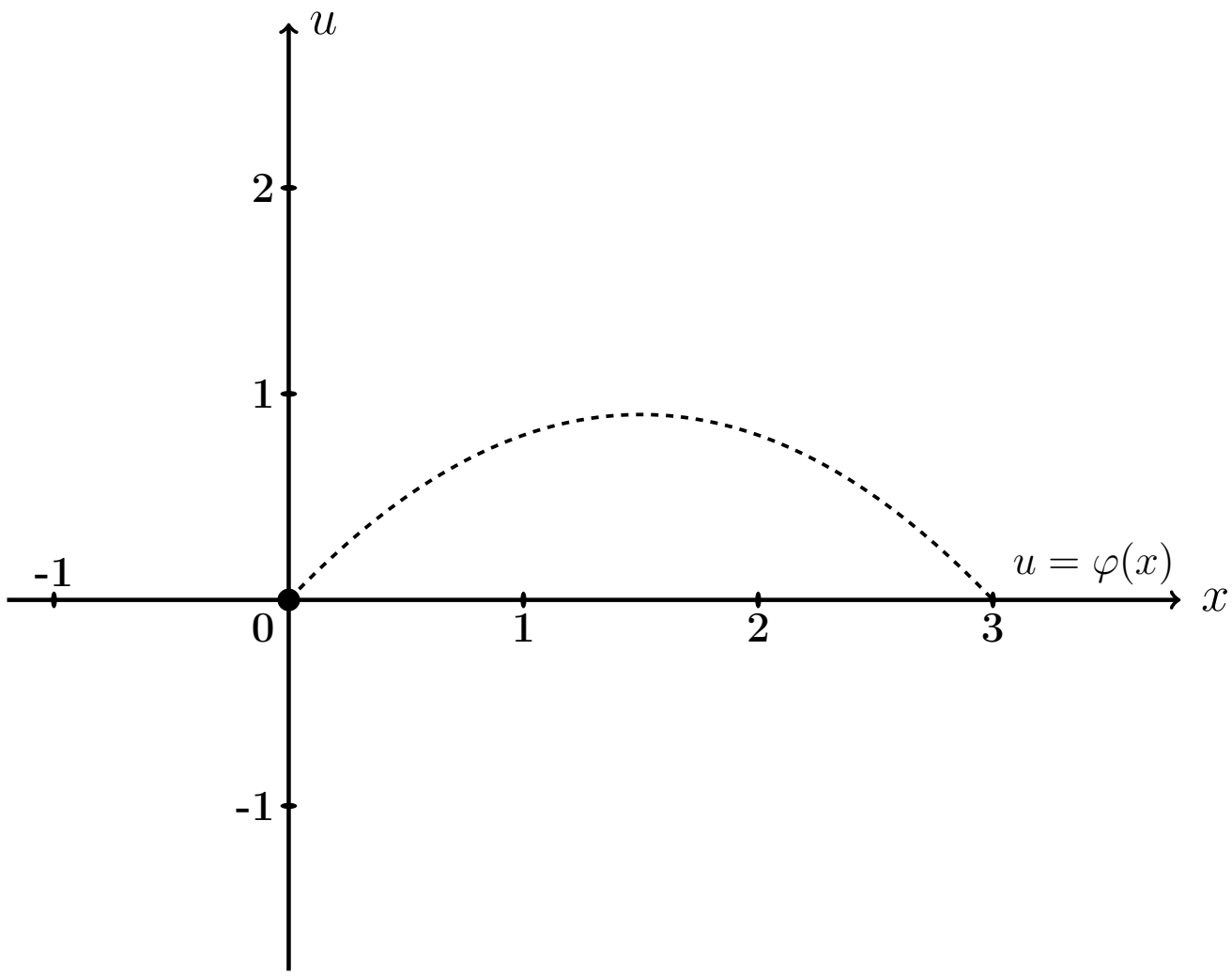


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 16.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 16.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 16.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 16.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 16 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 5 (красные клетки таб. 16.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 16.4.

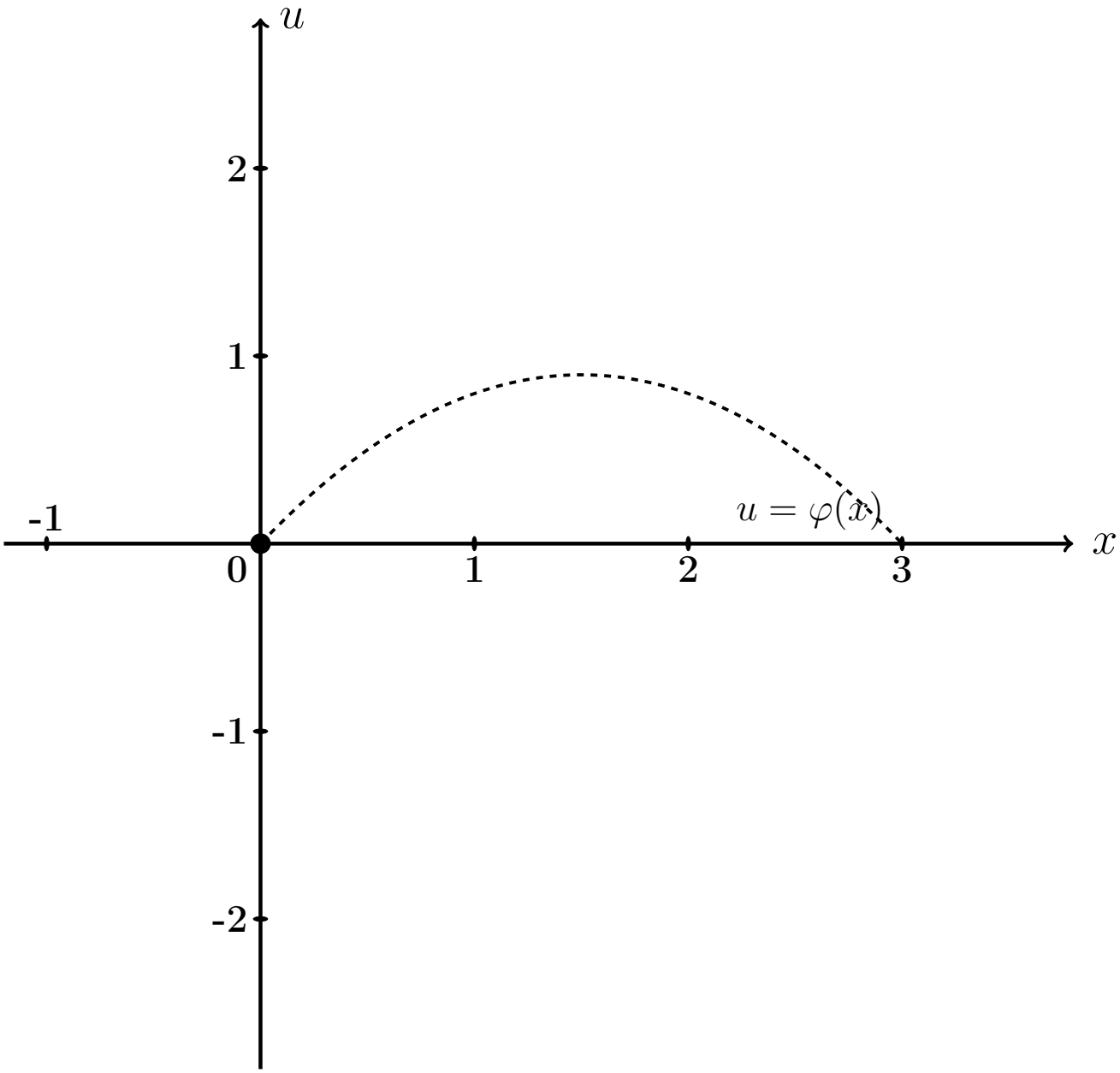


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

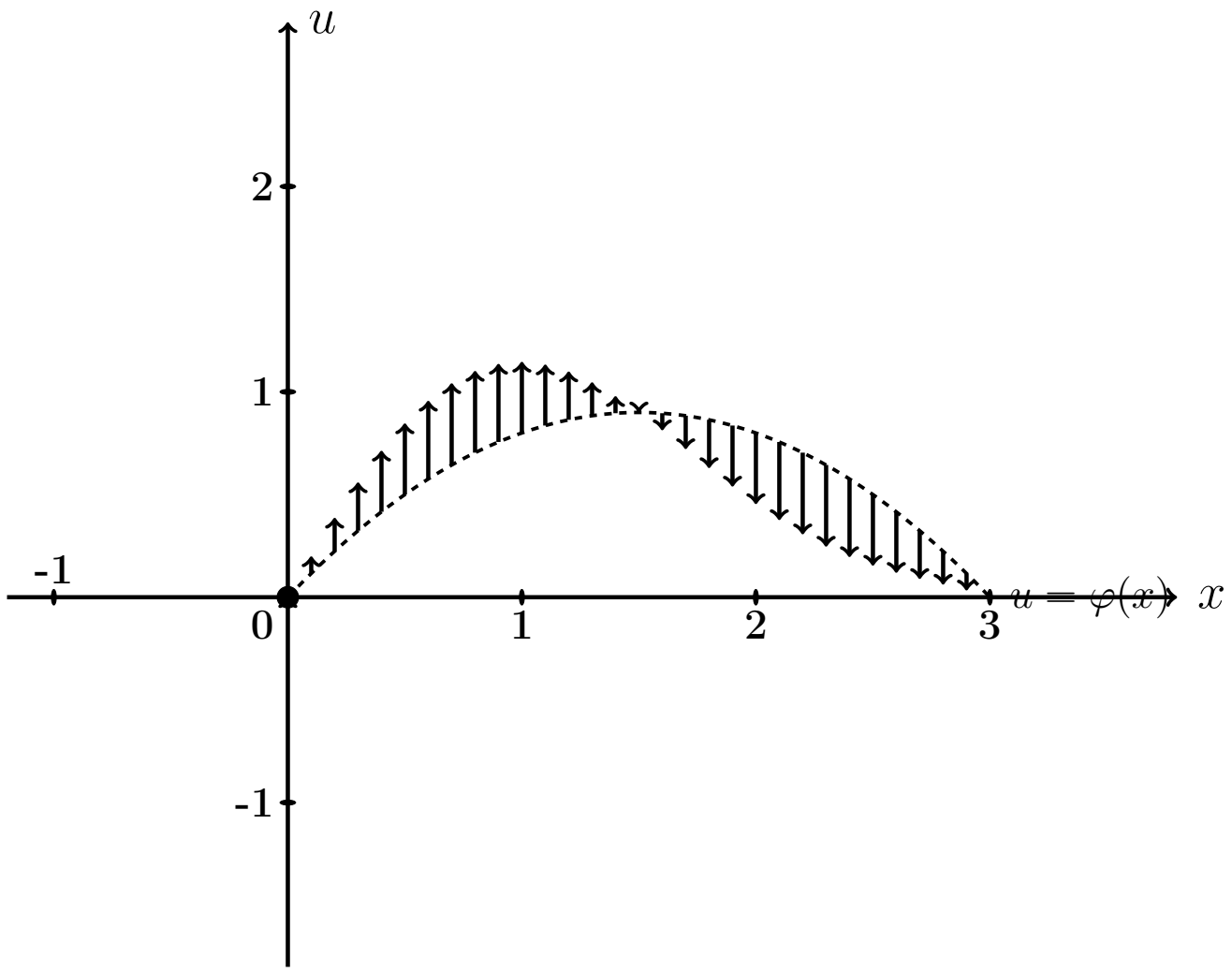


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 16.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.0\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.27$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 16.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 16.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 16.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 16 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 6 (красные клетки Таблицы 16.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 16.6.

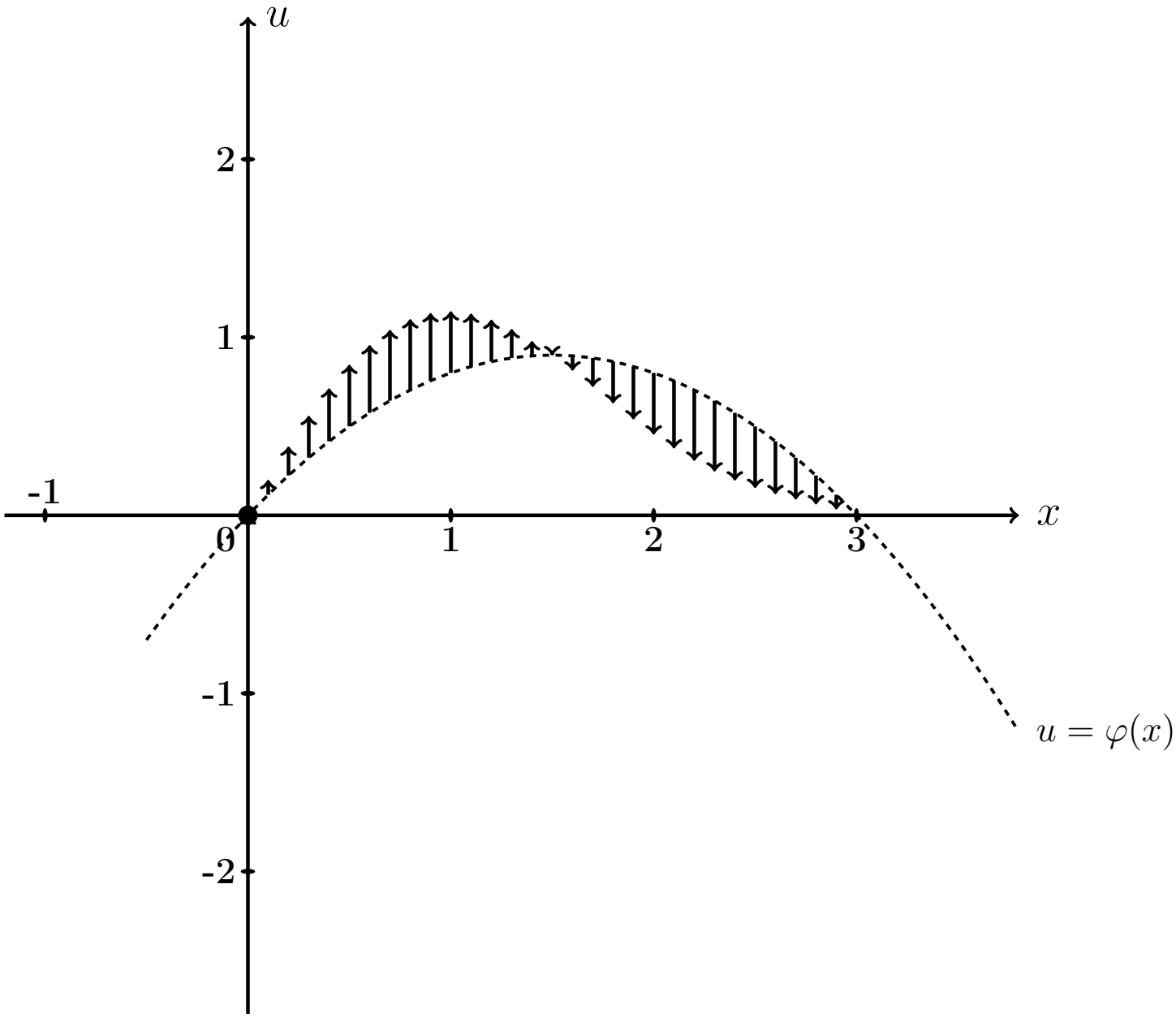


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{16.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{16.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (16.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{16.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (16.2), (16.3). Затабулировать решение уравнения (16.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (16.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (16.2), (16.3). Затабулировать решение уравнения (16.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (16.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 16.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{16.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (16.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{16.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (16.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (16.4) при граничных условиях (16.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{16.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{16.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{16.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (16.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (16.9). Следовательно, по формуле (16.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{16.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{16.11}$$

Шаг 6.

Таблица 16.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 16.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (16.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 16.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 16.9

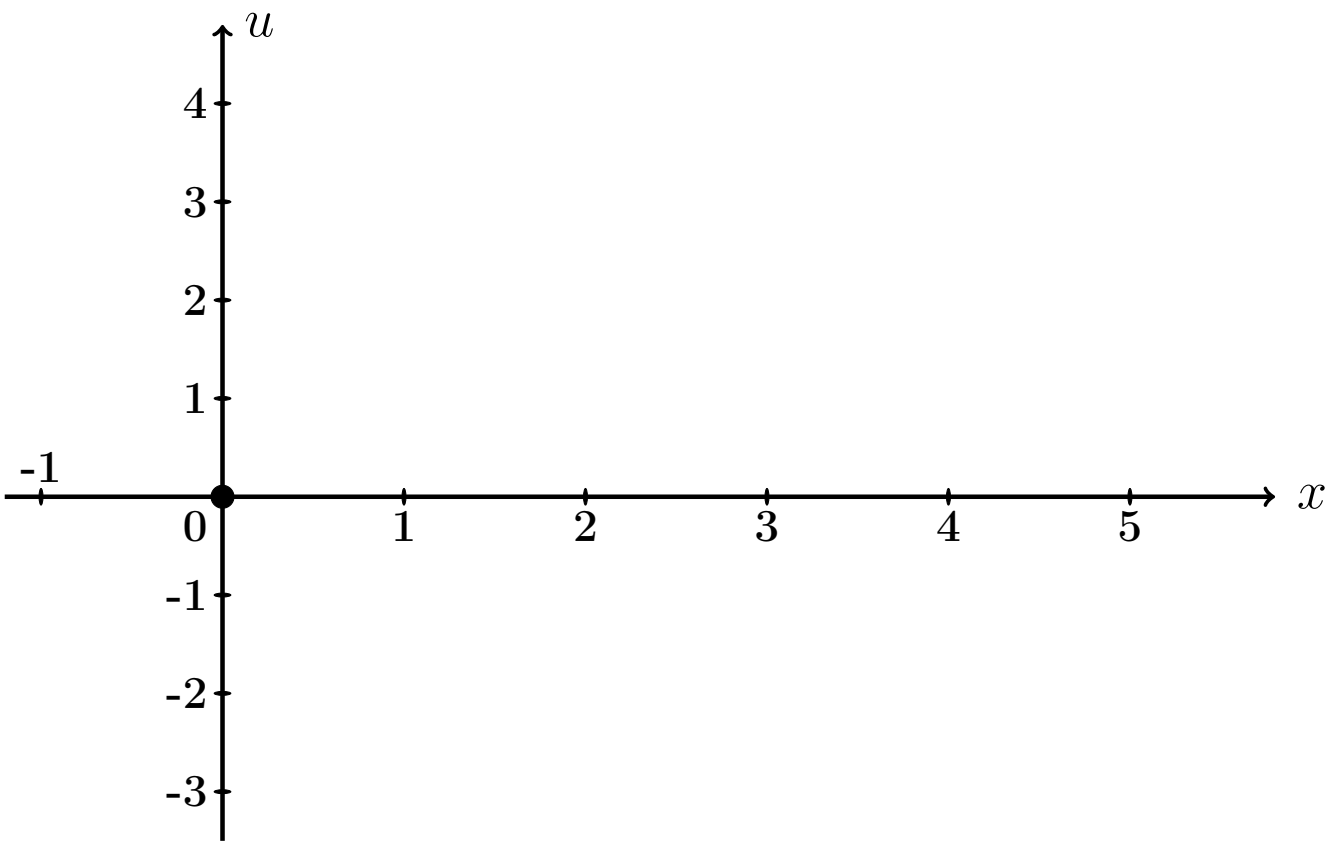


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 16 задача 7 (по Таб. 16.7, 16.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 7 (по таблице 16.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (16.6) и (16.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (16.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (16.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (16.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (16.9). Следовательно, по формуле (16.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (16.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (16.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (16.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 16.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (16.5),

$C_1' =$ по формуле (16.12)

и $C_3 =$ по таблице 16.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 16.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

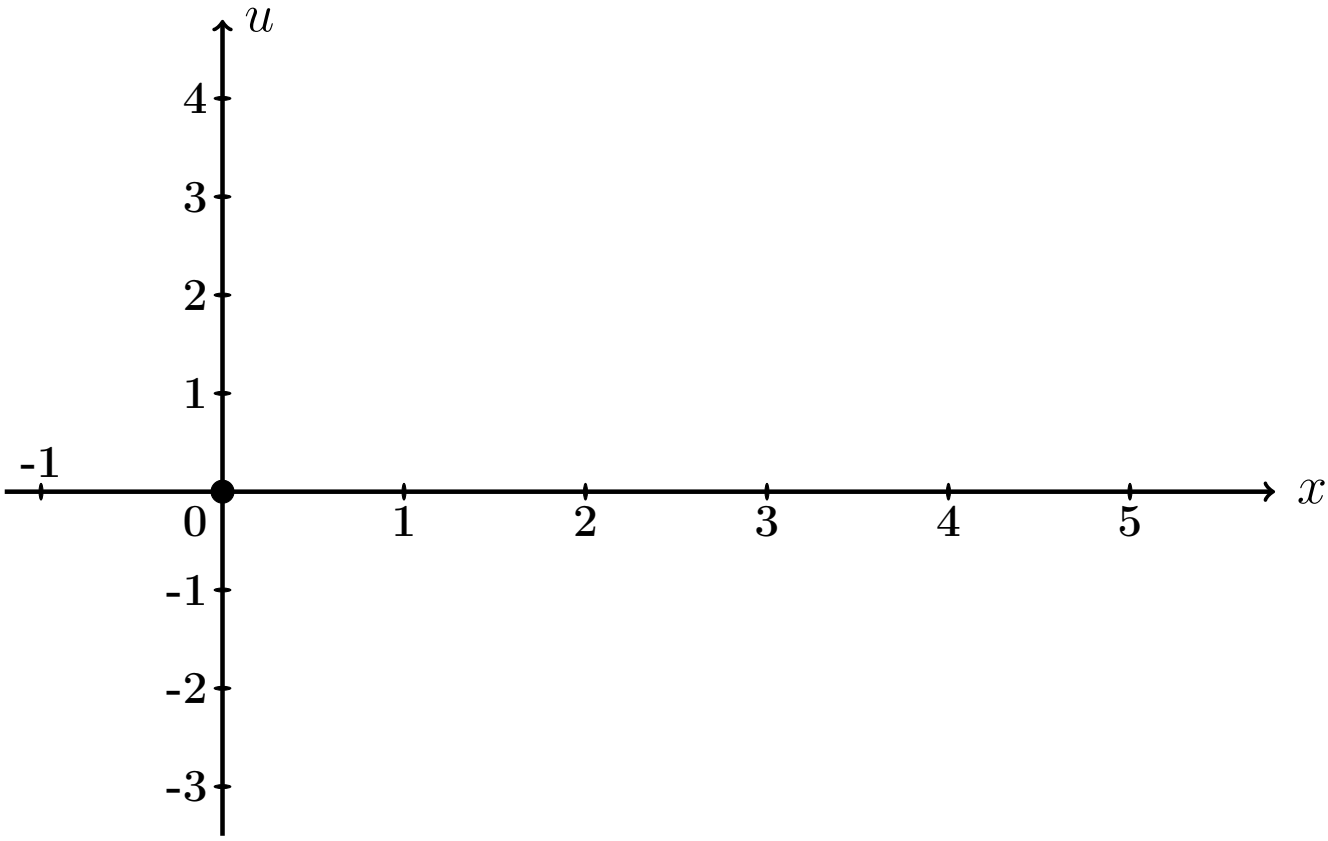


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 16 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (16.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 16 задача 7 (по таблице 16.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{16.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (16.1). Затабулировать решение уравнения (16.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

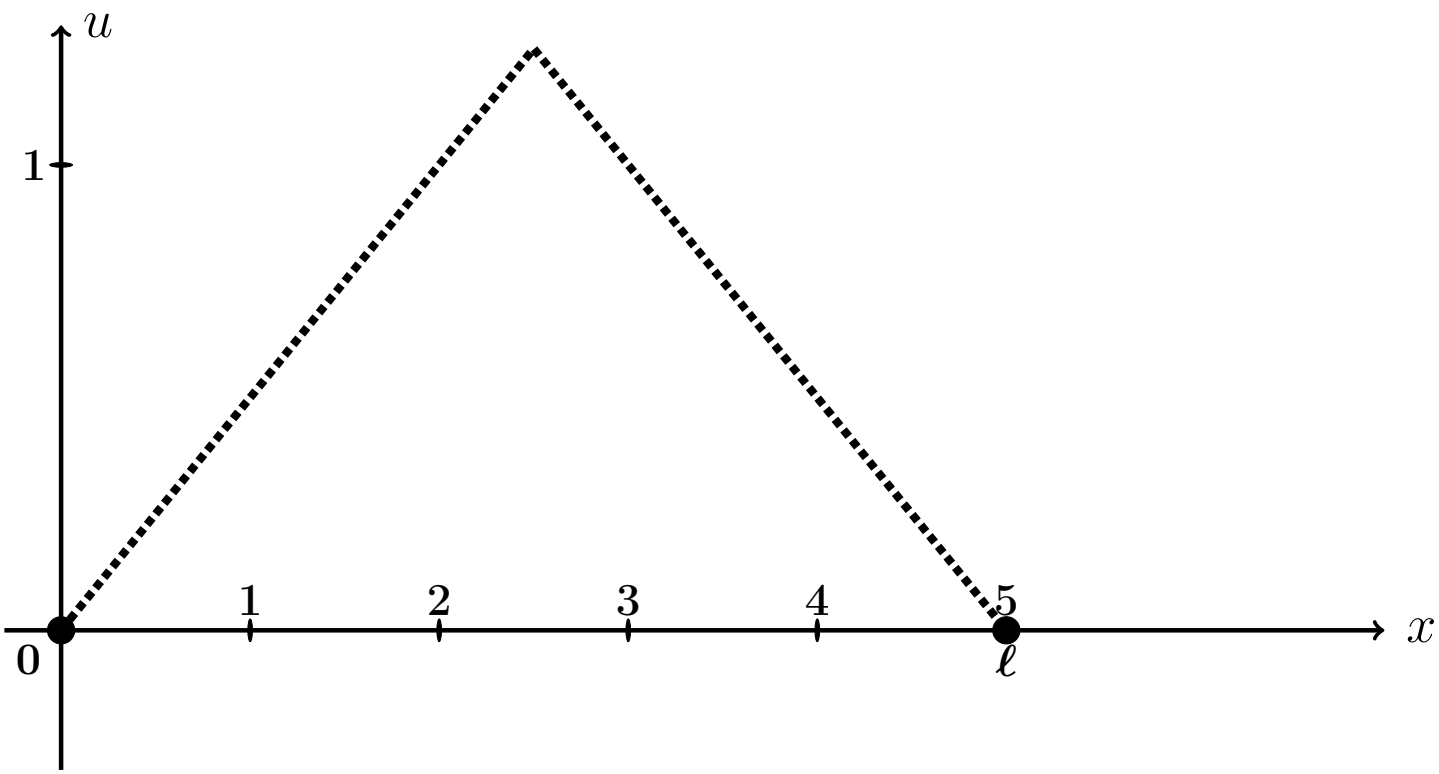


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (16.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5} , \end{aligned}\right\} \qquad (16.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 16.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 16.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 16.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 16.12, 16.13) формулы (16.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 16.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 16.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 16.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 16.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

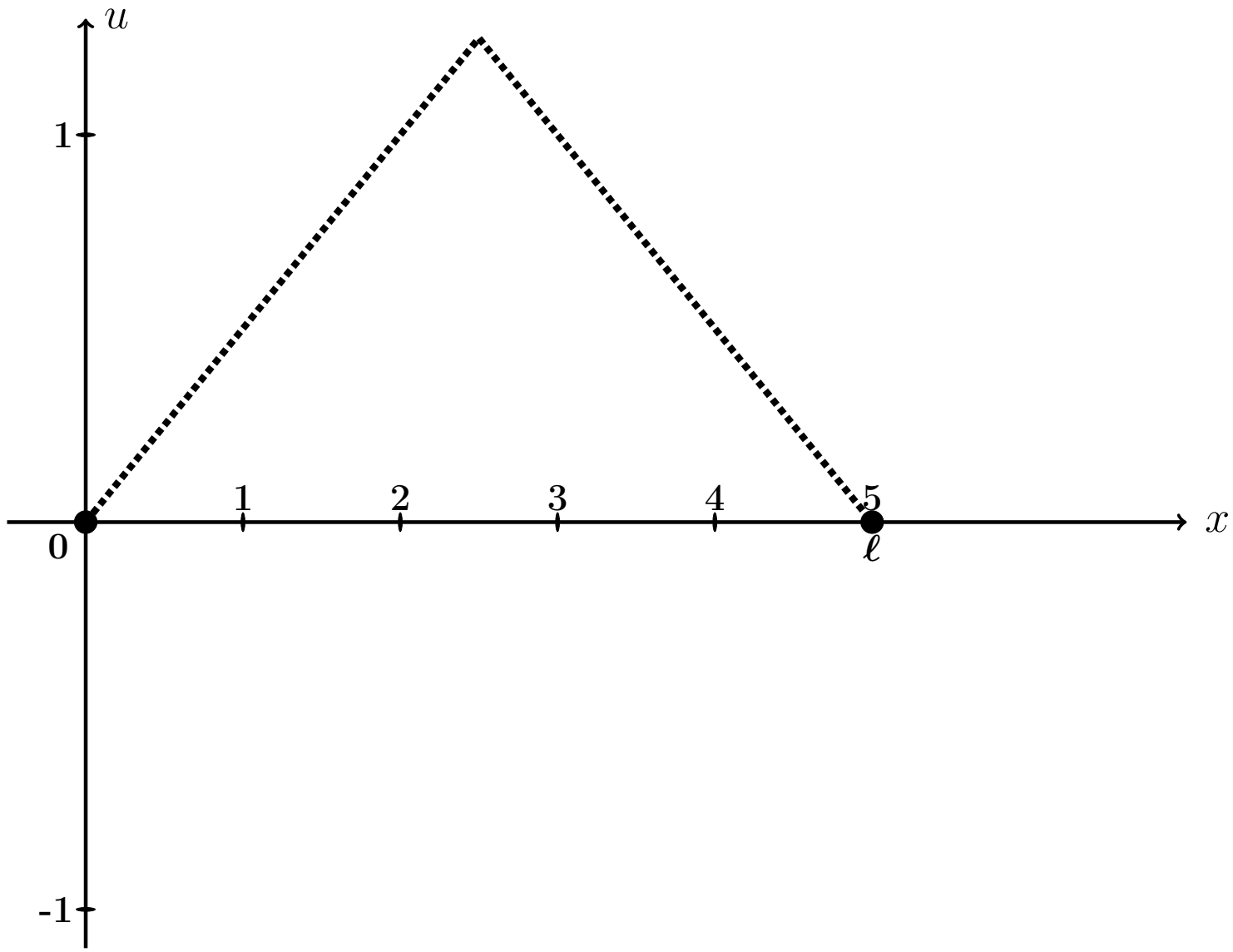


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (16.2).

Выборочная проверка вариант 16 задача 8 (по таблице 16.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 8 (по таблице 16.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 8 (по таблице 16.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 8 (по таблице 16.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.00)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.00)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(7.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{16.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{16.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

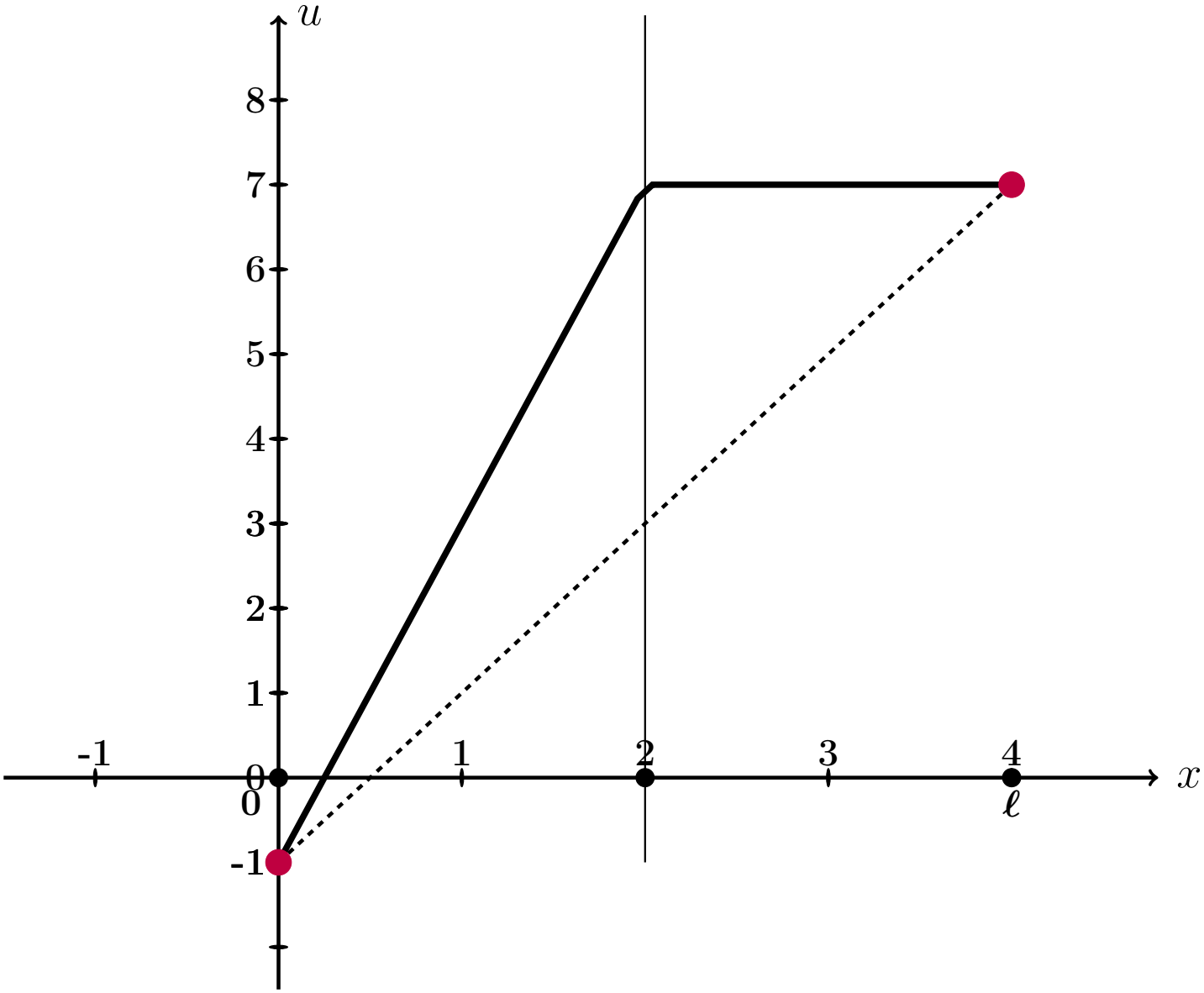


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (16.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (16.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (16.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{16.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{16.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (16.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (16.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{16.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{16.7}$$

Таблица 16.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (16.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (16.1) с начальным условием (16.2) и граничными условиями (16.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (16.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_4 = 7.0$ — значения граничных условий (16.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 16.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 16.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-1	0,6	2,2	3,8	5,4	7	7	7	7	7	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 16.16.

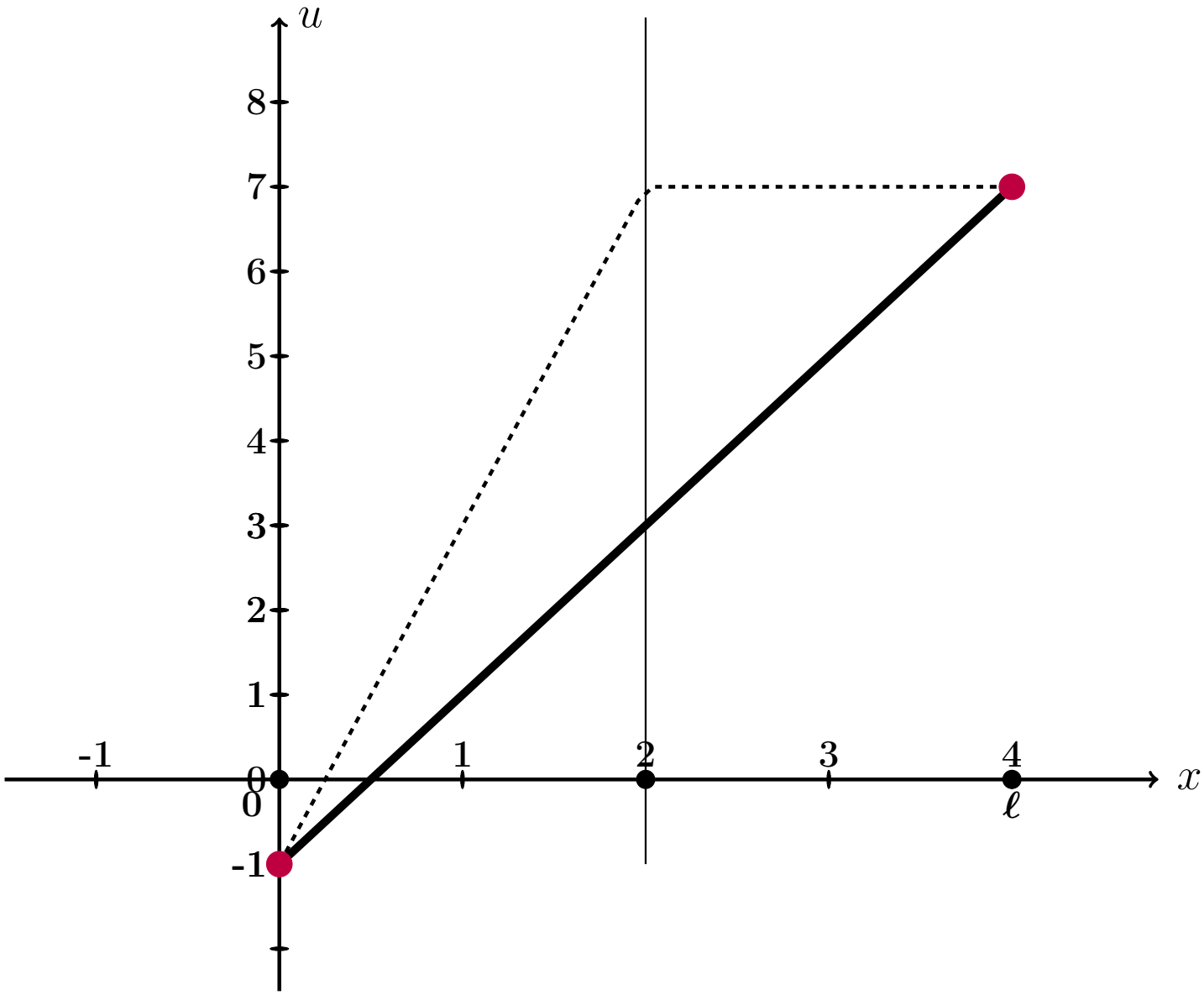


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (16.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (16.3).

Выборочная проверка вариант 16 задача 9 (по формулам (16.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 9 (по таблице 16.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 16 задача 9 (по таблице 16.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 17

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 6$.

$$y = 3 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{6}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{6}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

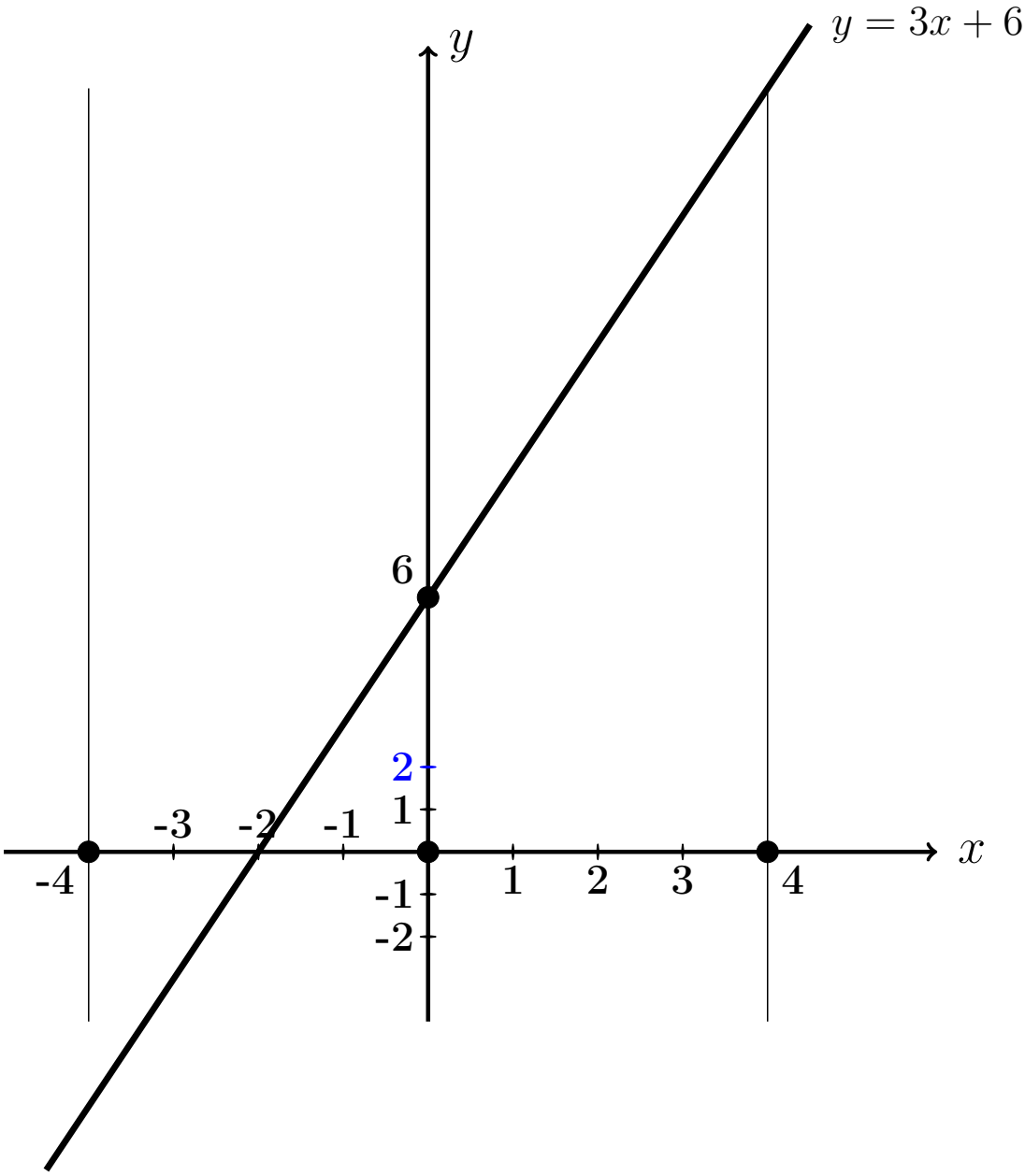
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 17.1 (Табулировка $y=3x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+6$	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 17.1



Выборочная проверка вариант 17 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 1 (по Таблице 17.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sin x + 18y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=2} = 9\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (6\sin x + 18y^3)dx = 6\int \sin x\,dx + 18\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 9\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x + 3t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x + 3t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x + 3t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 17 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

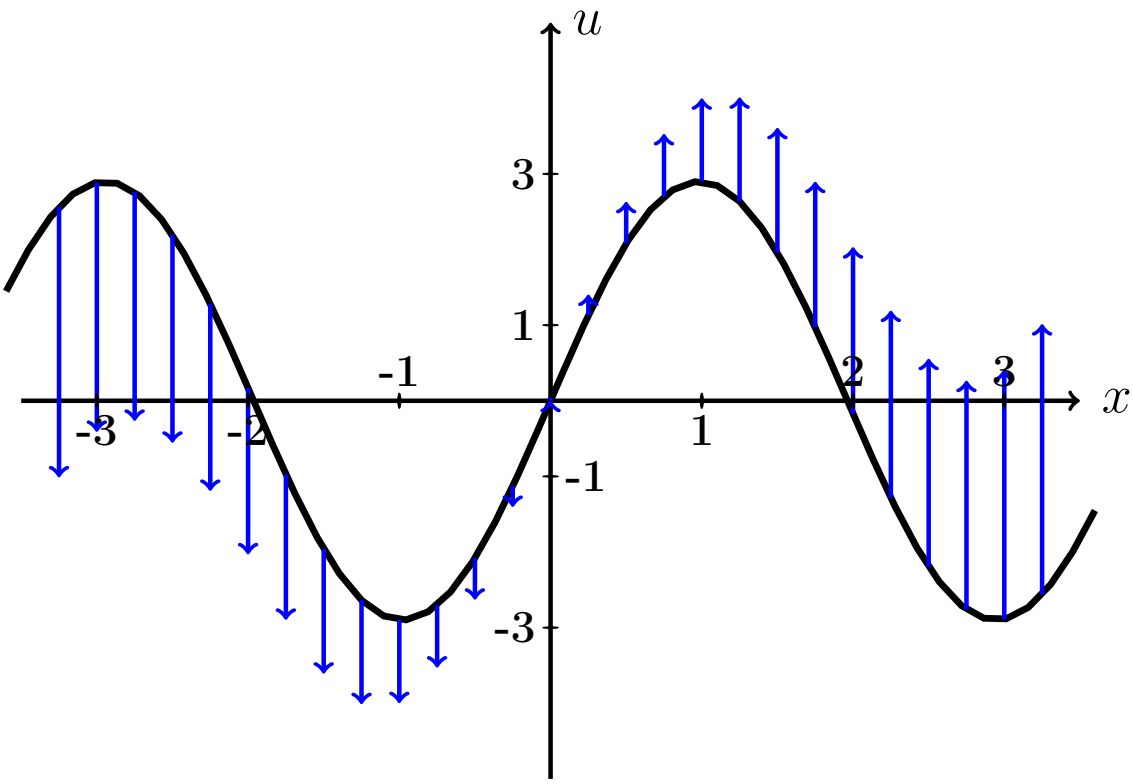


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 17.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 17 задача 4 (по Таблице 17.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 17.2.

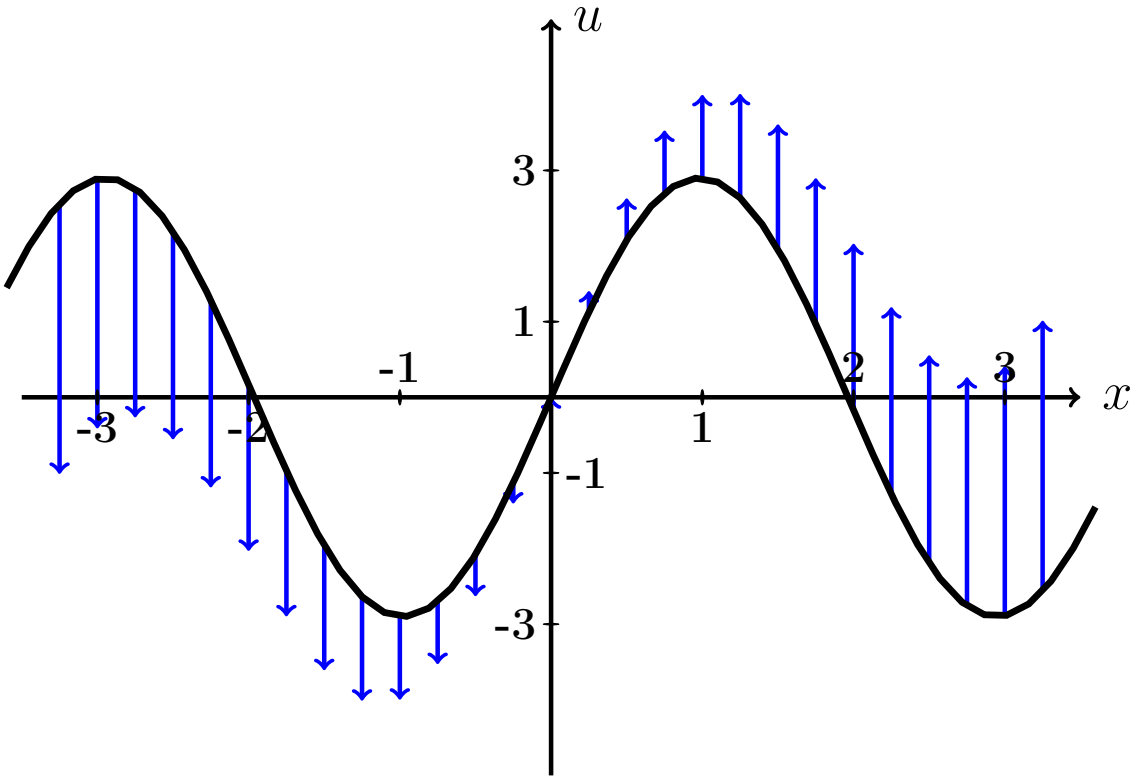


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

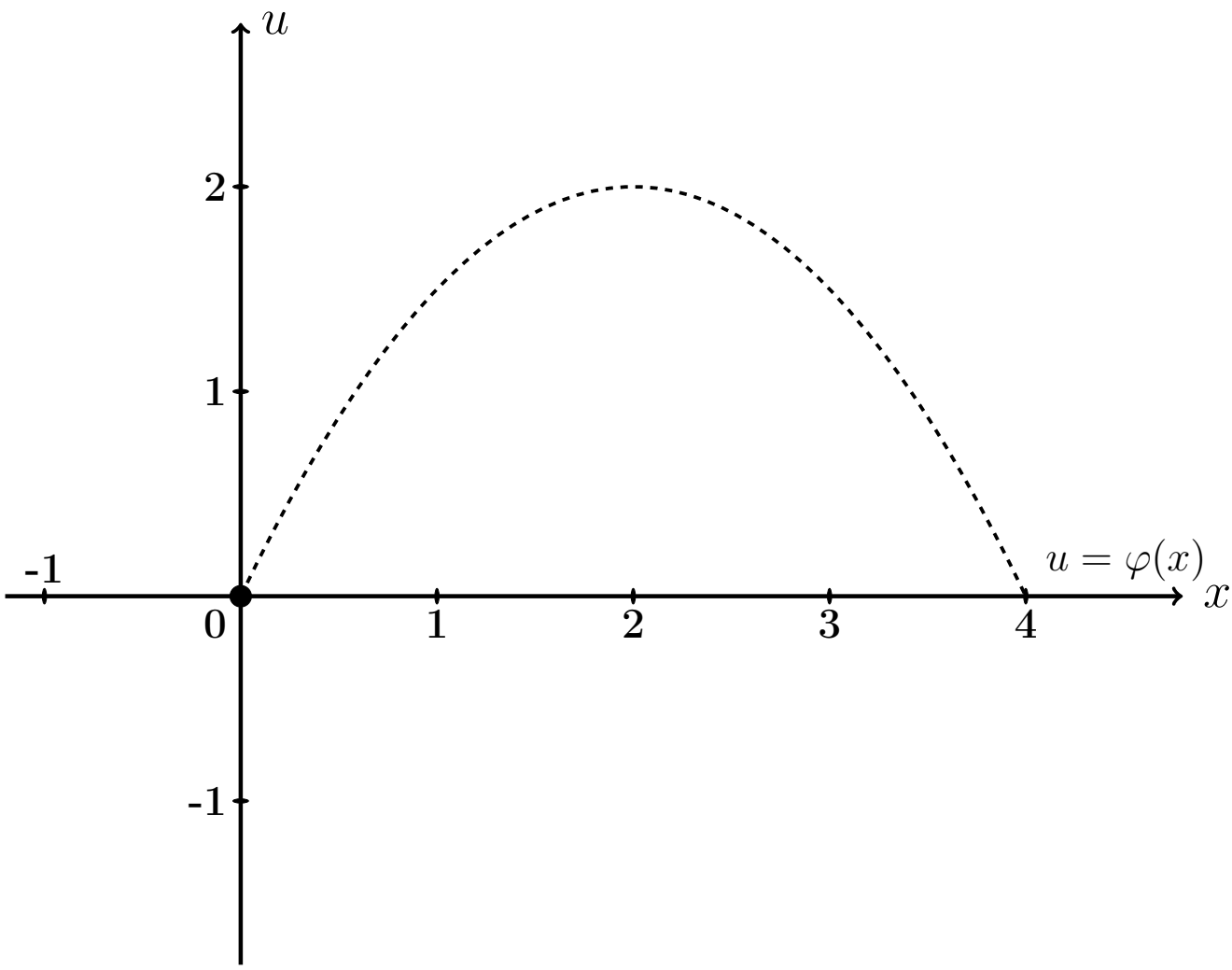


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 17.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 17.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 17.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 17.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 17 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 5 (красные клетки таб. 17.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 17.4.

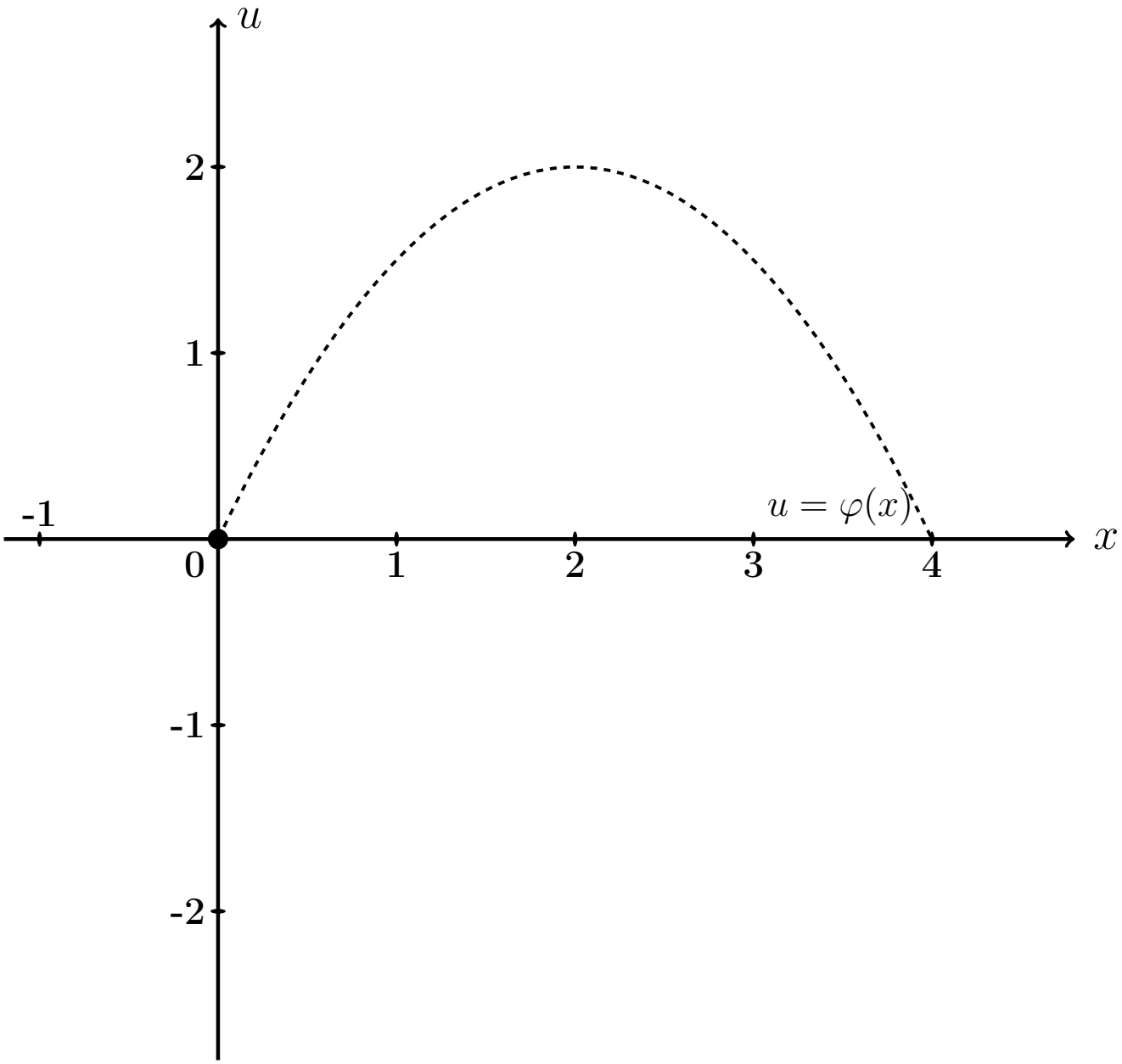


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

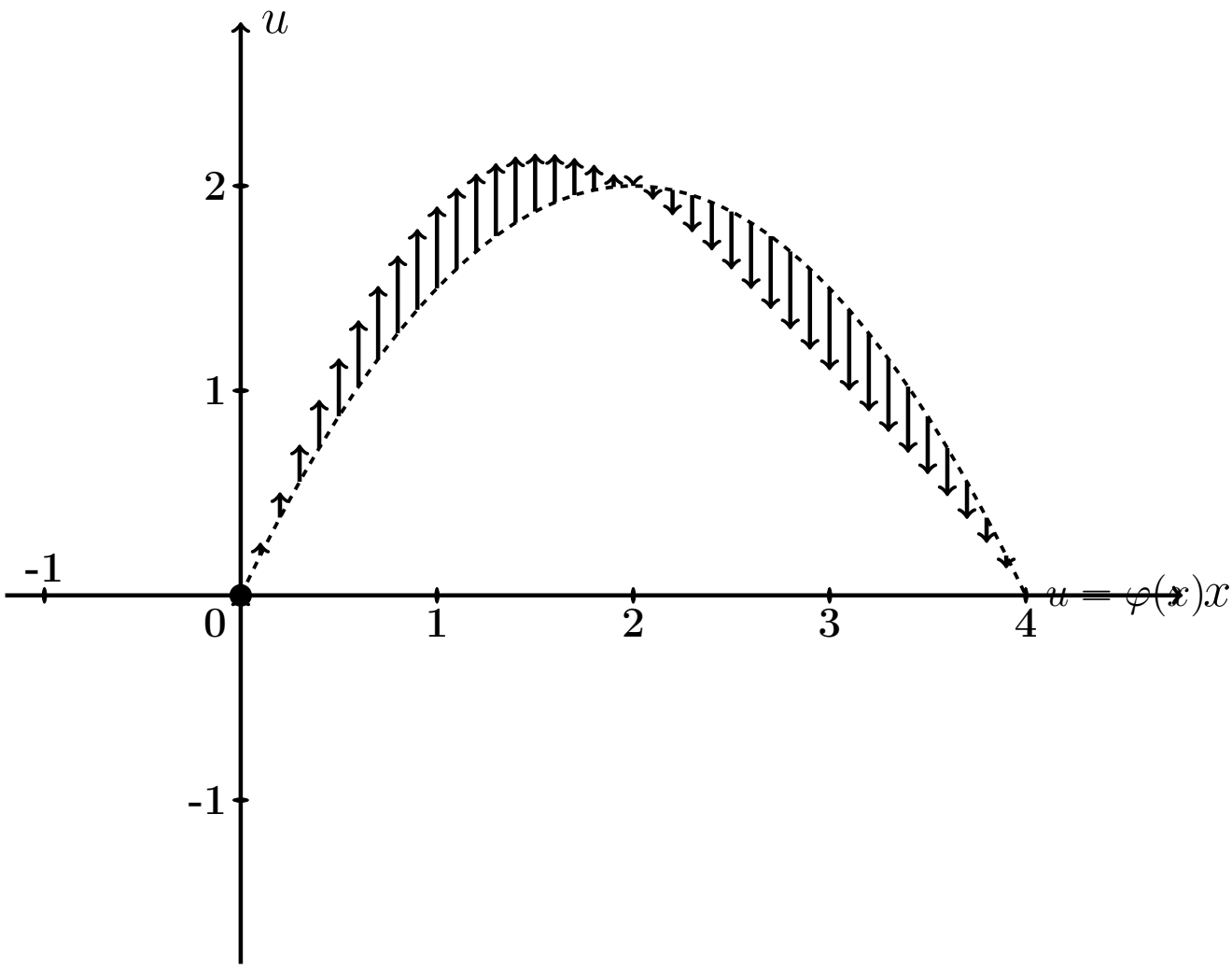


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 17.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 17.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 17.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 17.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 17 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 6 (красные клетки Таблицы 17.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 17.6.

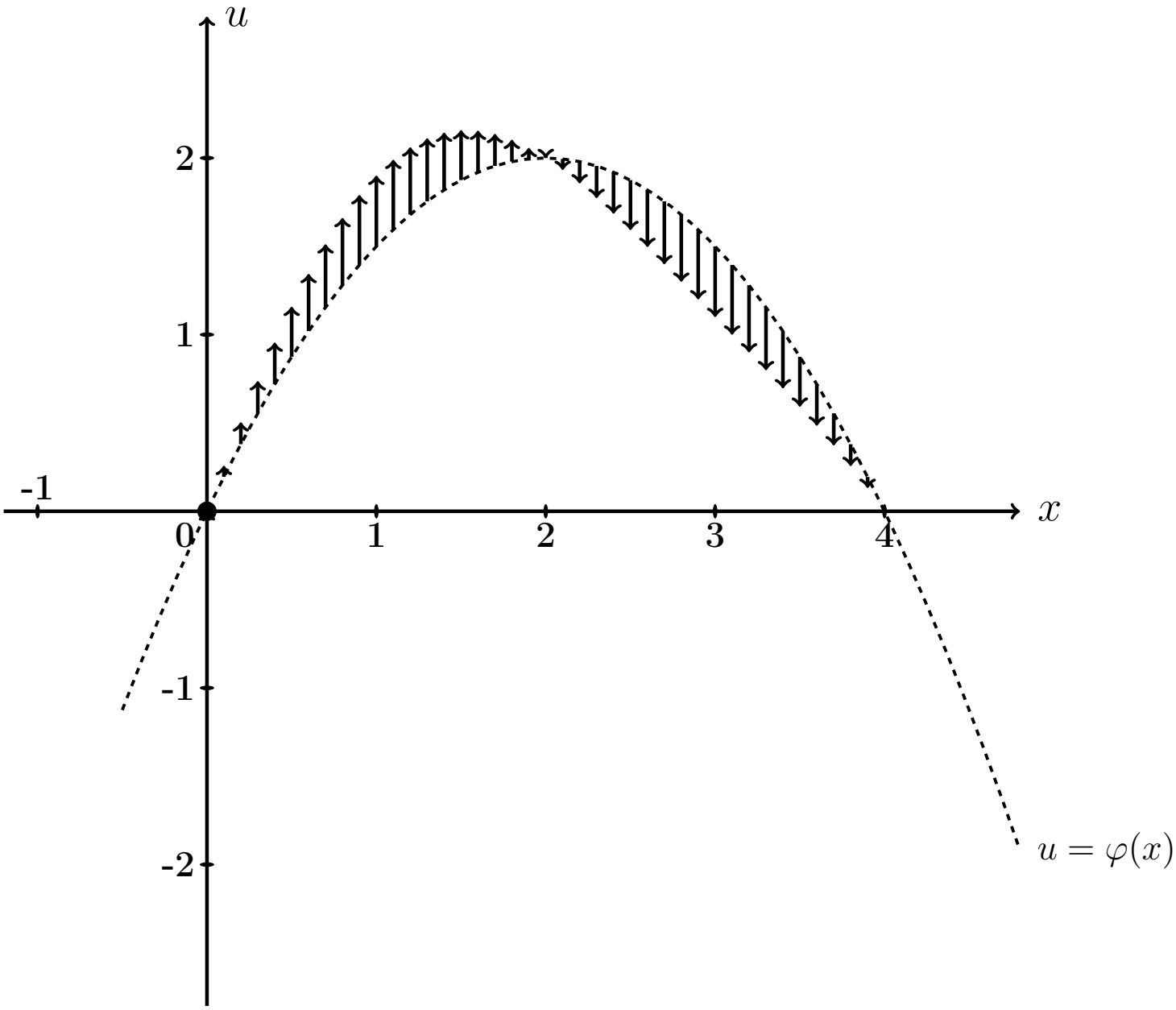


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{17.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{17.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (17.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{17.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (17.2), (17.3). Затабулировать решение уравнения (17.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (17.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (17.2), (17.3). Затабулировать решение уравнения (17.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (17.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 17.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (17.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{17.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (17.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (17.4) при граничных условиях (17.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{17.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{17.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{17.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (17.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (17.9). Следовательно, по формуле (17.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{17.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{17.11}$$

Шаг 6.

Таблица 17.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 17.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (17.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 17.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 17.9

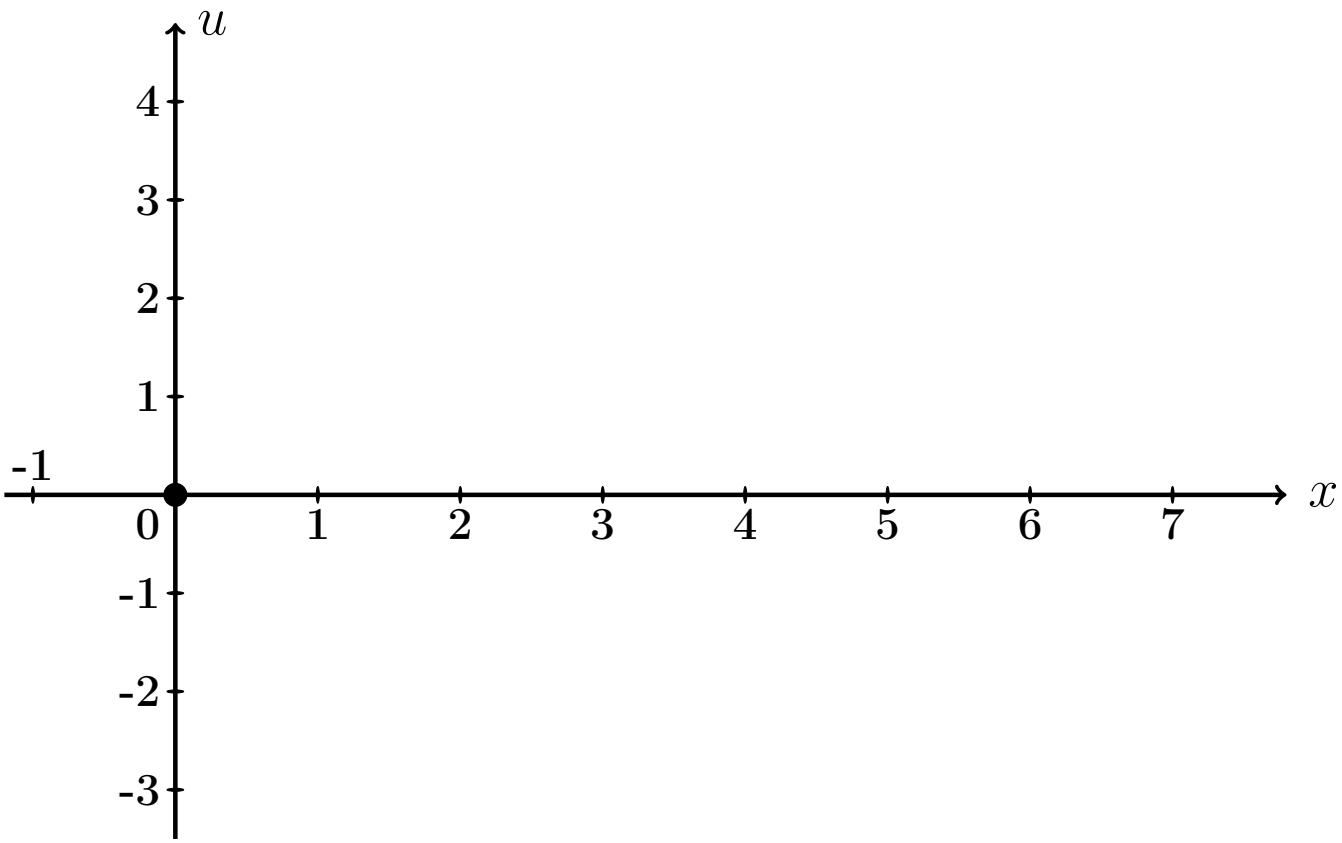


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 17 задача 7 (по Таб. 17.7, 17.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 17 задача 7 (по таблице 17.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (17.6) и (17.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (17.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (17.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (17.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (17.9). Следовательно, по формуле (17.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (17.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (17.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (17.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 17.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (17.5),

$C_1' =$ по формуле (17.12)

и $C_3 =$ по таблице 17.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 17.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

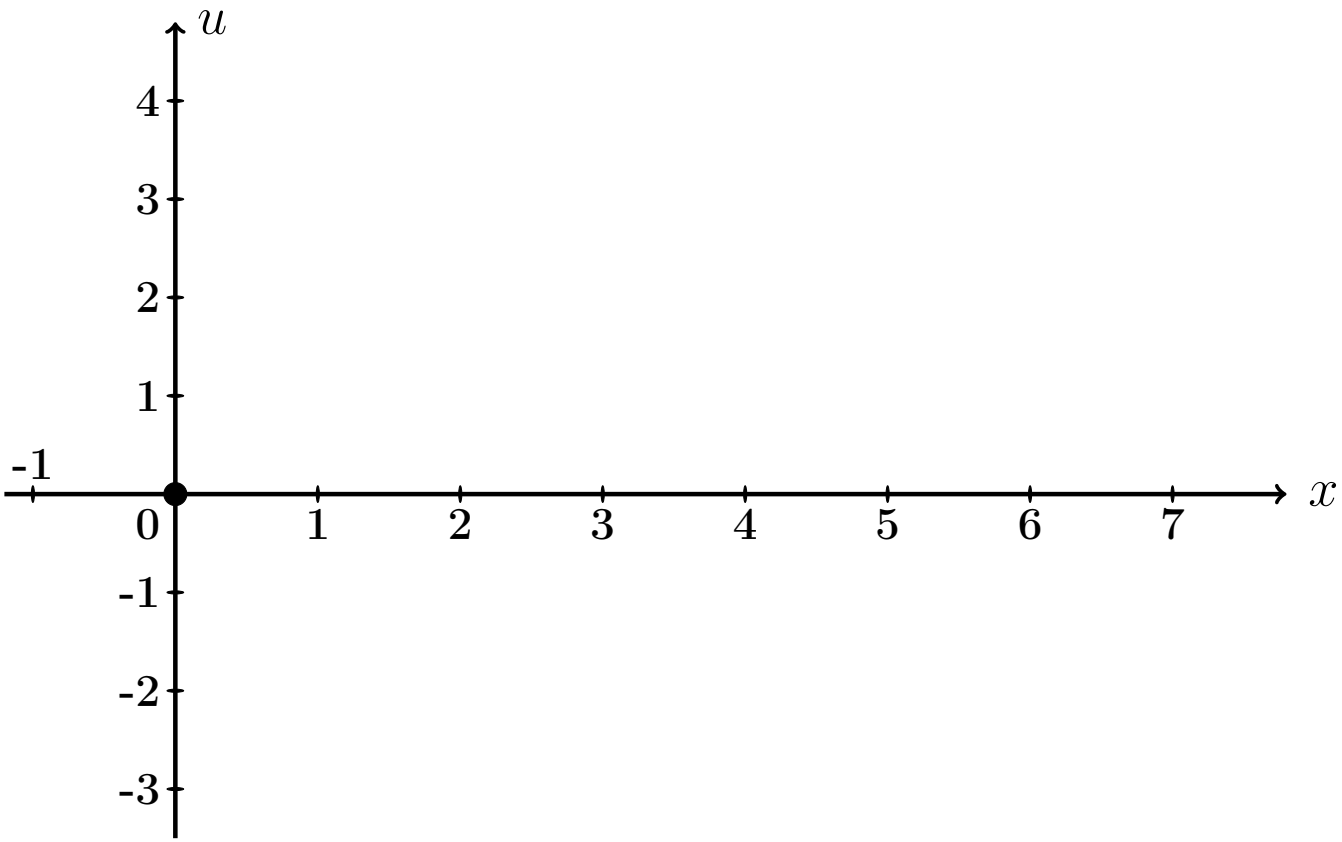


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 17 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (17.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 17 задача 7 (по таблице 17.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{17.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (17.1). Затабулировать решение уравнения (17.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

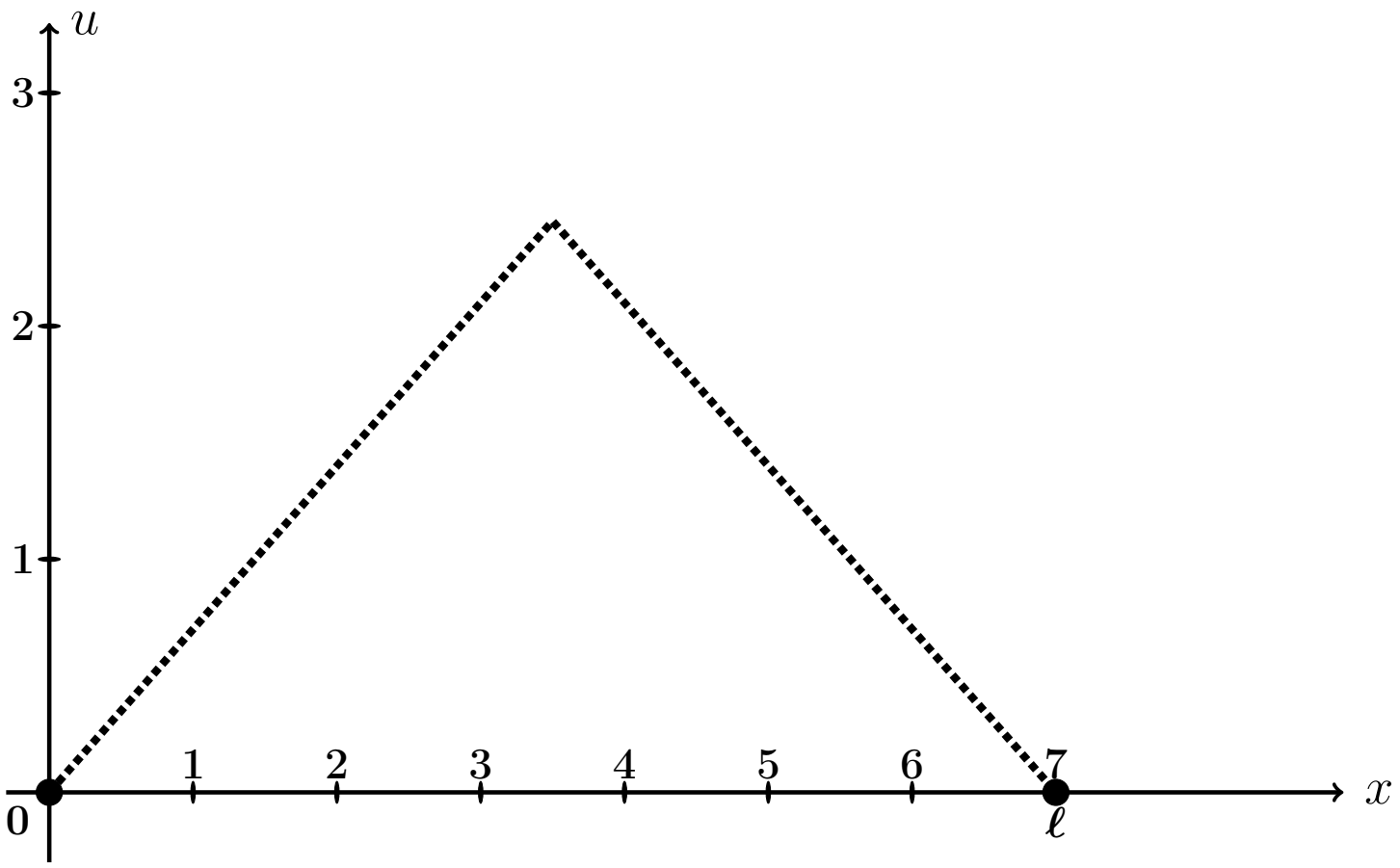


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (17.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

где $\ell = 7$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 17.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 17.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 17.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 17.12, 17.13) формулы (17.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 17.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 17.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 17.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 17.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

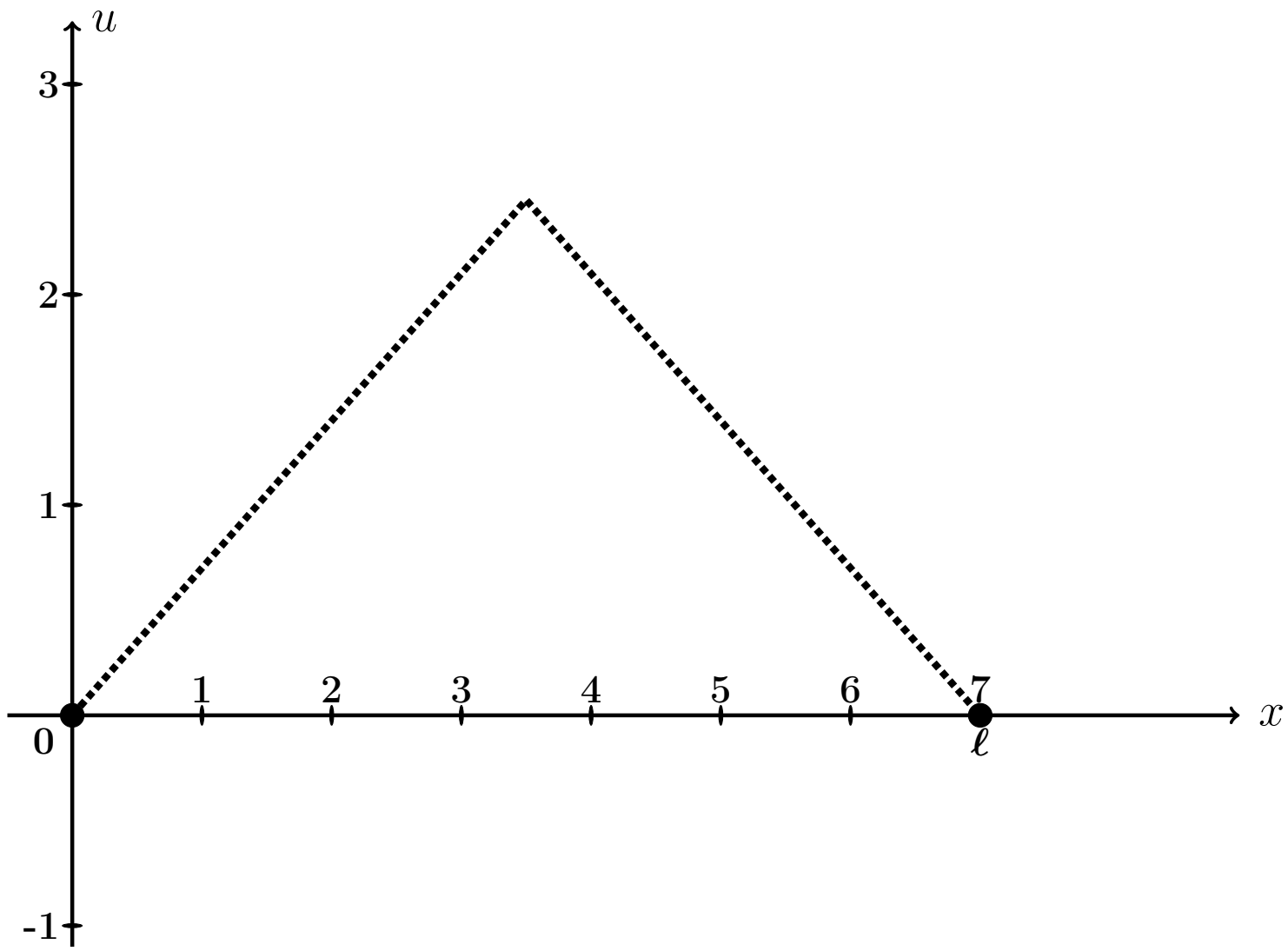


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (17.2).

Выборочная проверка вариант 17 задача 8 (по таблице 17.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 8 (по таблице 17.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 8 (по таблице 17.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 8 (по таблице 17.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.33)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.67)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(17.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{17.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{17.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

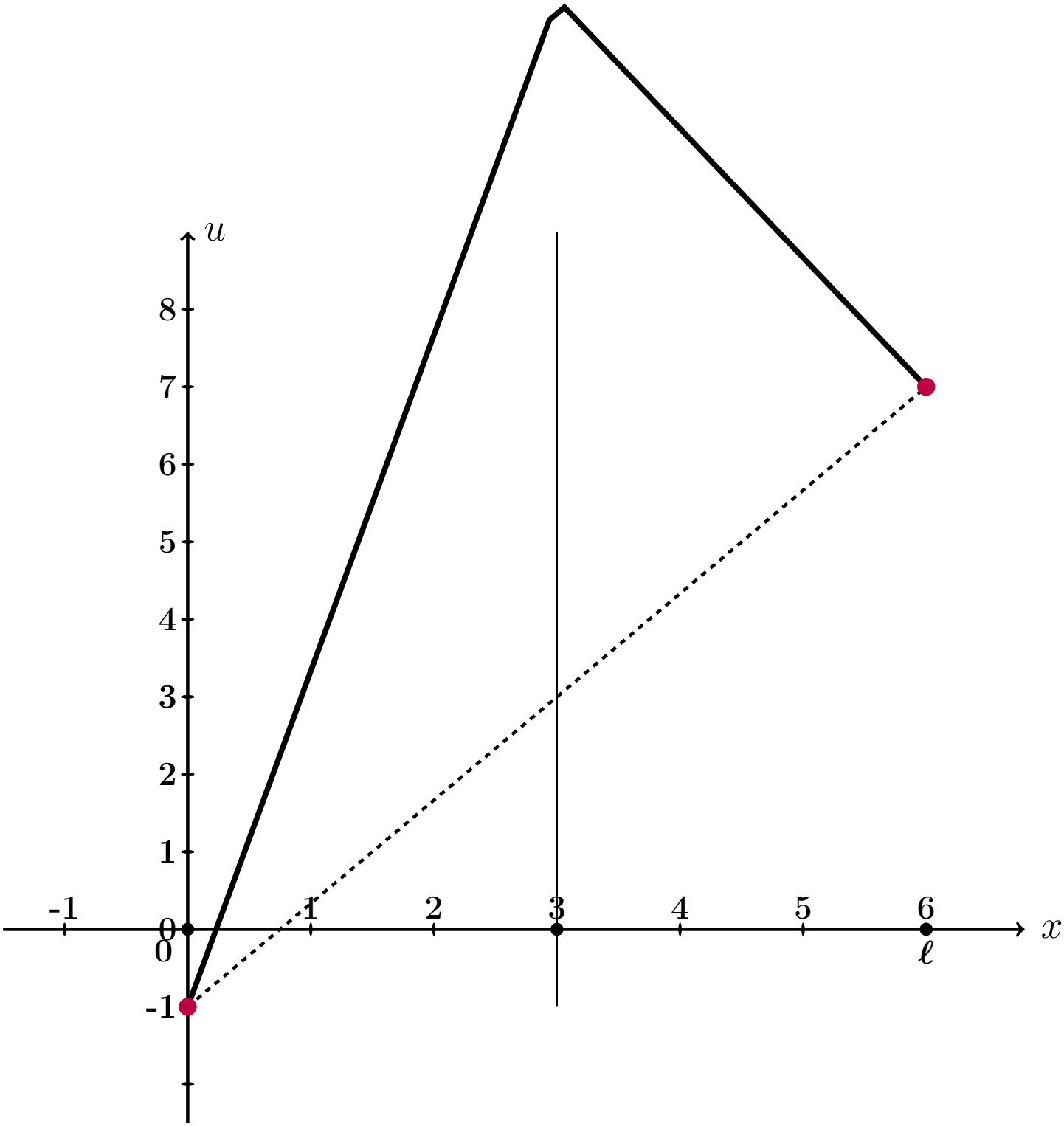


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (17.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (17.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (17.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{17.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{17.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (17.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (17.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{17.7}$$

Таблица 17.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (17.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (17.1) с начальным условием (17.2) и граничными условиями (17.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (17.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_6 = 7.0$ — значения граничных условий (17.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 17.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 17.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-1	1,6	4,2	6,8	9,4	12	11	10	9	8	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 17.16.

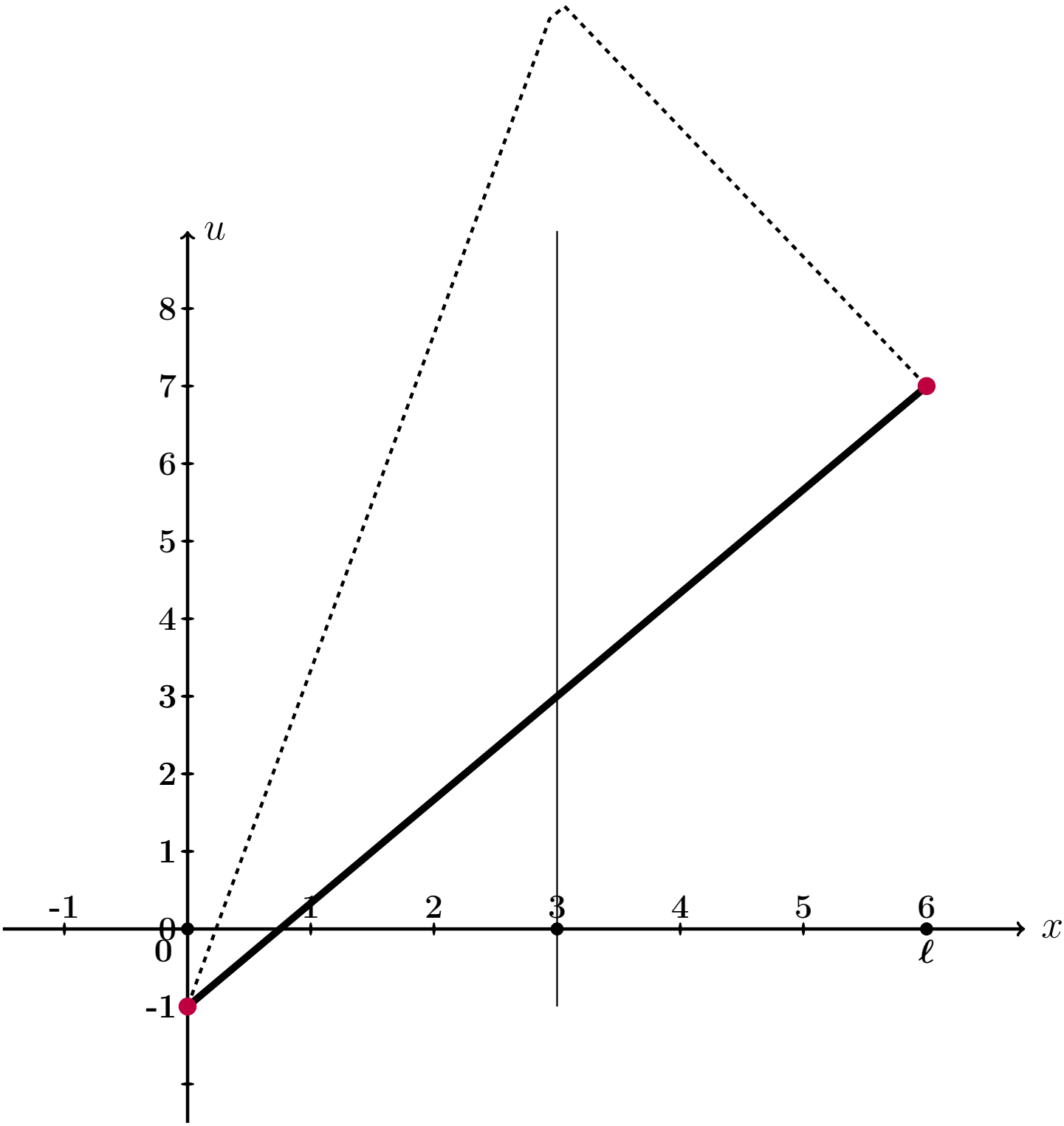


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (17.2), а черной сплошной линией — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (17.3).

Выборочная проверка вариант 17 задача 9 (по формулам (17.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 9 (по таблице 17.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 17 задача 9 (по таблице 17.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 18

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 1 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 1 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 1 \cdot x + 9$.

$$y = 1 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{9}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{9}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$1 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right) = \boxed{} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k = 1, 2, 3$:

$$S_1(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5}$$

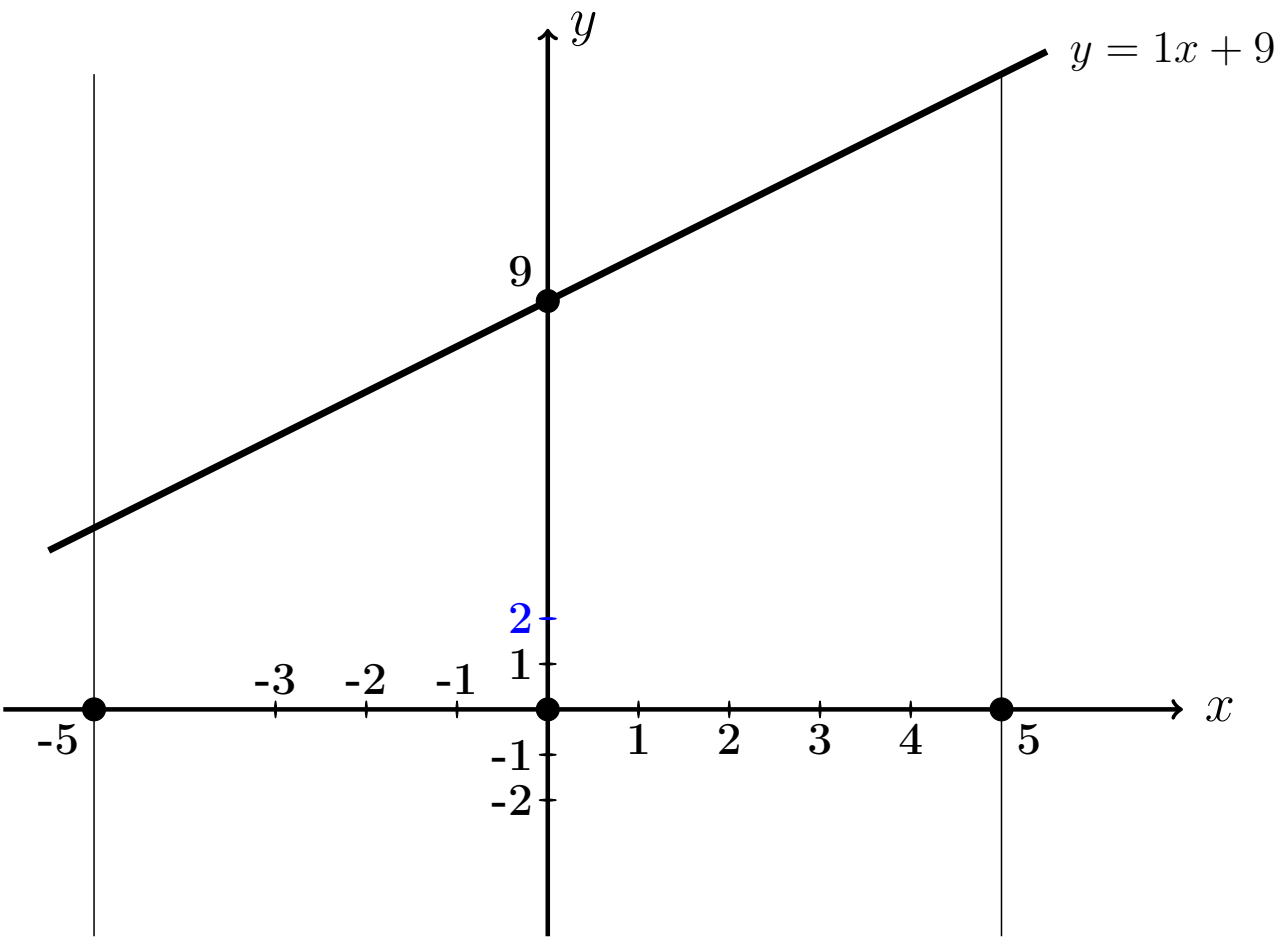
$$S_3(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + B_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{5} =$$
$$= \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + \boxed{} \cdot \sin \frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 18.1 (Табулировка $y = 1x + 9$ и $y = S_n(x)$, $n = 1, 2, 3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1x + 9$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$y = S_1(x)$		*									
$y = S_2(x)$					*						
$y = S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 18.1



Выборочная проверка вариант 18 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 1 (по Таблице 18.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sqrt{x} + \frac{18}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 9\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(6\sqrt{x} + \frac{18}{y}\right)dx = 6\int x^{1/2}dx + 18\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y) = \qquad\qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 9\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^3 + 4\sin 4t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2x\ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^3 + 4\sin 4t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^3 + 4\sin 4t)dt = \qquad + C(x)\ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3x^2 \\ \qquad\qquad\qquad + C(x) = 2x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = \qquad = \qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = \qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad$

Выборочная проверка вариант 18 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

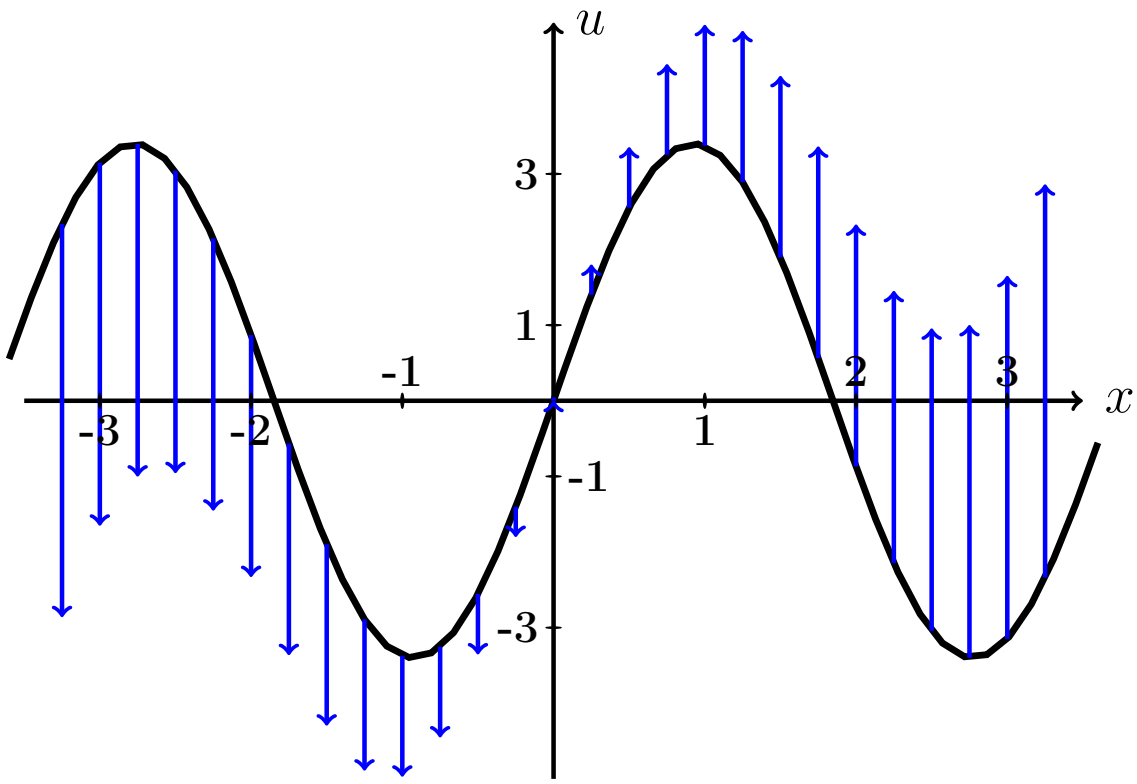


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 18.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 18 задача 4 (по Таблице 18.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 18.2.

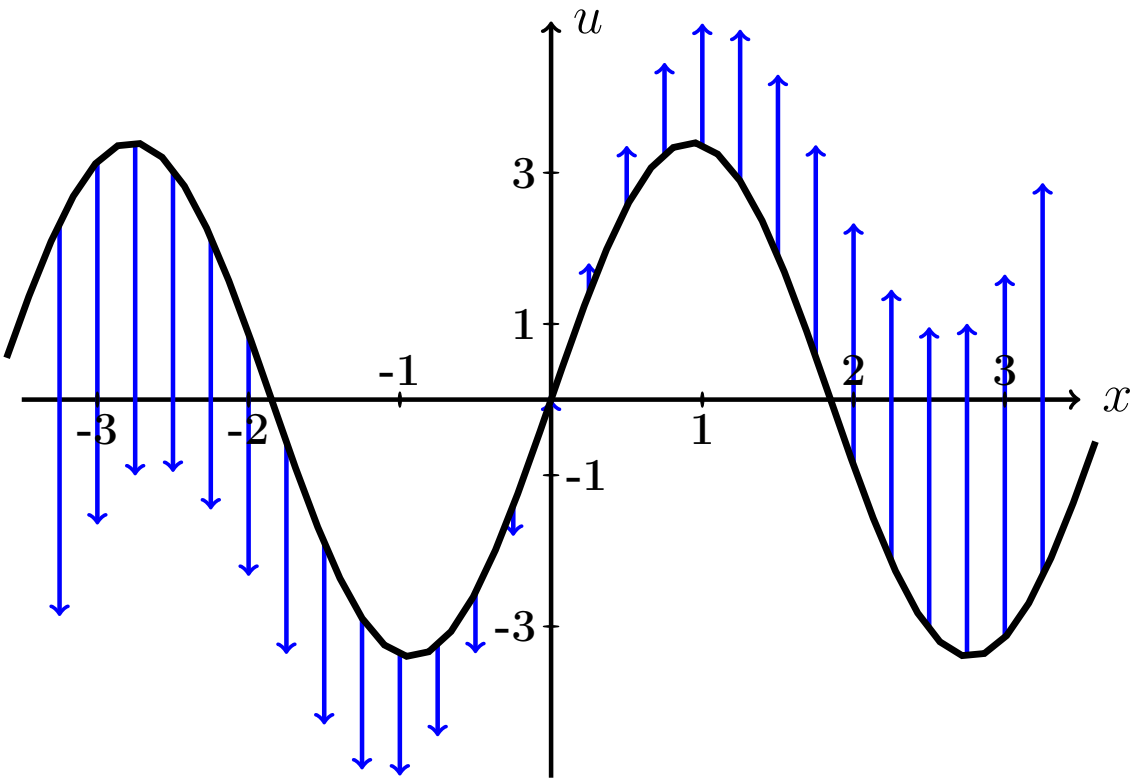


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

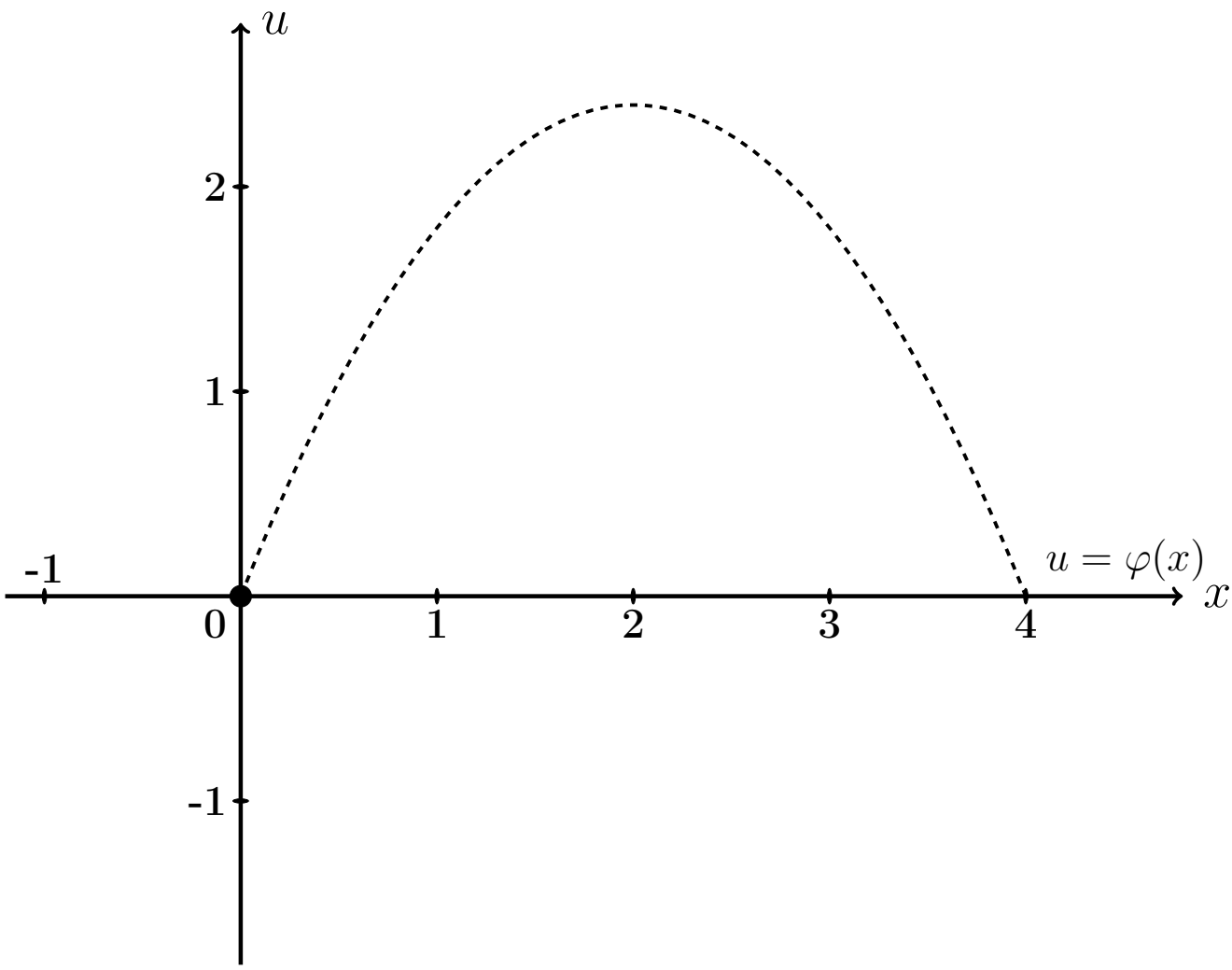


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 18.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 18.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 18.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 18.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 18 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 5 (красные клетки таб. 18.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 18.4.

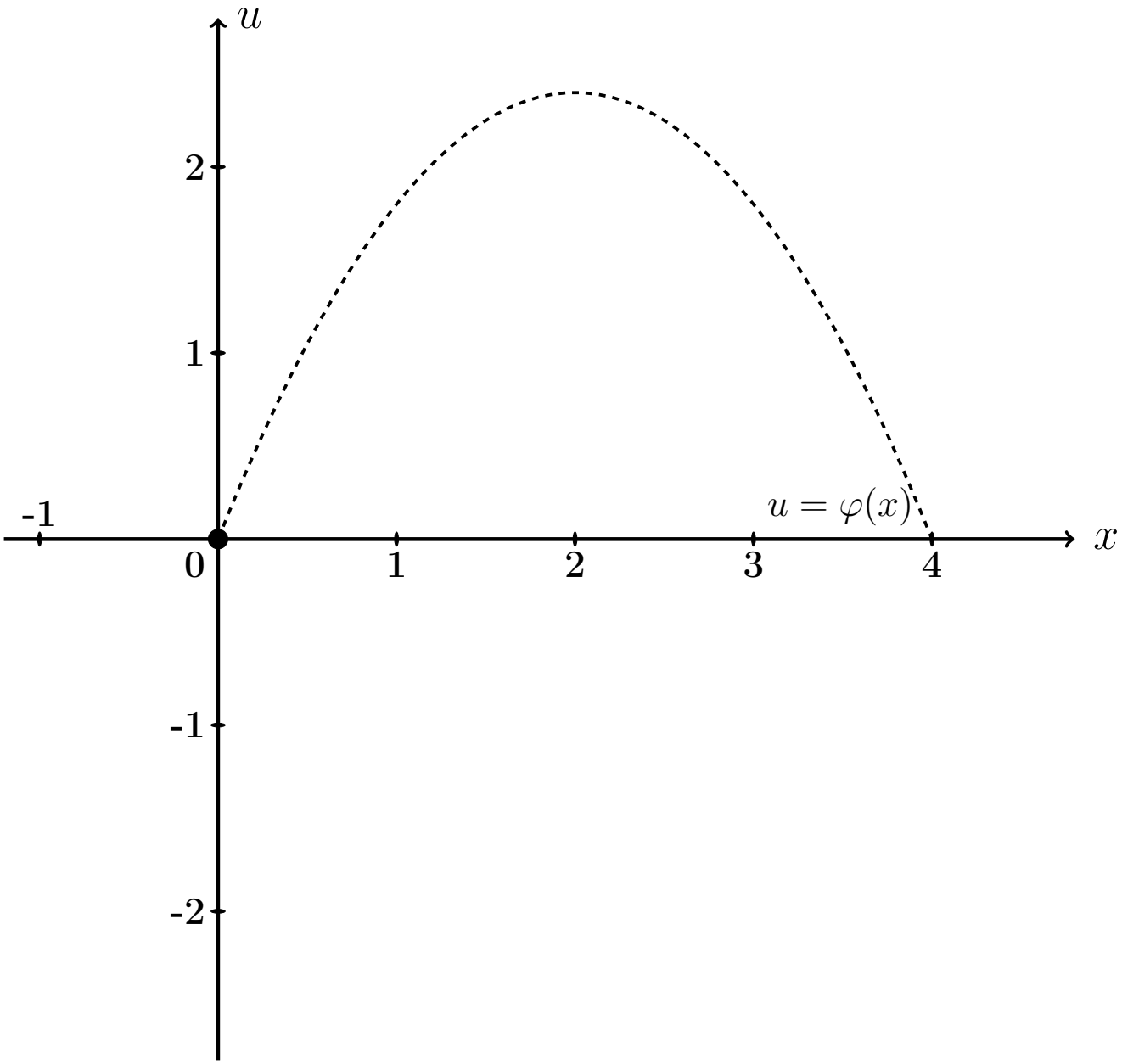


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

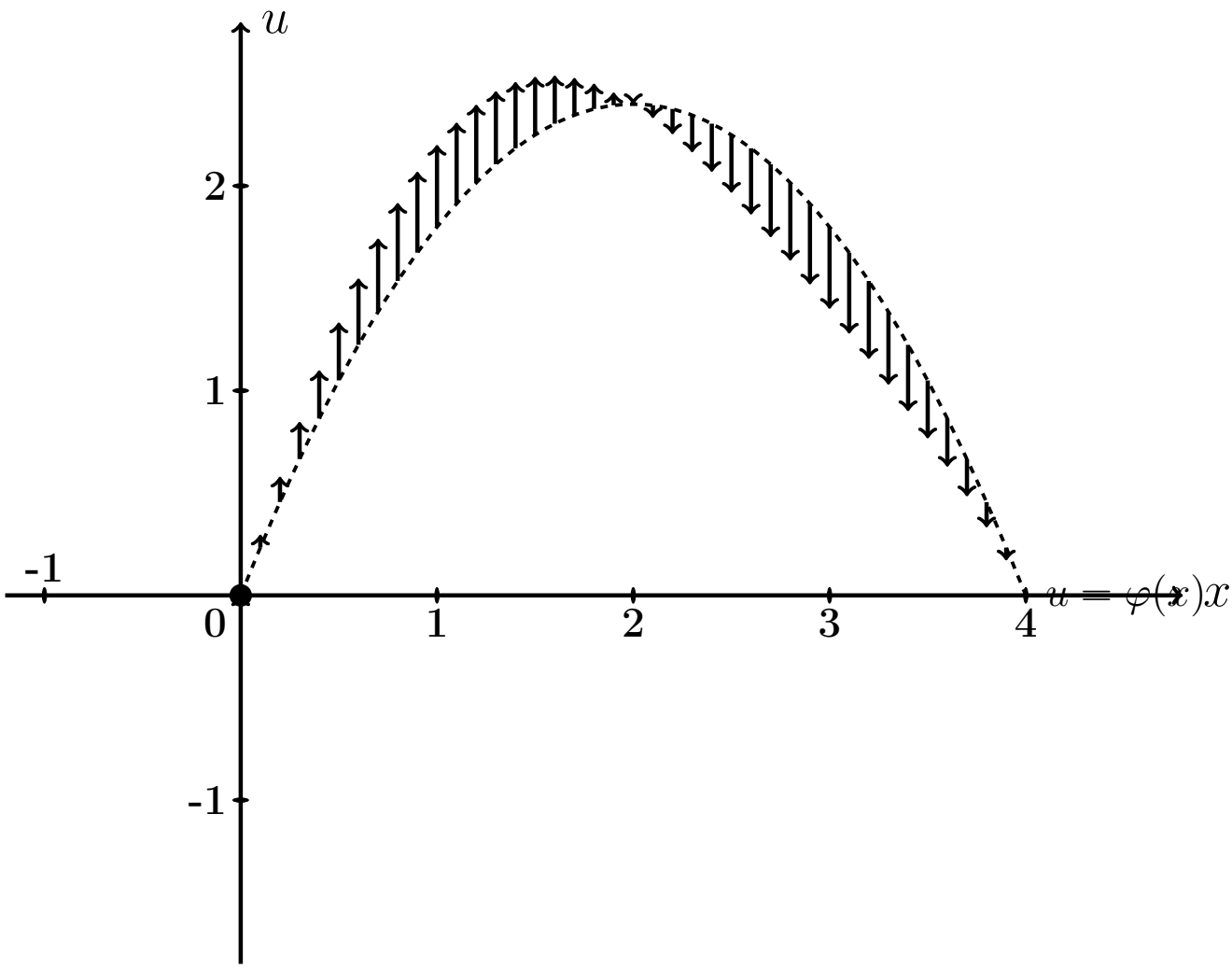


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 18.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 18.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 18.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 18.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 18 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 6 (красные клетки Таблицы 18.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 18.6.

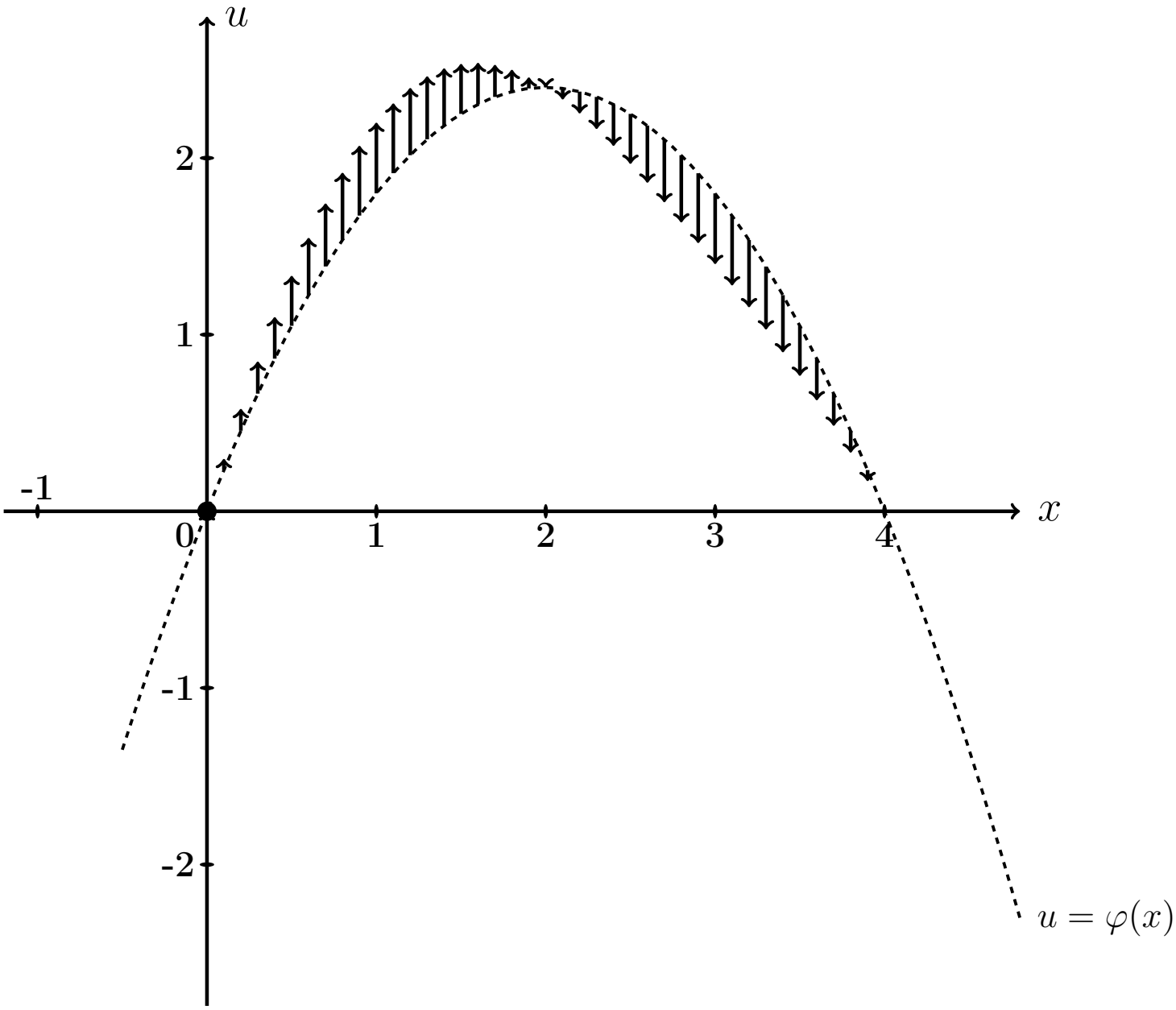


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{18.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{18.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (18.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{18.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (18.2), (18.3). Затабулировать решение уравнения (18.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (18.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (18.2), (18.3). Затабулировать решение уравнения (18.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (18.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 18.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{18.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (18.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{18.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (18.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (18.4) при граничных условиях (18.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{18.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{18.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{18.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (18.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (18.9). Следовательно, по формуле (18.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{18.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{18.11}$$

Шаг 6.

Таблица 18.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 18.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (18.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 18.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 18.9

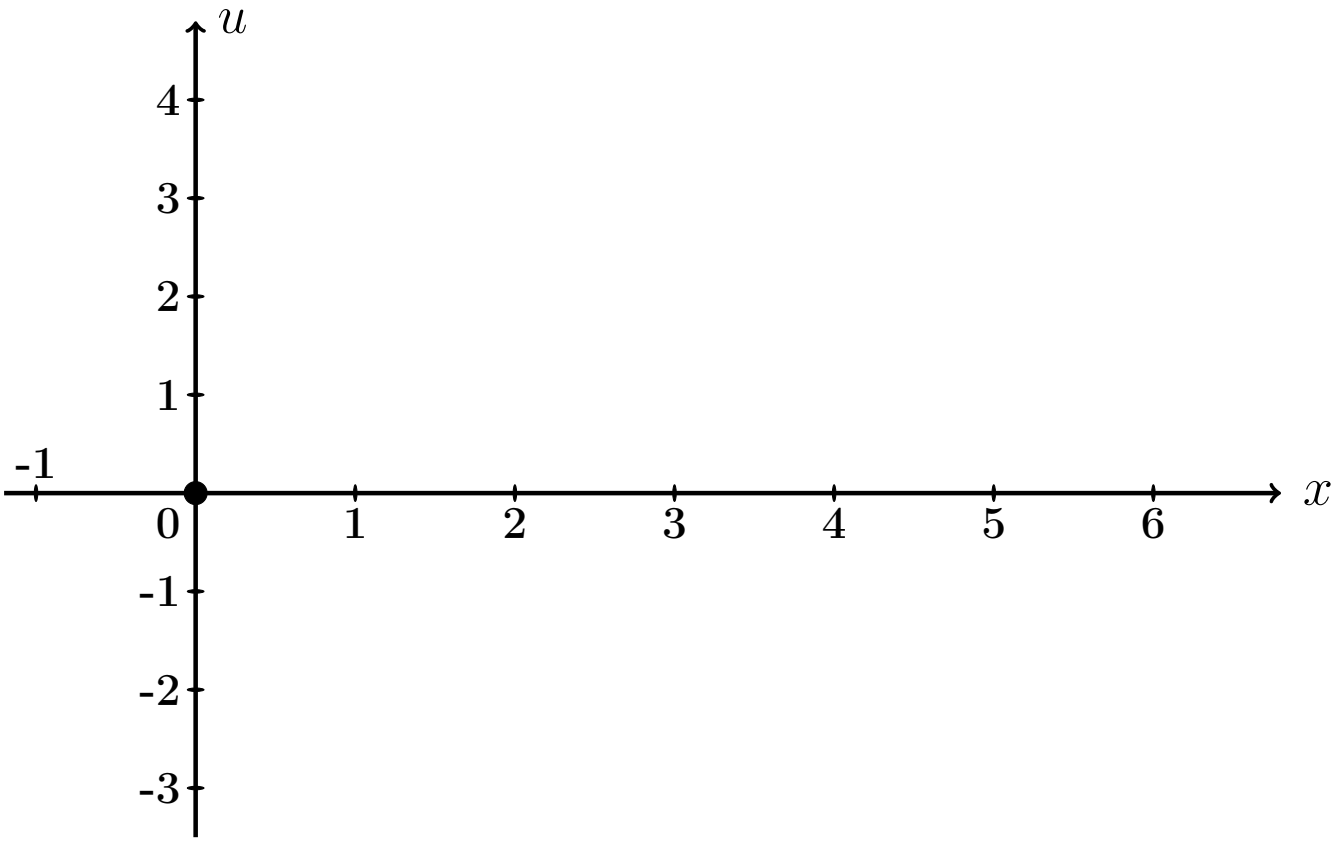


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 18 задача 7 (по Таб. 18.7, 18.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 7 (по таблице 18.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (18.6) и (18.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (18.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (18.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (18.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (18.9). Следовательно, по формуле (18.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (18.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (18.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (18.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 18.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (18.5),

$C_1' =$ по формуле (18.12)

и $C_3 =$ по таблице 18.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 18.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

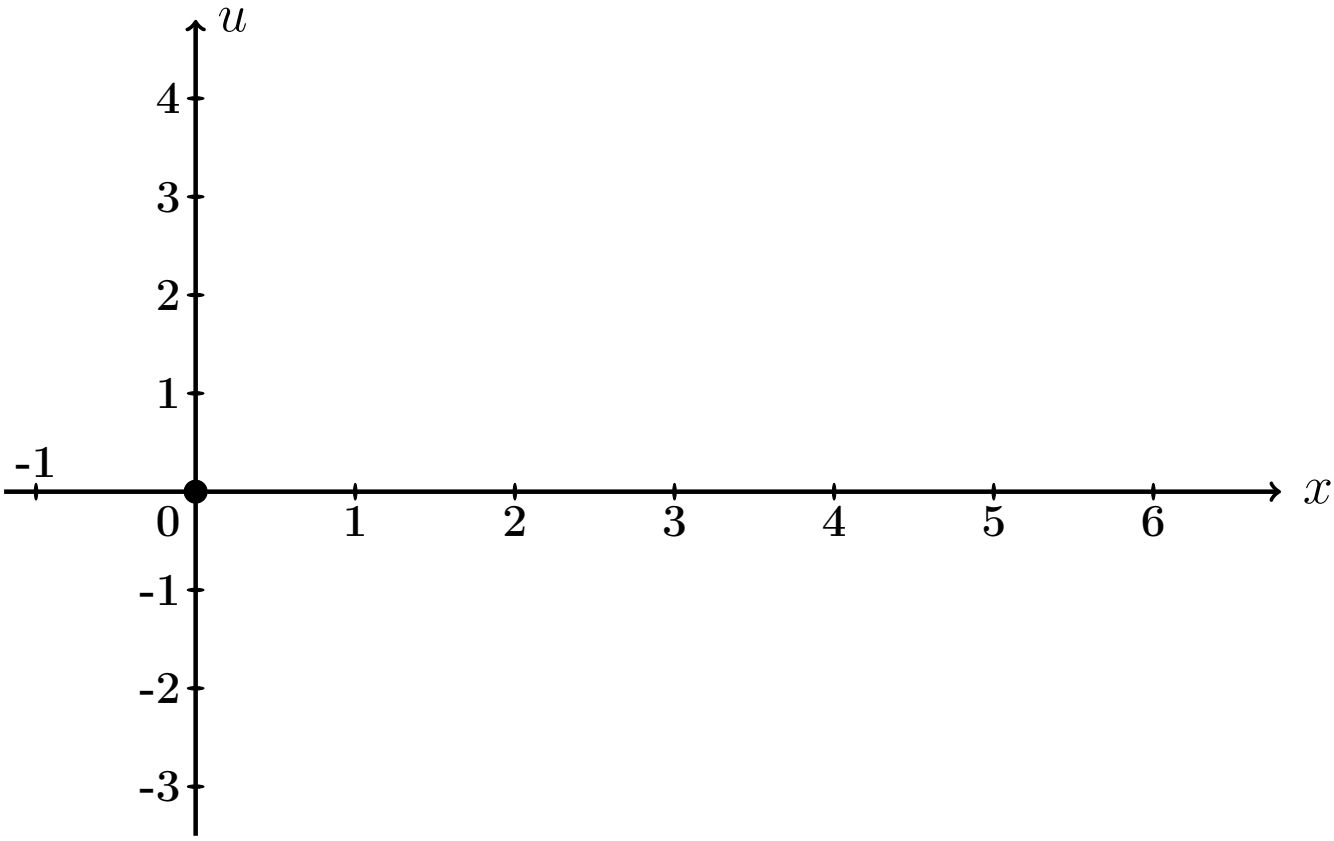


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 18 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (18.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 18 задача 7 (по таблице 18.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{18.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (18.1). Затабулировать решение уравнения (18.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

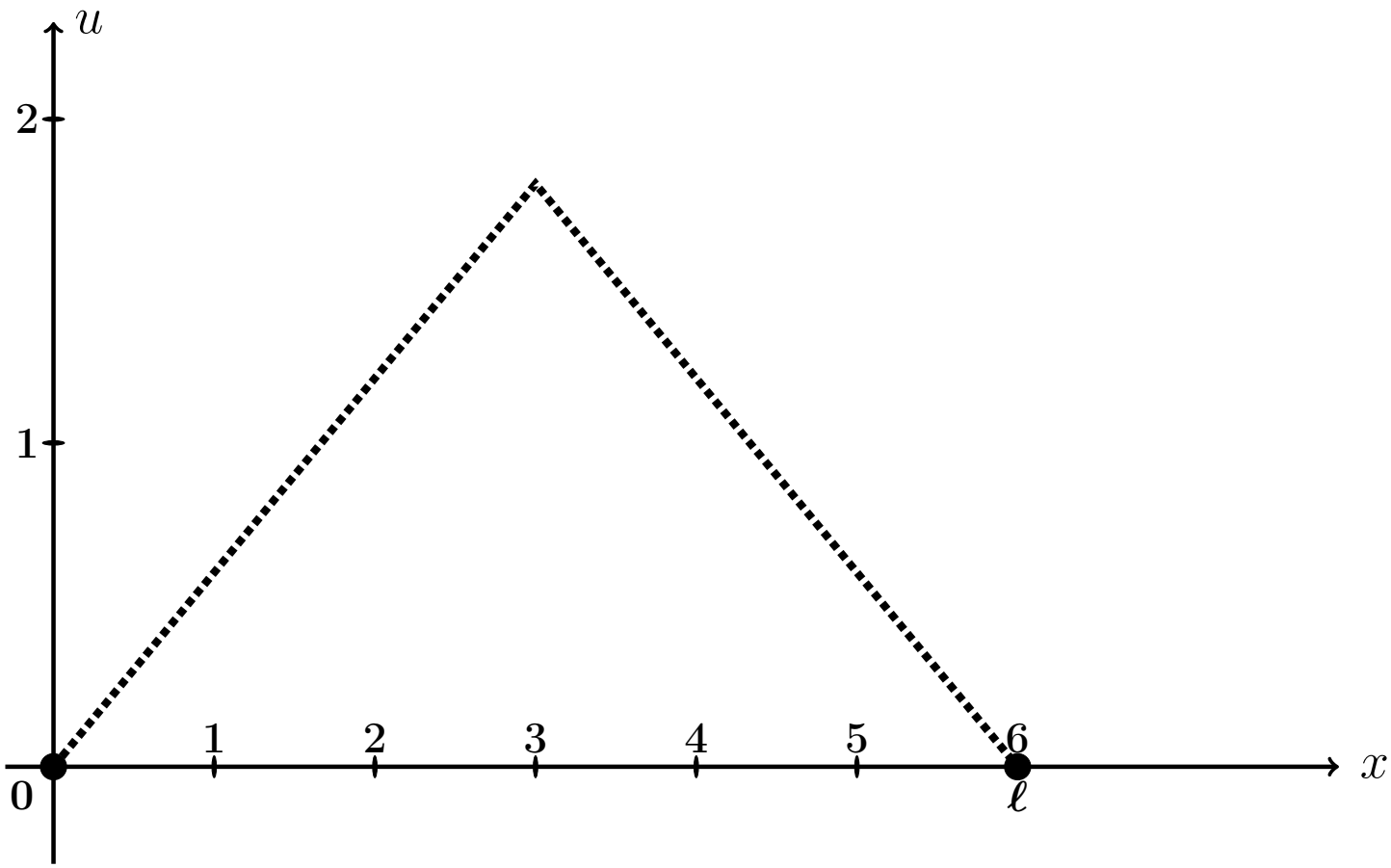


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (18.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (18.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 18.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 18.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 18.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 18.12, 18.13) формулы (18.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 18.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 18.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 18.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 18.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

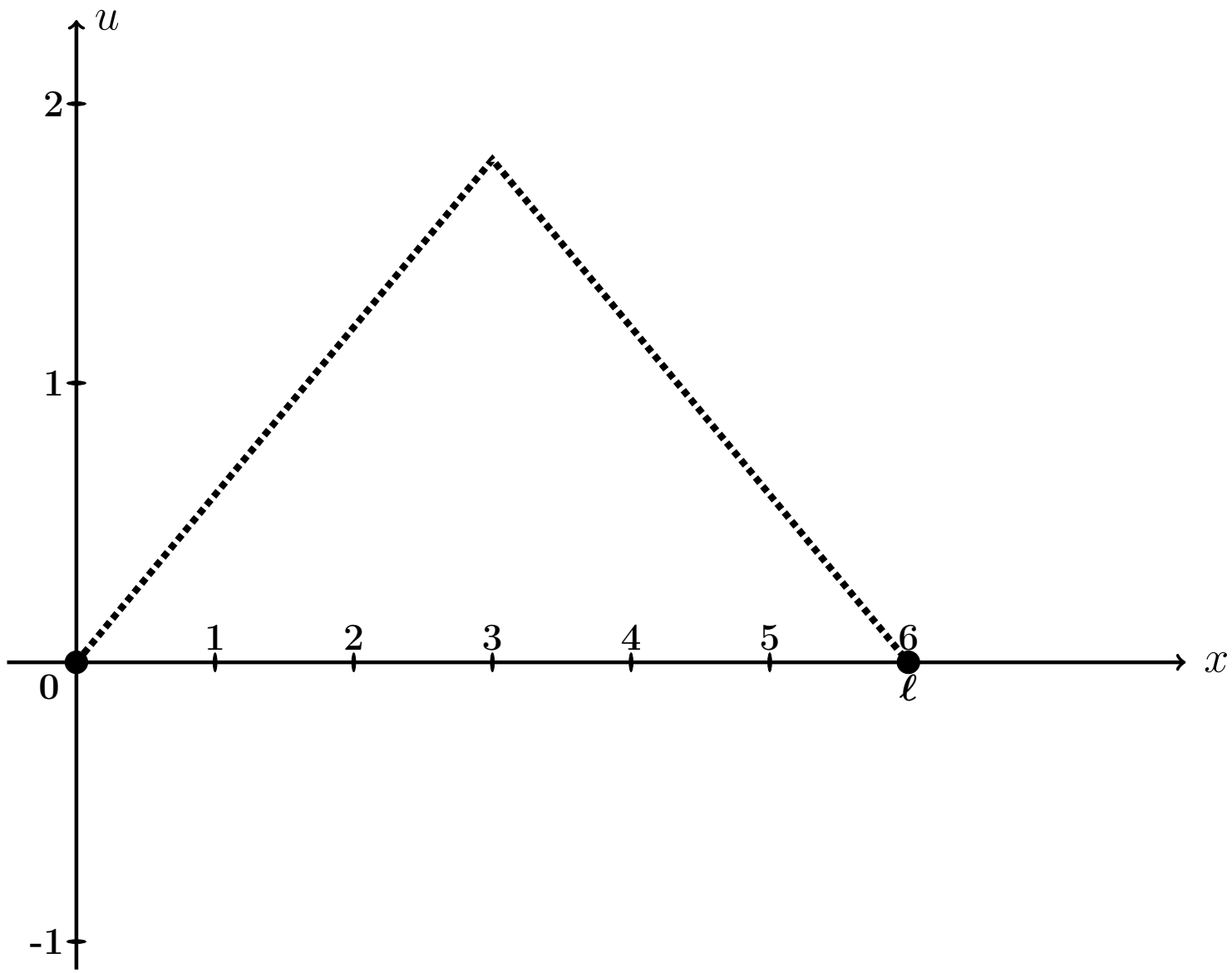


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (18.2).

Выборочная проверка вариант 18 задача 8 (по таблице 18.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 8 (по таблице 18.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 8 (по таблице 18.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 8 (по таблице 18.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.17)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.17)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(3.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{18.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{18.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

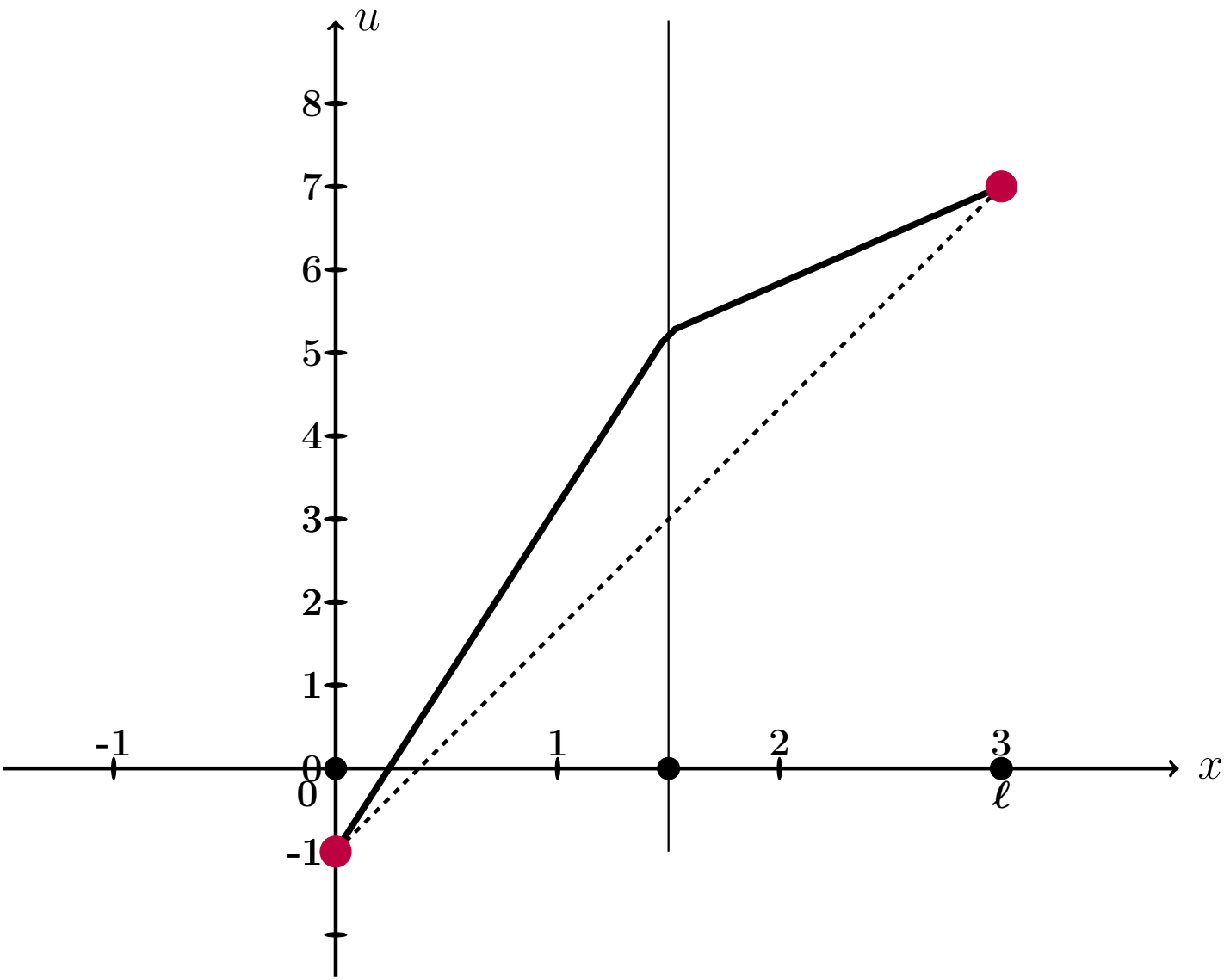


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (18.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (18.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (18.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{18.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{18.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (18.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (18.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{18.7}$$

Таблица 18.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (18.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (18.1) с начальным условием (18.2) и граничными условиями (18.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (18.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_3 = 7.0$ — значения граничных условий (18.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 18.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 18.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-1	0,25	1,5	2,75	4	5,25	5,6	5,95	6,3	6,65	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 18.16.

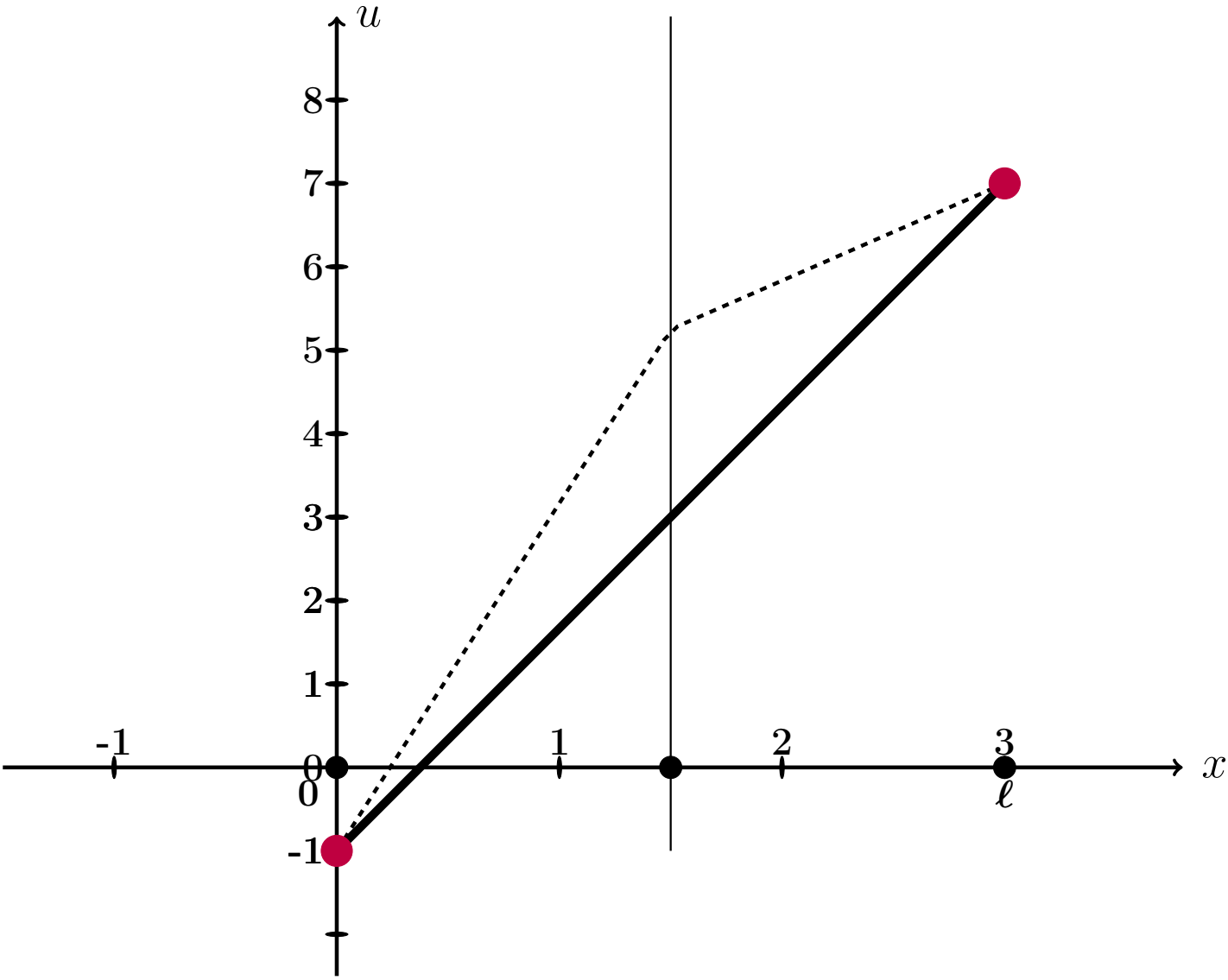


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (18.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (18.3).

Выборочная проверка вариант 18 задача 9 (по формулам (18.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 9 (по таблице 18.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 18 задача 9 (по таблице 18.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 19

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{8}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{8}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

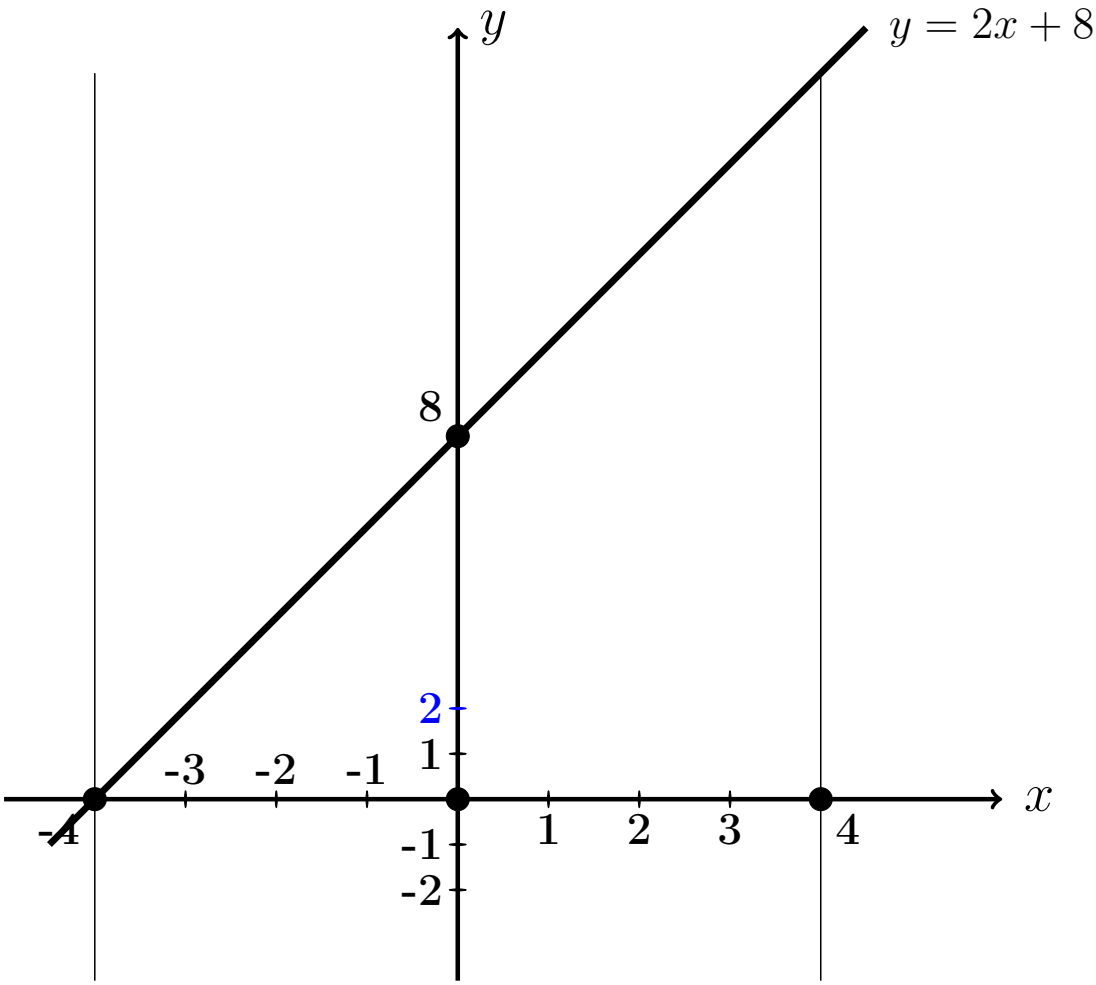
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 19.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x+8$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$y=S_1(x)$		*							
$y=S_2(x)$					*				
$y=S_3(x)$								*	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 19.1



Выборочная проверка вариант 19 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 1 (по Таблице 19.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 8\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 12\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 8\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 8\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 12\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x^2 + 8t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x^2 + 8t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x^2 + 8t)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 4x^2 \\ \qquad = 3e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 19 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

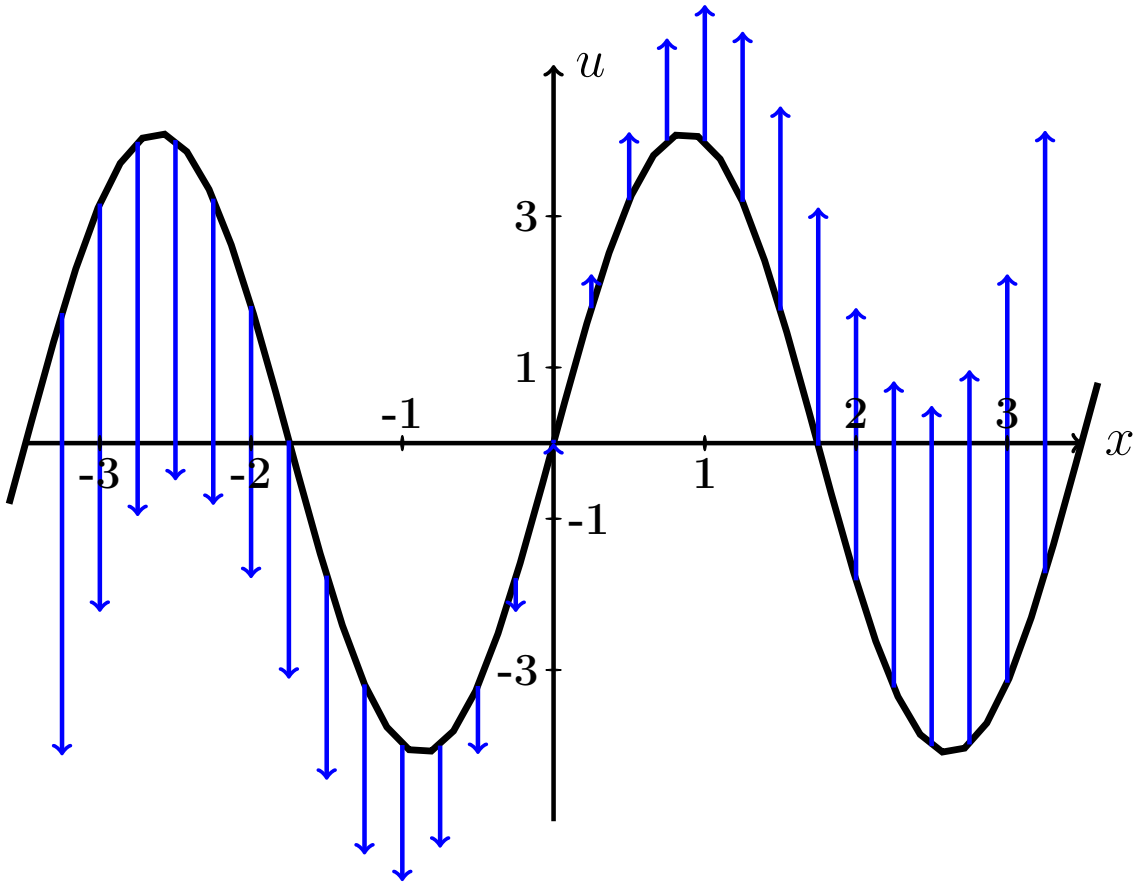


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 19.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 19 задача 4 (по Таблице 19.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 19.2.

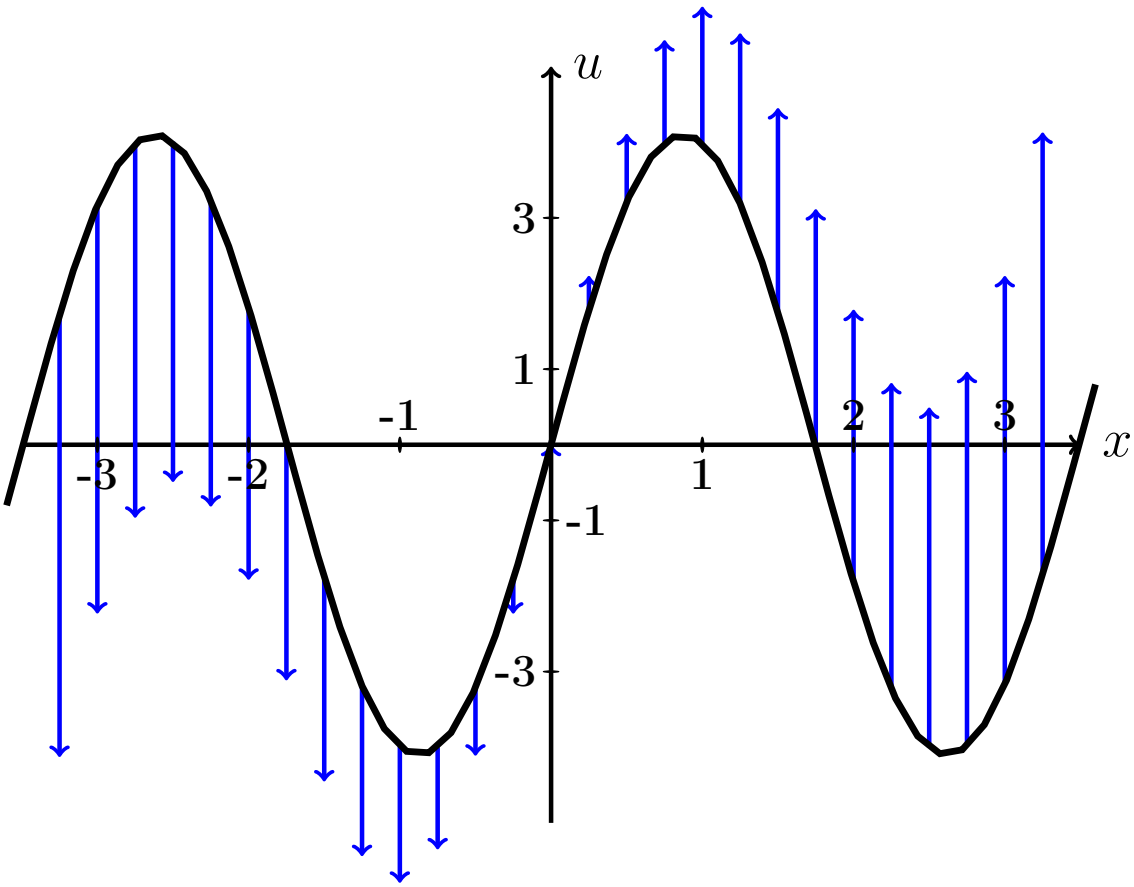


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

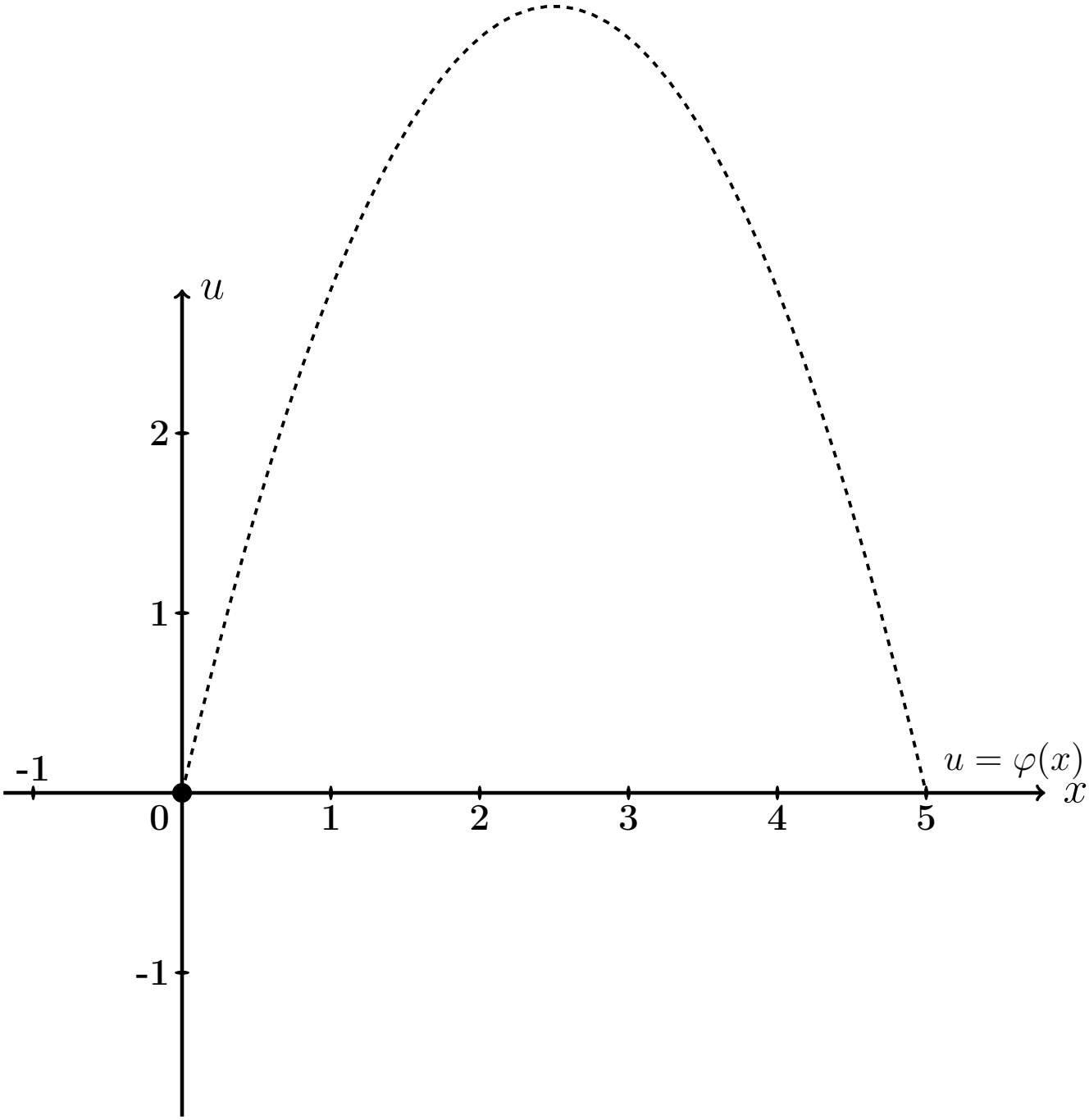


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 19.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 19.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 19.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 19.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 19 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 5 (красные клетки таб. 19.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 19.4.

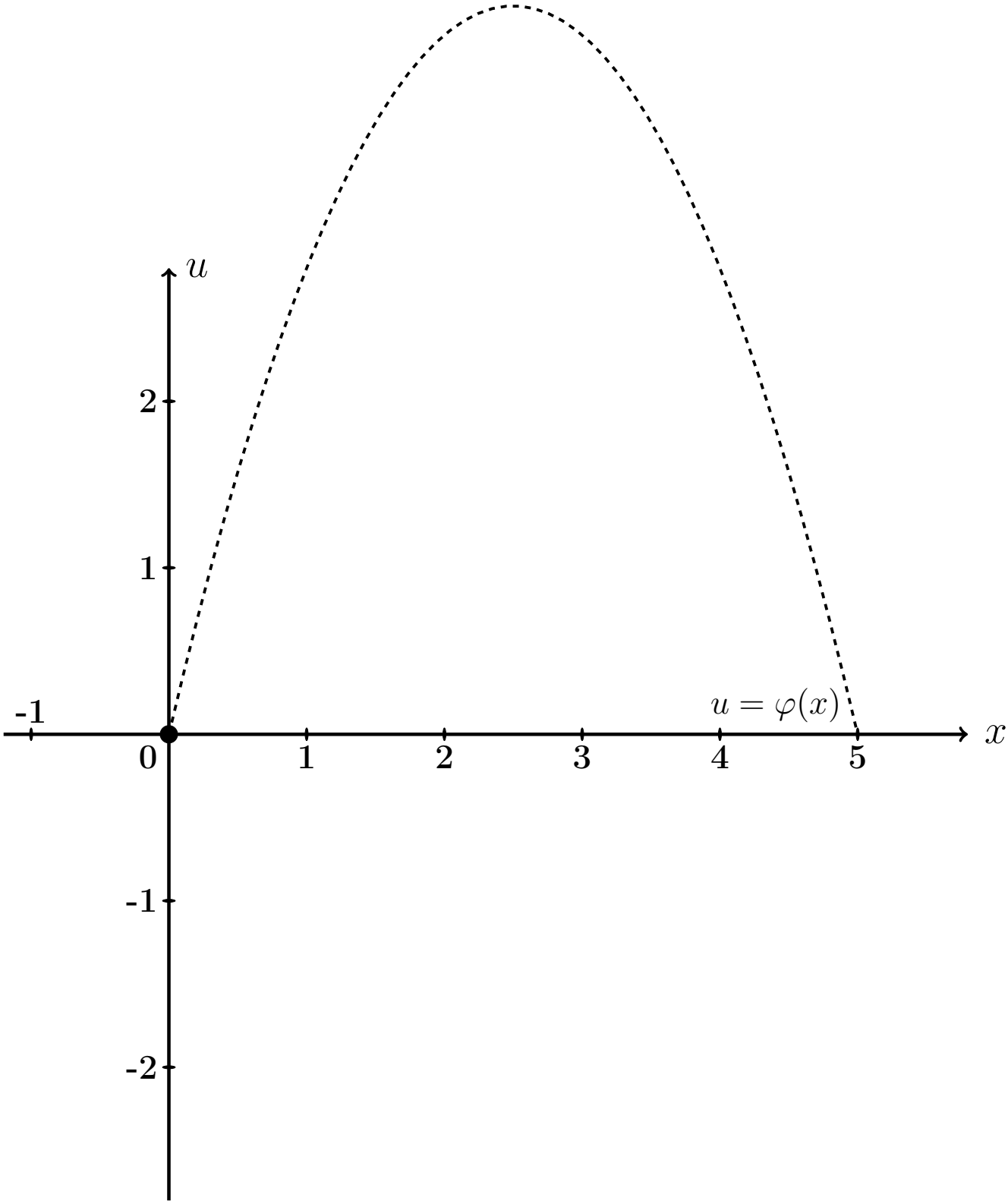


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

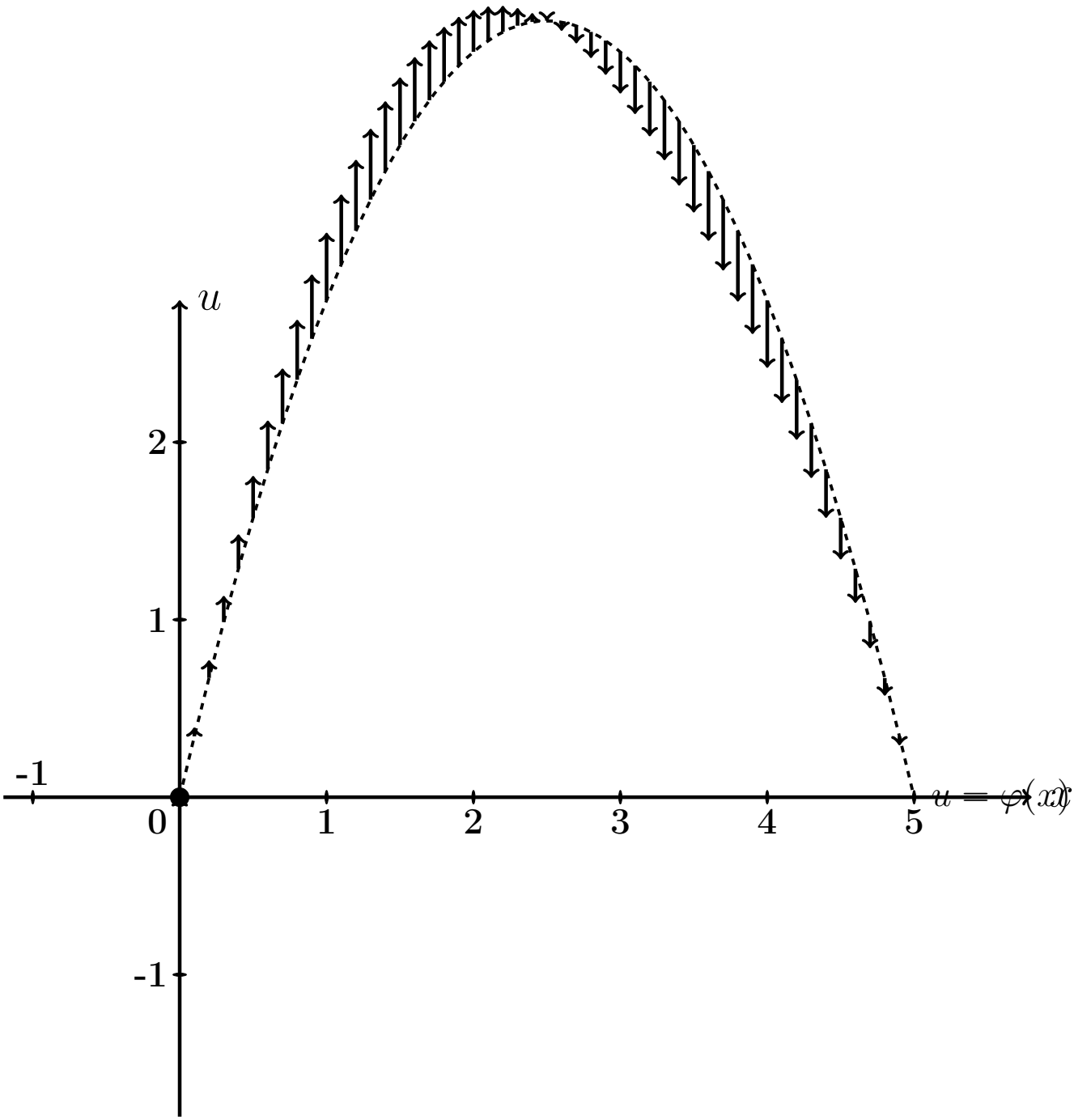


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 19.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.0\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.41$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 19.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 19.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 19.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 19 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 6 (красные клетки Таблицы 19.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 19.6.

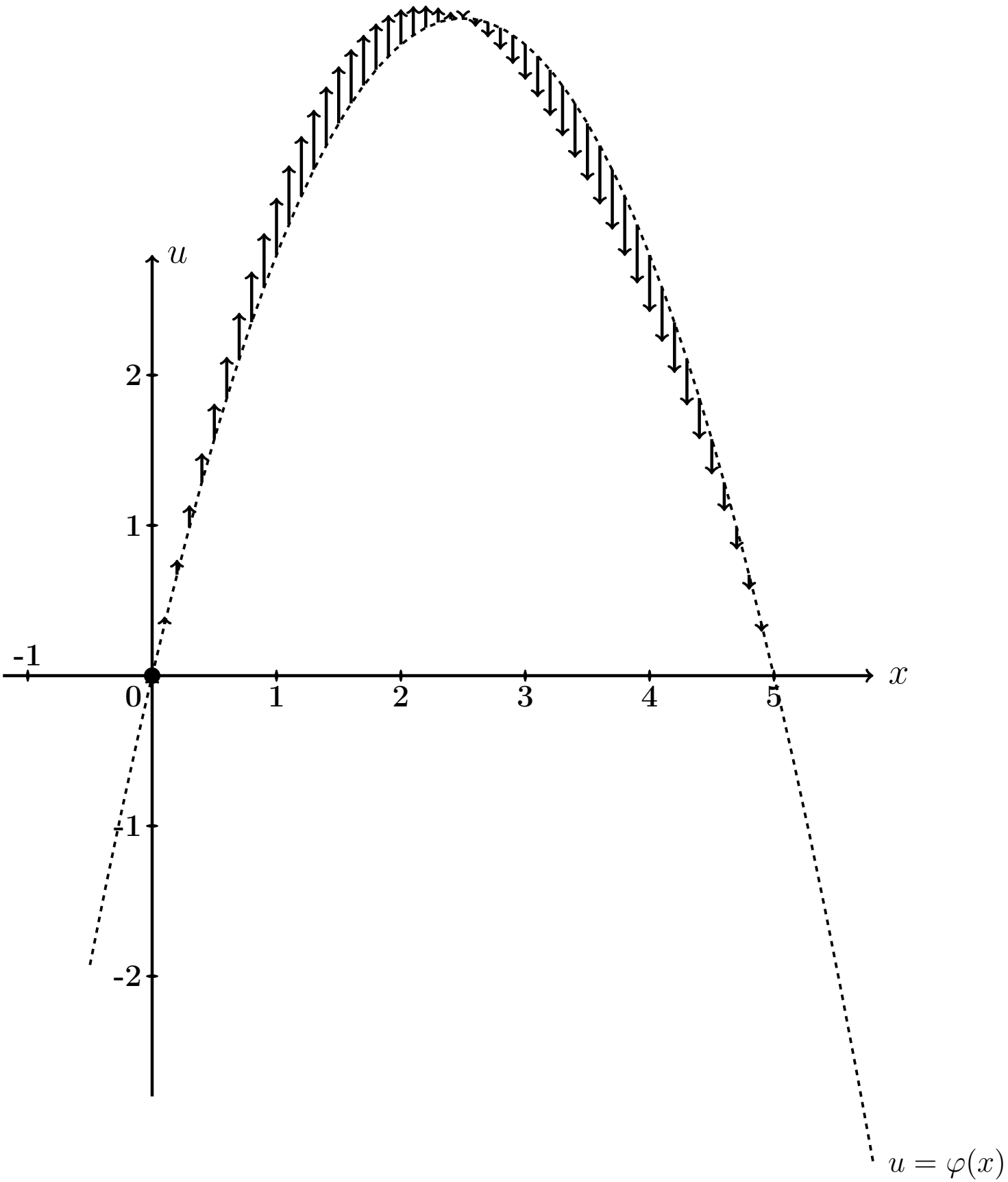


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{19.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{19.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{19.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (19.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{19.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (19.2), (19.3). Затабулировать решение уравнения (19.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (19.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (19.2), (19.3). Затабулировать решение уравнения (19.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (19.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 19.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{19.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (19.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{19.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (19.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (19.4) при граничных условиях (19.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{19.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{19.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{19.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (19.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (19.9). Следовательно, по формуле (19.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{19.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{19.11}$$

Шаг 6.

Таблица 19.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 19.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (19.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 19.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 19.9

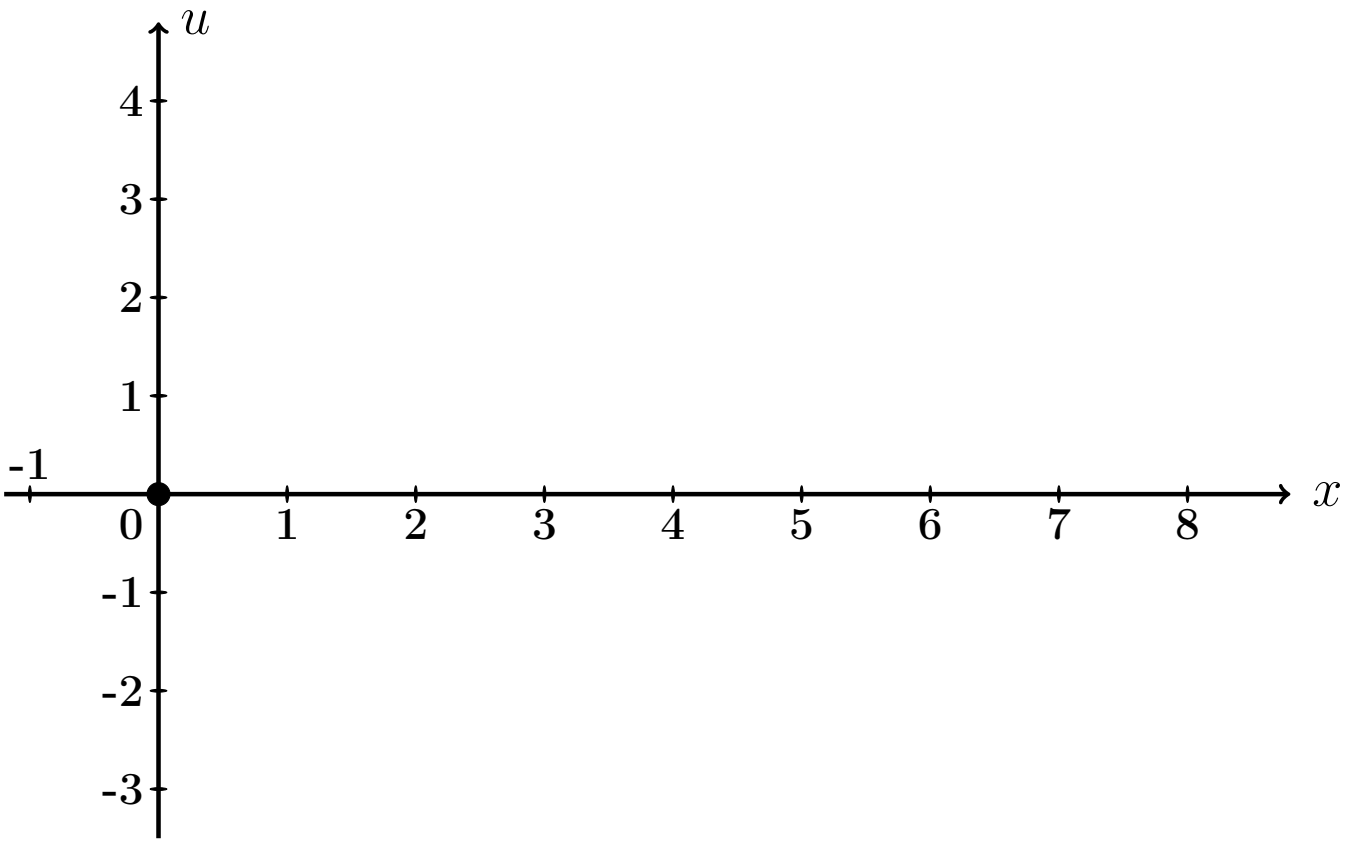


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 19 задача 7 (по Таб. 19.7, 19.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 19 задача 7 (по таблице 19.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (19.6) и (19.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (19.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (19.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (19.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (19.9). Следовательно, по формуле (19.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (19.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (19.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (19.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 19.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (19.5),

$C_1' =$ по формуле (19.12)

и $C_3 =$ по таблице 19.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 19.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

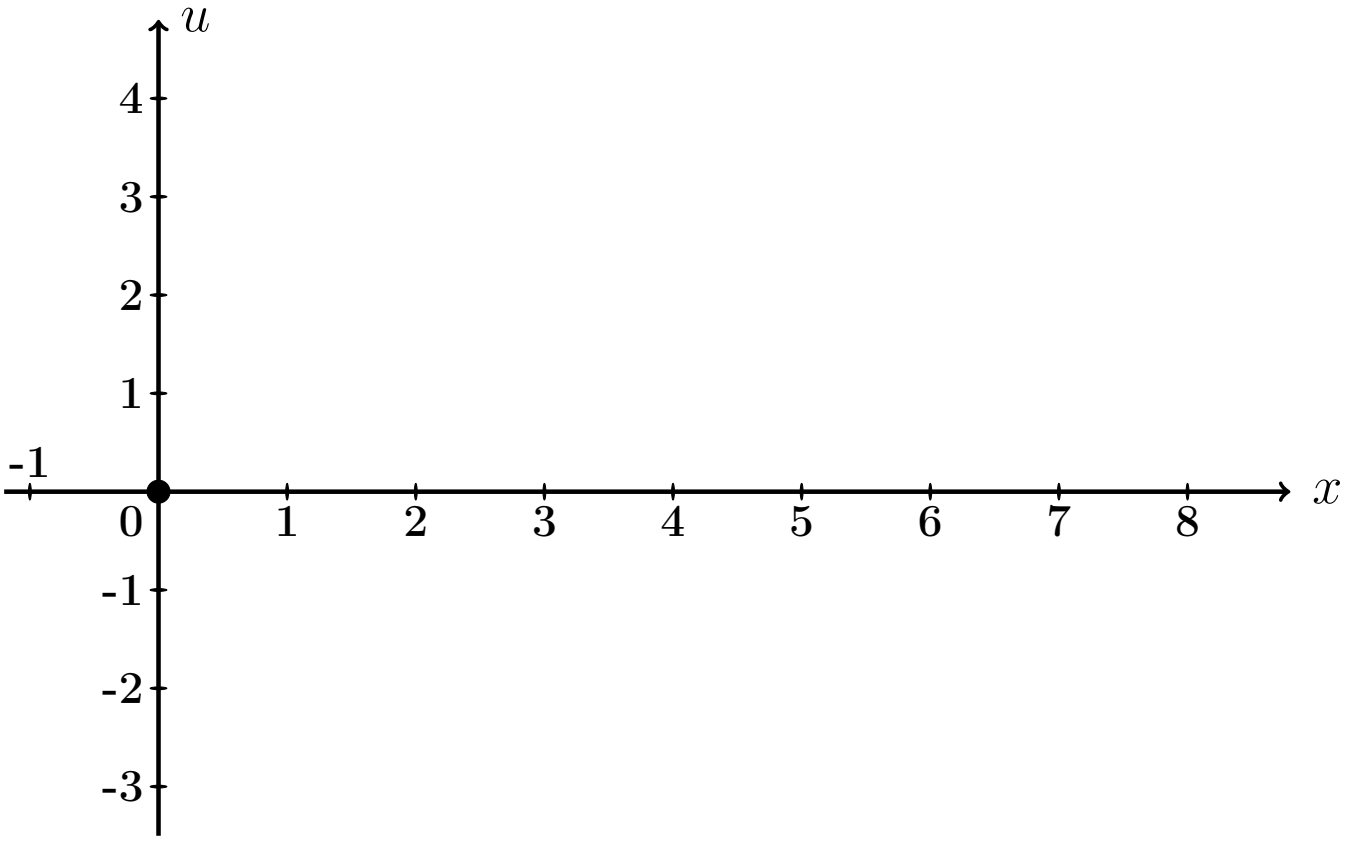


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 19 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (19.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 19 задача 7 (по таблице 19.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{19.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 3$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{19.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (19.1). Затабулировать решение уравнения (19.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

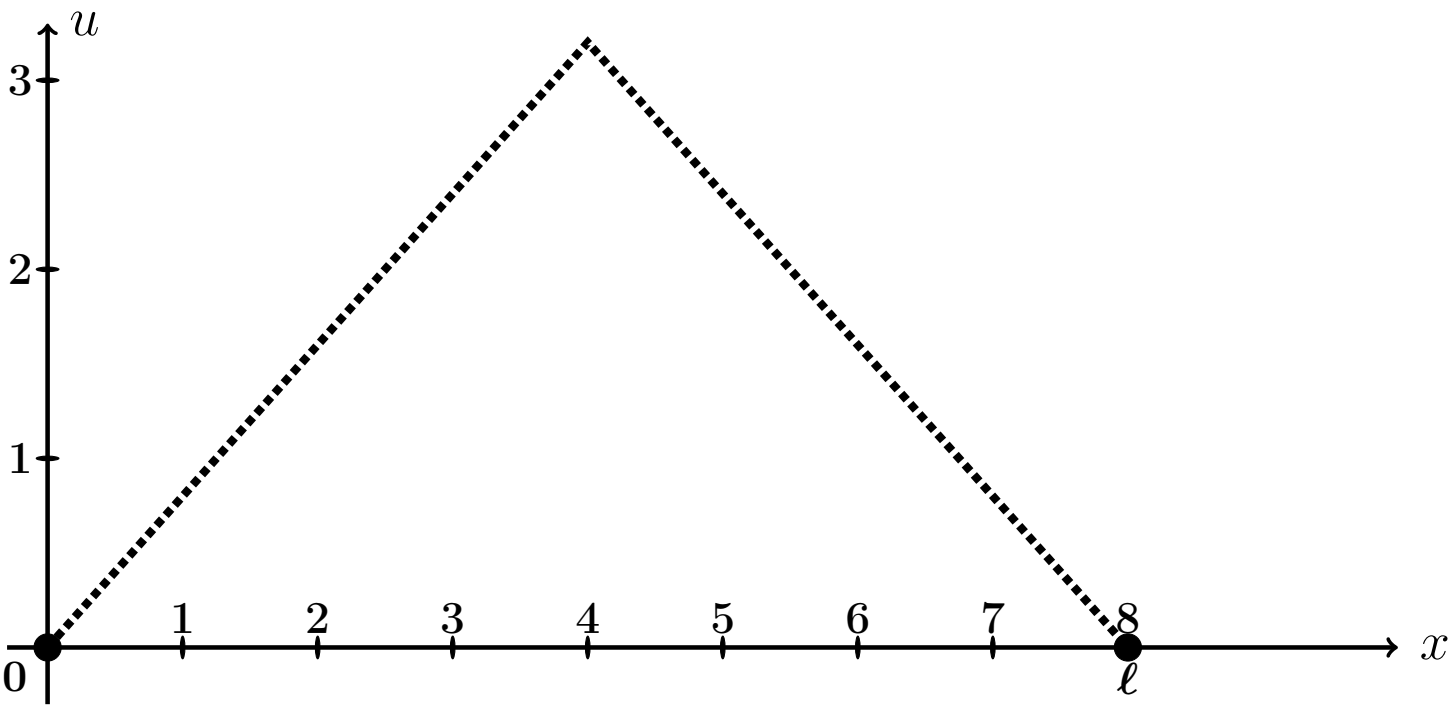


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (19.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (19.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 19.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 19.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 19.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 19.12, 19.13) формулы (19.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 19.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 19.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 19.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 19.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

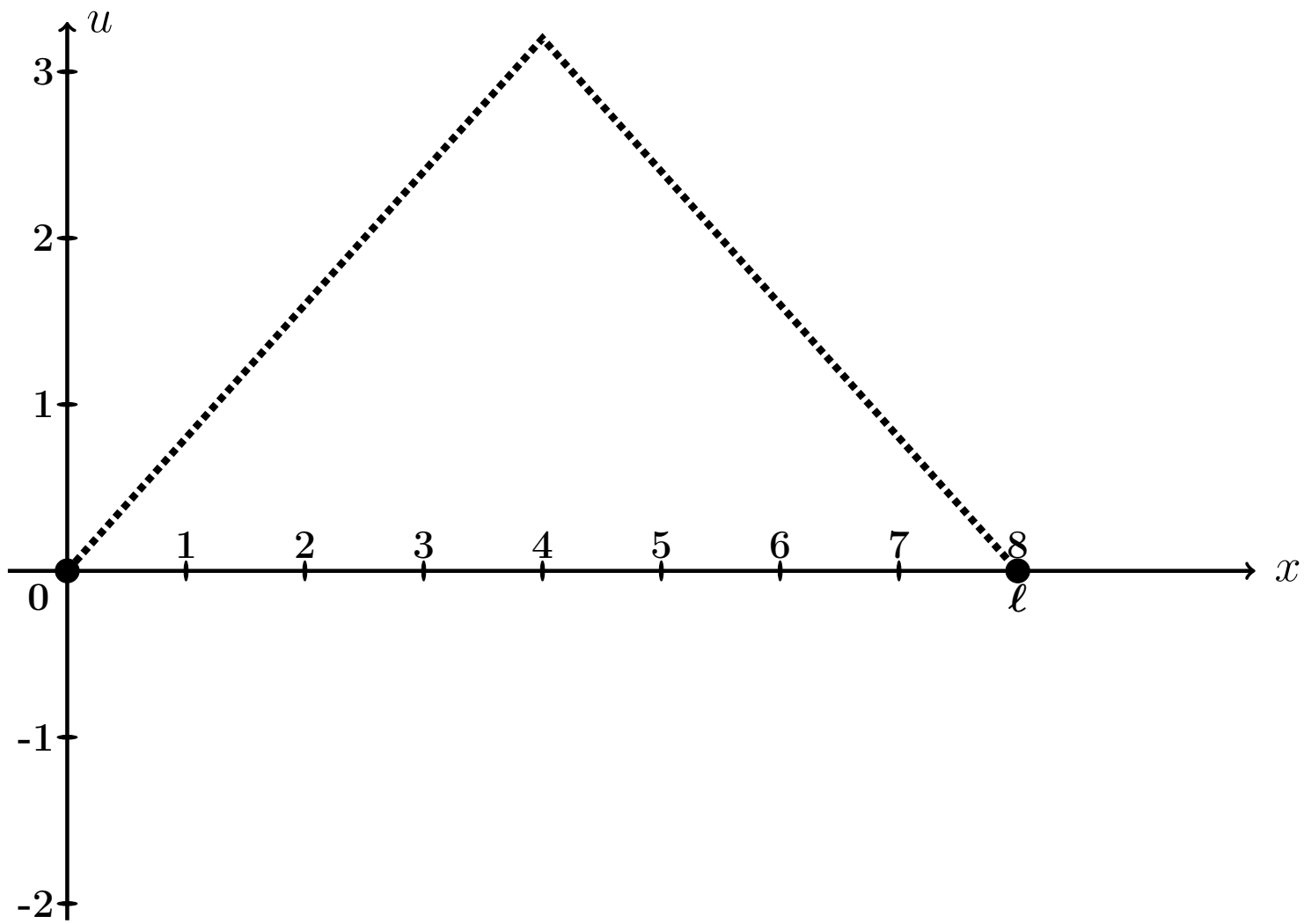


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (19.2).

Выборочная проверка вариант 19 задача 8 (по таблице 19.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 8 (по таблице 19.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 8 (по таблице 19.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 8 (по таблице 19.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{19.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.10)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.90)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(11.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{19.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{19.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

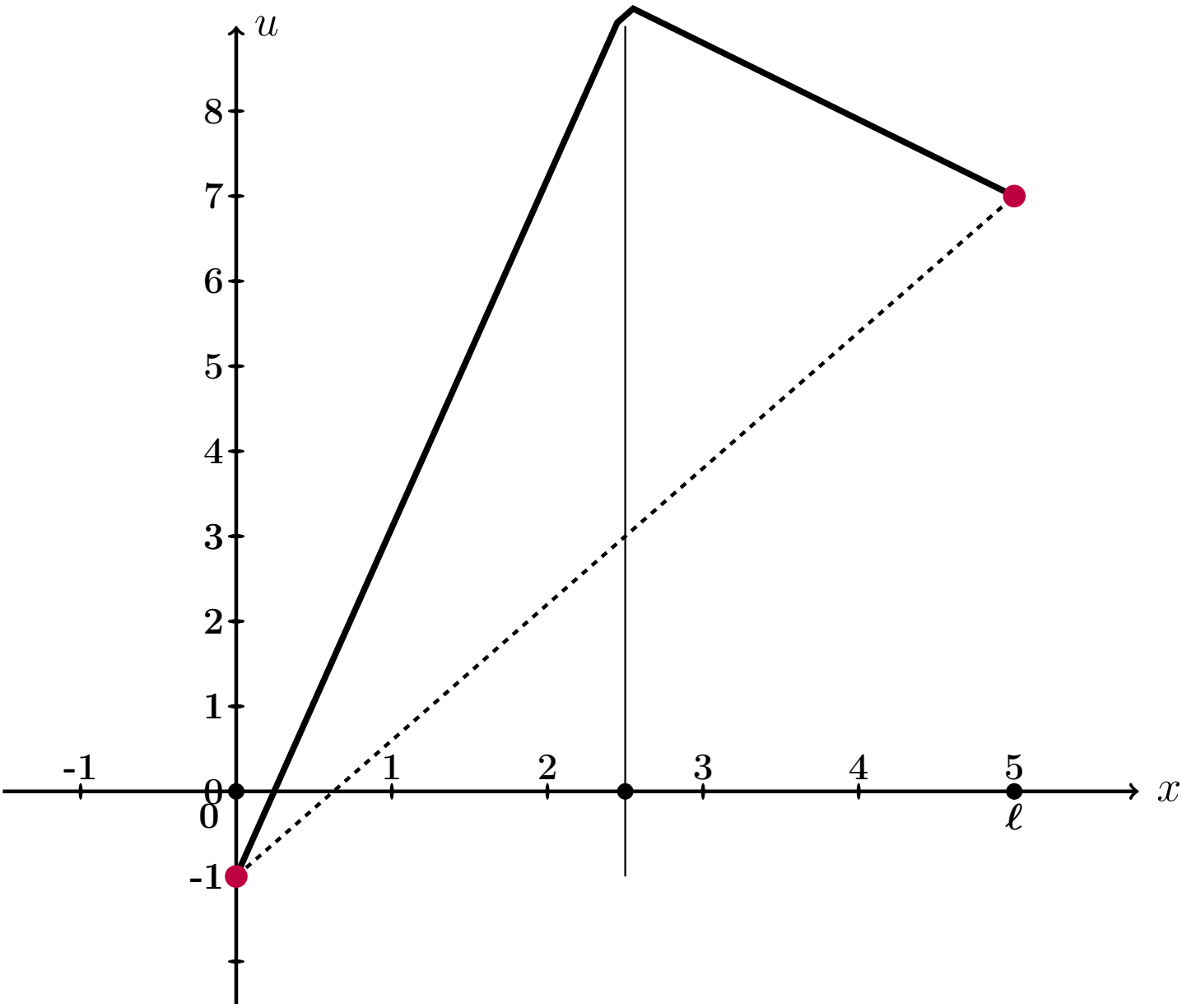


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (19.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (19.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (19.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{19.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{19.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (19.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (19.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{19.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{19.7}$$

Таблица 19.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (19.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (19.1) с начальным условием (19.2) и граничными условиями (19.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (19.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_5 = 7.0$ — значения граничных условий (19.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 19.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 19.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-1	1,05	3,1	5,15	7,2	9,25	8,8	8,35	7,9	7,45	7
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 19.16.

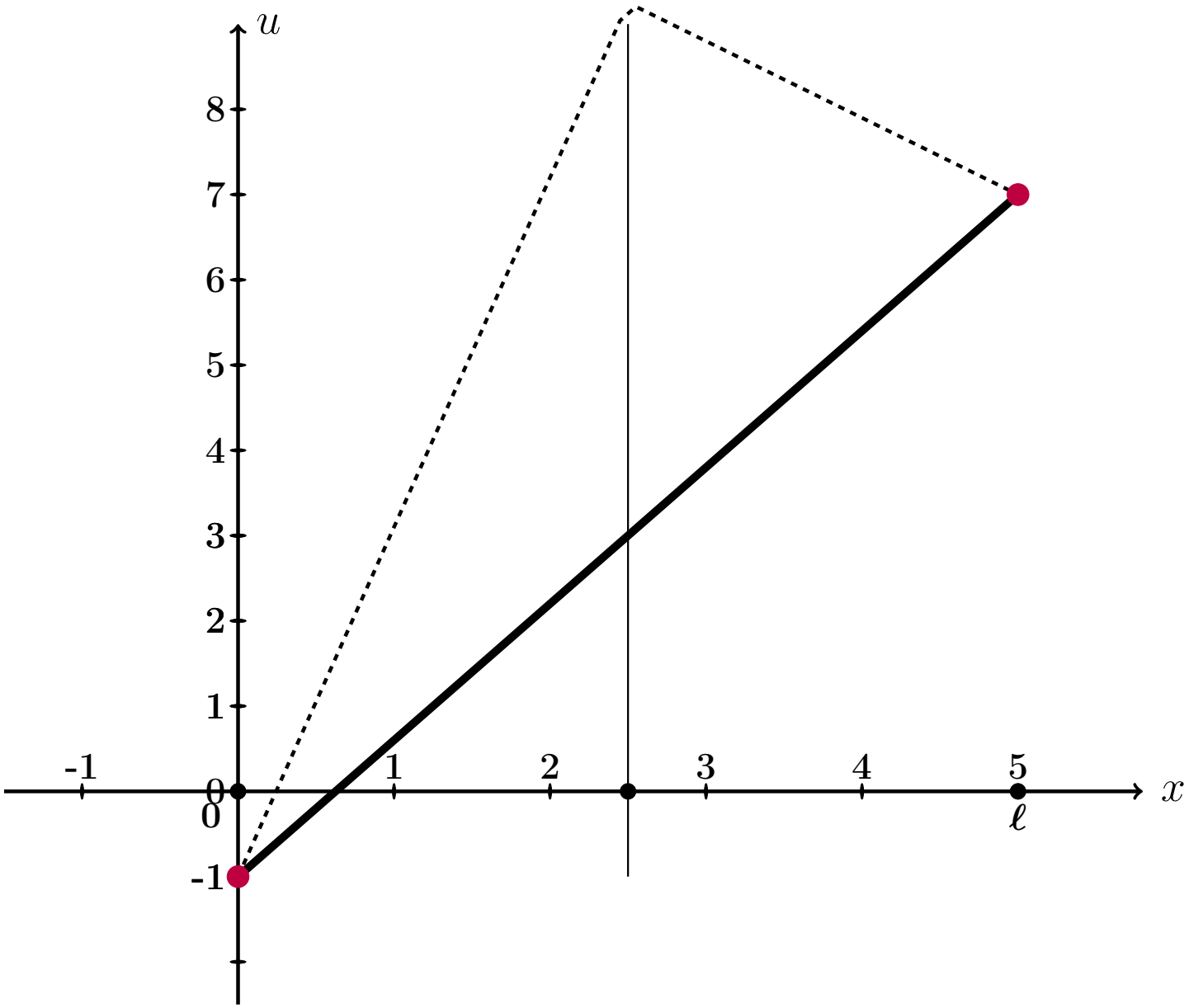


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (19.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (19.3).

Выборочная проверка вариант 19 задача 9 (по формулам (19.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 9 (по таблице 19.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 19 задача 9 (по таблице 19.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 20

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 3 \cdot x + 6$.

$$y = 3 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{6}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{6}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{6}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{6}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

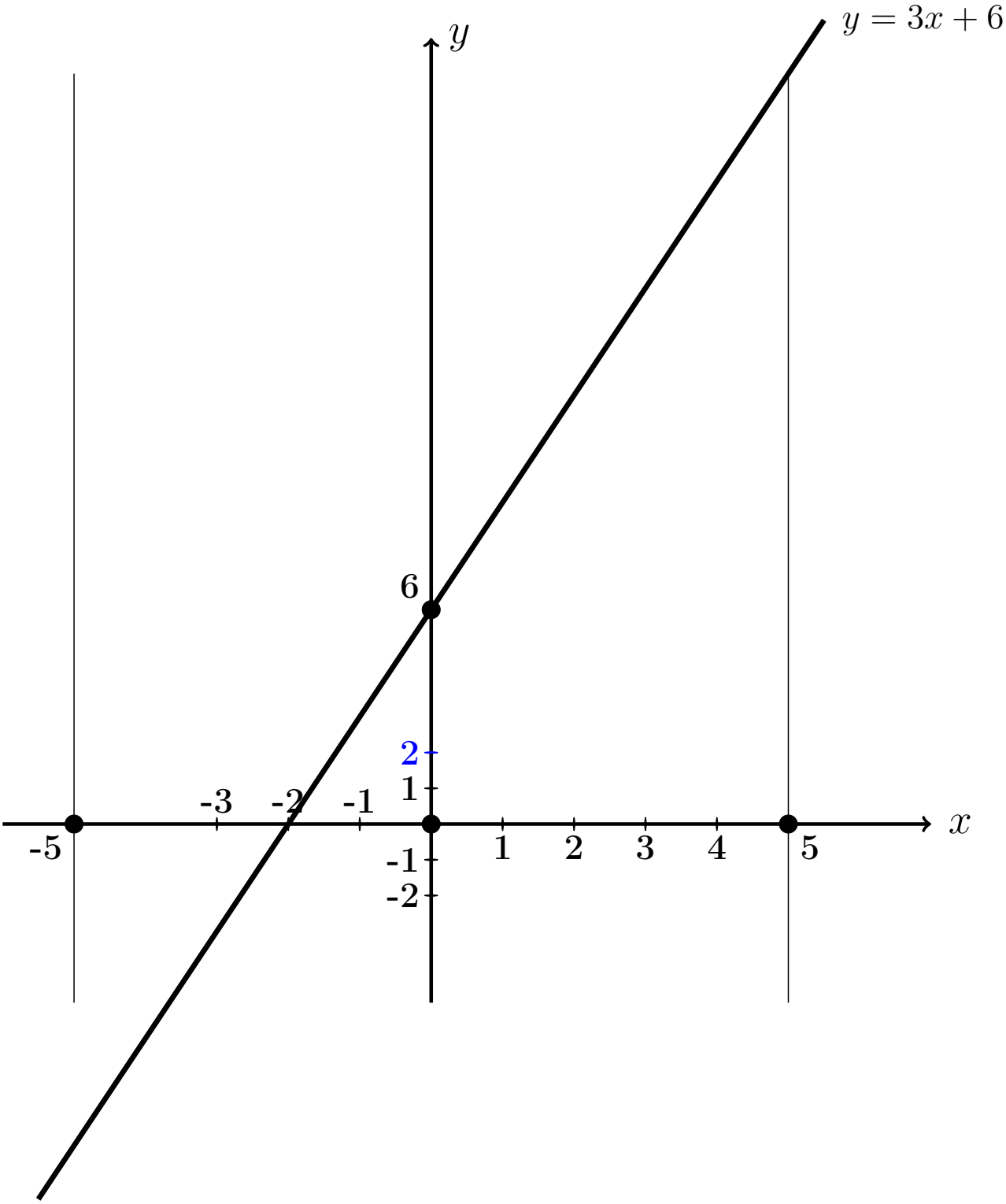
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 20.1 (Табулировка $y=3x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=3x+6$	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21
$y=S_1(x)$		*									
$y=S_2(x)$					*						
$y=S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 20.1



Выборочная проверка вариант 20 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 1 (по Таблице 20.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x^2 + 12\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=5} = 6\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (4x^2+12\sqrt{y})dx = 4\int x^2\,dx+12\int \sqrt{y}\,dx = \qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad = 6\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^2 + 2t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 2\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^2 + 2t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^2 + 2t)dt = \qquad\qquad = \qquad\qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 2\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

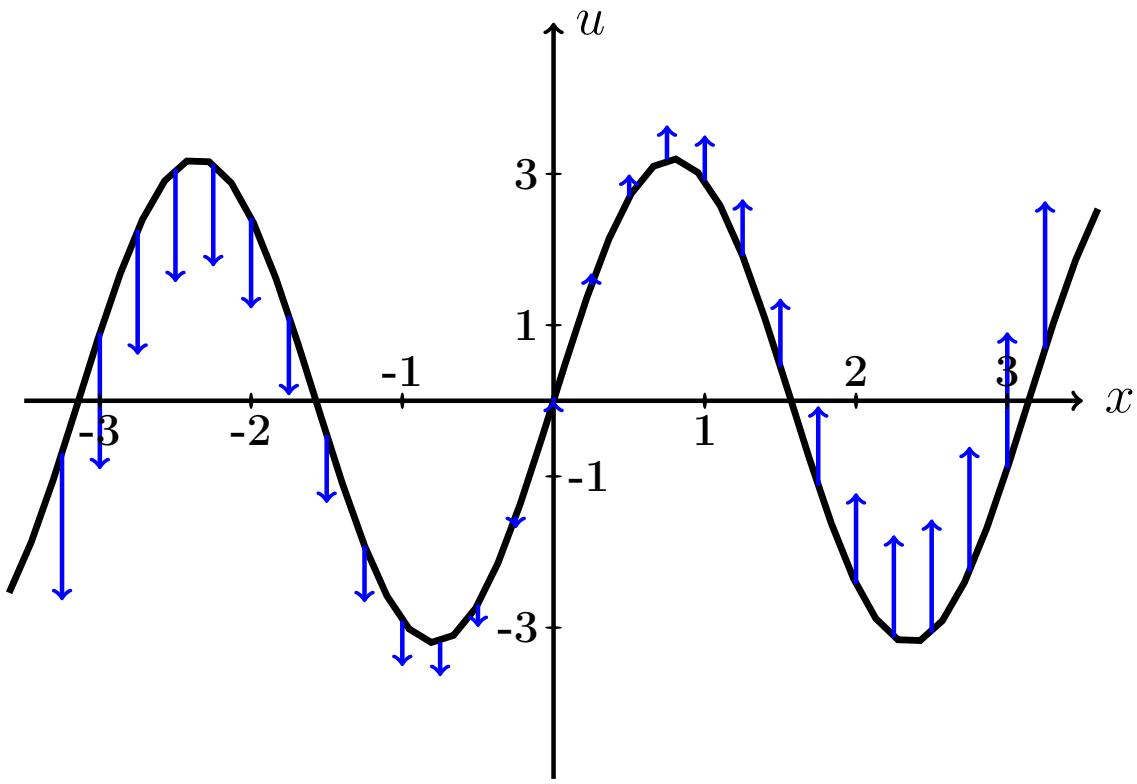


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 20.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 20 задача 4 (по Таблице 20.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 20.2.

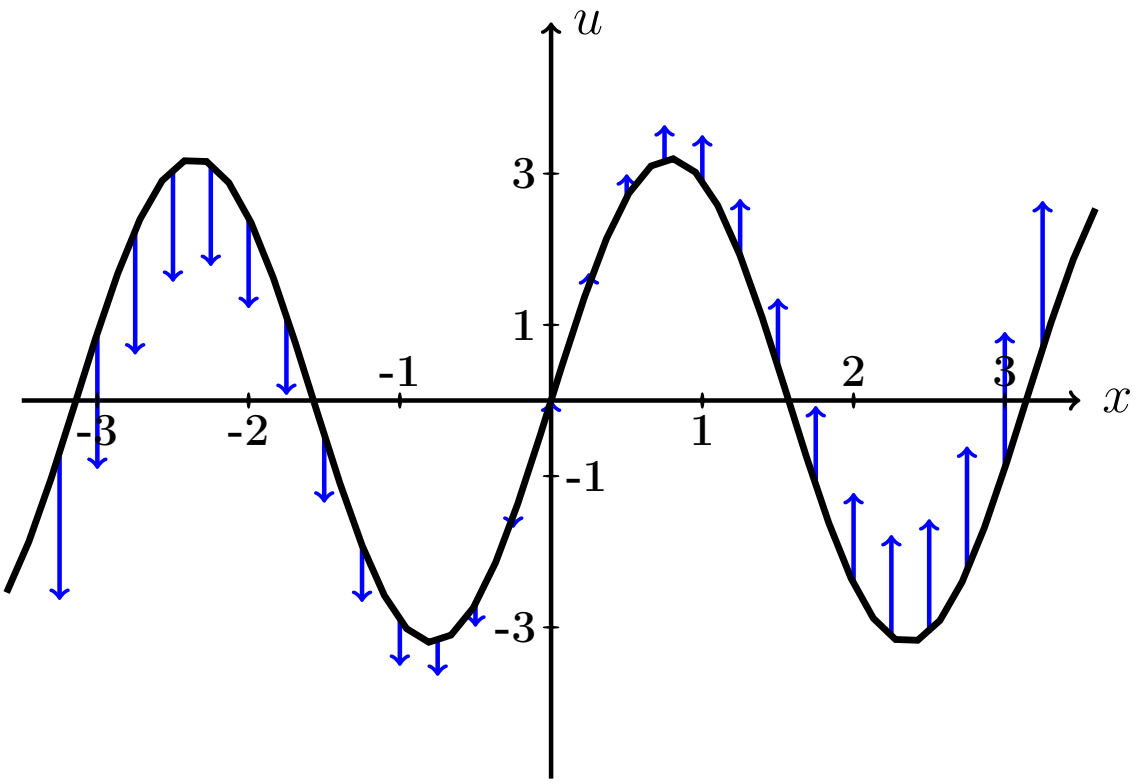


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

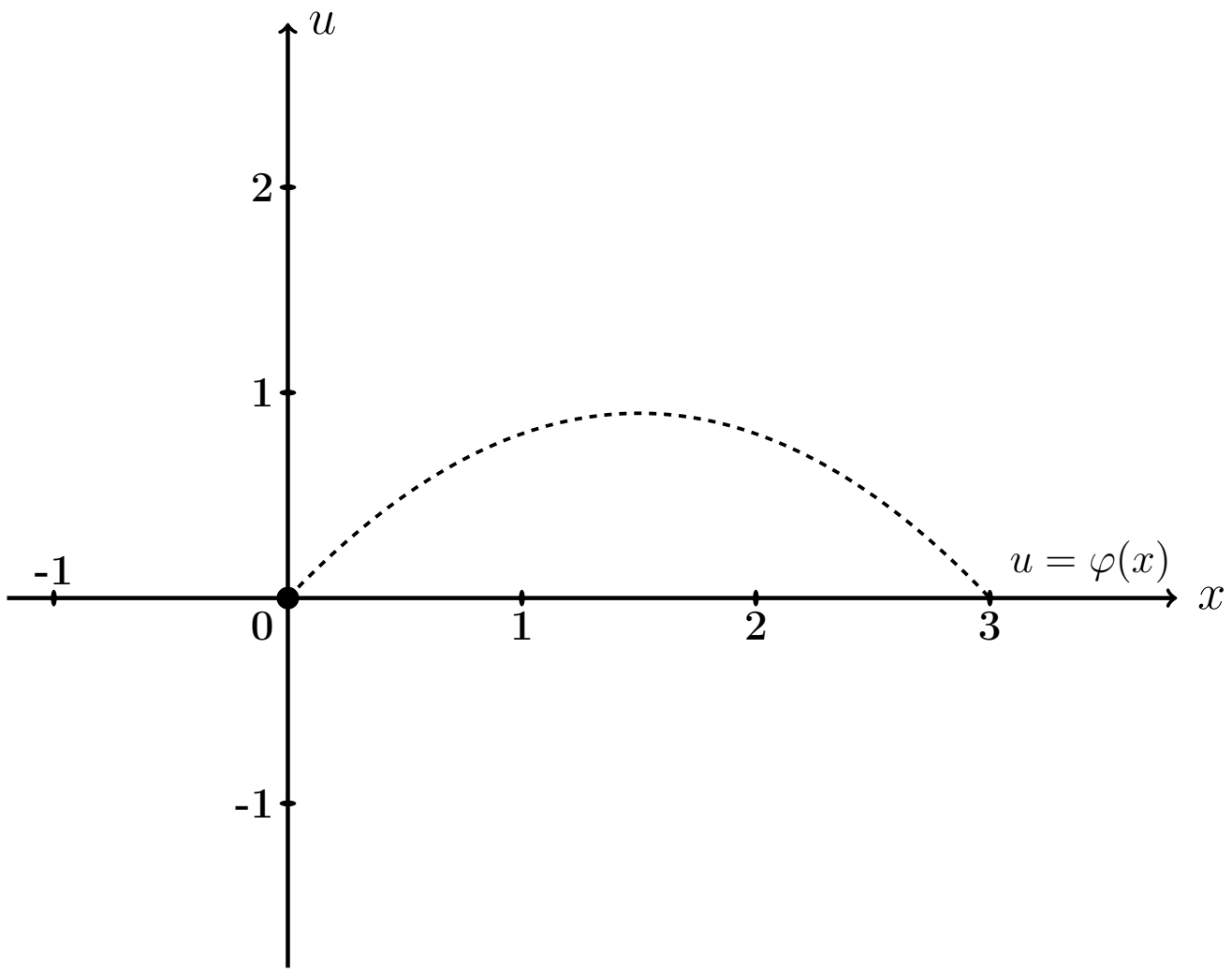


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 20.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 20.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 20.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 20.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 20 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 5 (красные клетки таб. 20.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 20.4.

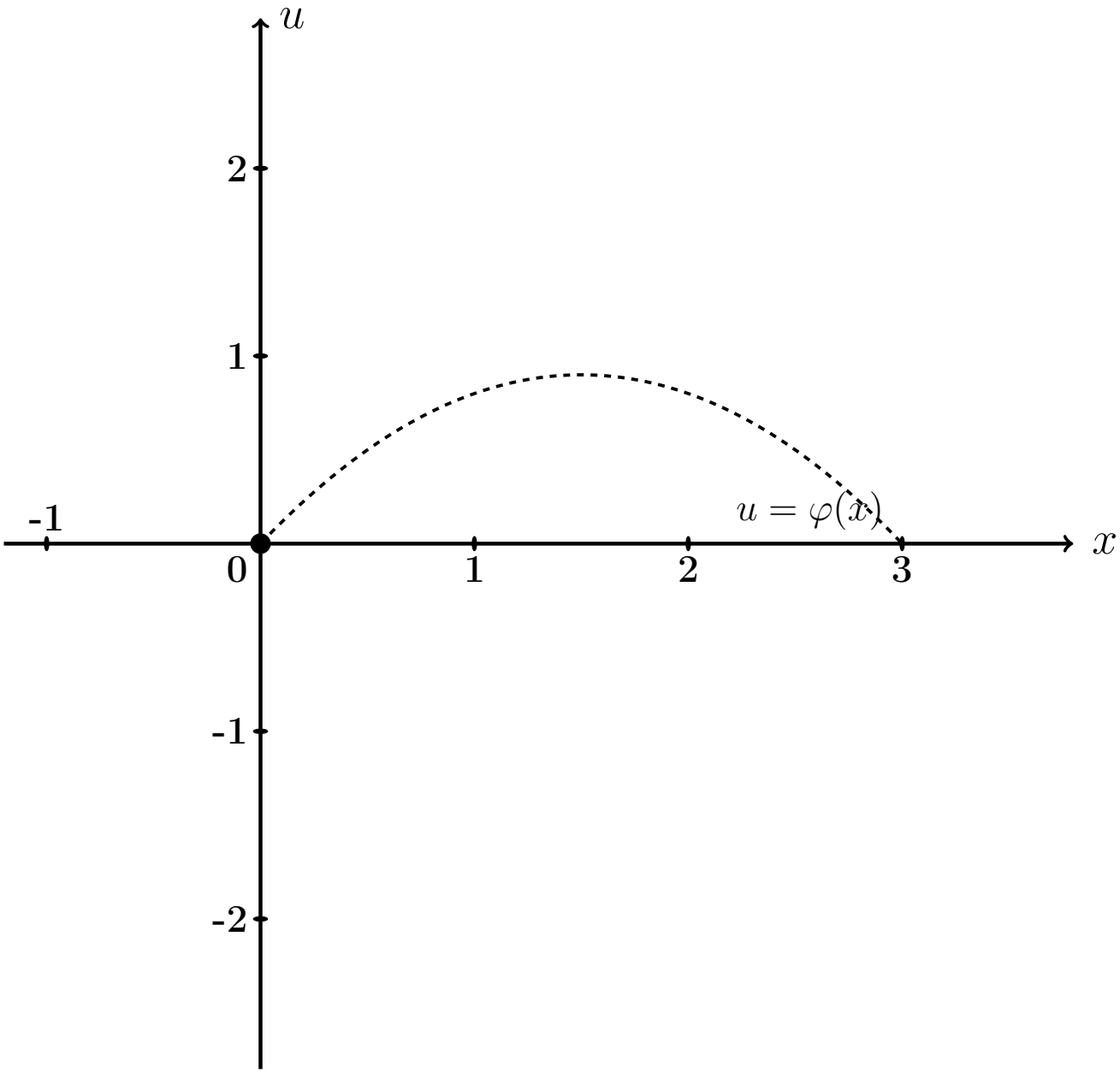


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

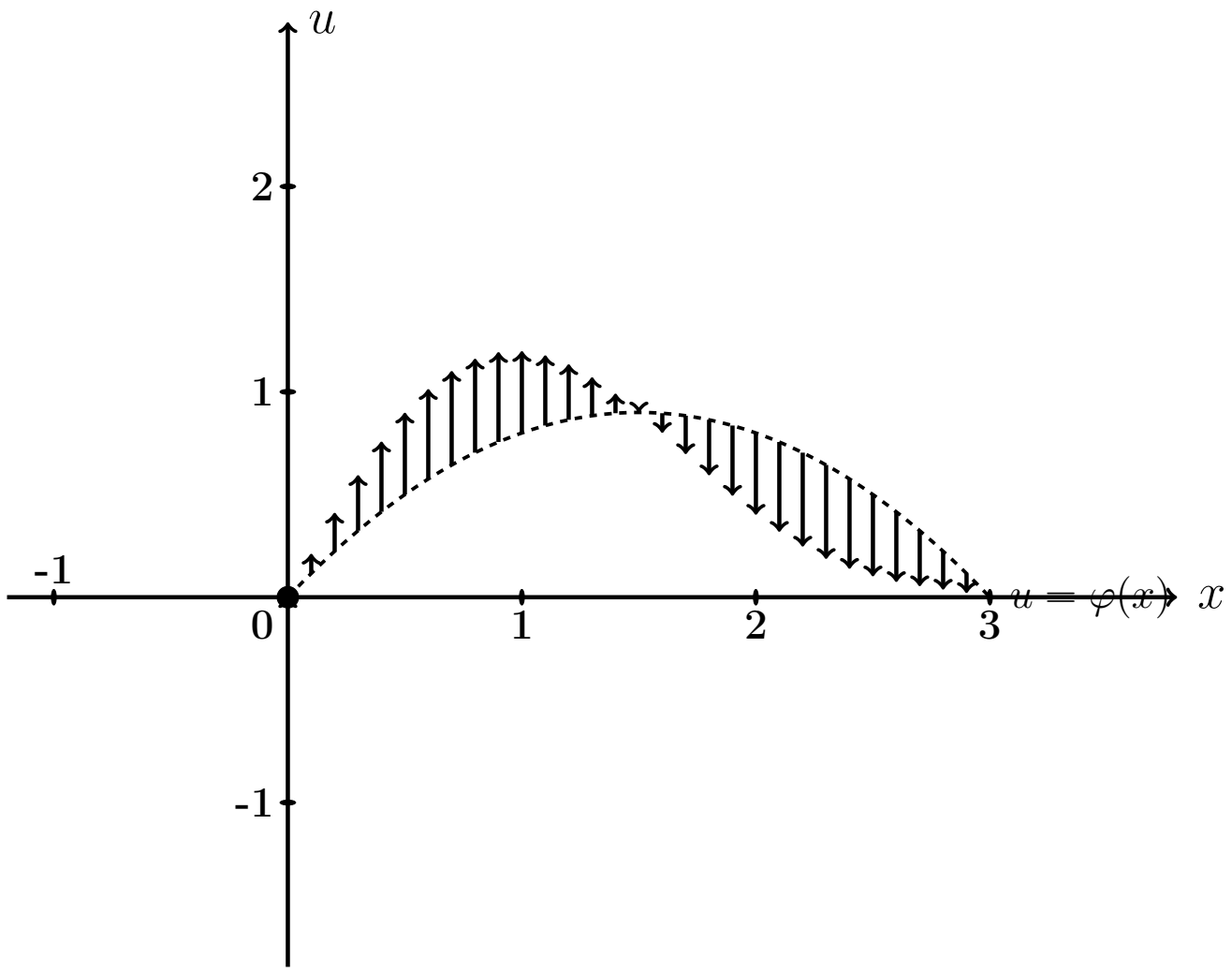


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 20.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.3\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.31$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 20.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 20.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 20.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 20 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 6 (красные клетки Таблицы 20.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 20.6.

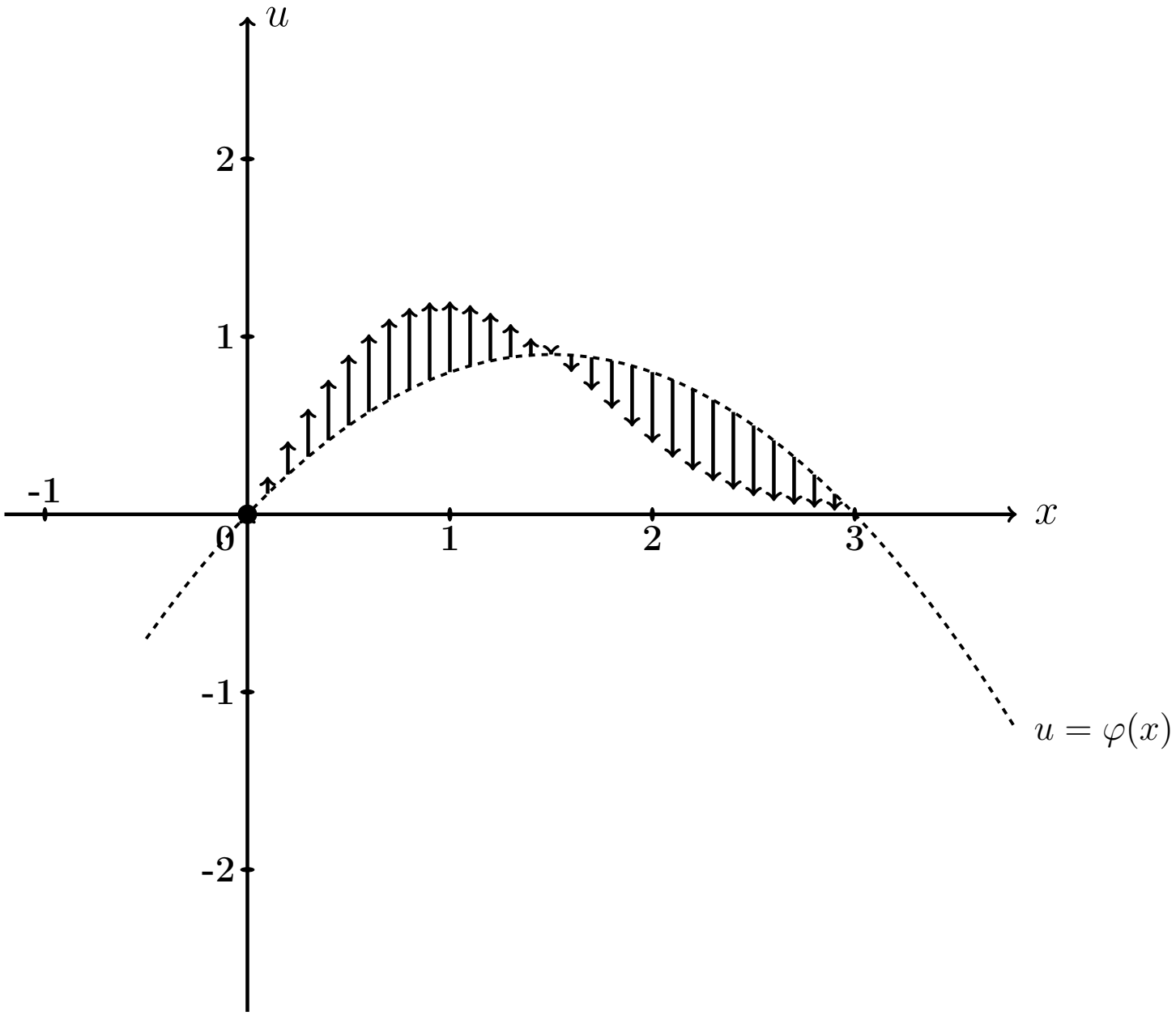


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.00 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 1.00 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{20.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{20.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (20.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{20.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (20.2), (20.3). Затабулировать решение уравнения (20.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (20.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (20.2), (20.3). Затабулировать решение уравнения (20.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (20.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 20.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{20.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (20.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{20.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (20.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (20.4) при граничных условиях (20.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{20.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{20.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{20.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (20.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (20.9). Следовательно, по формуле (20.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{20.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{20.11}$$

Шаг 6.

Таблица 20.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 20.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (20.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 20.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 20.9

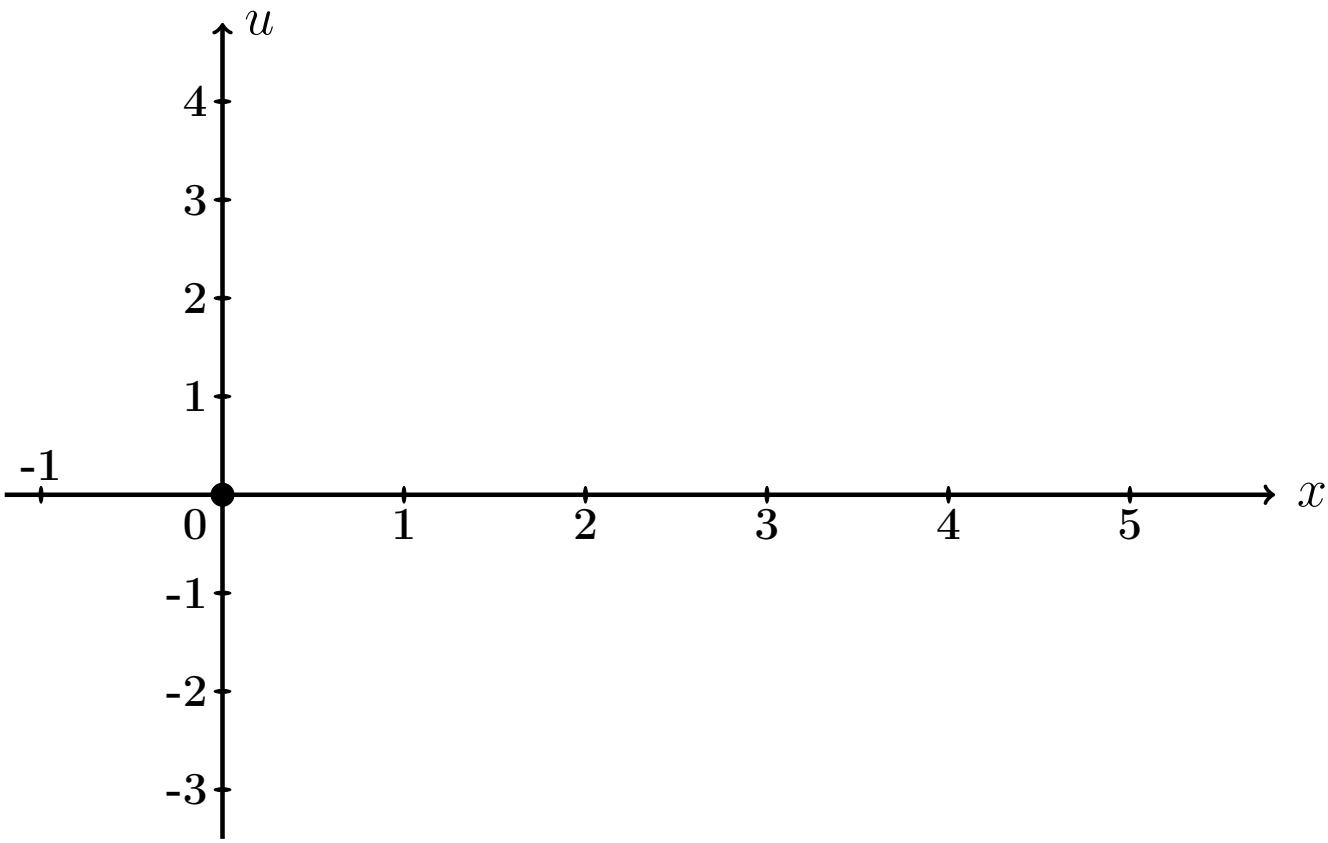


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 20 задача 7 (по Таб. 20.7, 20.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 20 задача 7 (по таблице 20.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (20.6) и (20.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (20.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (20.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (20.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (20.9). Следовательно, по формуле (20.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (20.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (20.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (20.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 20.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (20.5),

$C_1' =$ по формуле (20.12)

и $C_3 =$ по таблице 20.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 20.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2	1,5	1	0,5	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

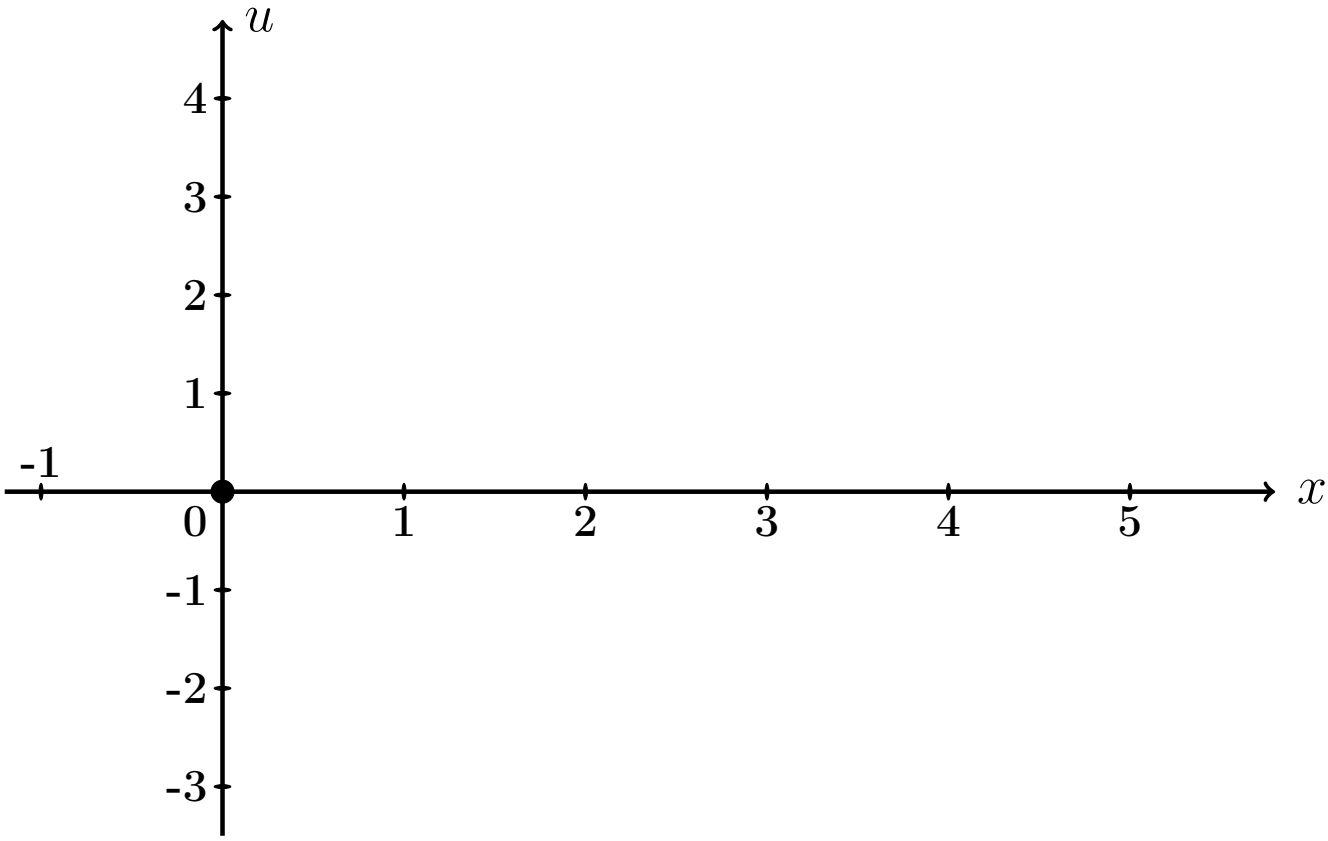


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 20 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (20.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 20 задача 7 (по таблице 20.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{20.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (20.1). Затабулировать решение уравнения (20.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

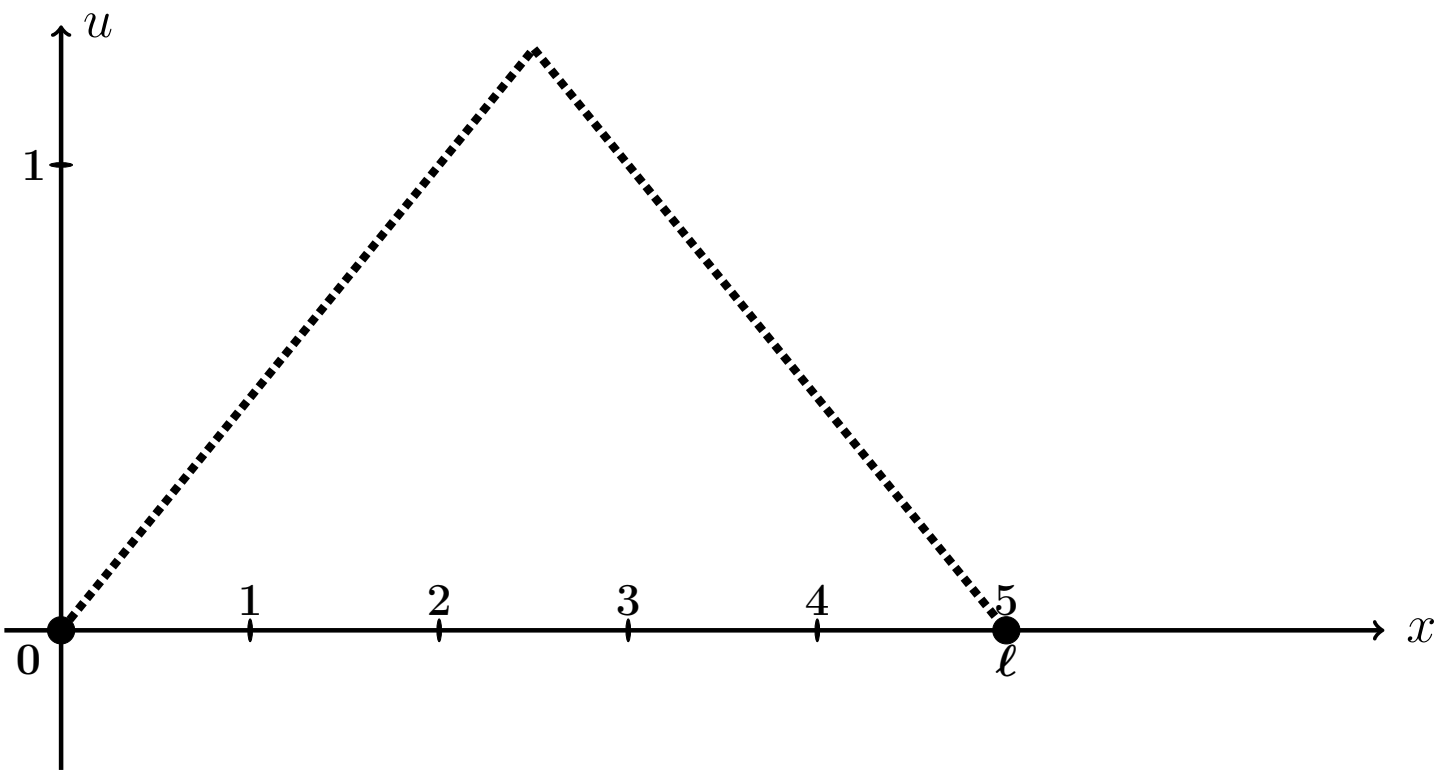


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (20.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (20.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 20.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 20.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 20.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 20.12, 20.13) формулы (20.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 20.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 20.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 20.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 20.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

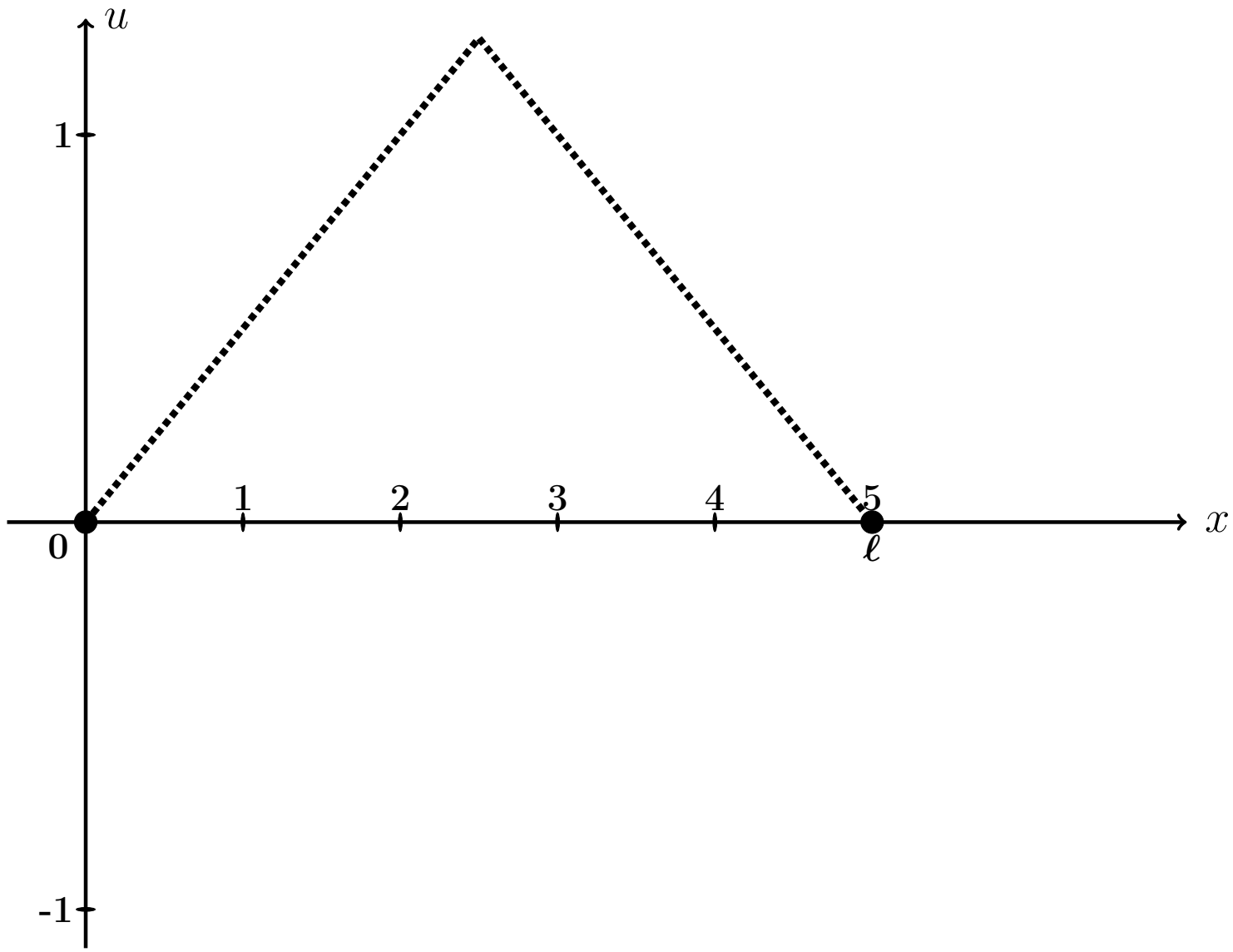


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (20.2).

Выборочная проверка вариант 20 задача 8 (по таблице 20.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 8 (по таблице 20.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 8 (по таблице 20.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 8 (по таблице 20.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.25)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.25)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(6.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{20.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{20.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

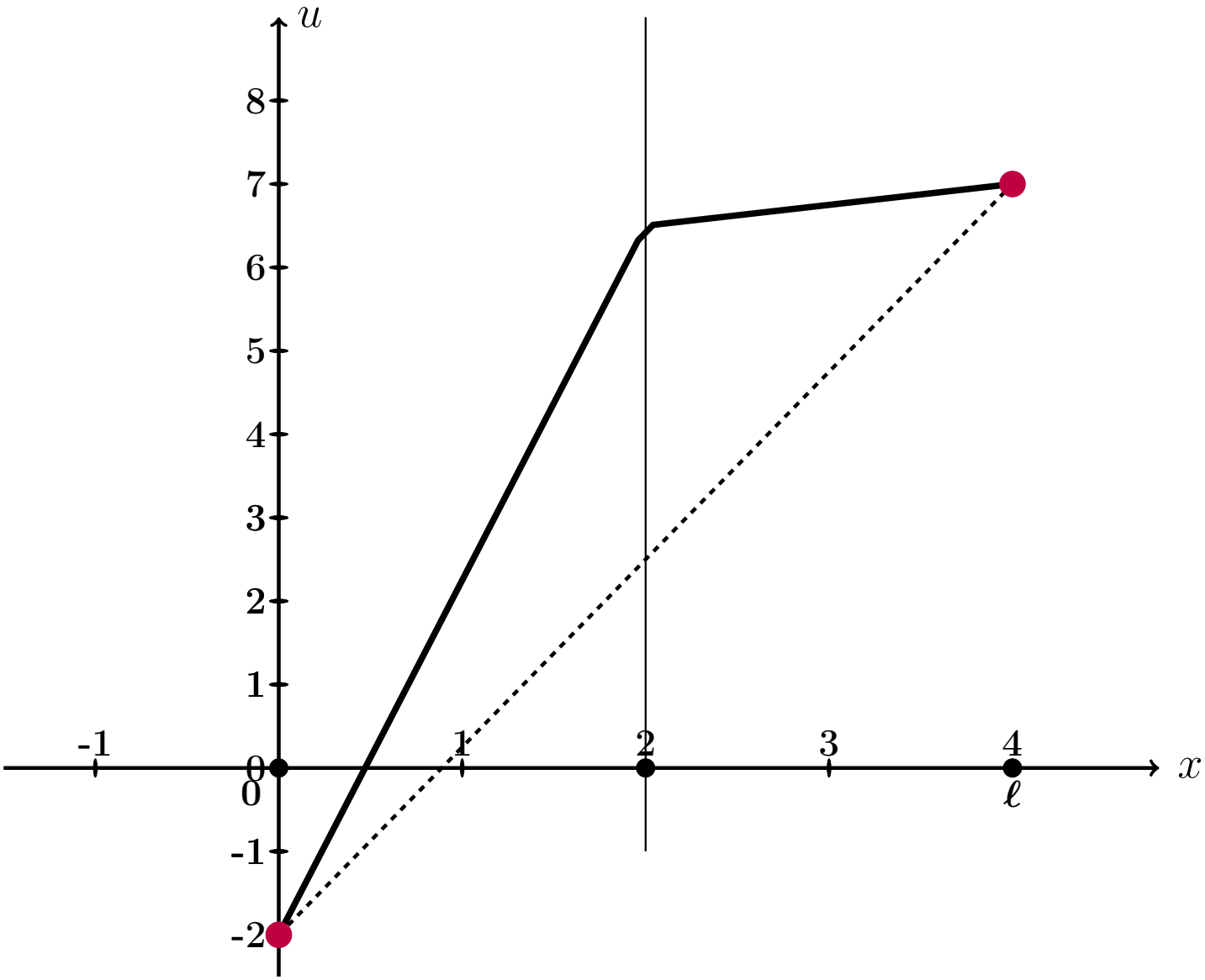


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (20.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (20.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (20.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{20.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{20.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (20.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (20.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{20.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{20.7}$$

Таблица 20.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (20.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (20.1) с начальным условием (20.2) и граничными условиями (20.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (20.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_4 = 7.0$ — значения граничных условий (20.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 20.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 20.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}3$	1,4	3,1	4,8	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
$u(x,0)$	-2	$*$									
$u(x,1)$	-2				$*$						
$u(x,2)$	-2									$*$	

Шаг 8. Графики по Таблице 20.16.

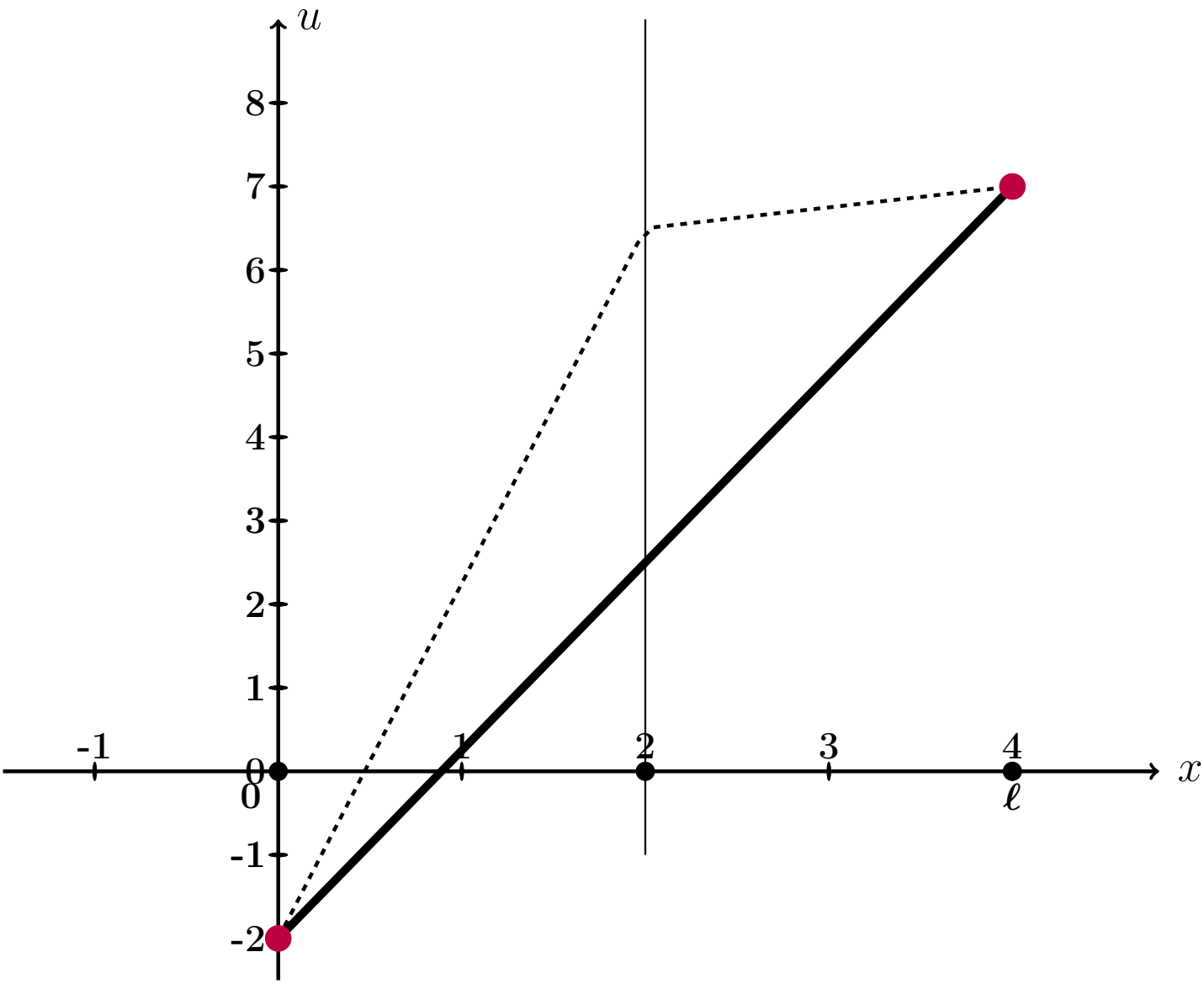


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (20.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (20.3).

Выборочная проверка вариант 20 задача 9 (по формулам (20.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 9 (по таблице 20.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 20 задача 9 (по таблице 20.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 21

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 4 \cdot x + 5$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 4 \cdot x + 5$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 4 \cdot x + 5$.

$$y = 4 \cdot x + 5 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 5)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+5)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{5}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{5}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+5)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{5}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{5}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$4\cdot x+5=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

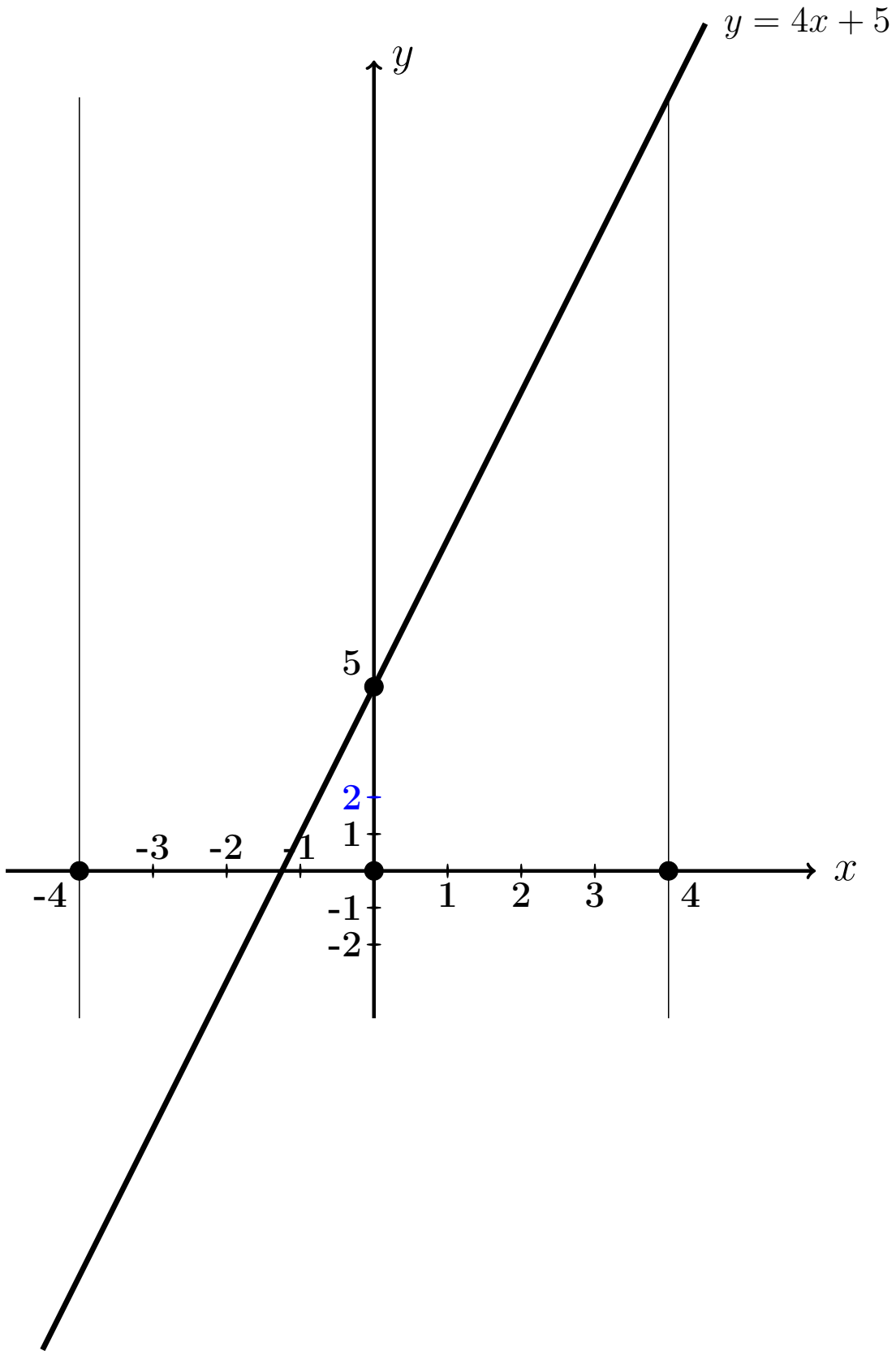
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 21.1 (Табулировка $y=4x+5$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=4x+5$	-11	-7	-3	1	5	9	13	17	21
$y=S_1(x)$		*							
$y=S_2(x)$					*				
$y=S_3(x)$								*	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 21.1



Выборочная проверка вариант 21 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 1 (по Таблице 21.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sin x + 18y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=2} = 9\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (6\sin x + 18y^3)dx = 6\int \sin x\,dx + 18\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 9\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x + 3t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 6x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x + 3t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x + 3t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 6x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 21 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

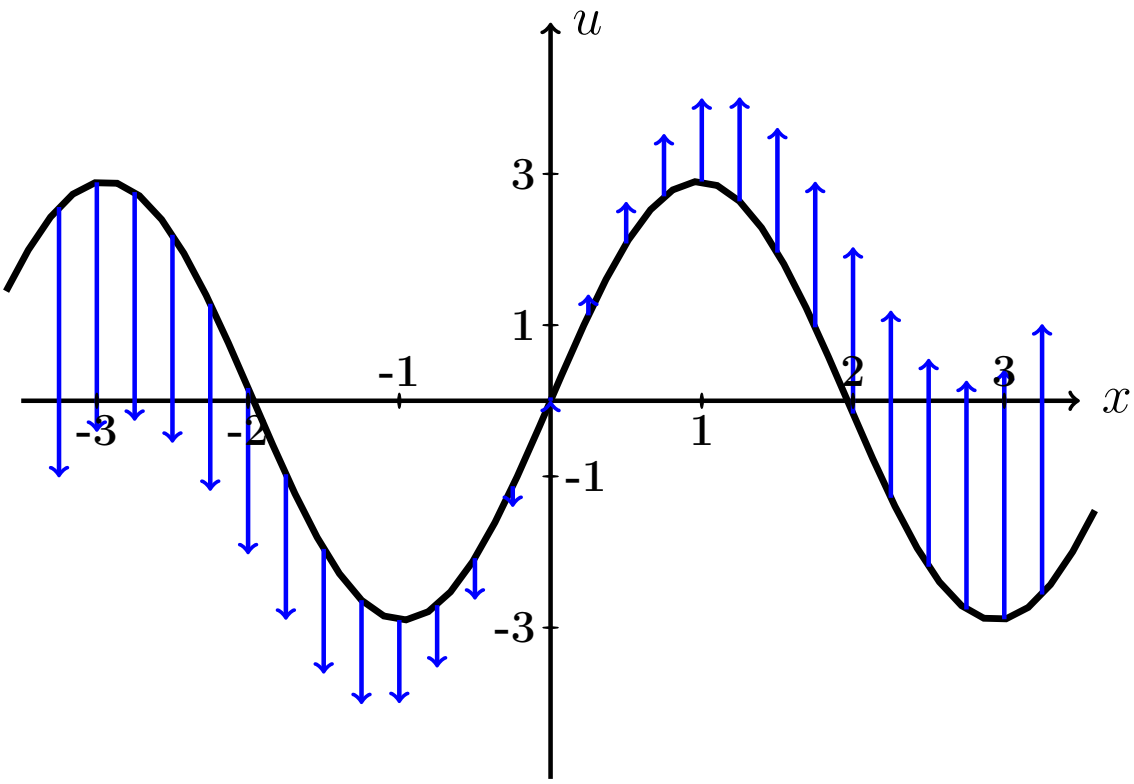


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 21.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 21 задача 4 (по Таблице 21.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 21.2.

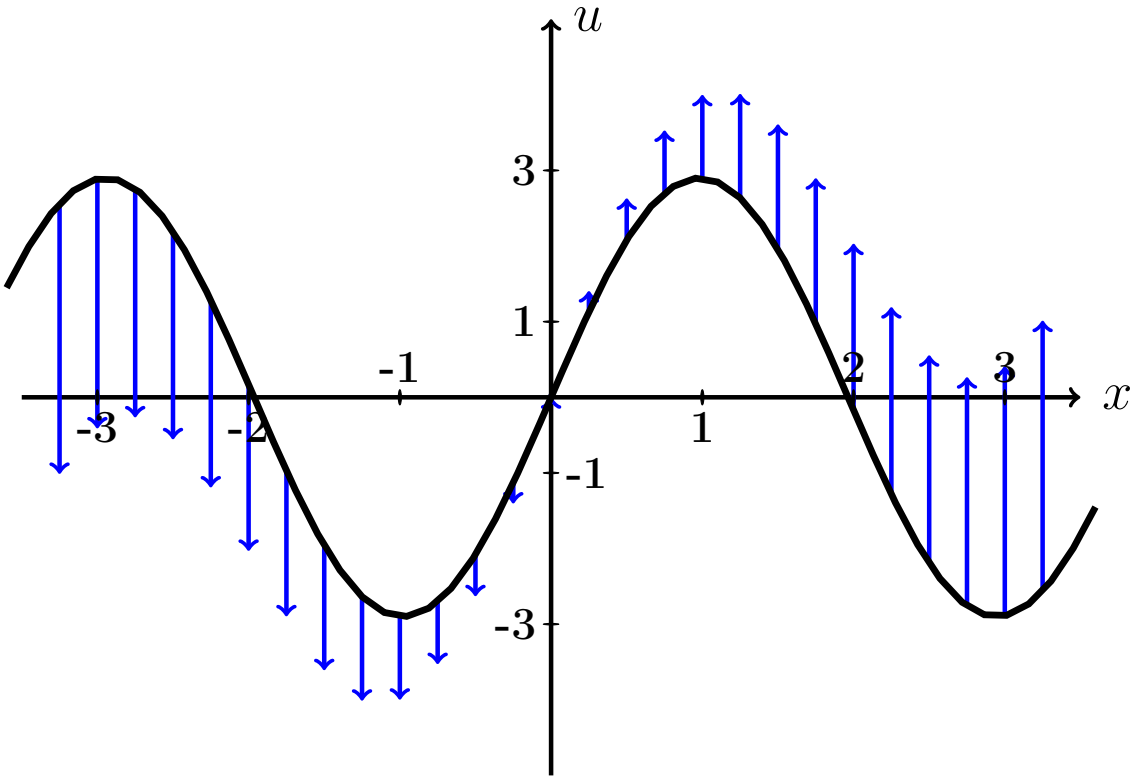


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

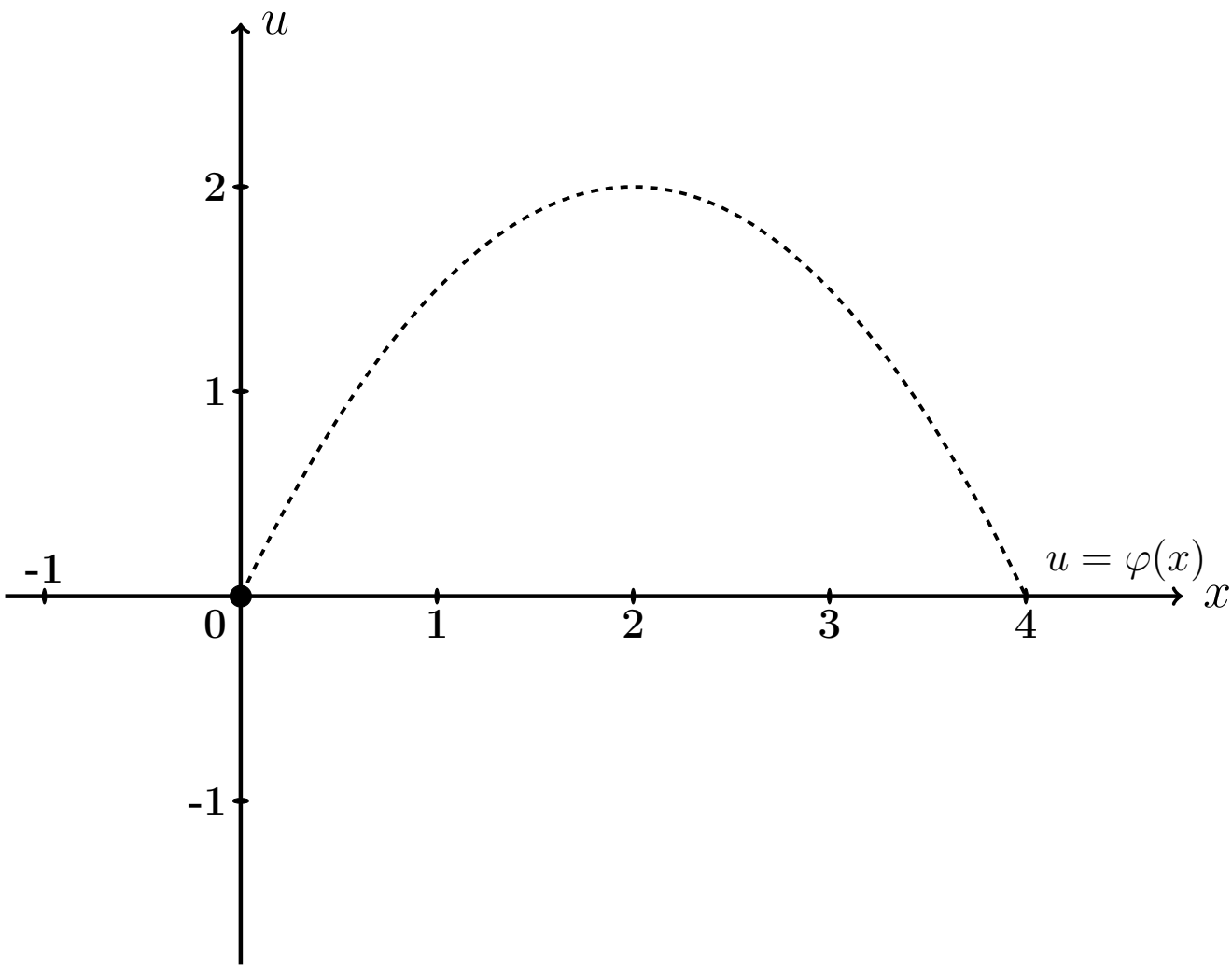


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 21.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 21.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 21.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 21.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 21 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 5 (красные клетки таб. 21.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 21.4.

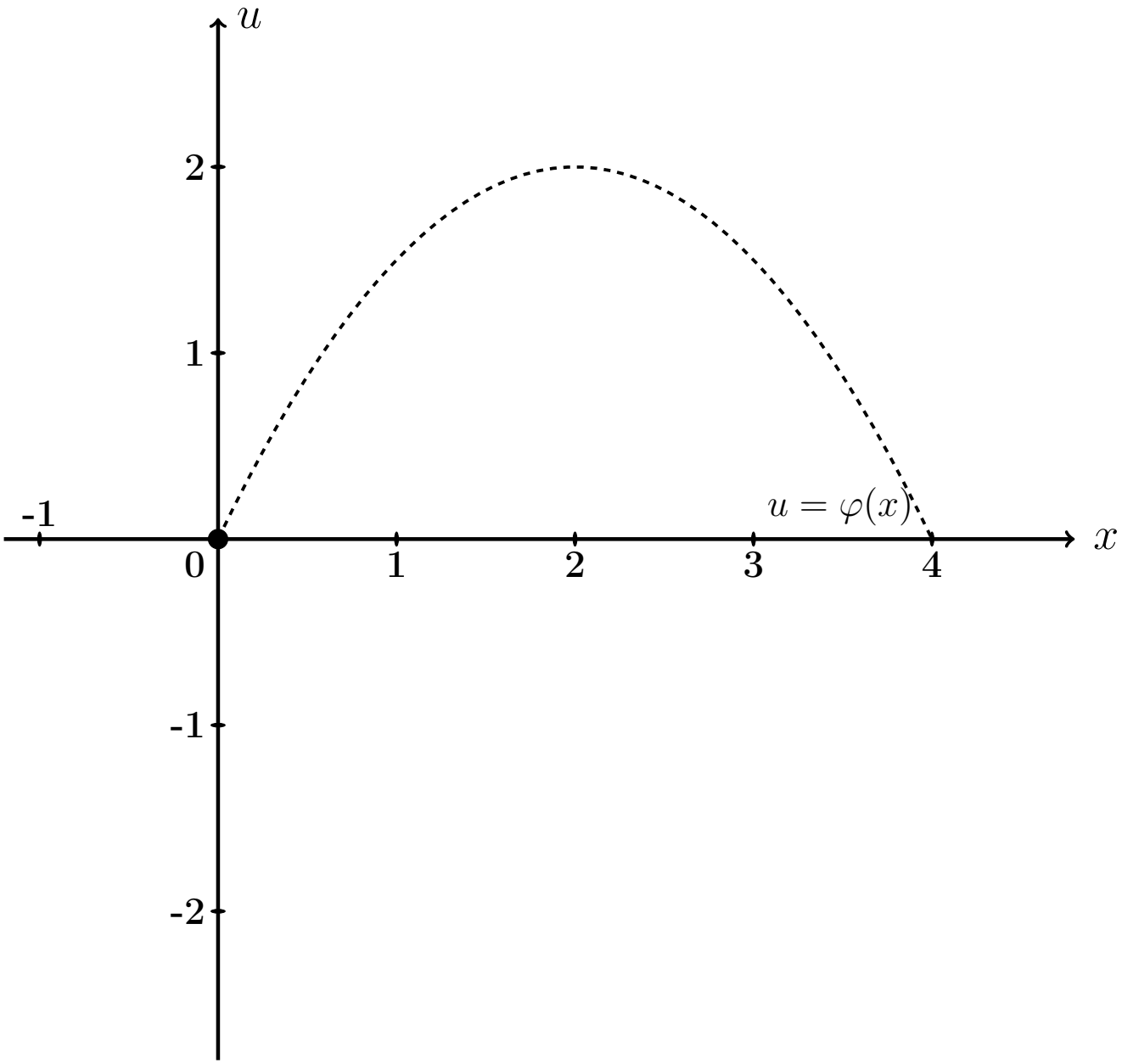


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

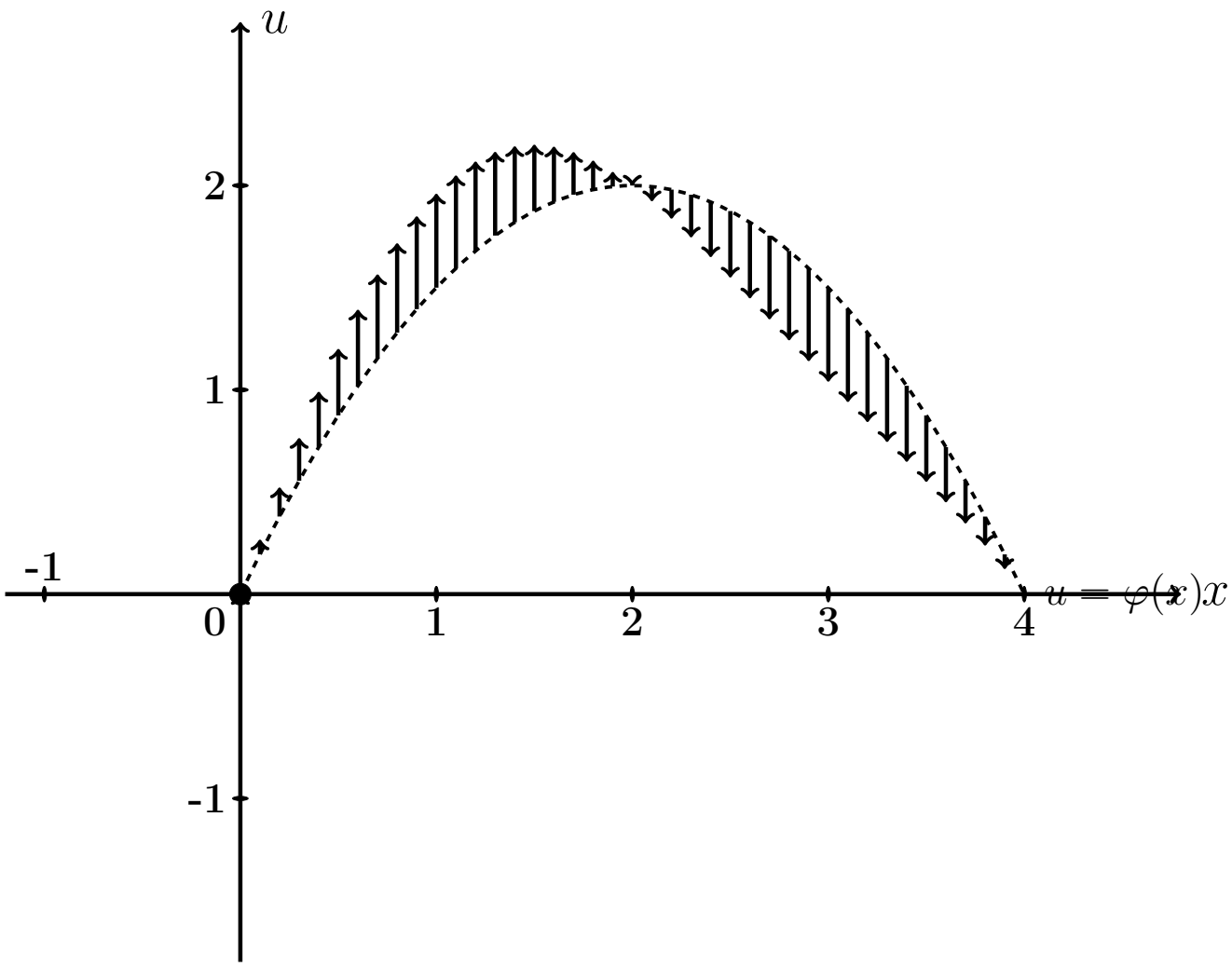


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 21.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.40$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 21.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 21.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 21.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 21 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 6 (красные клетки Таблицы 21.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 21.6.

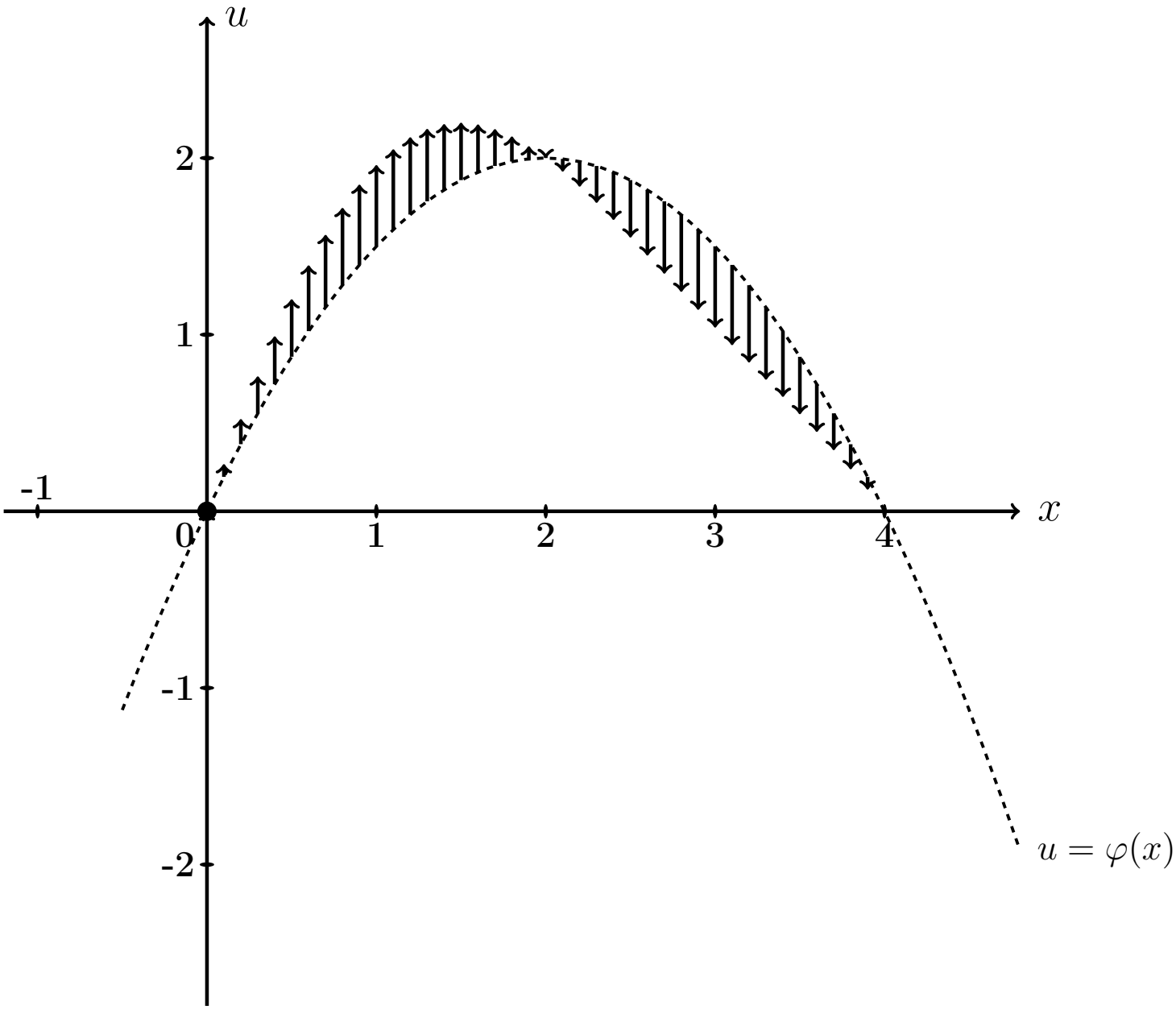


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.40 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 1.40 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{21.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{21.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (21.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{21.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (21.2), (21.3). Затабулировать решение уравнения (21.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (21.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (21.2), (21.3). Затабулировать решение уравнения (21.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (21.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 21.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (21.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{21.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (21.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (21.4) при граничных условиях (21.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{21.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{21.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{21.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (21.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (21.9). Следовательно, по формуле (21.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{21.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{21.11}$$

Шаг 6.

Таблица 21.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 21.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (21.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 21.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 21.9

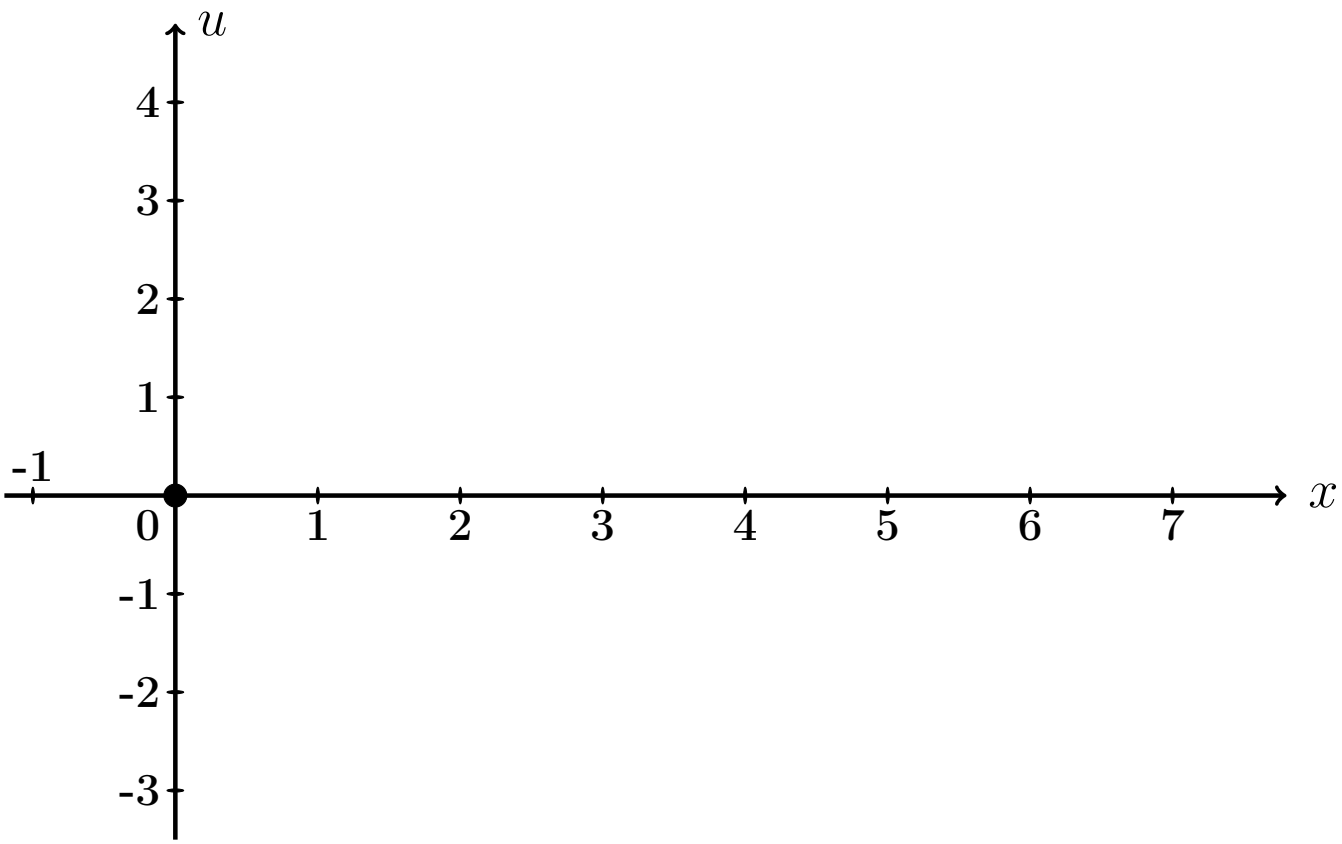


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 21 задача 7 (по Таб. 21.7, 21.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 21 задача 7 (по таблице 21.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (21.6) и (21.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (21.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (21.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (21.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (21.9). Следовательно, по формуле (21.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (21.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (21.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (21.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 21.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (21.5),

$C_1' =$ по формуле (21.12)

и $C_3 =$ по таблице 21.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 21.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,98	1,96	2,94	3,92	4,9	3,92	2,94	1,96	0,98	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

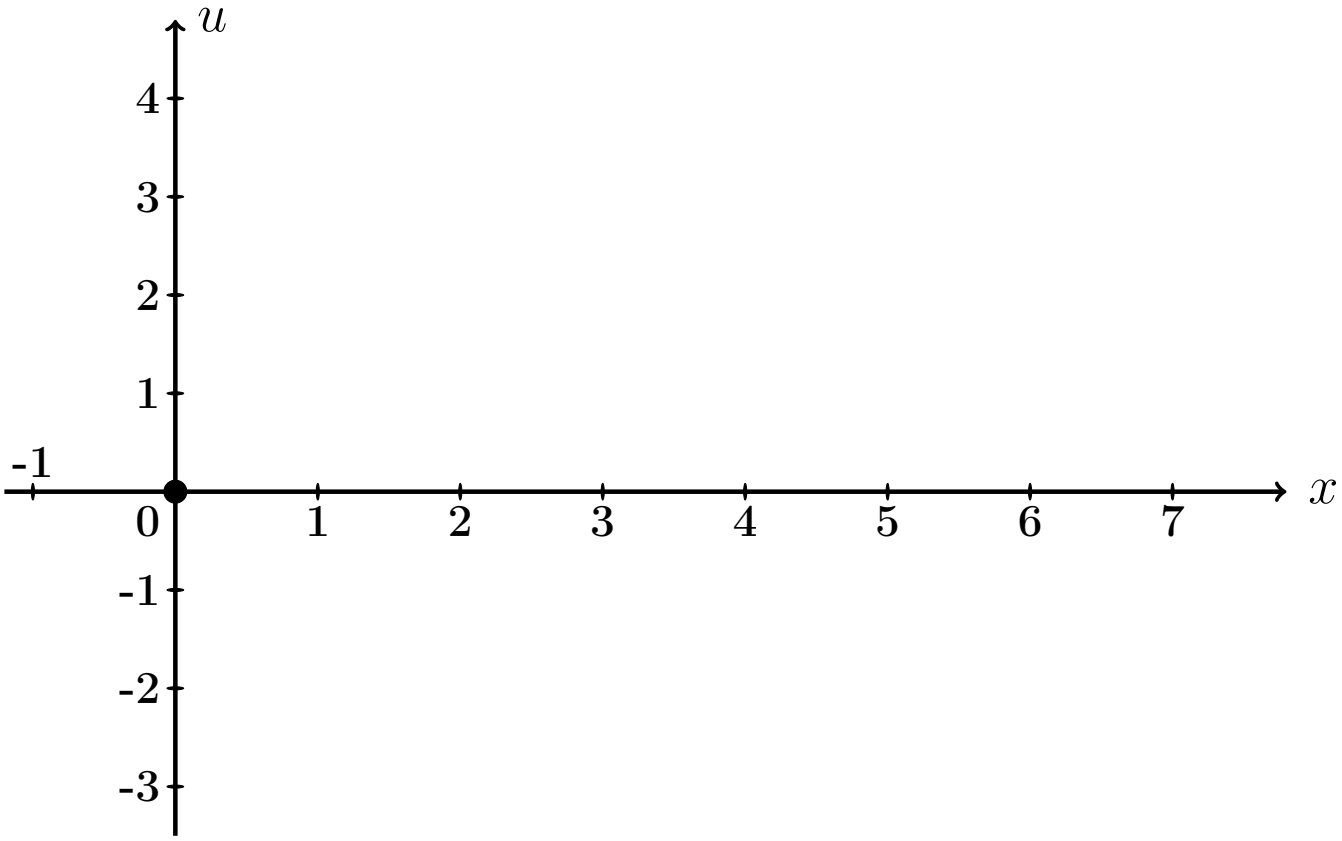


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 21 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (21.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 21 задача 7 (по таблице 21.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{21.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (21.1). Затабулировать решение уравнения (21.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

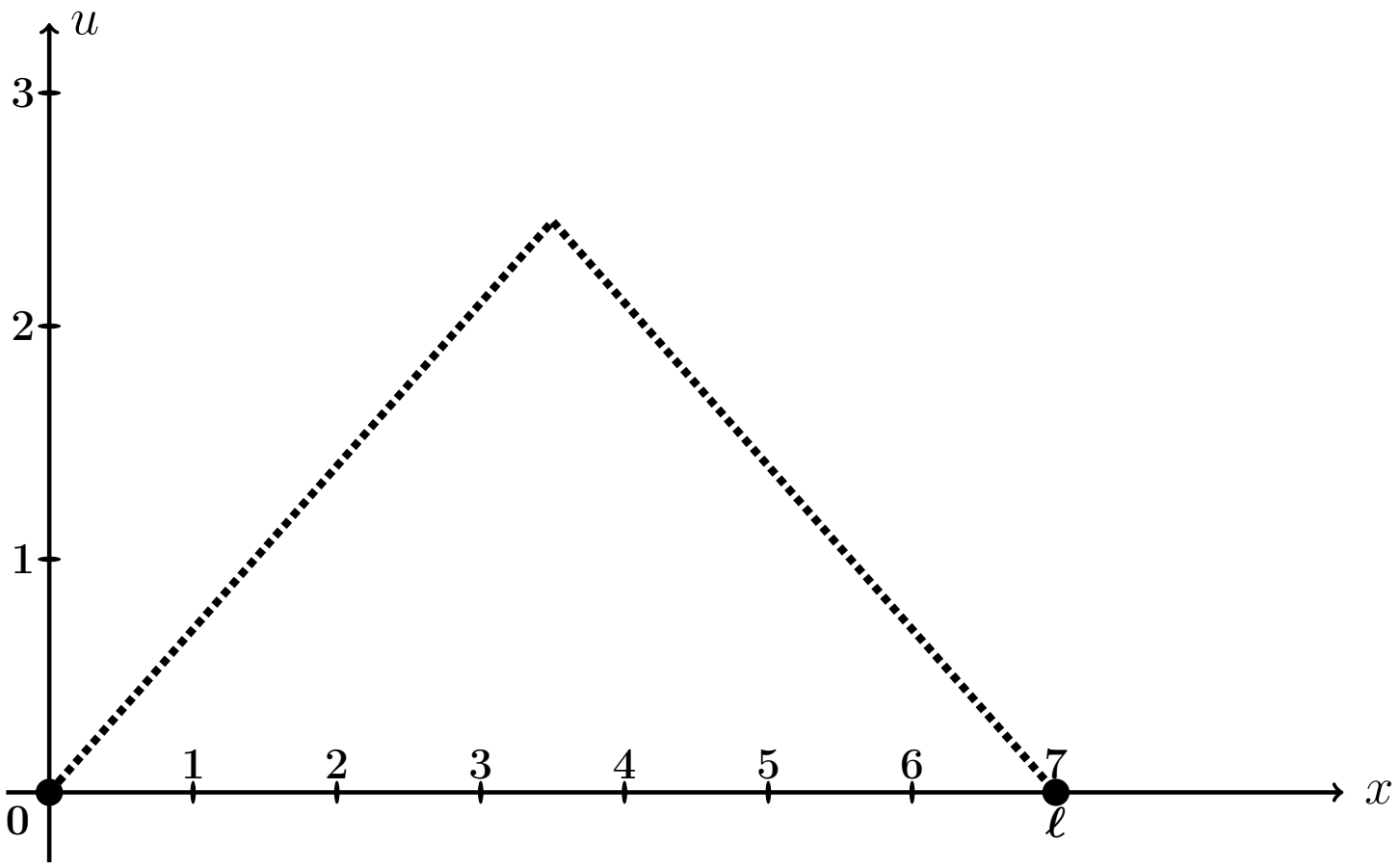


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (21.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \qquad (21.3)$$

где $\ell = 7$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 21.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 21.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 21.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 21.12, 21.13) формулы (21.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 21.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 21.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 21.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 21.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

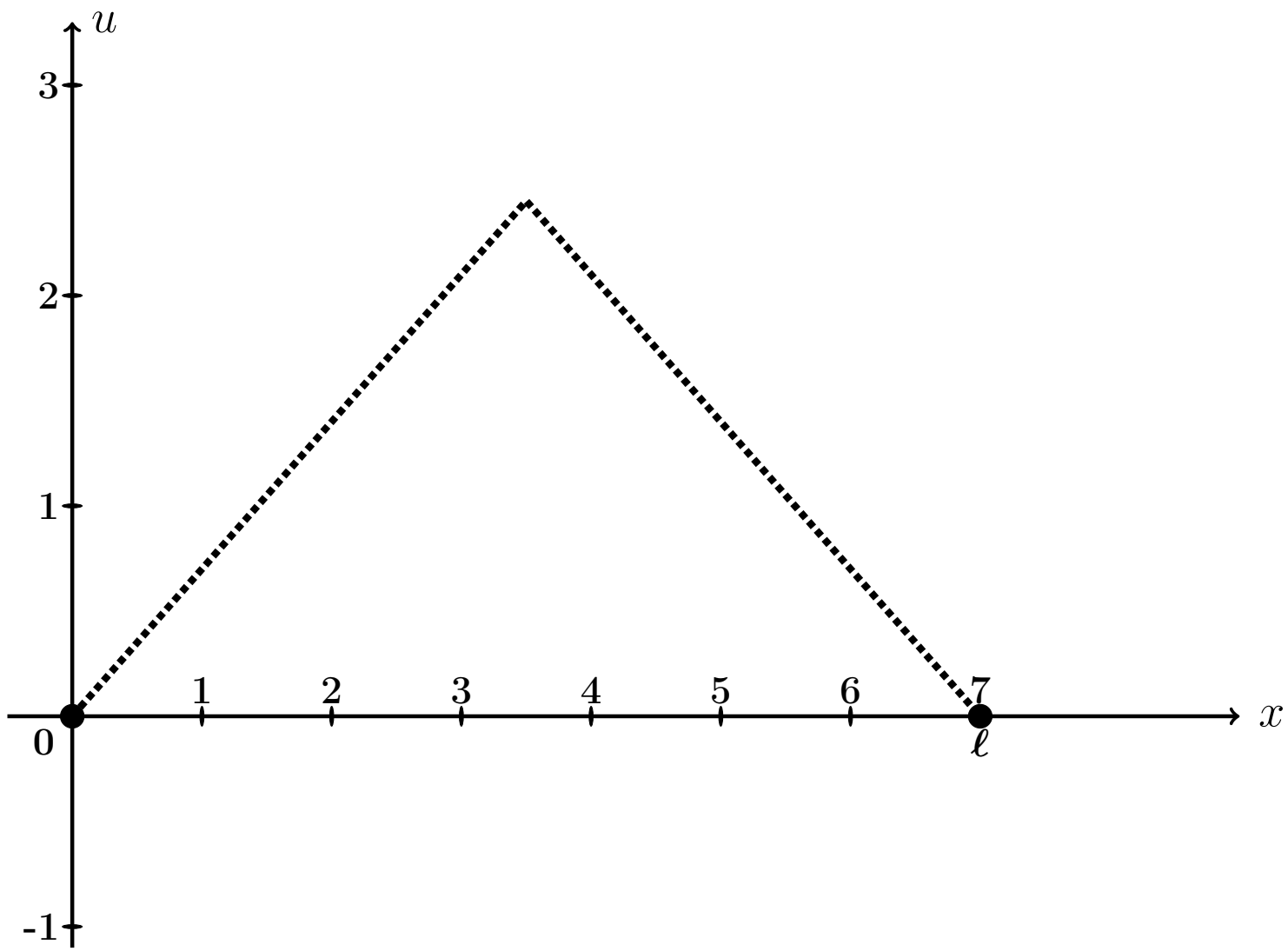


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (21.2).

Выборочная проверка вариант 21 задача 8 (по таблице 21.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 8 (по таблице 21.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 8 (по таблице 21.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 8 (по таблице 21.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(16.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{21.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{21.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

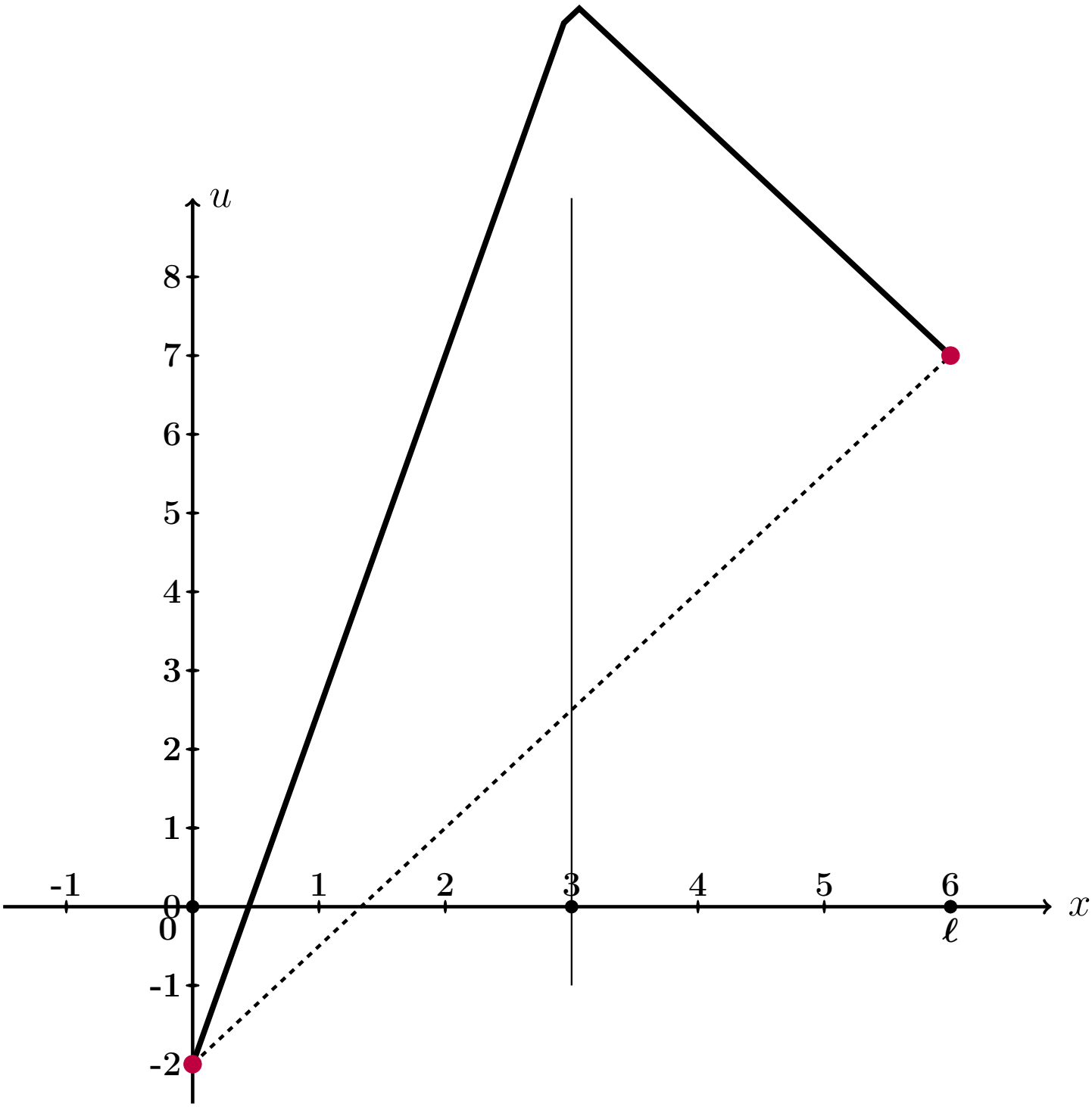


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (21.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (21.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (21.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{21.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad\qquad , & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{21.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad\qquad - \qquad\qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad\qquad - \qquad\qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (21.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (21.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{21.7}$$

Таблица 21.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (21.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (21.1) с начальным условием (21.2) и граничными условиями (21.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (21.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_6 = 7.0$ — значения граничных условий (21.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 21.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 21.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-2	0,7	3,4	6,1	8,8	11,5	10,6	9,7	8,8	7,9	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 21.16.

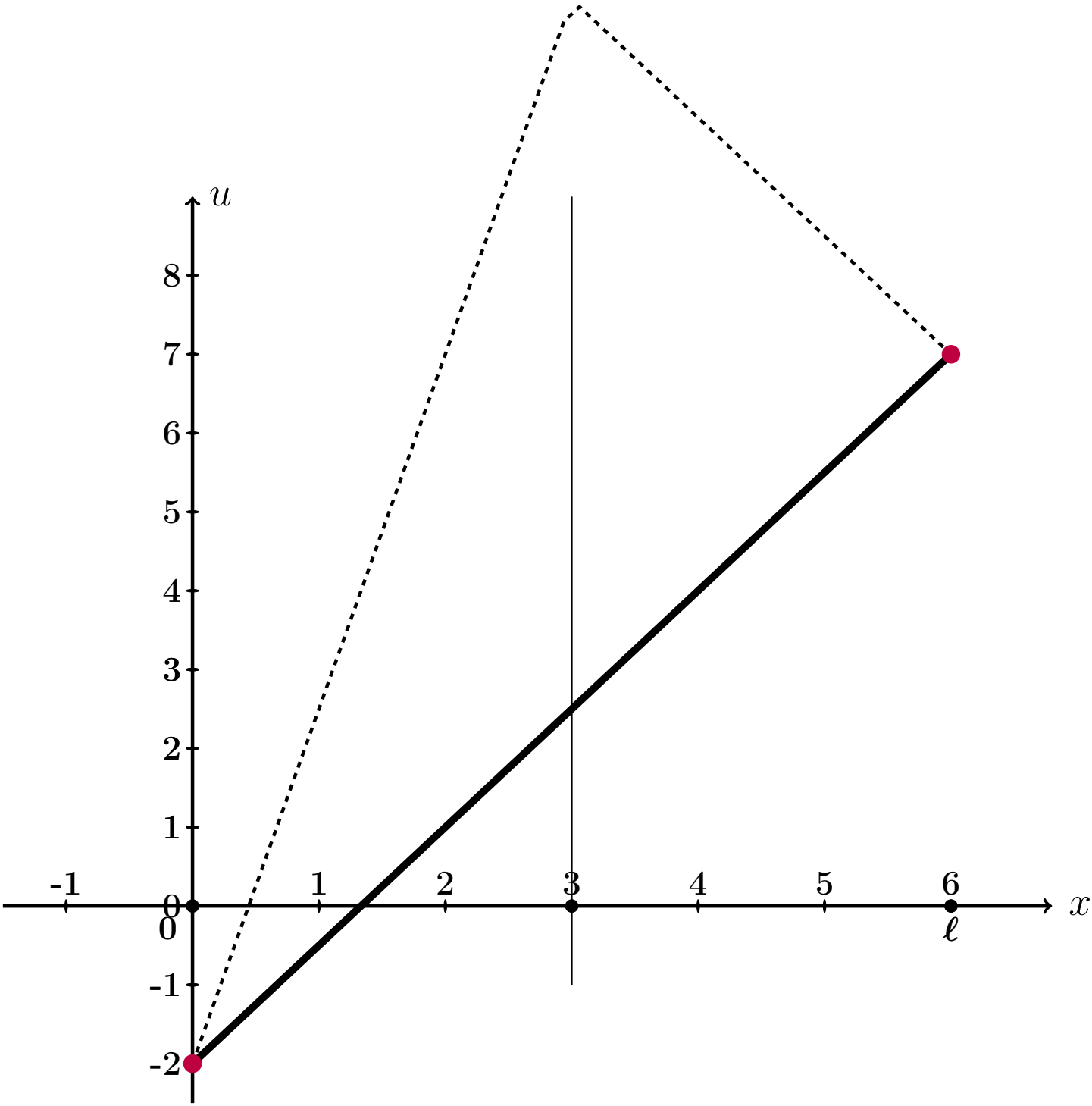


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (21.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (21.3).

Выборочная проверка вариант 21 задача 9 (по формулам (21.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 9 (по таблице 21.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 21 задача 9 (по таблице 21.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 22

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{8}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{8}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

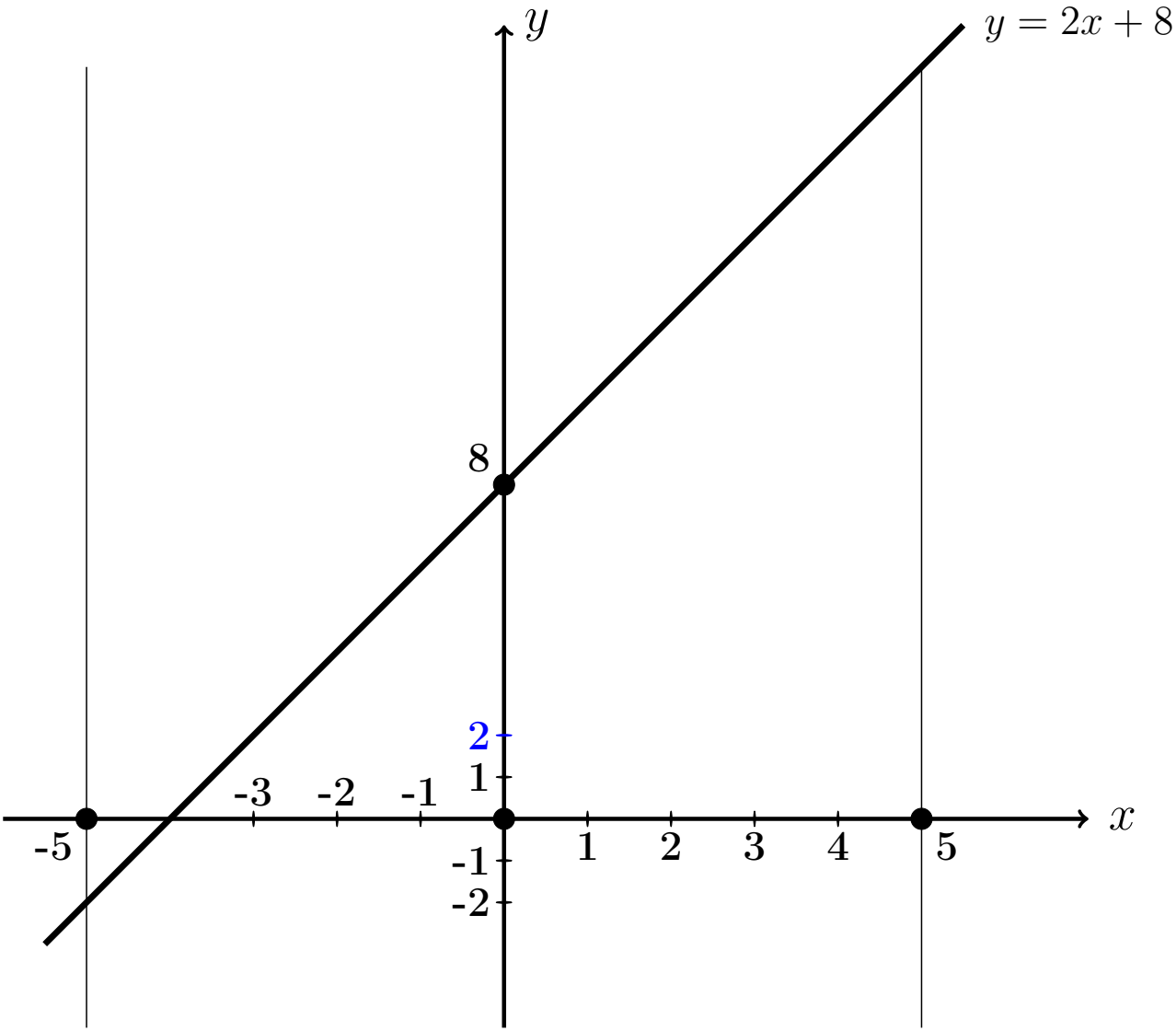
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 22.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+8$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 22.1



Выборочная проверка вариант 22 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 1 (по Таблице 22.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\sqrt{x} + \frac{18}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 9\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(6\sqrt{x} + \frac{18}{y}\right)dx = 6\int x^{1/2}dx + 18\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y) = \qquad\qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 9\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 6x^3 + 4\sin 5t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2x \ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 6x^3 + 4\sin 5t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (6x^3 + 4\sin 5t)dt = \qquad + C(x) \ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 2x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = \qquad = \qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = \qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$

Выборочная проверка вариант 22 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

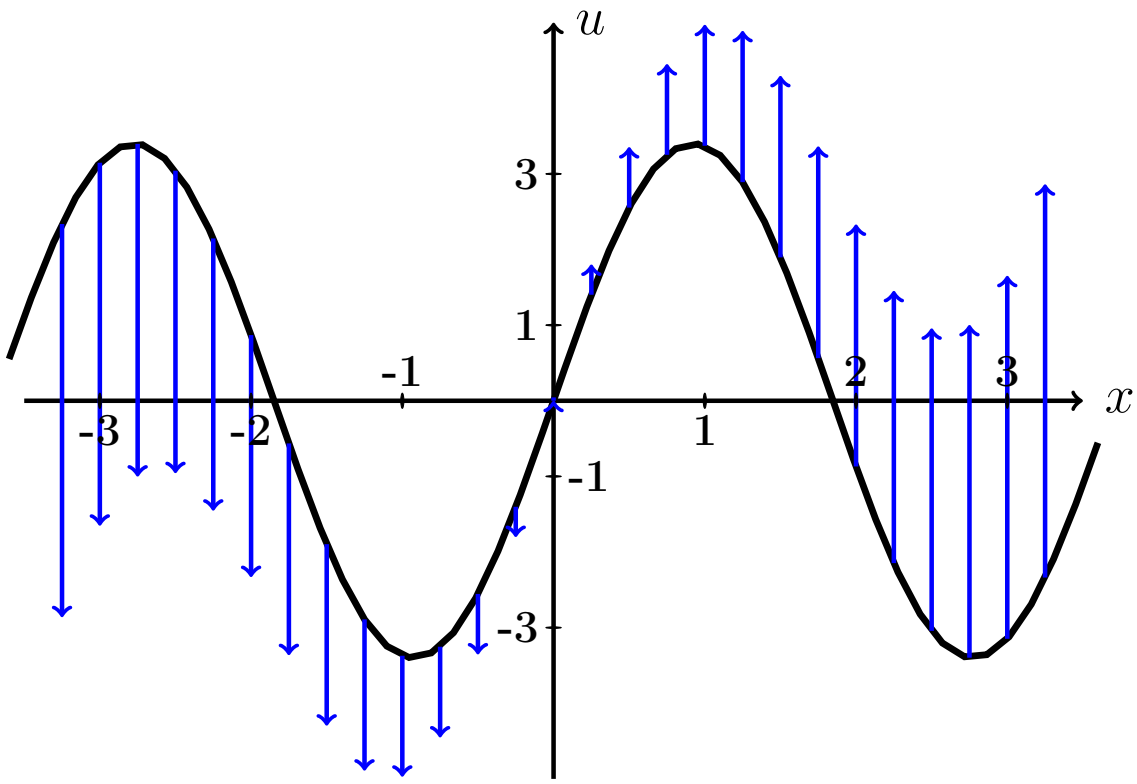


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 22.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 22 задача 4 (по Таблице 22.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 22.2.

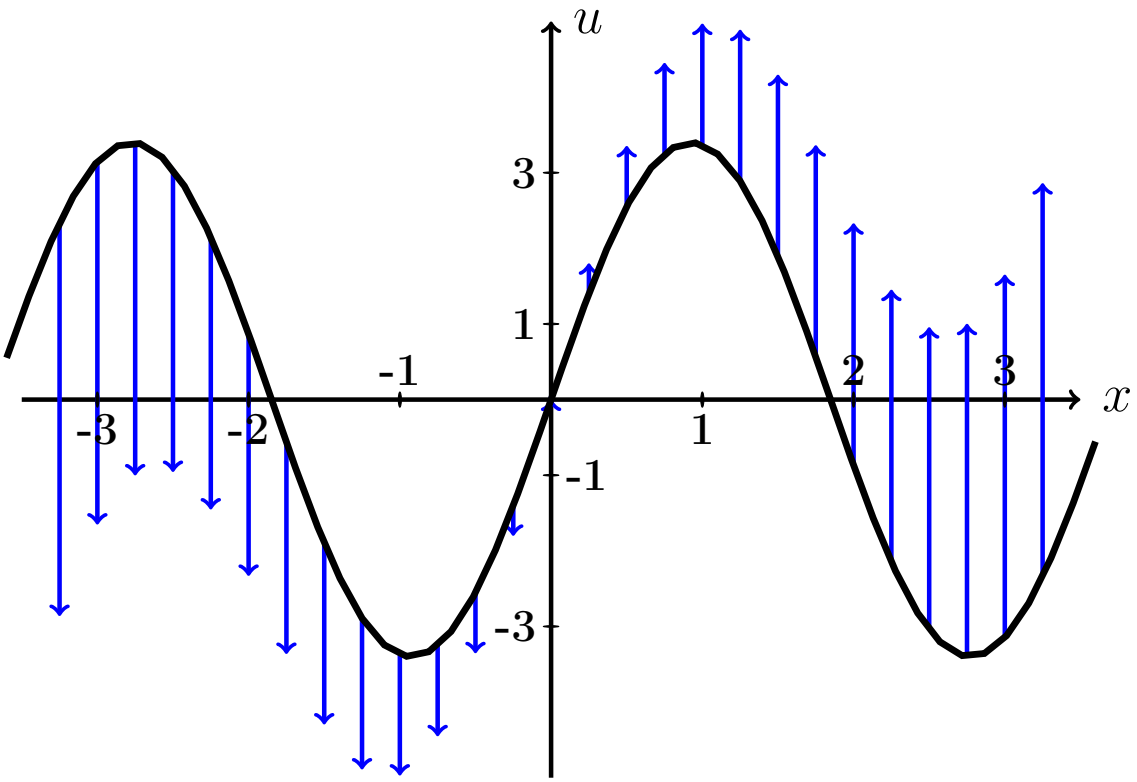


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

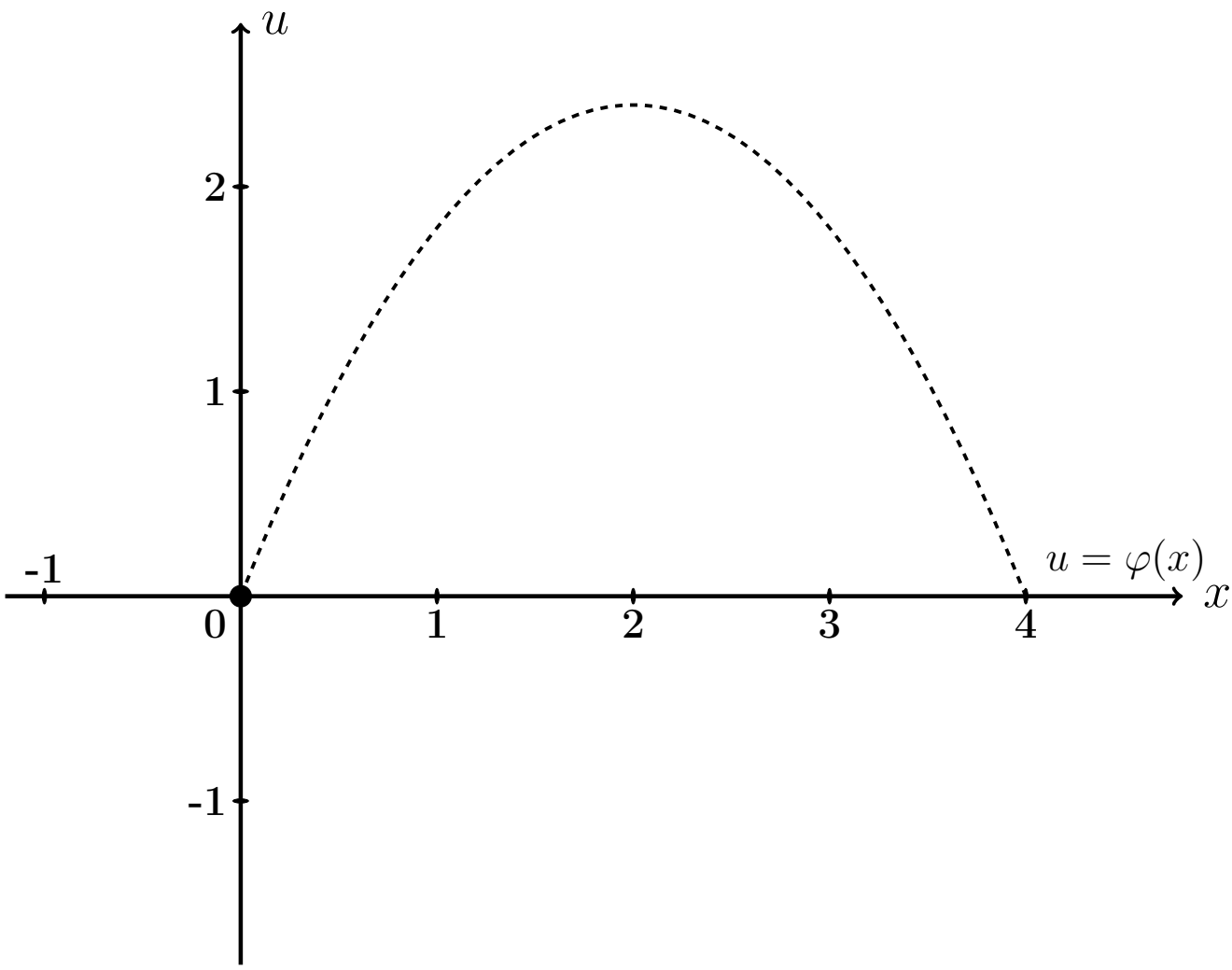


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 22.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 22.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 22.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 22.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 22 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 5 (красные клетки таб. 22.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 22.4.

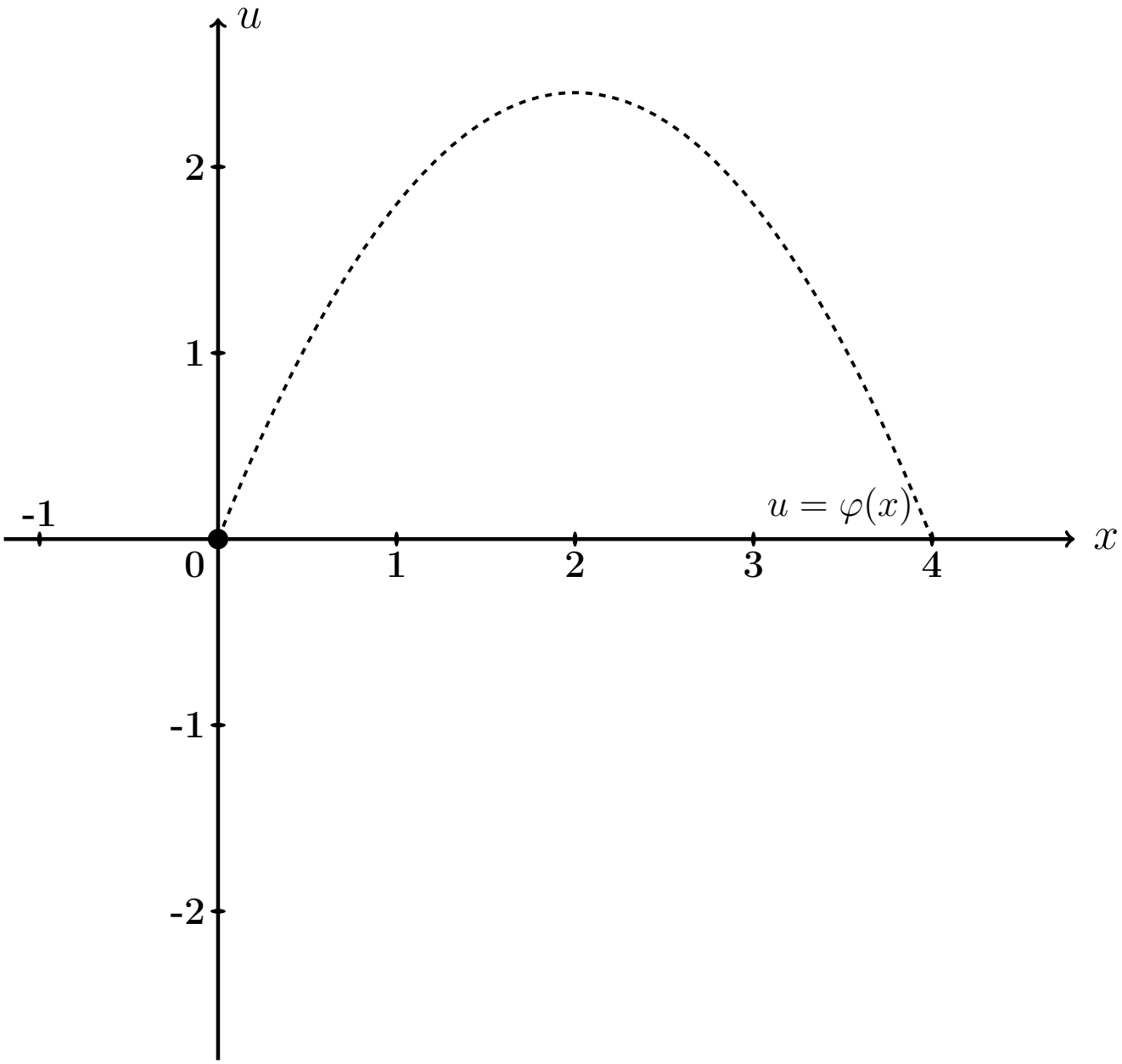


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

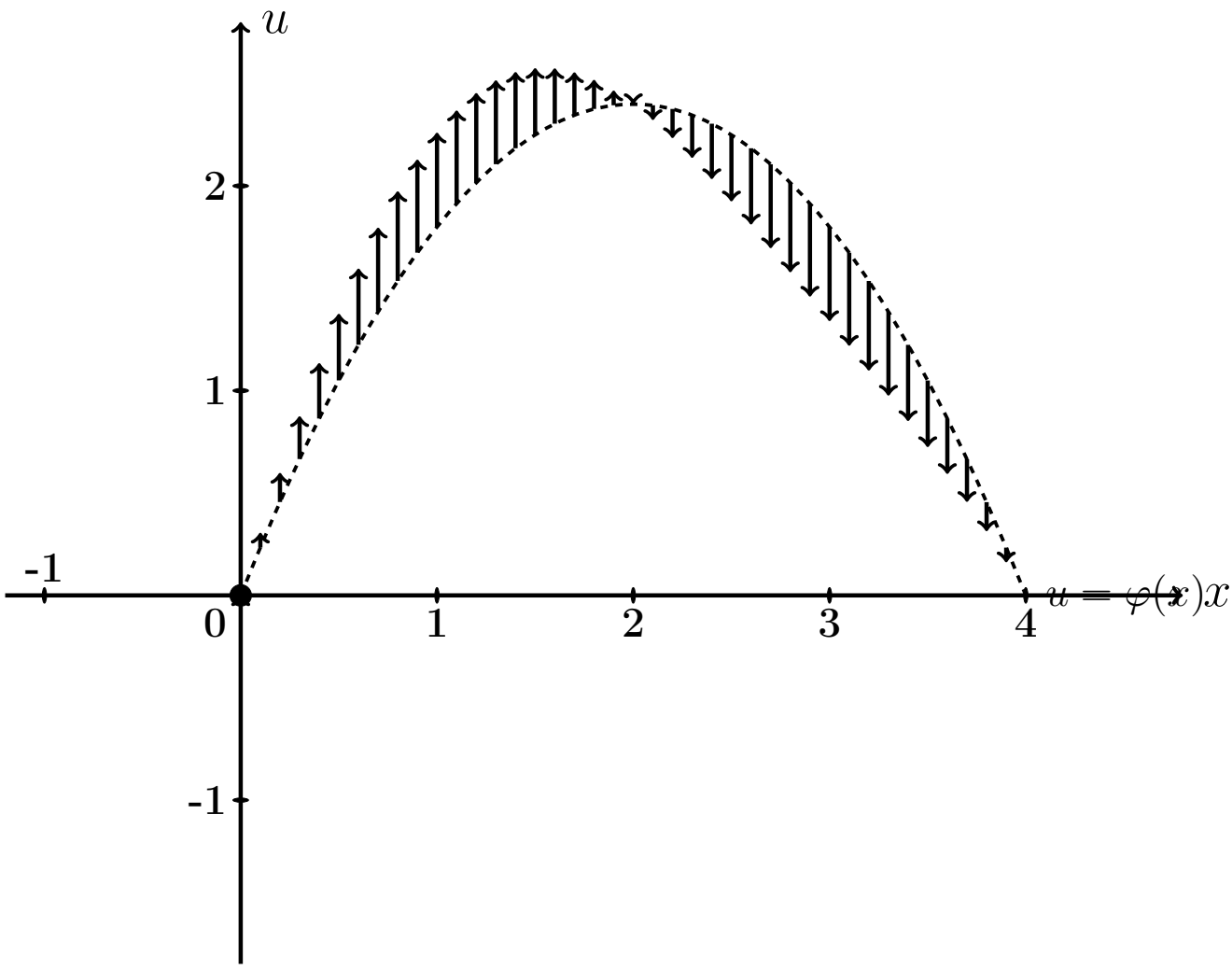


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 22.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.39$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 22.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 22.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 22.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 22 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 6 (красные клетки Таблицы 22.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 22.6.

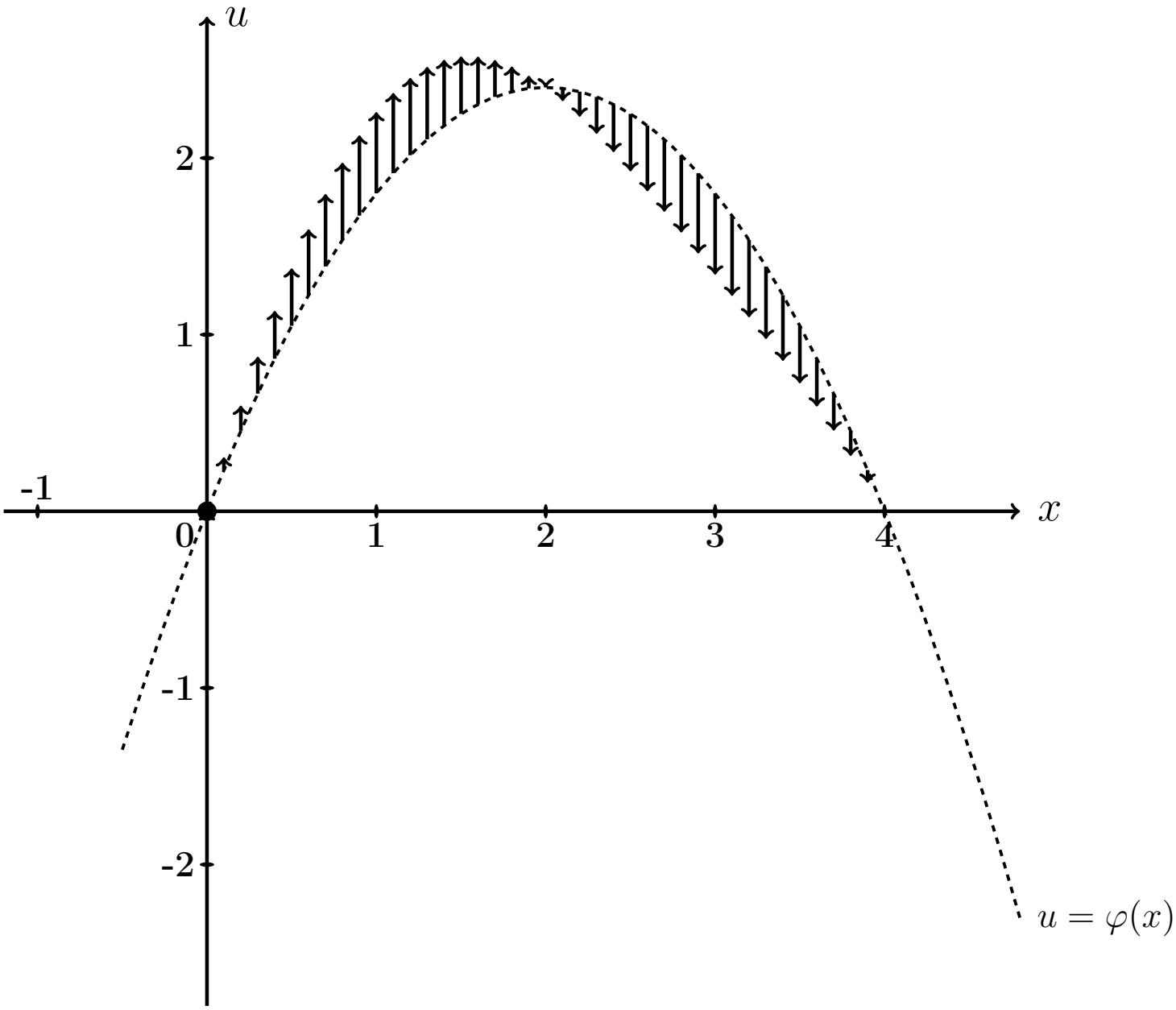


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{22.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.20 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 1.20 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{22.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{22.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (22.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{22.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (22.2), (22.3). Затабулировать решение уравнения (22.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (22.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (22.2), (22.3). Затабулировать решение уравнения (22.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (22.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 22.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{22.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (22.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{22.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (22.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (22.4) при граничных условиях (22.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{22.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{22.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{22.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (22.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (22.9). Следовательно, по формуле (22.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{22.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{22.11}$$

Шаг 6.

Таблица 22.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 22.7,

$$\ell = ___, \quad a = ___, \quad \Omega = ___,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (22.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 22.8. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ .$$

Таблица 22.9 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,72	1,44	2,16	2,88	3,6	2,88	2,16	1,44	0,72	0
$u(x,0)$	0										
$u(x,1)$	0										
$u(x,2)$	0										

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 22.9

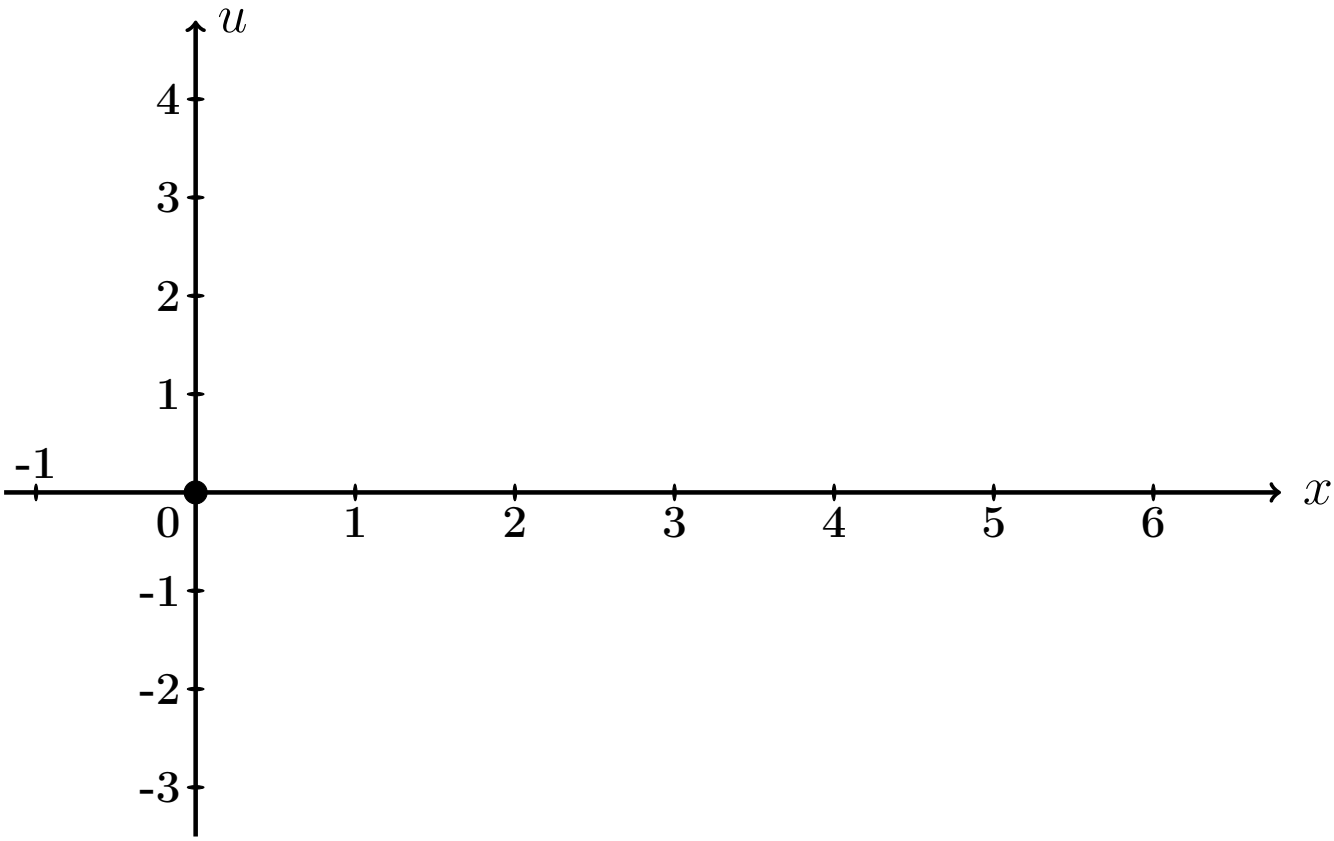


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 22 задача 7 (по Таб. 22.7, 22.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 22 задача 7 (по таблице 22.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (22.6) и (22.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (22.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (22.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (22.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (22.9). Следовательно, по формуле (22.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (22.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (22.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (22.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 22.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (22.5),

$C_1' =$ по формуле (22.12)

и $C_3 =$ по таблице 22.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 22.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,72	1,44	2,16	2,88	3,6	2,88	2,16	1,44	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

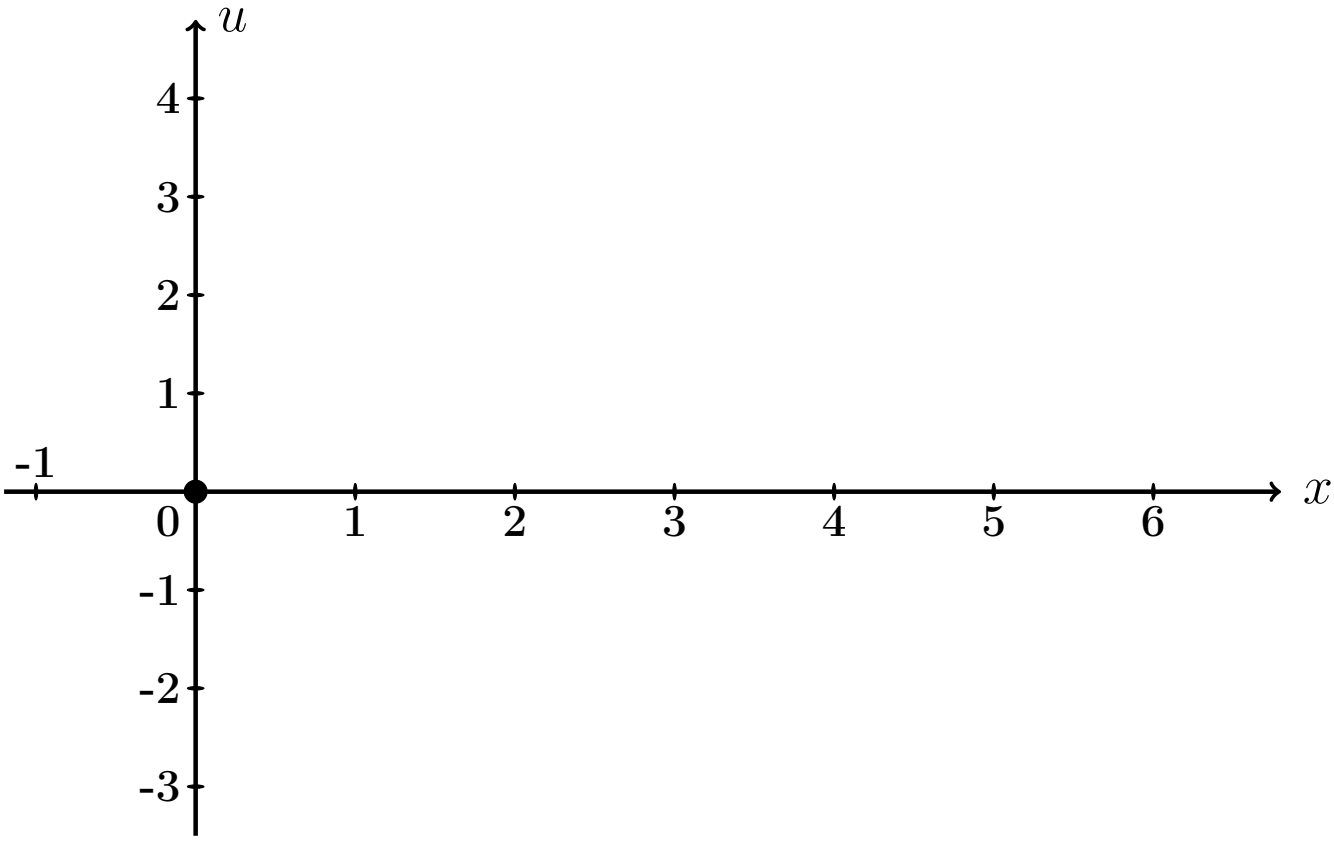


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 22 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (22.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 22 задача 7 (по таблице 22.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{22.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{22.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (22.1). Затабулировать решение уравнения (22.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

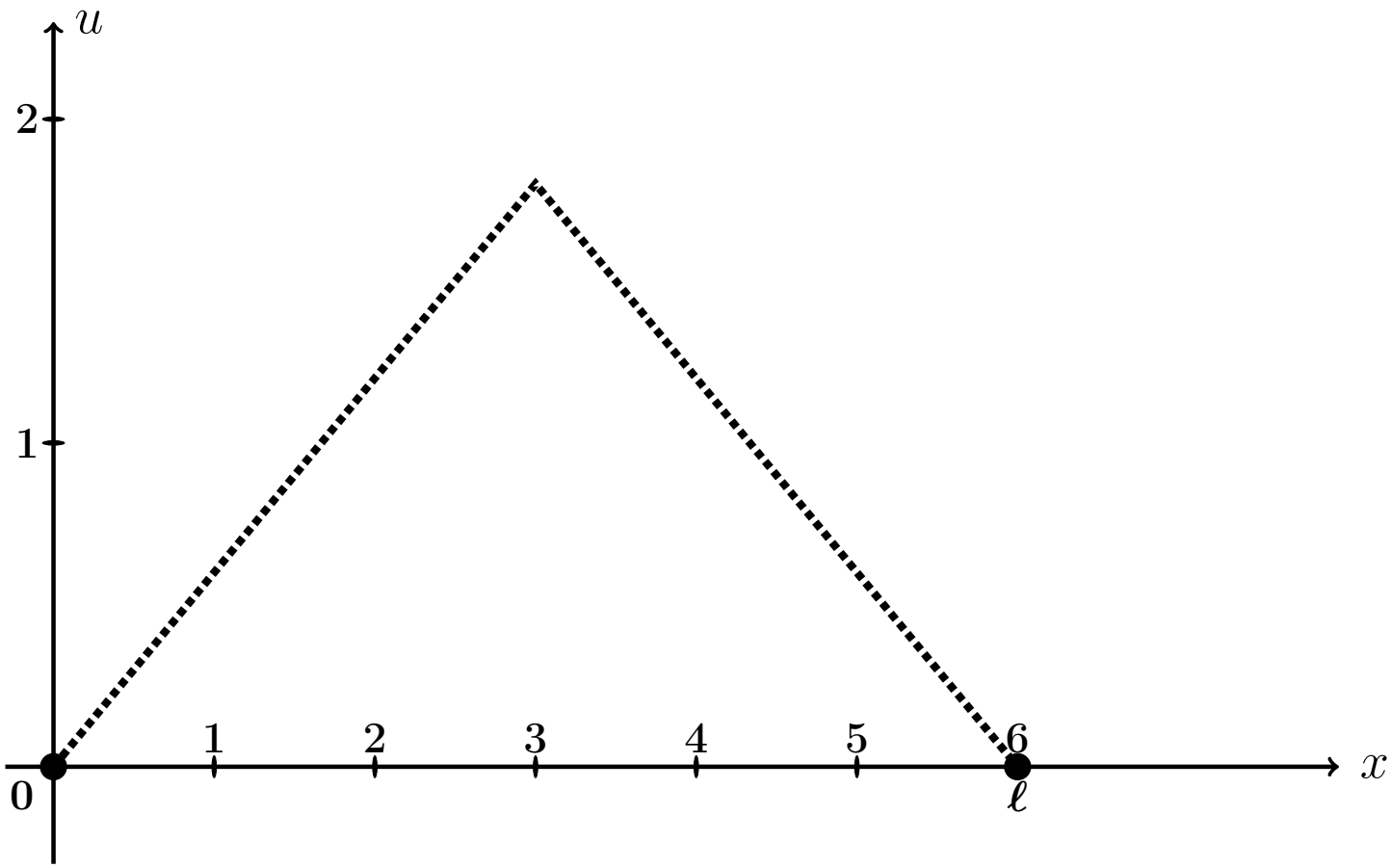


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (22.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (22.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 22.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 22.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 22.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 22.12, 22.13) формулы (22.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 22.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 22.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 22.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 22.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

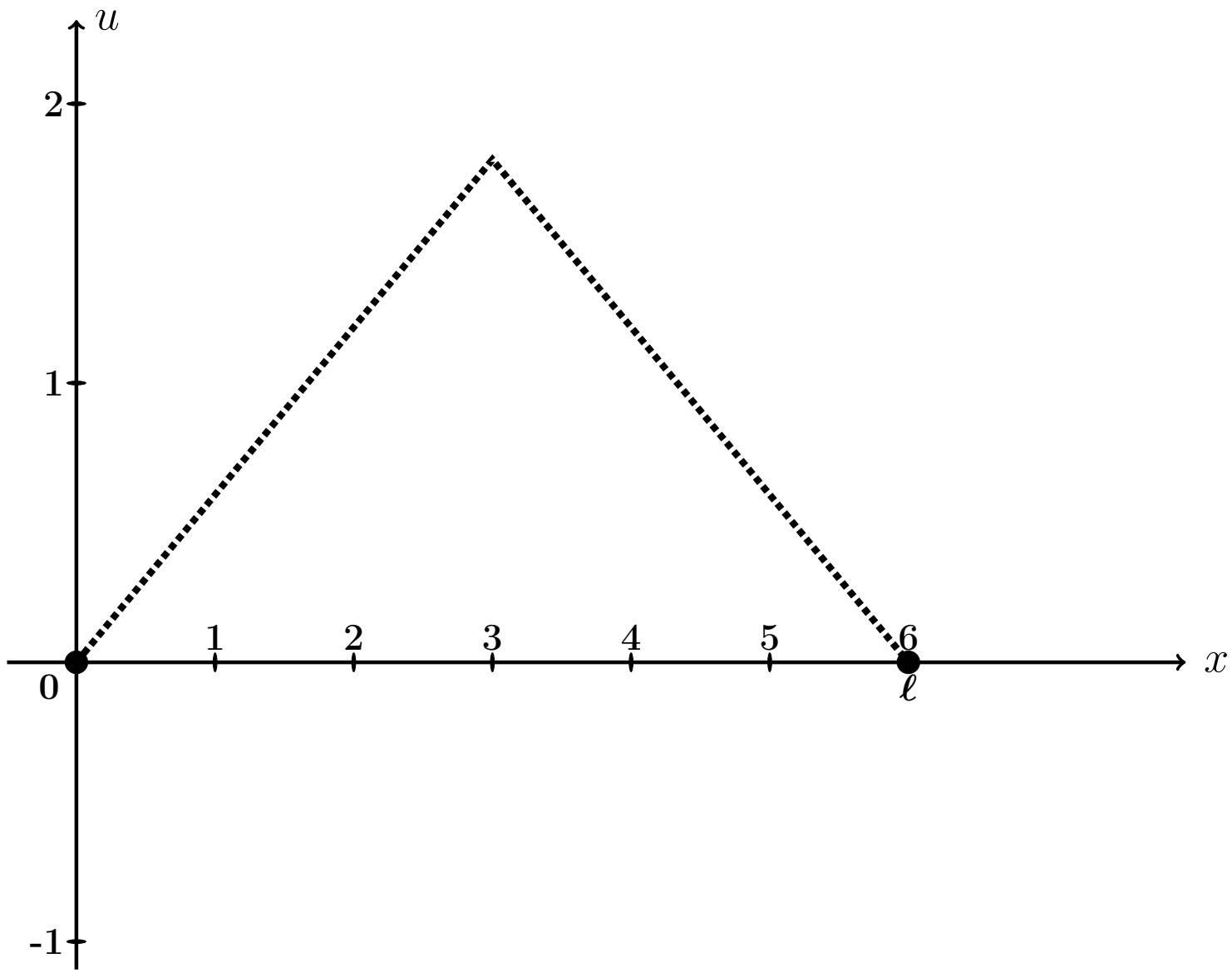


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (22.2).

Выборочная проверка вариант 22 задача 8 (по таблице 22.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 8 (по таблице 22.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 8 (по таблице 22.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 8 (по таблице 22.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{22.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(2.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{22.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{22.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

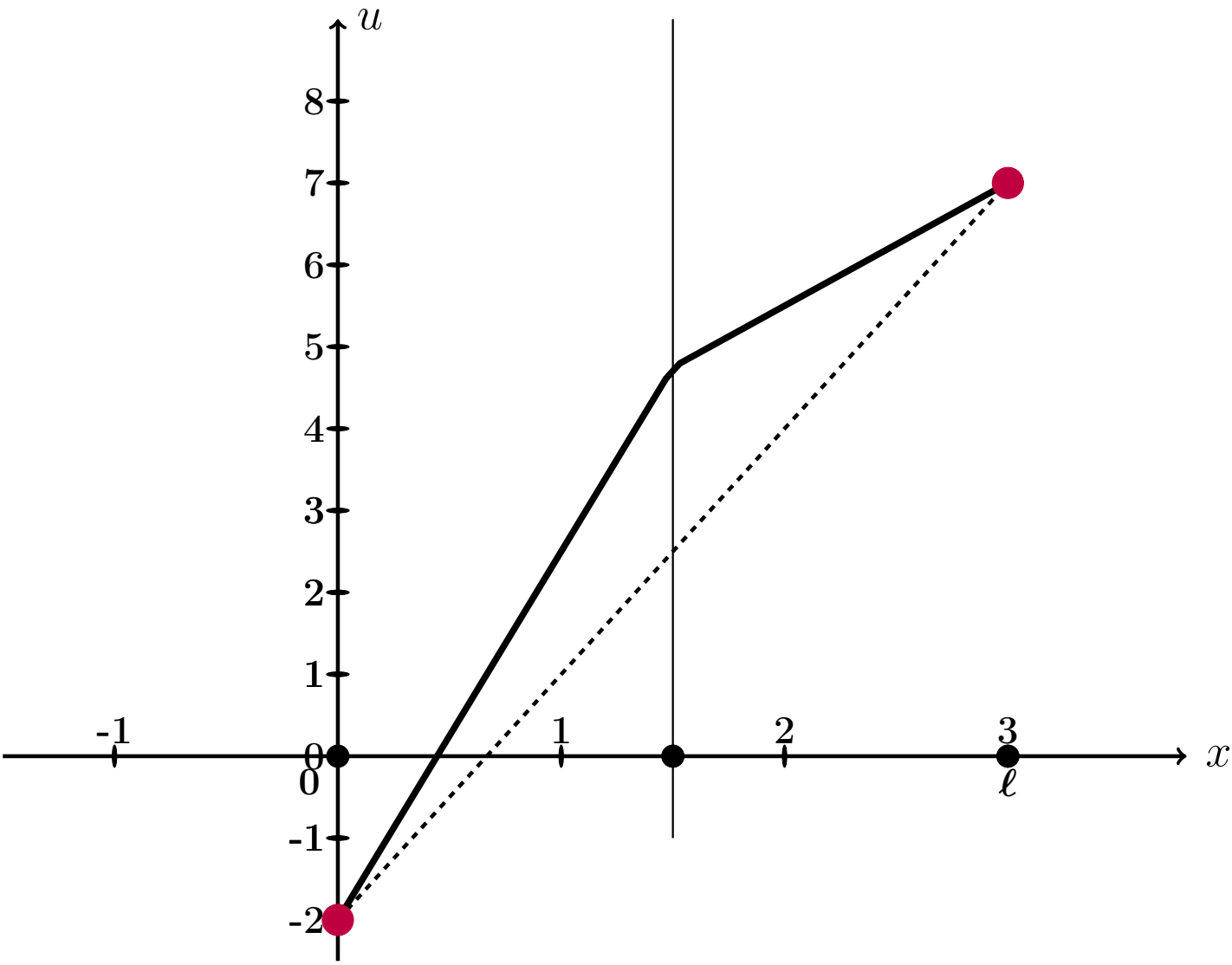


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (22.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (22.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (22.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{22.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{22.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (22.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (22.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{22.7}$$

Таблица 22.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (22.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (22.1) с начальным условием (22.2) и граничными условиями (22.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (22.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_3 = 7.0$ — значения граничных условий (22.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 22.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 22.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}65$	0,7	2,05	3,4	4,75	5,2	5,65	6,1	6,55	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 22.16.

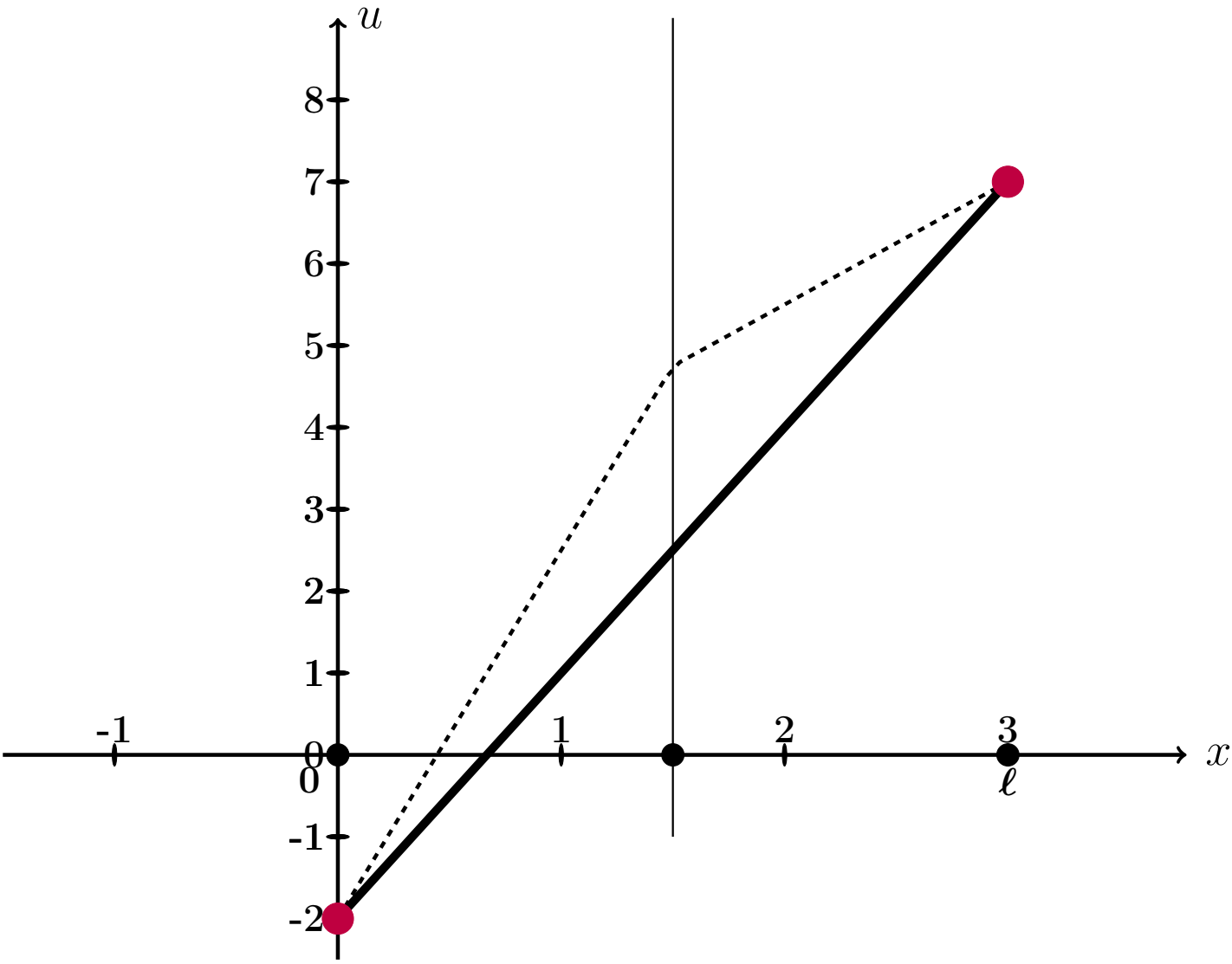


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (22.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (22.3).

Выборочная проверка вариант 22 задача 9 (по формулам (22.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 9 (по таблице 22.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 22 задача 9 (по таблице 22.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 23

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{7}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{7}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

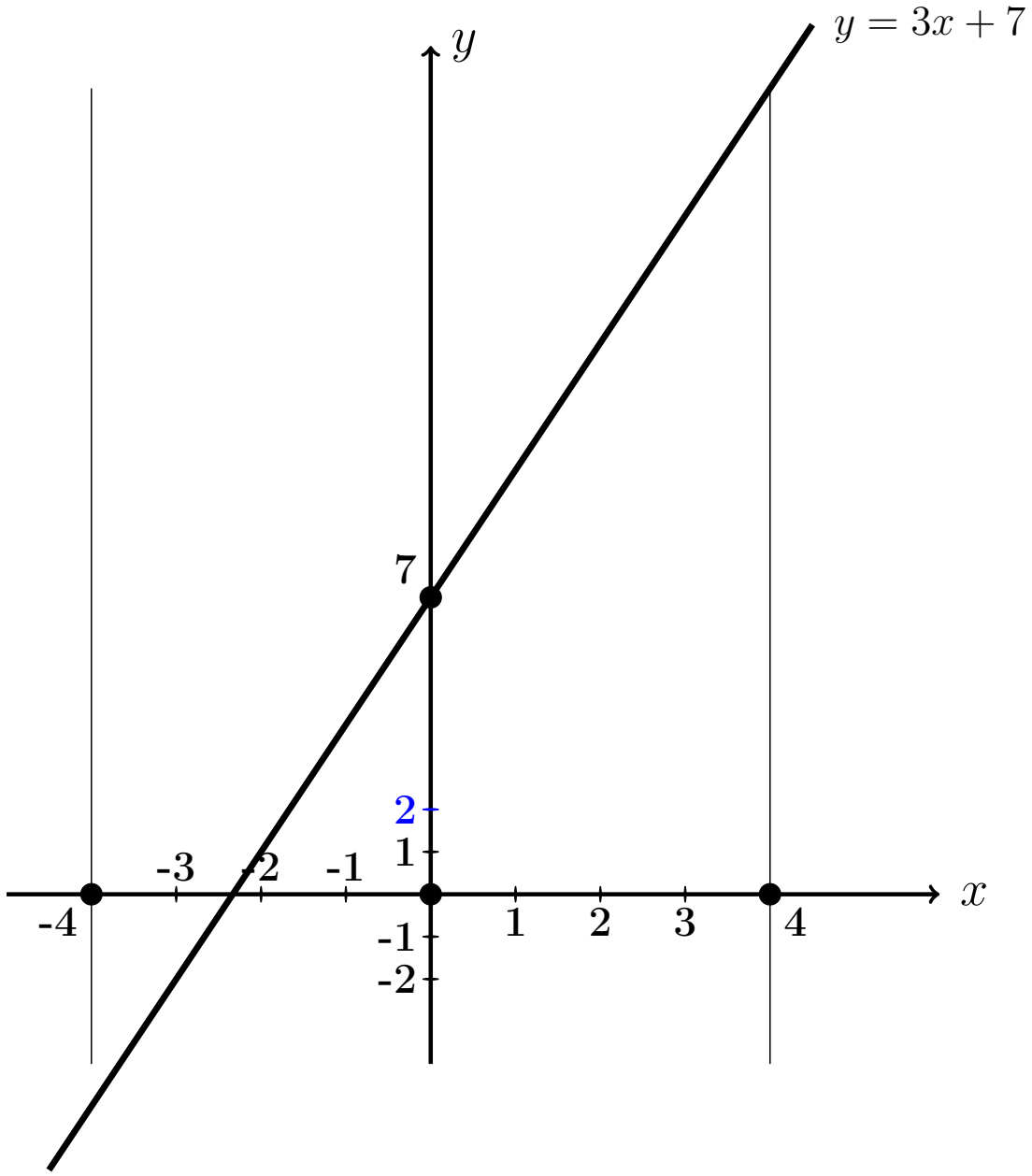
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 23.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+7$	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 23.1



Выборочная проверка вариант 23 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 1 (по Таблице 23.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 8\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 12\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 8\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 8\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 12\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x^2 + 8t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x^2 + 8t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x^2 + 8t)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 4x^2 \\ \qquad = 3e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 23 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

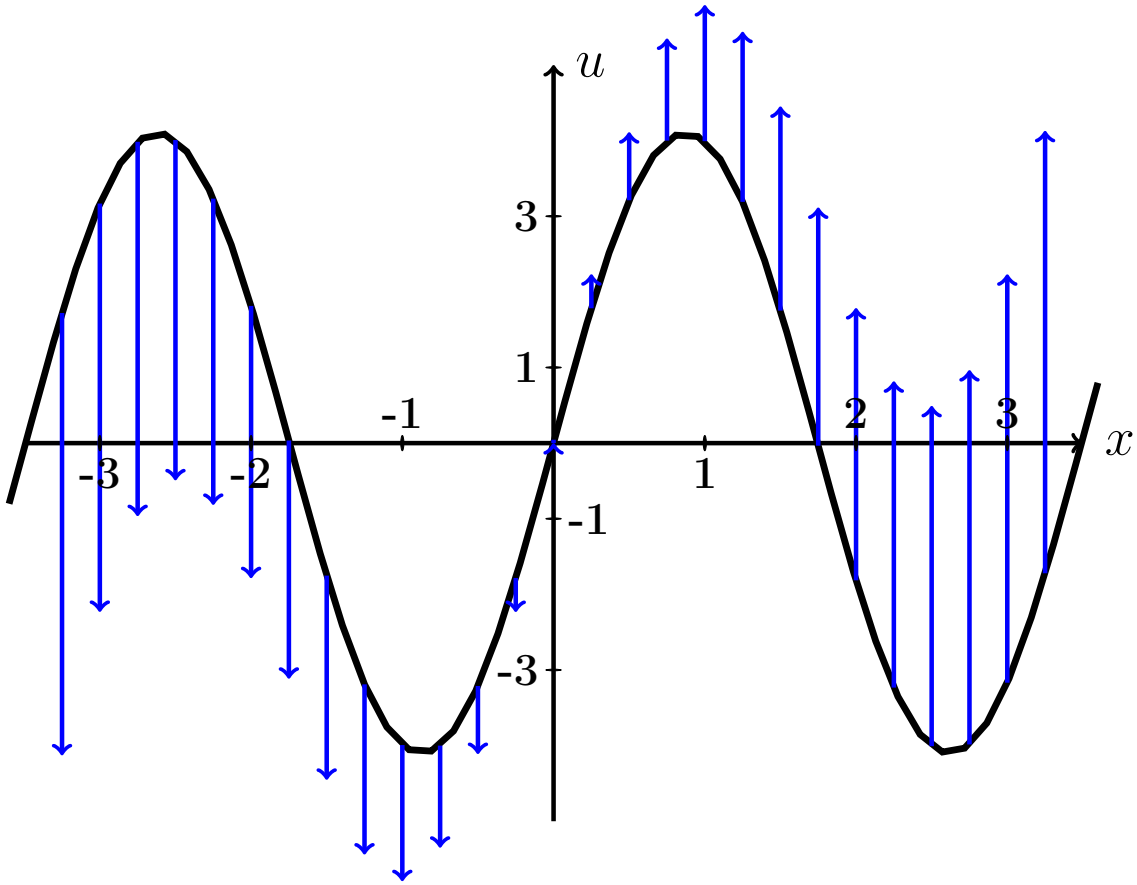


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 23.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 23 задача 4 (по Таблице 23.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 23.2.

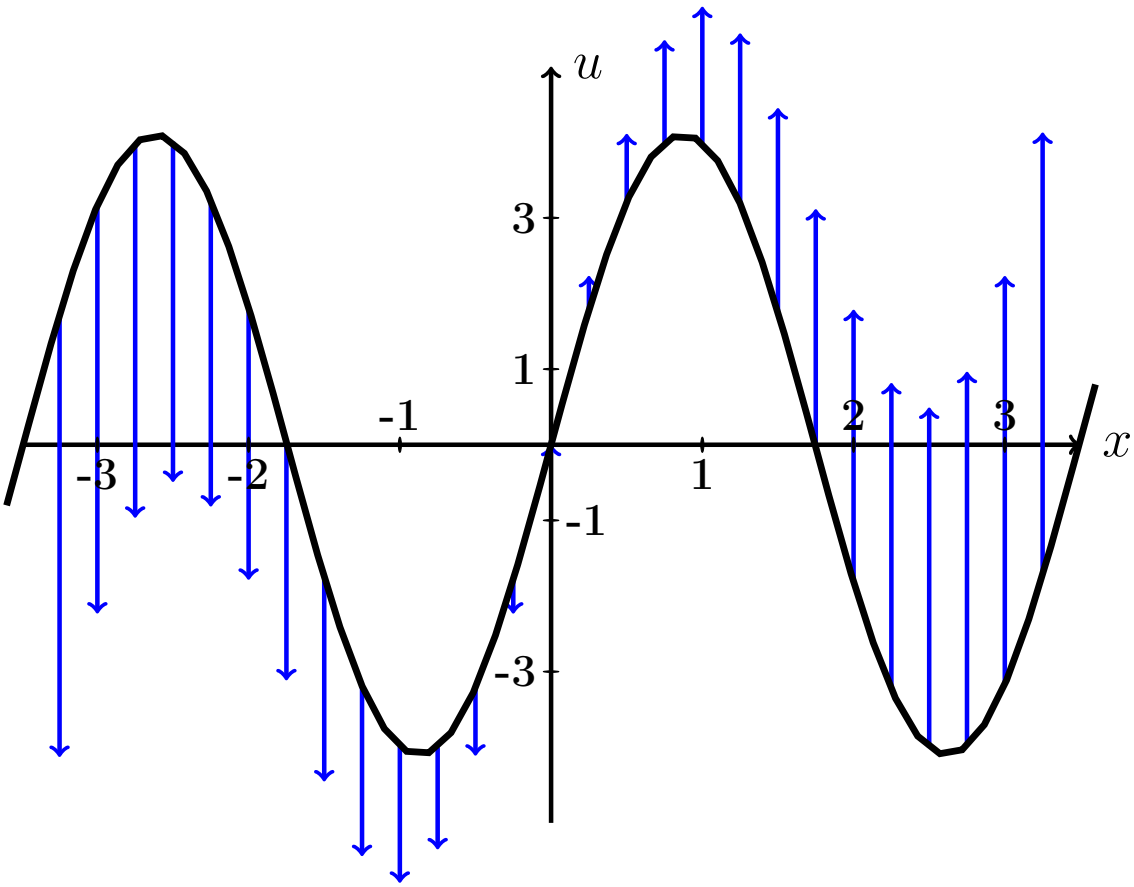


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

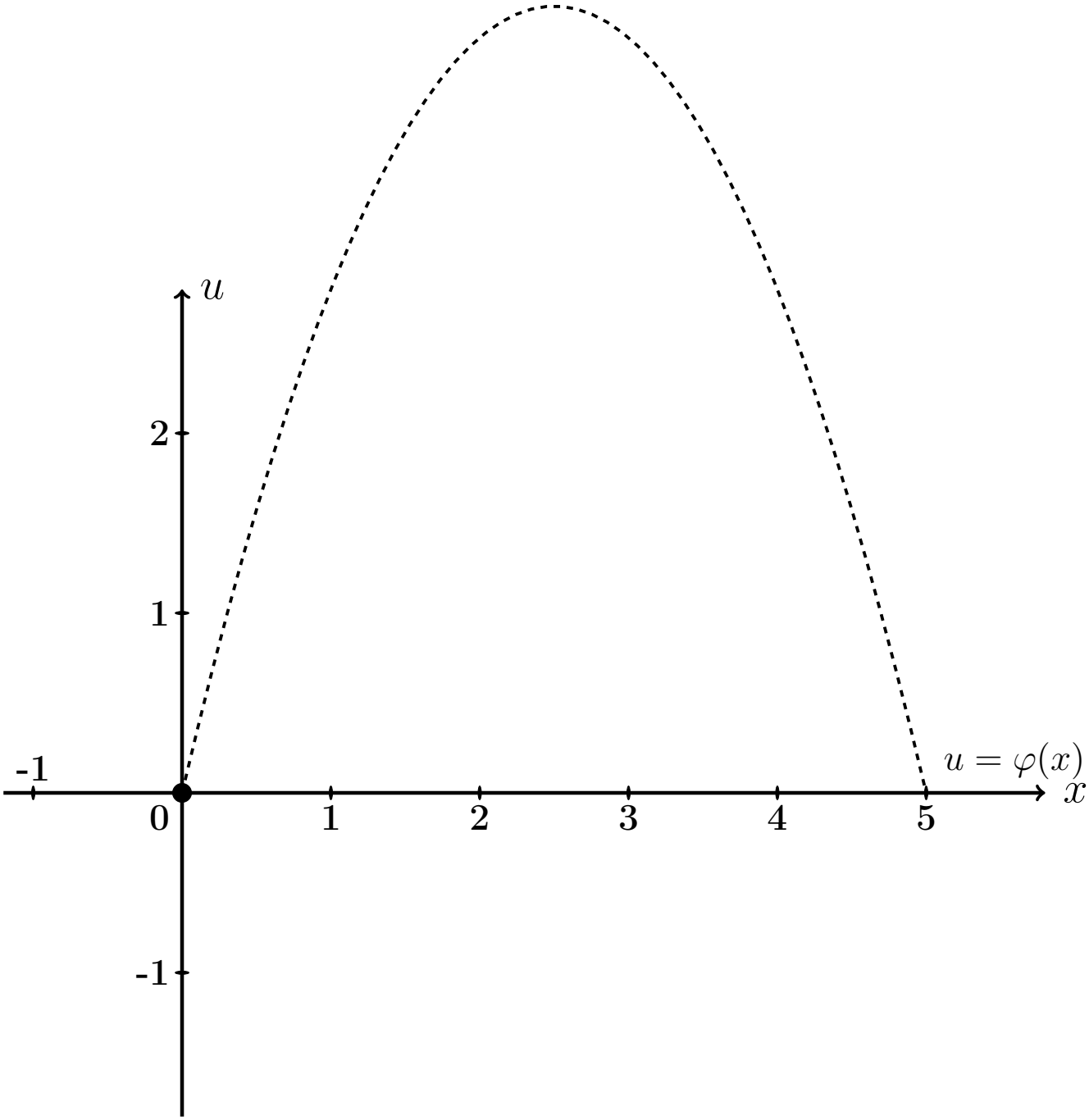


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 23.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 23.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 23.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 23.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 23 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 5 (красные клетки таб. 23.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 23.4.

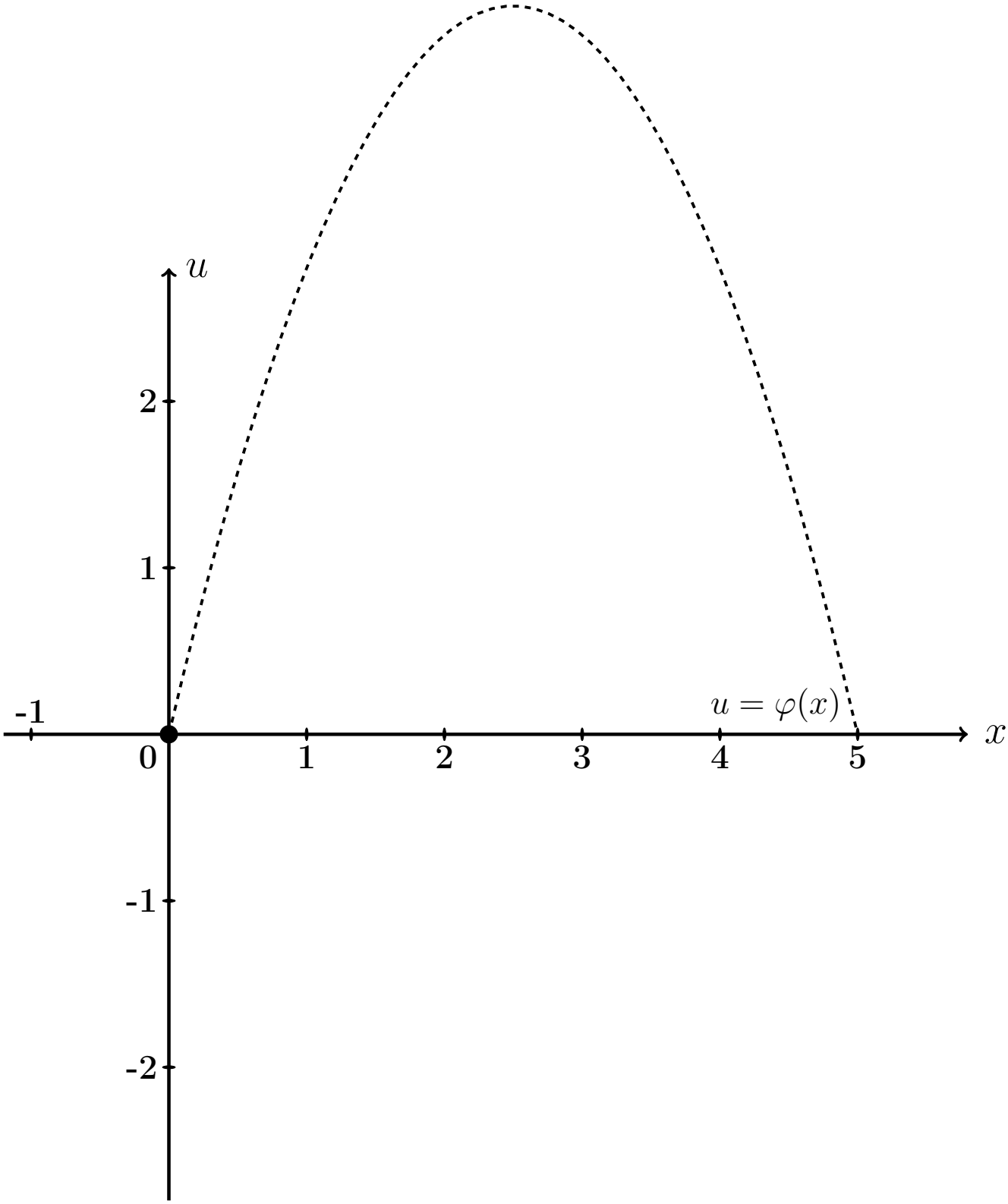


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

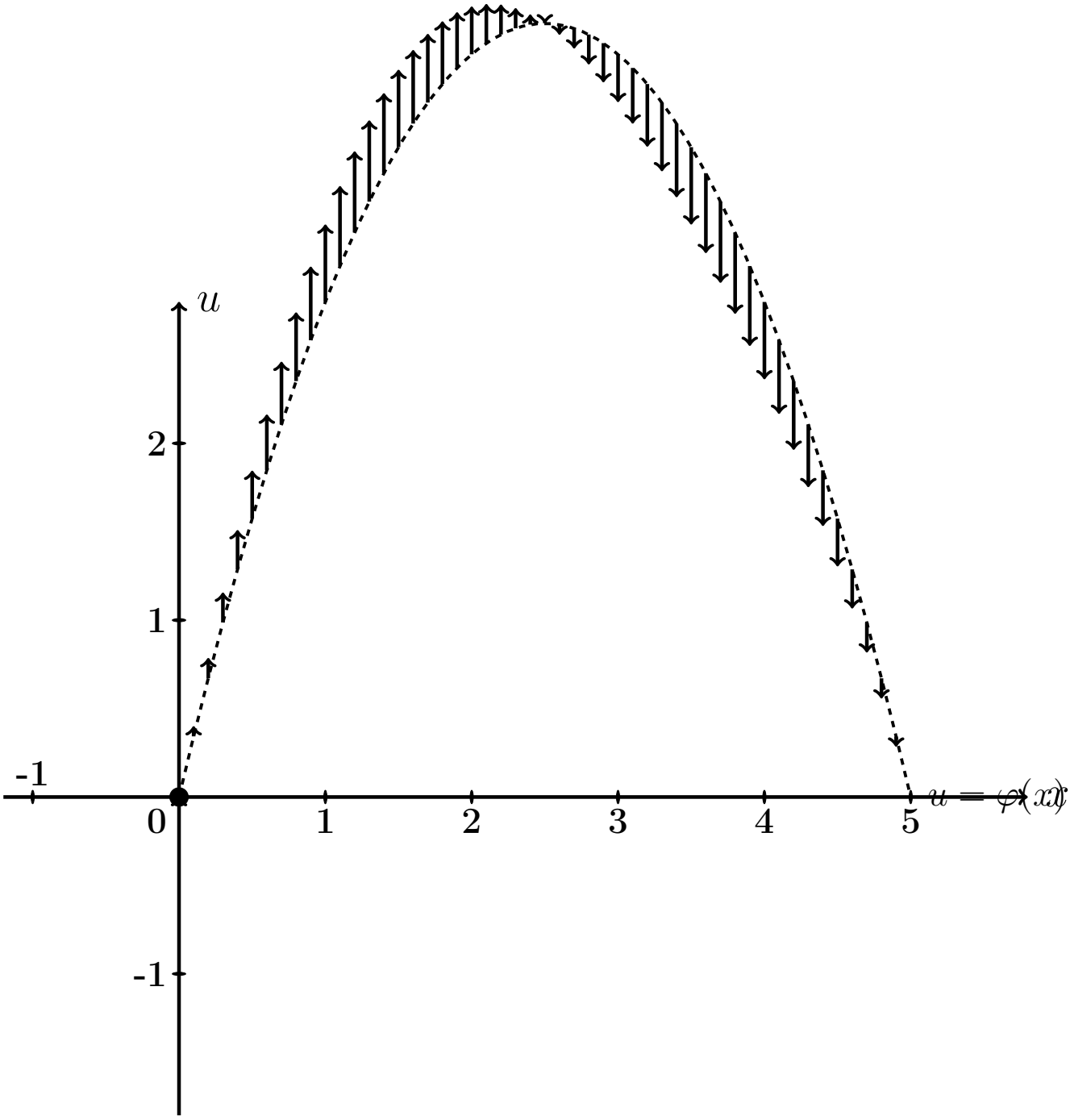


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 23.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.3\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.47$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 23.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 23.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 23.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 23 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 6 (красные клетки Таблицы 23.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 23.6.

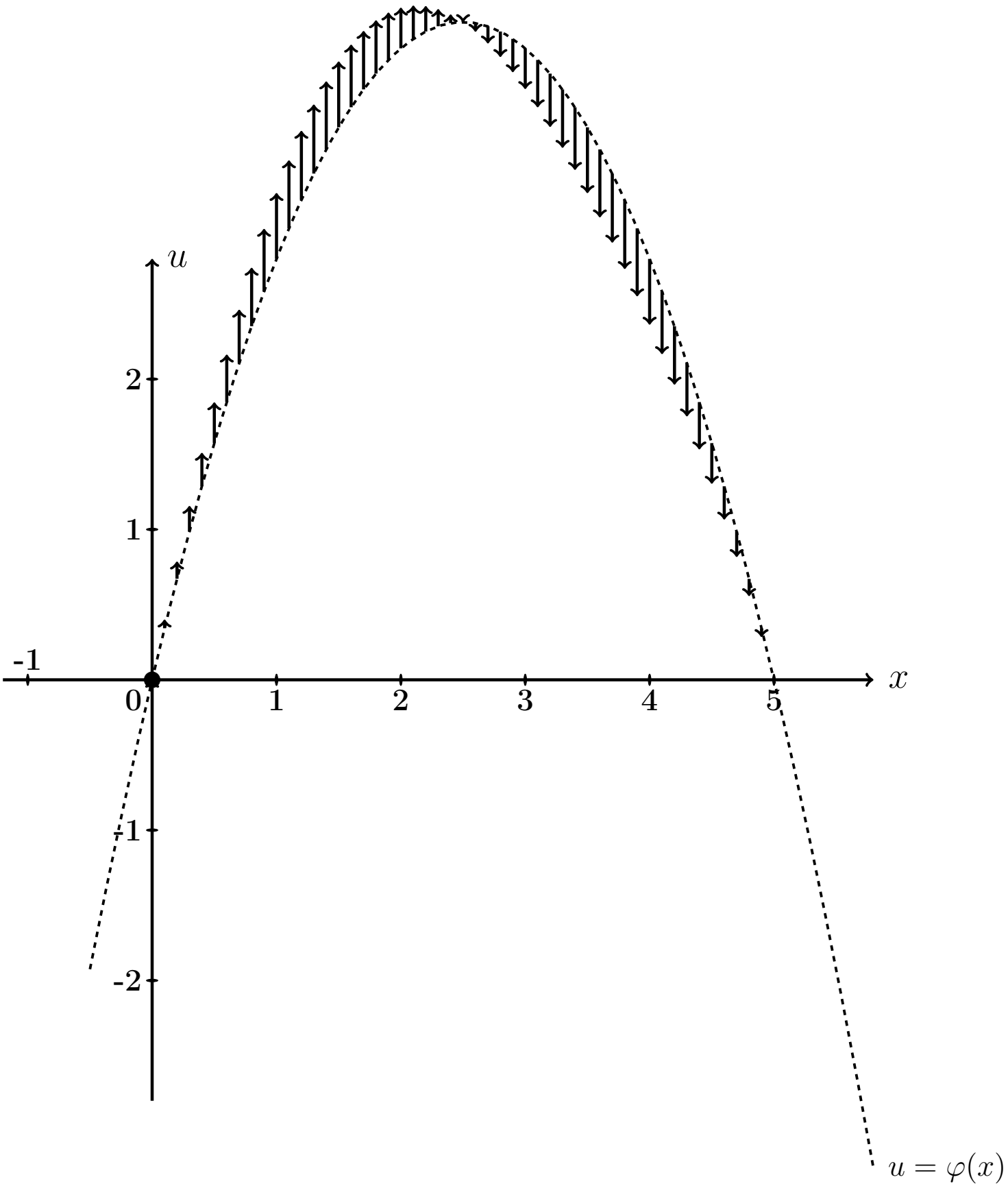


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u_t = \varphi(x) = 2.8\,\sin\frac{\pi x}{5}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{23.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 1.60 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{23.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{23.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (23.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{23.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (23.2), (23.3). Затабулировать решение уравнения (23.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (23.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (23.2), (23.3). Затабулировать решение уравнения (23.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (23.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 23.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (23.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{23.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (23.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (23.4) при граничных условиях (23.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{23.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{23.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{23.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (23.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (23.9). Следовательно, по формуле (23.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{23.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{23.11}$$

Шаг 6.

Таблица 23.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 23.7,

$$\ell = ___, \quad a = ___, \quad \Omega = ___,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (23.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 23.8. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ .$$

Таблица 23.9 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	1,28	2,56	3,84	5,12	6,4	5,12	3,84	2,56	1,28	0
$u(x,0)$	0										
$u(x,1)$	0										
$u(x,2)$	0										

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 23.9

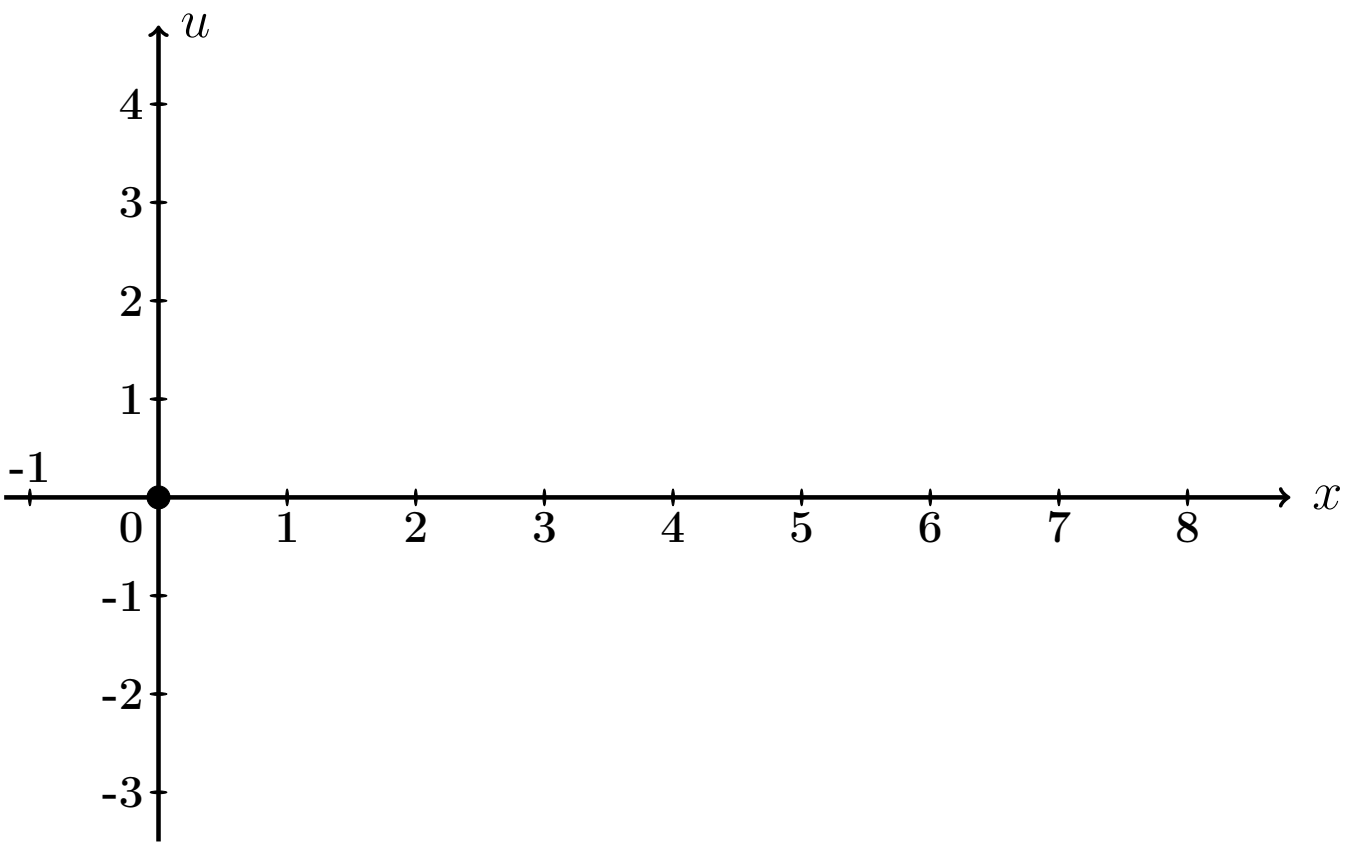


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 23 задача 7 (по Таб. 23.7, 23.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 23 задача 7 (по таблице 23.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (23.6) и (23.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (23.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (23.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (23.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (23.9). Следовательно, по формуле (23.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (23.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (23.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (23.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 23.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (23.5),

$C_1' =$ по формуле (23.12)

и $C_3 =$ по таблице 23.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 23.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	1,28	2,56	3,84	5,12	6,4	5,12	3,84	2,56	1,28	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

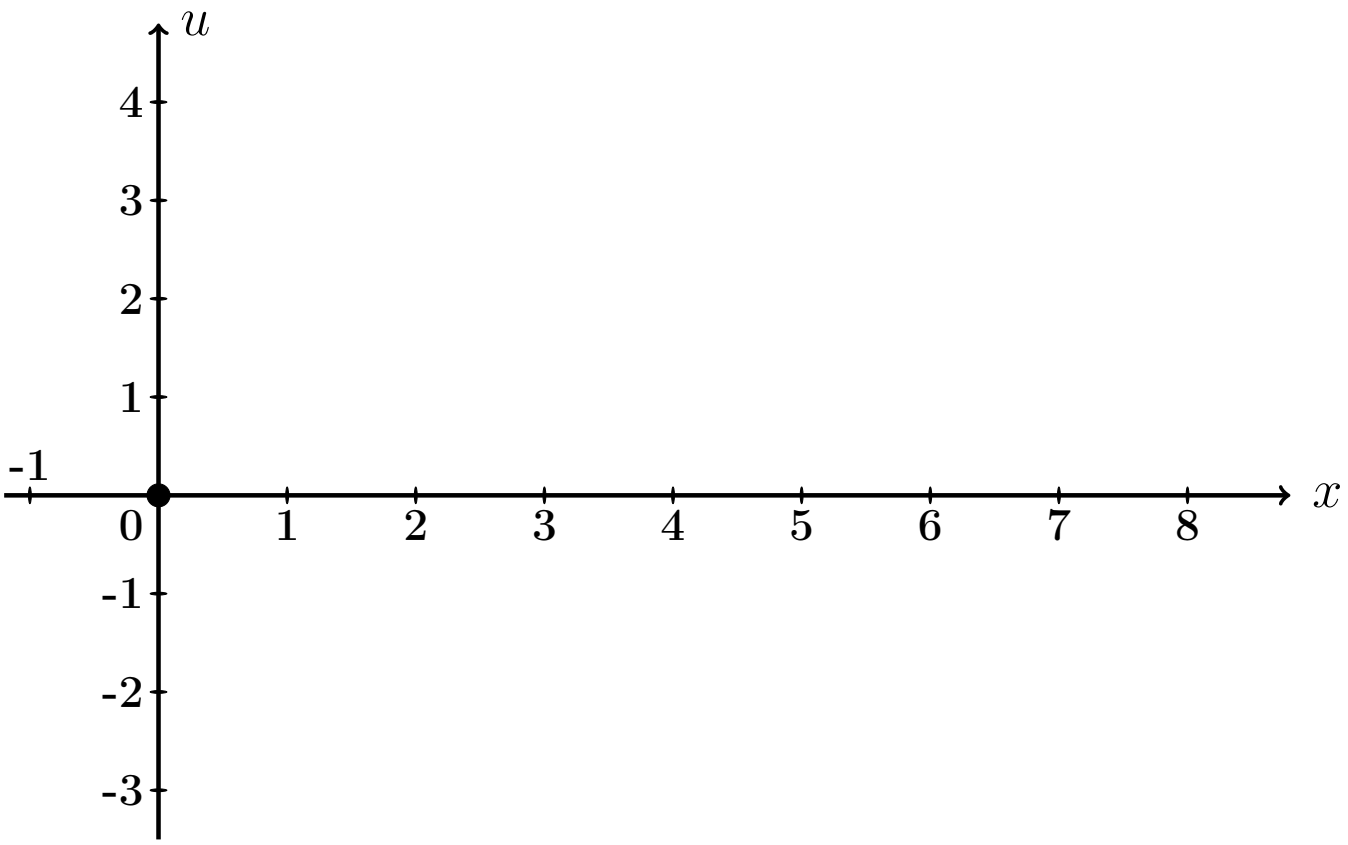


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 23 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (23.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 23 задача 7 (по таблице 23.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{23.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4$, $m = 0.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{23.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (23.1). Затабулировать решение уравнения (23.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

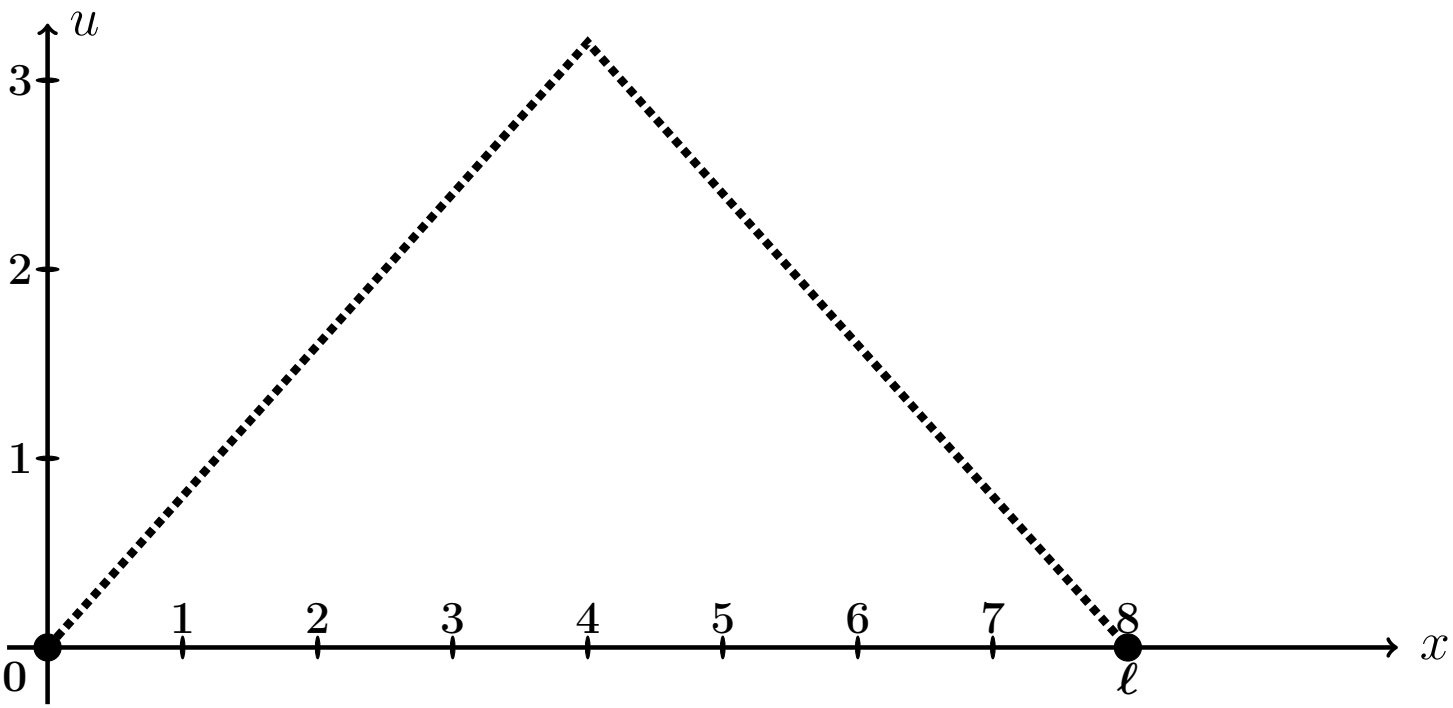


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (23.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.3\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (23.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.3$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 23.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 23.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.3 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 23.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 23.12, 23.13) формулы (23.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.3$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 23.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 23.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 23.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 23.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

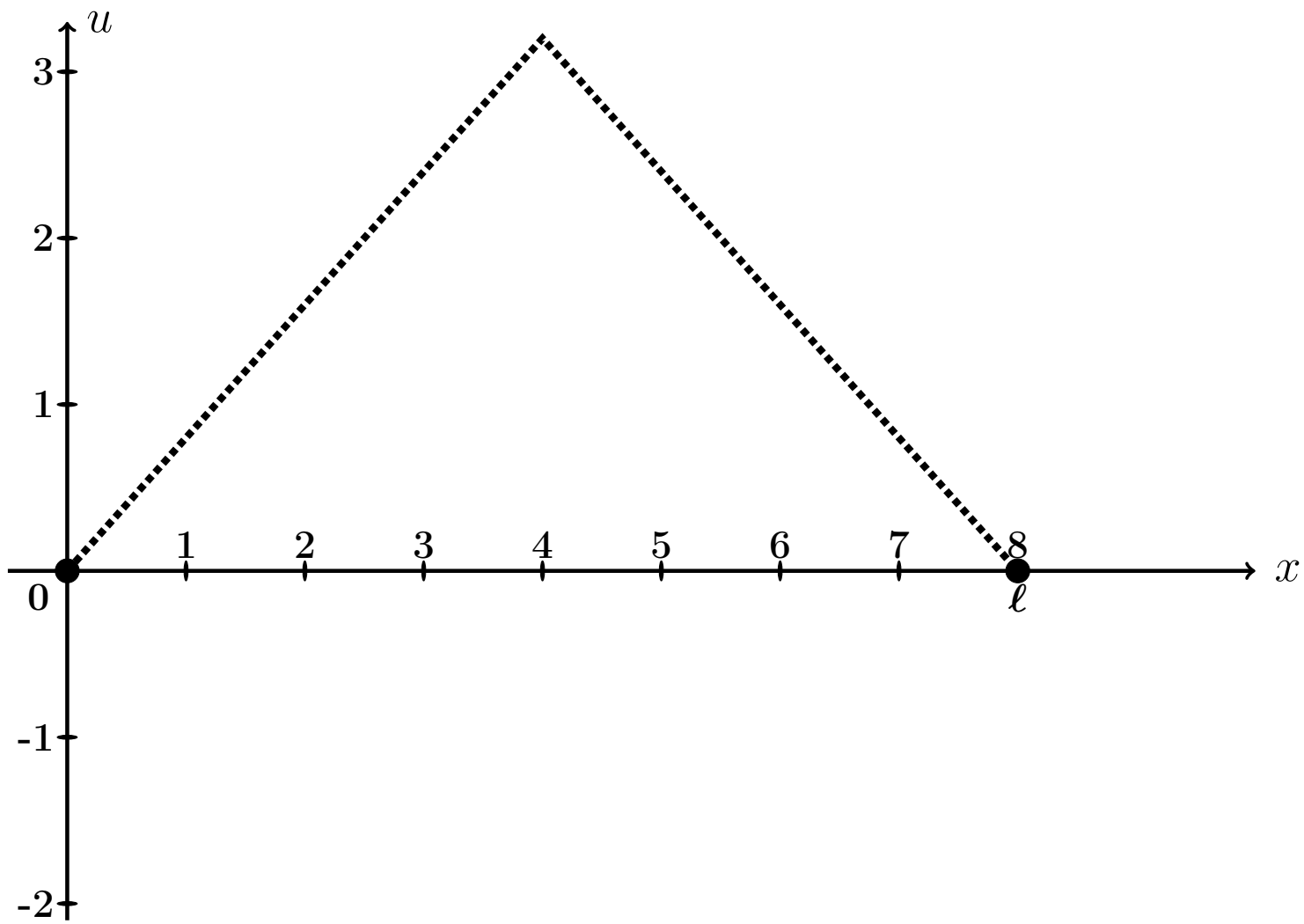


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (23.2).

Выборочная проверка вариант 23 задача 8 (по таблице 23.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 8 (по таблице 23.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 8 (по таблице 23.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 8 (по таблице 23.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{23.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.30)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.70)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(10.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{23.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{7.0}_{T_\ell}. \tag{23.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

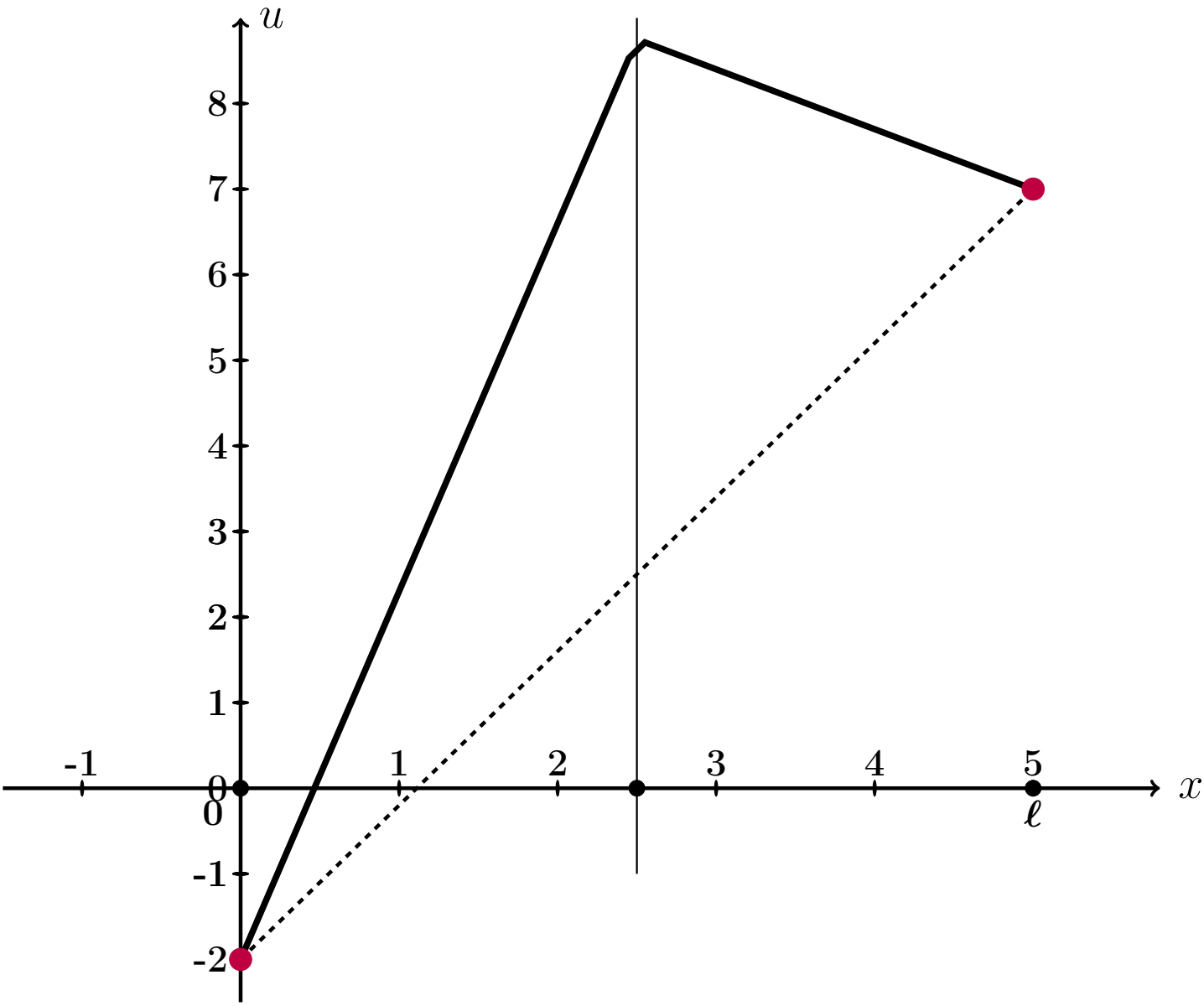


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (23.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (23.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (23.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{23.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{23.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (23.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (23.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{23.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{23.7}$$

Таблица 23.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (23.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (23.1) с начальным условием (23.2) и граничными условиями (23.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (23.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_5 = 7.0$ — значения граничных условий (23.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 23.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 23.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-2	0,15	2,3	4,45	6,6	8,75	8,4	8,05	7,7	7,35	7
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 23.16.

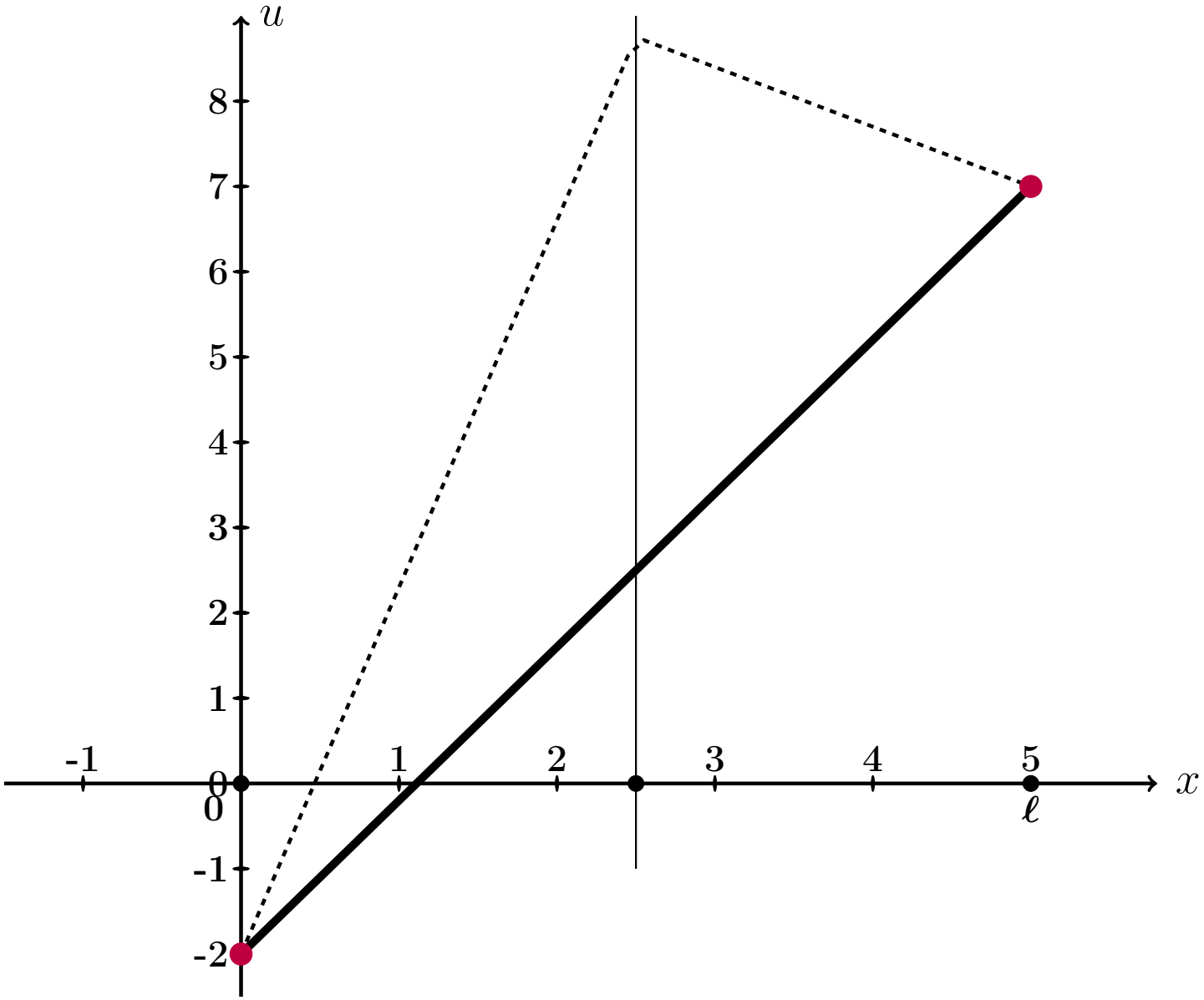


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (23.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (23.3).

Выборочная проверка вариант 23 задача 9 (по формулам (23.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 9 (по таблице 23.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 23 задача 9 (по таблице 23.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 24

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 8$.

$$y = 2 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{8}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{8}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{8}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

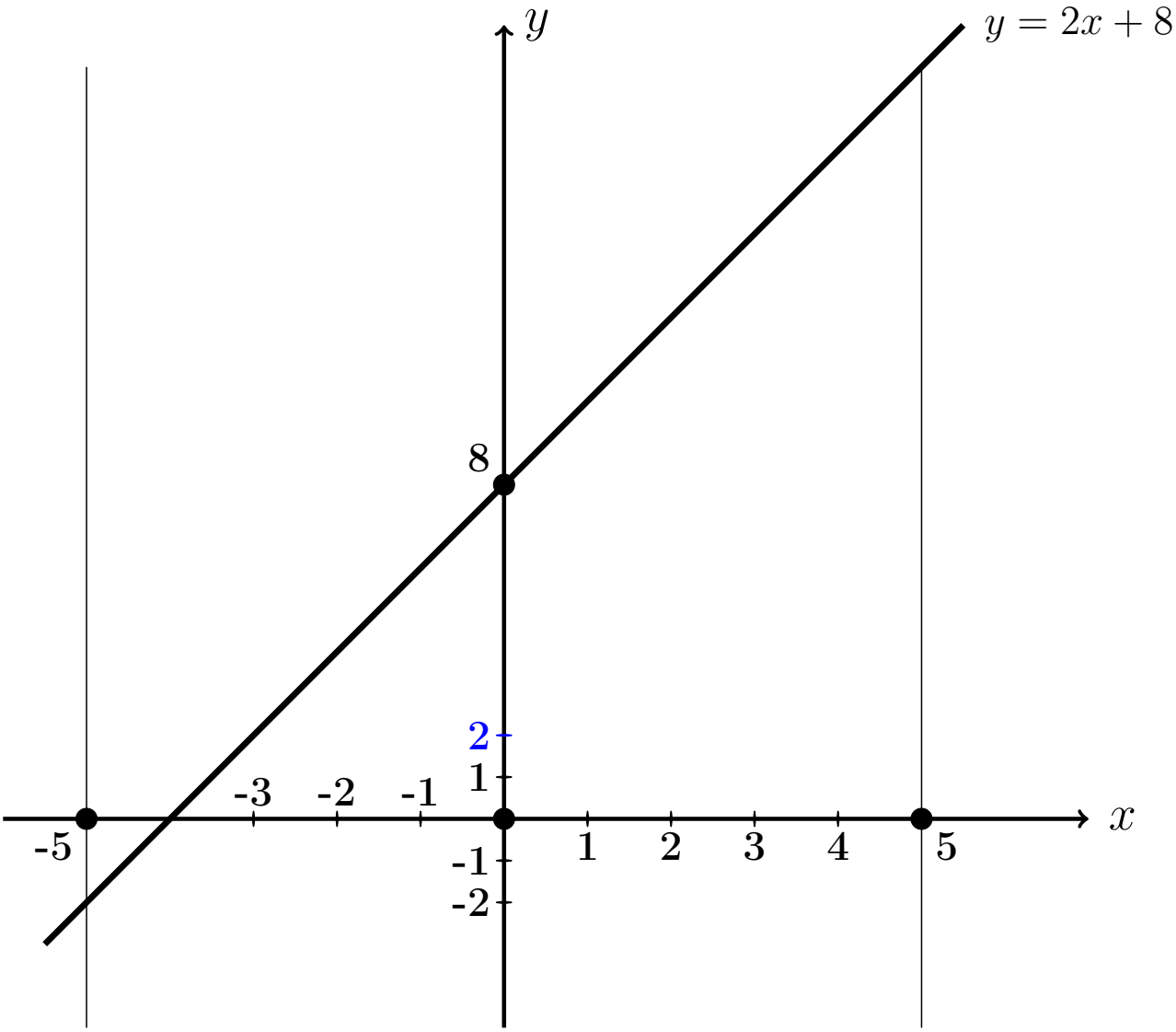
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 24.1 (Табулировка $y=2x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+8$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 24.1



Выборочная проверка вариант 24 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 1 (по Таблице 24.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 18\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=7} = 9\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (6x^2+18\sqrt{y})dx = 6\int x^2\,dx+18\int \sqrt{y}\,dx = \qquad\qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad\qquad\qquad = 9\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x^2 + 6t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x^2 + 6t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x^2 + 6t)dt = \qquad = \qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 4x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

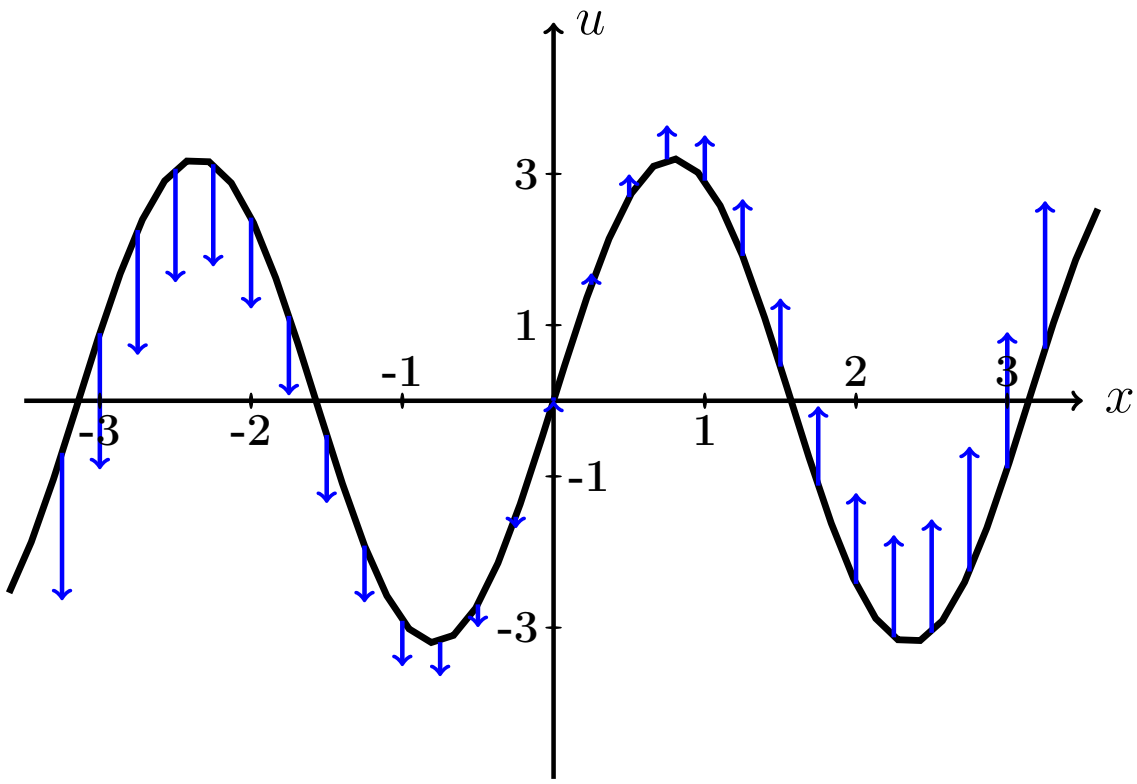


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 24.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 24 задача 4 (по Таблице 24.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 24.2.

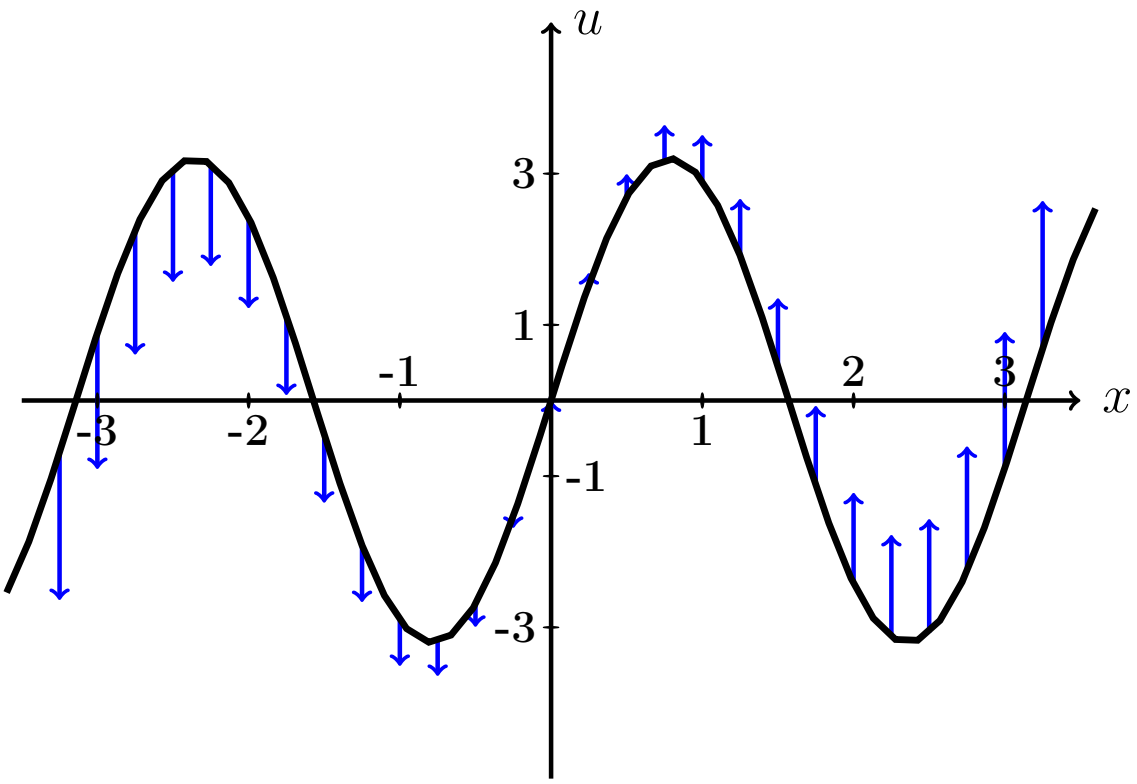


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

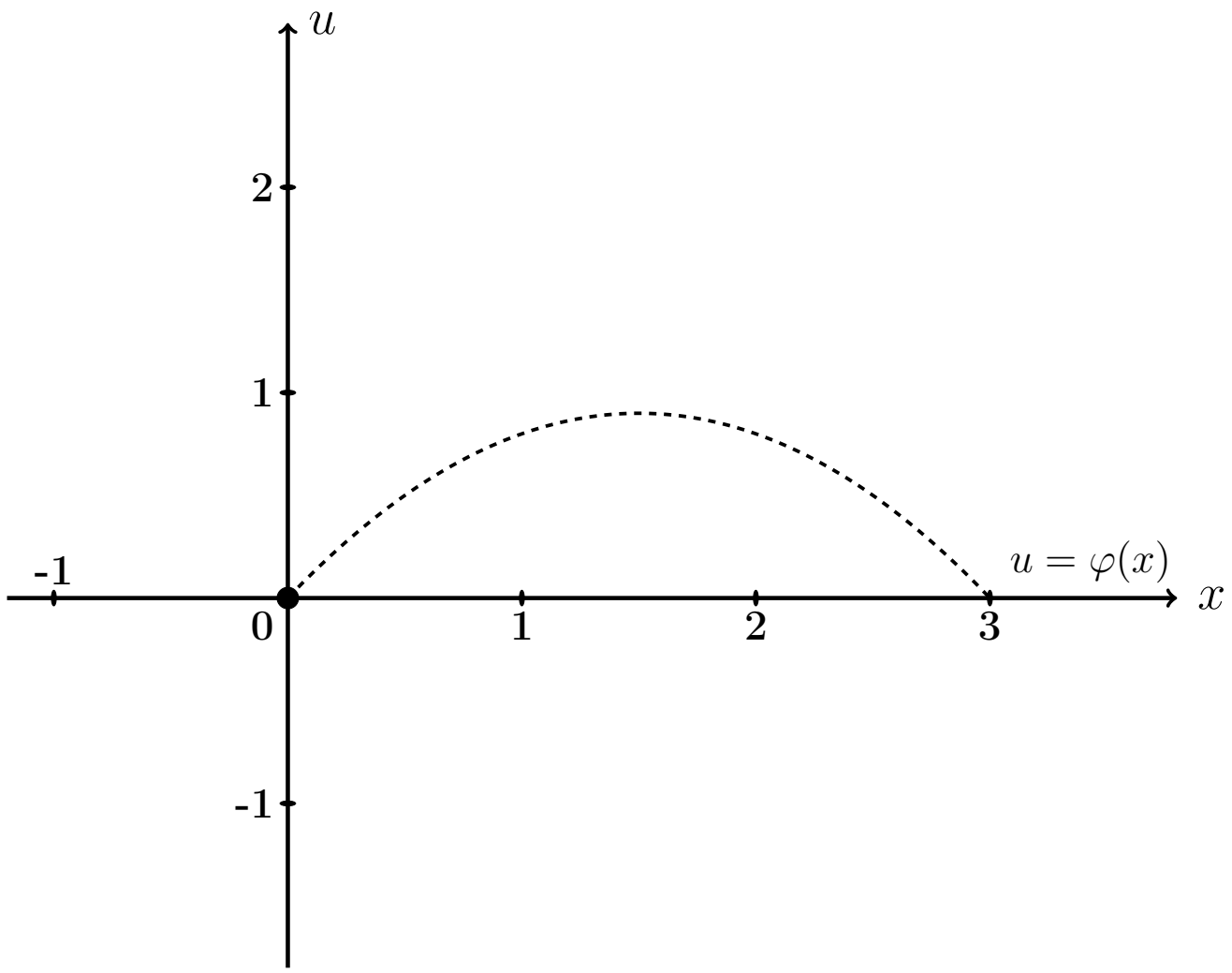


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 24.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 24.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 24.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 24.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 24 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 5 (красные клетки таб. 24.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 24.4.

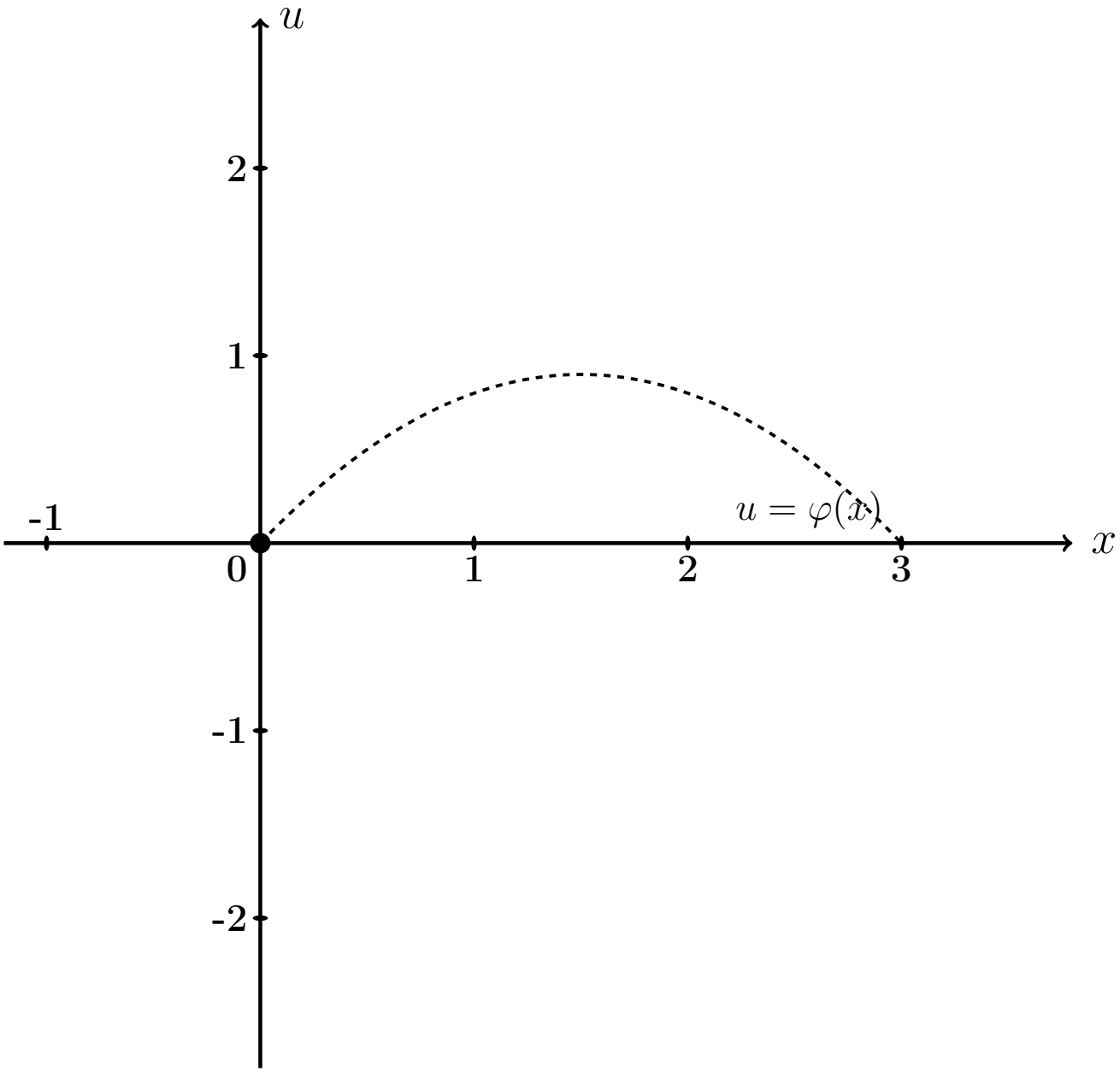


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

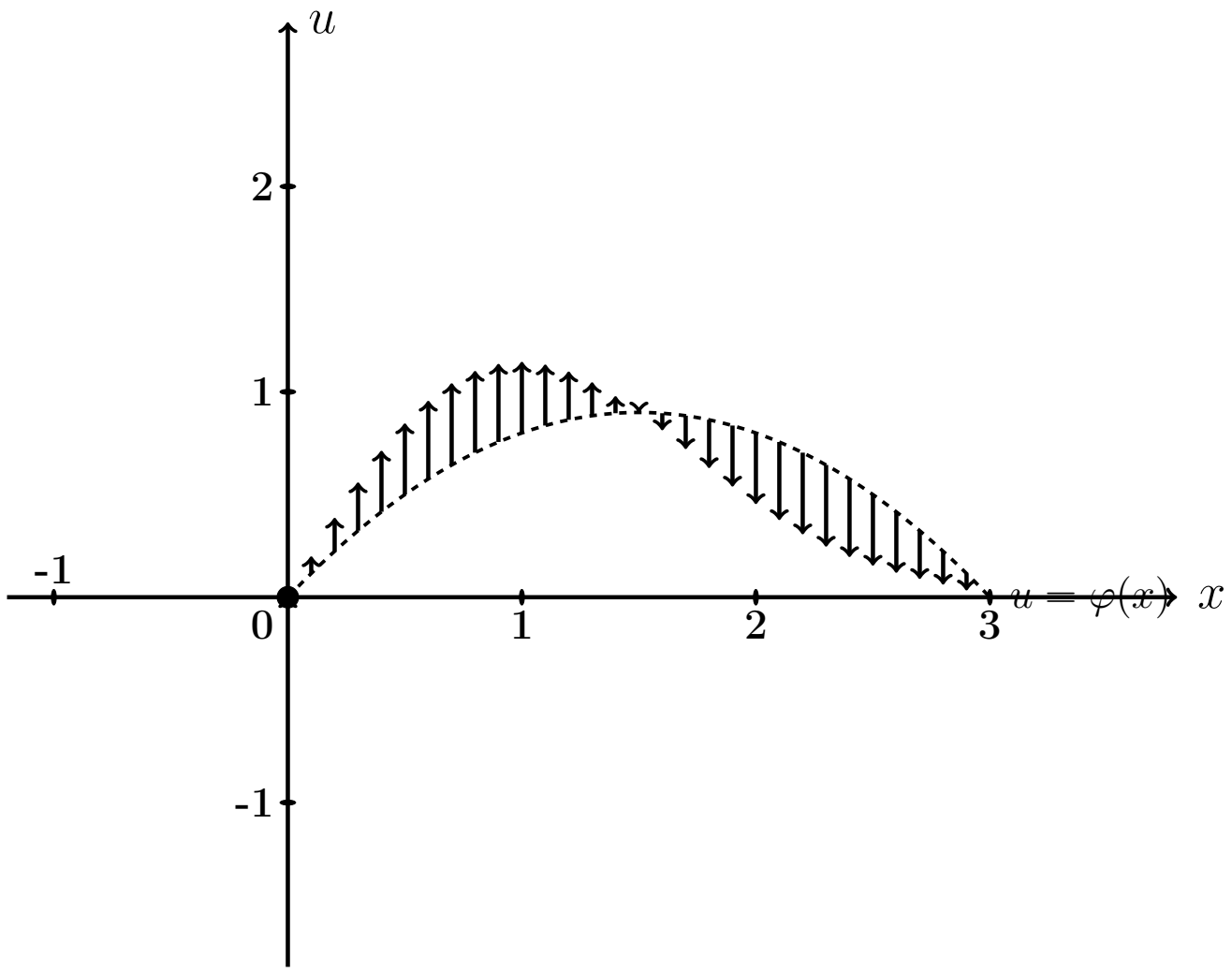


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 24.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.0\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.27$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 24.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 24.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 24.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 24 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 6 (красные клетки Таблицы 24.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 24.6.

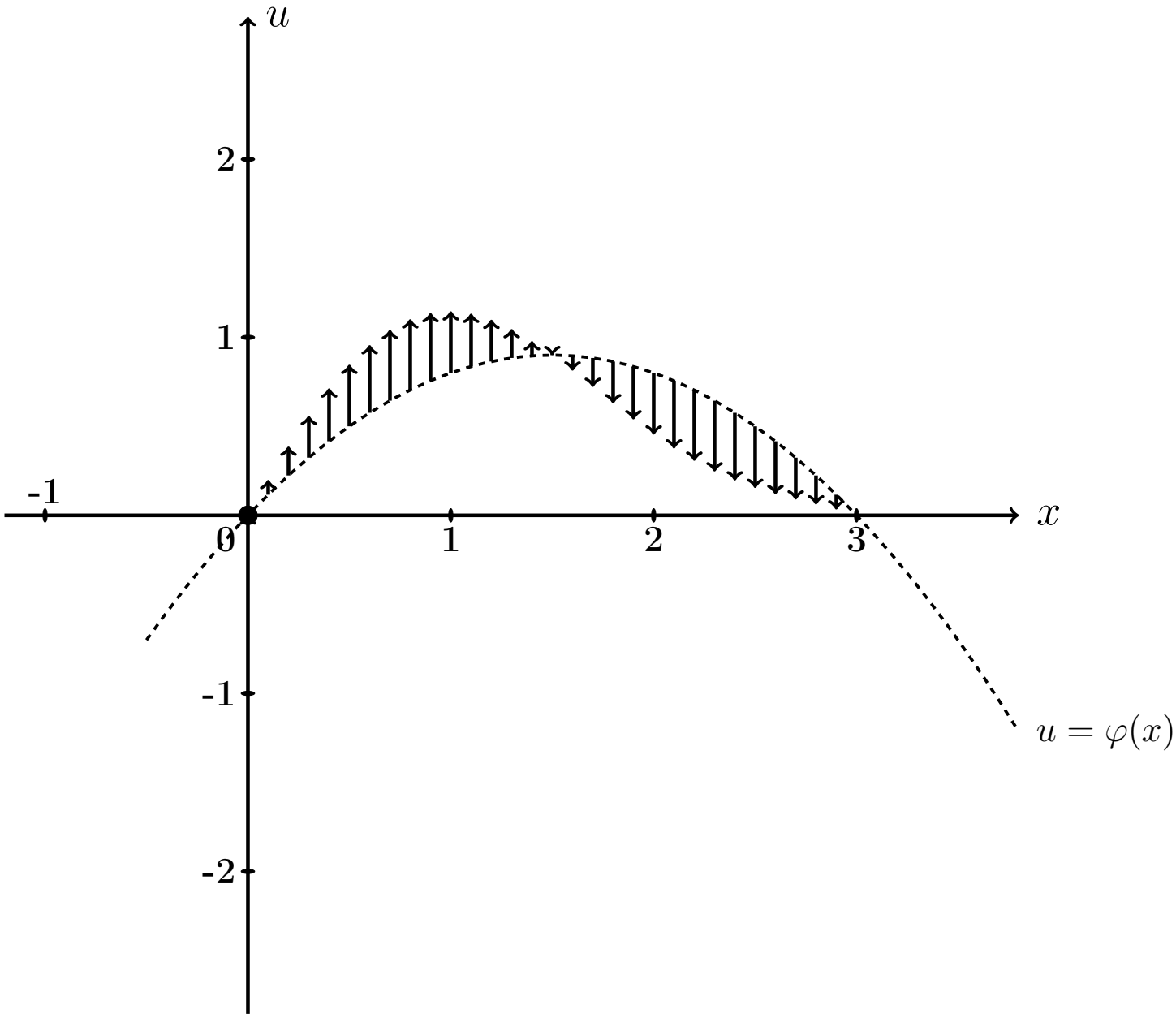


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{24.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{24.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (24.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{24.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (24.2), (24.3). Затабулировать решение уравнения (24.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (24.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (24.2), (24.3). Затабулировать решение уравнения (24.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (24.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 24.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{24.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (24.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{24.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (24.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (24.4) при граничных условиях (24.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{24.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{24.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{24.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (24.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (24.9). Следовательно, по формуле (24.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{24.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{24.11}$$

Шаг 6.

Таблица 24.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 24.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (24.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 24.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 24.9

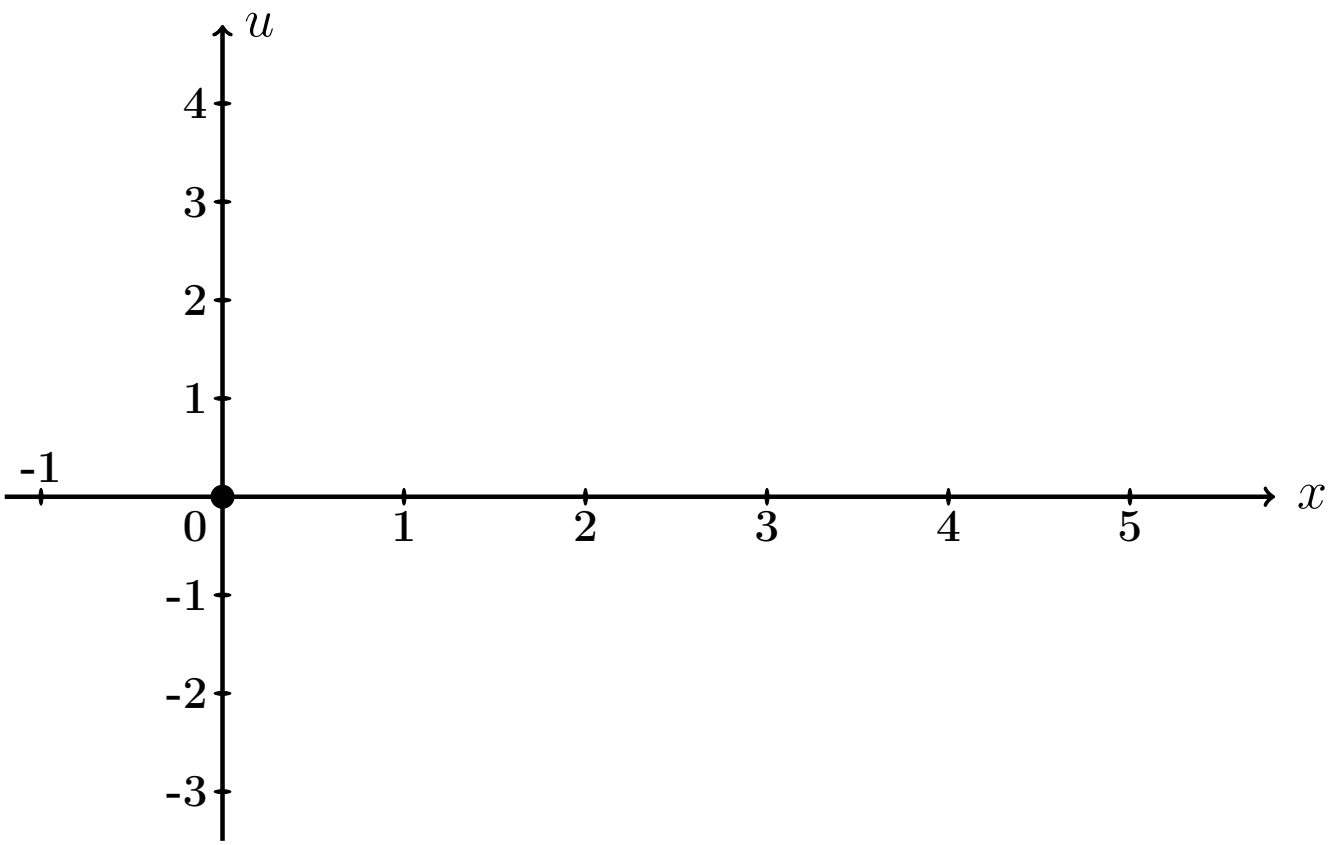


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 24 задача 7 (по Таб. 24.7, 24.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 24 задача 7 (по таблице 24.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи [ ] Клик [ ]

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (24.6) и (24.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (24.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (24.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (24.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (24.9). Следовательно, по формуле (24.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (24.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (24.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (24.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 24.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (24.5),

$C_1' =$ по формуле (24.12)

и $C_3 =$ по таблице 24.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 24.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

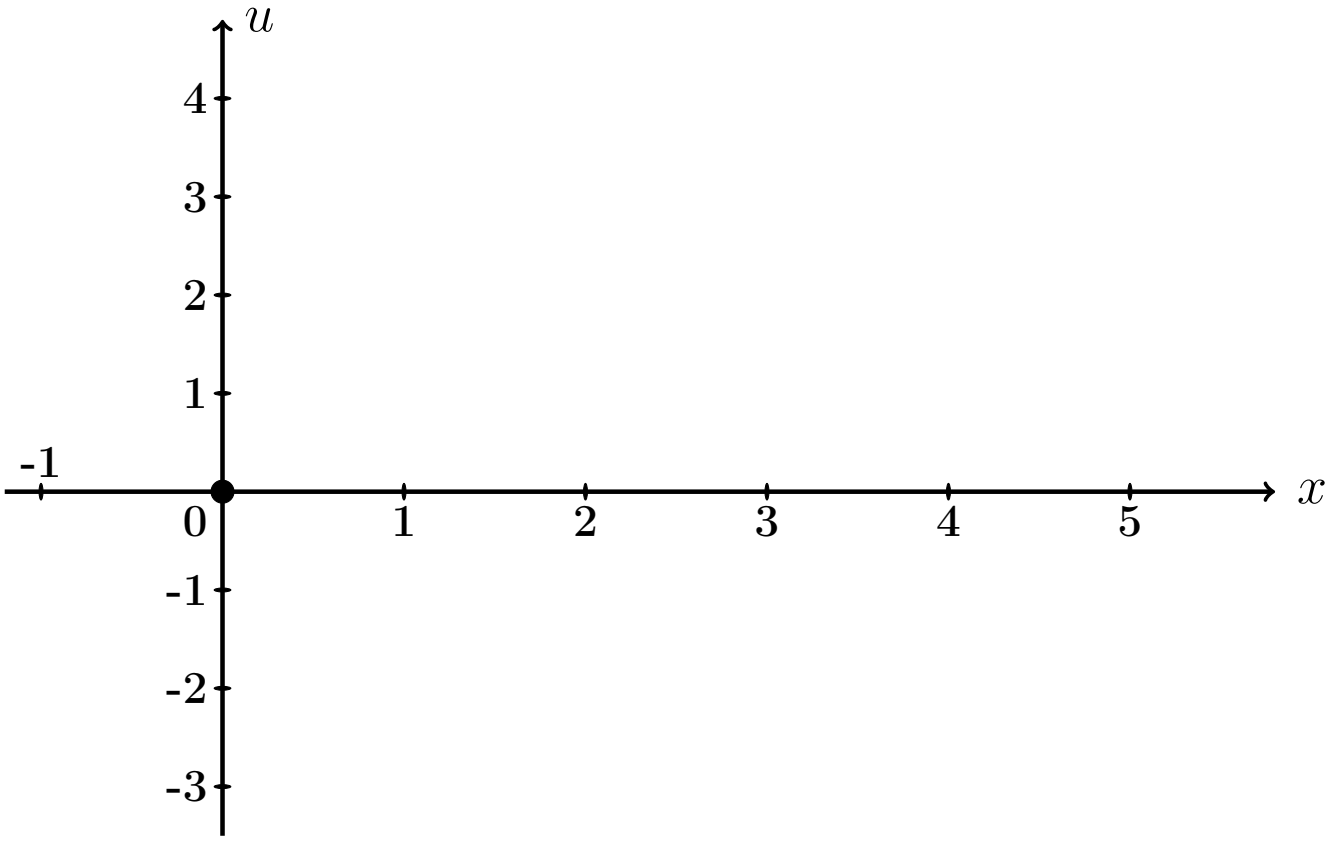


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 24 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (24.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 24 задача 7 (по таблице 24.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{24.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (24.1). Затабулировать решение уравнения (24.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

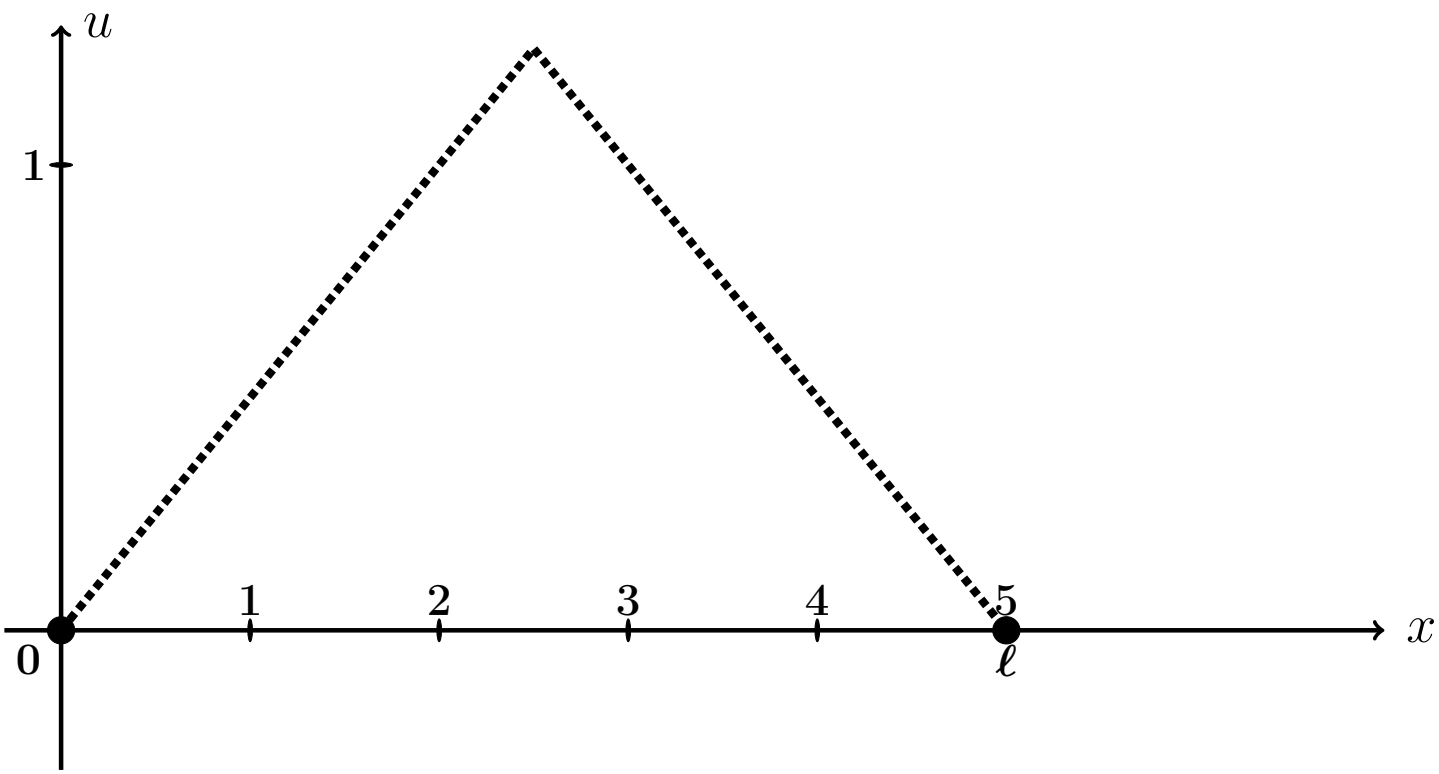


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (24.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5} , \end{aligned}\right\} \qquad (24.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2} .$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 24.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$\qquad = \qquad + \qquad =$

$= \qquad .$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$A_k =$

$\qquad =$

$= \qquad =$

$= \qquad - \qquad +$

$+ \qquad - \qquad -$

$- \qquad + \qquad =$

$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$

$+ \qquad - \qquad .$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$A_k = \qquad =$

Таблица 24.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 24.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 24.12, 24.13) формулы (24.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 24.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 24.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 24.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 24.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

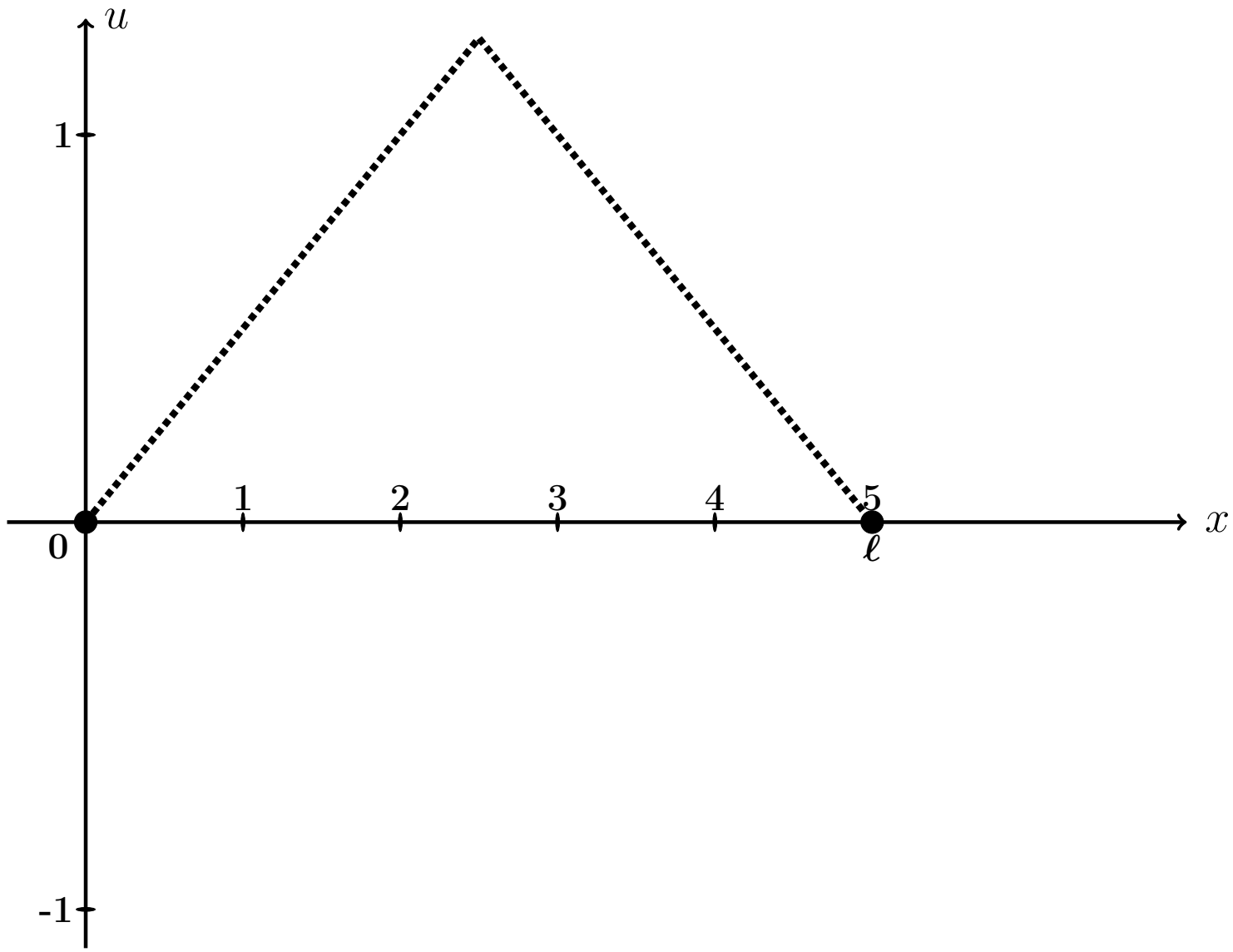


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (24.2).

Выборочная проверка вариант 24 задача 8 (по таблице 24.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 8 (по таблице 24.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 8 (по таблице 24.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 8 (по таблице 24.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.25)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.25)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(7.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{24.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{24.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

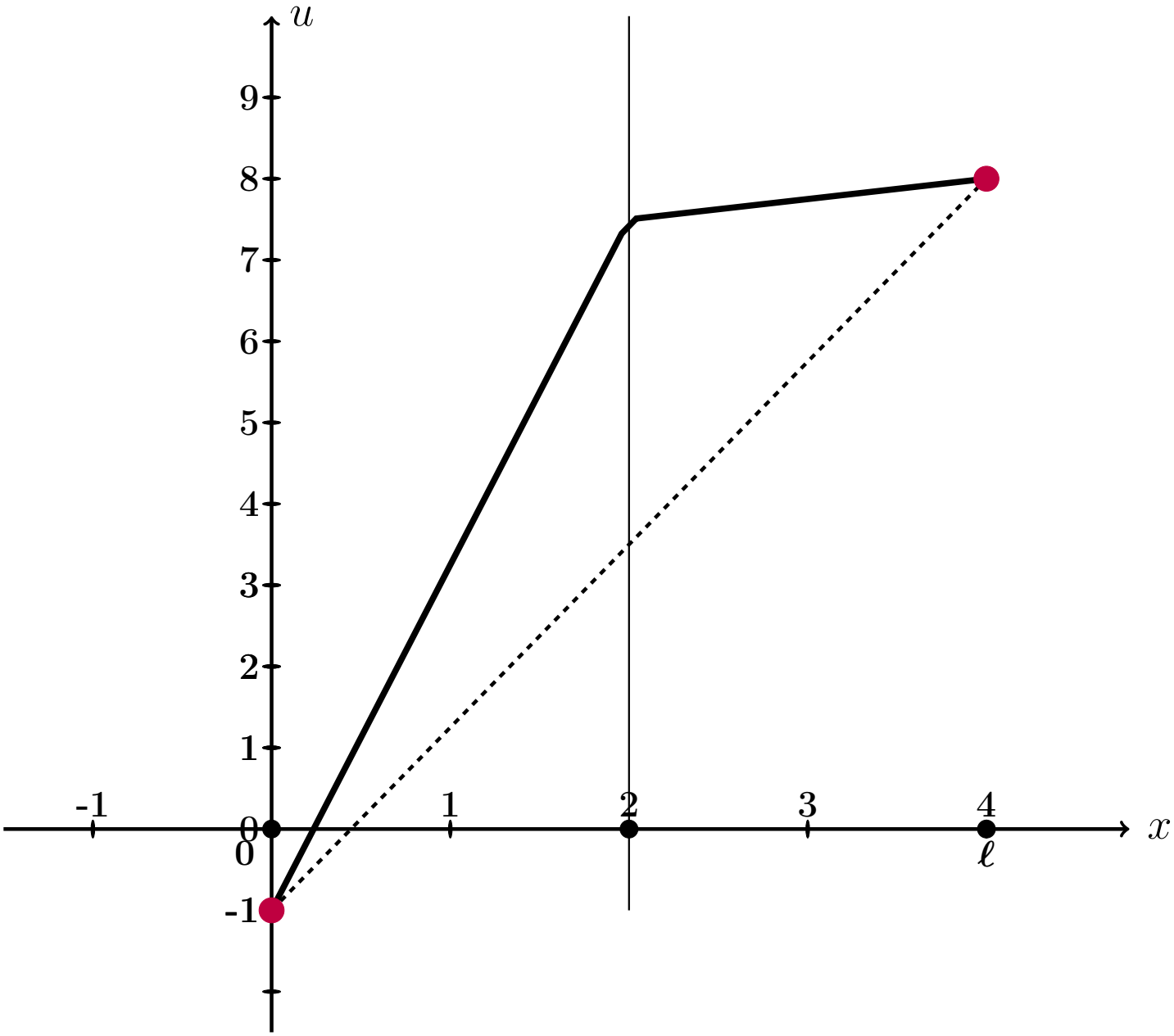


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (24.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (24.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (24.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{24.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{24.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (24.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (24.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{24.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{24.7}$$

Таблица 24.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (24.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (24.1) с начальным условием (24.2) и граничными условиями (24.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (24.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_4 = 8.0$ — значения граничных условий (24.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 24.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 24.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-1	0,7	2,4	4,1	5,8	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 24.16.

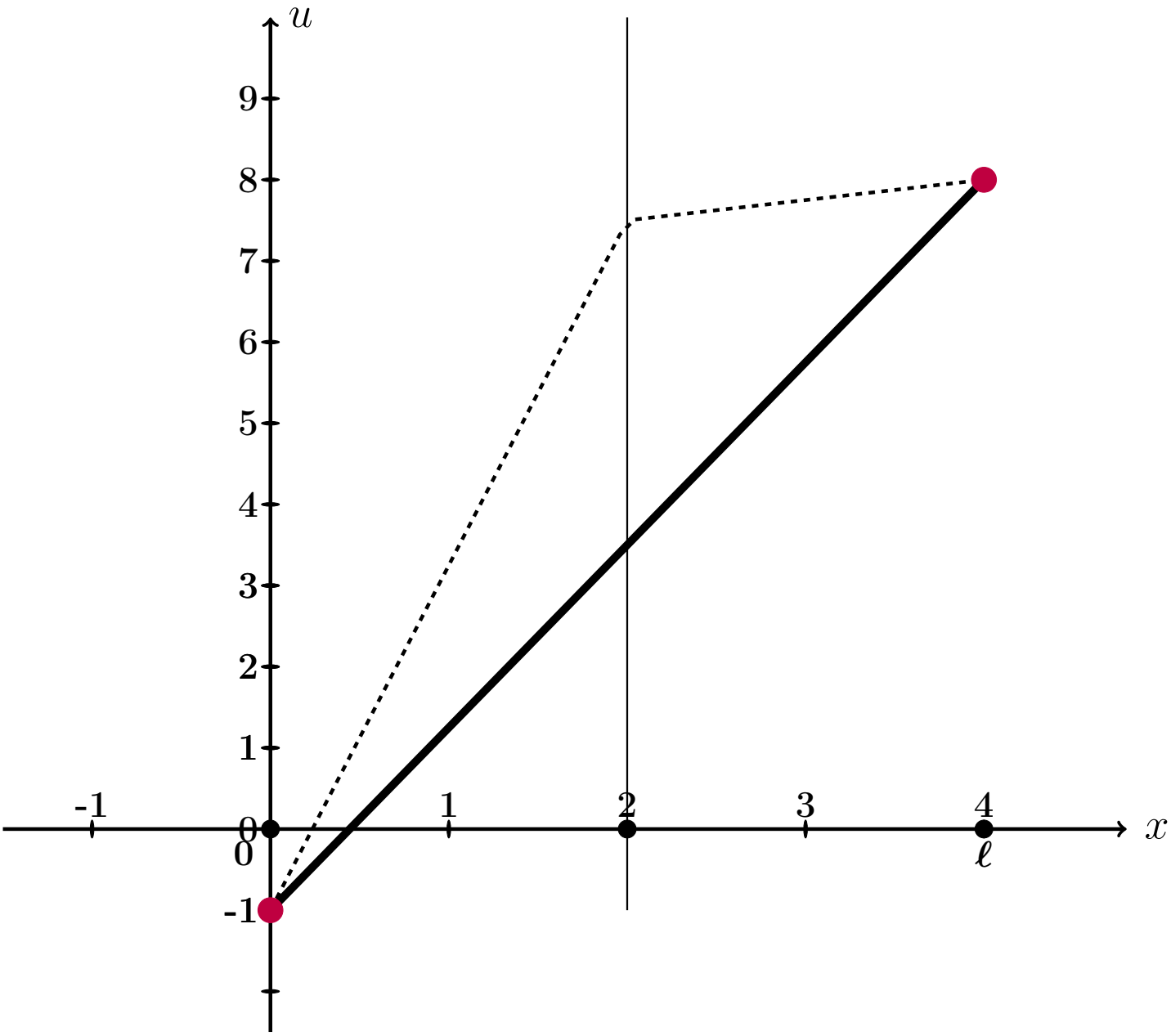


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (24.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (24.3).

Выборочная проверка вариант 24 задача 9 (по формулам (24.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 9 (по таблице 24.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 24 задача 9 (по таблице 24.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 25

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{7}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{7}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{7}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

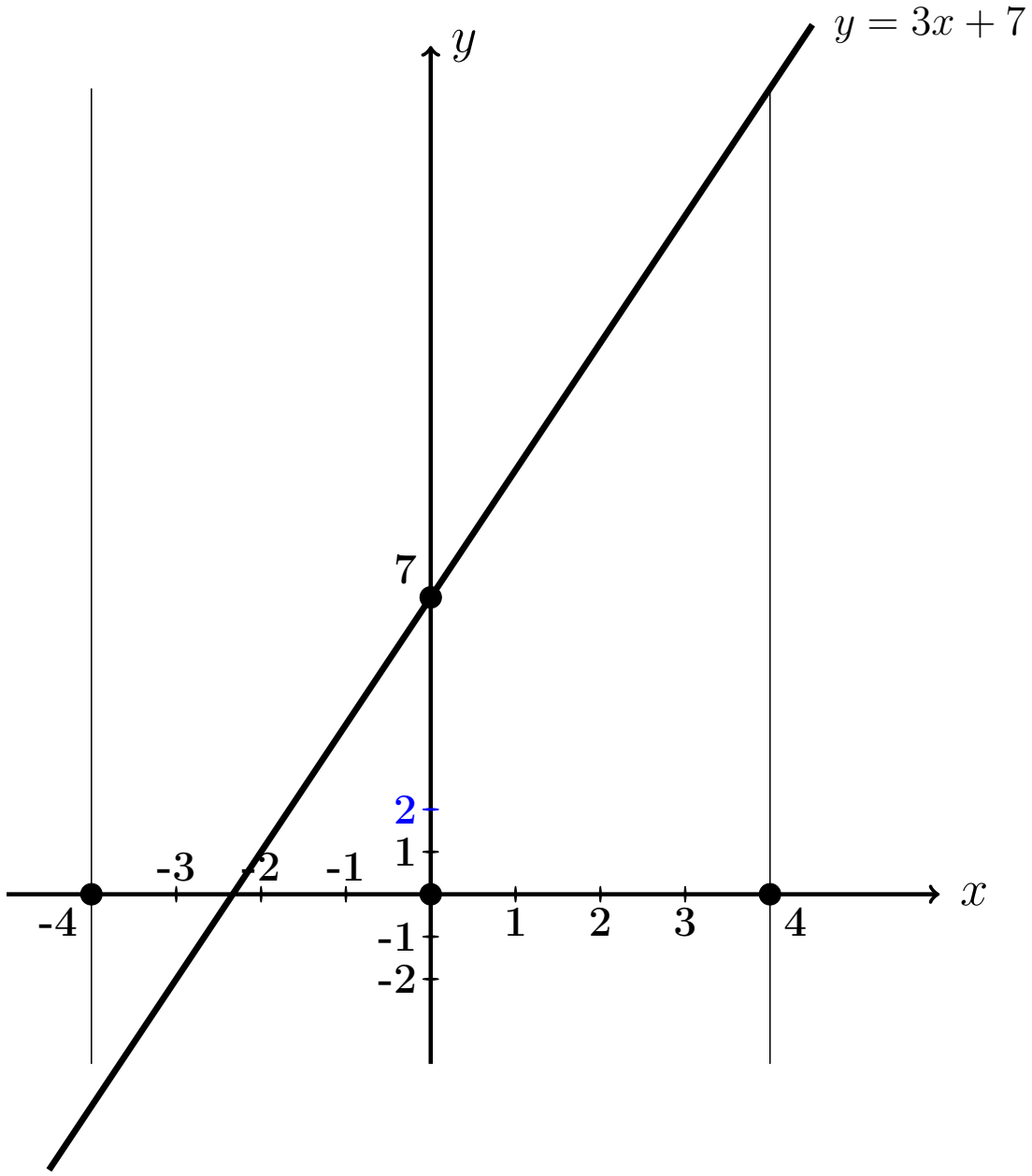
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 25.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+7$	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 25.1



Выборочная проверка вариант 25 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 1 (по Таблице 25.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sin x + 24y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (8\sin x + 24y^3)dx = 8\int \sin x\,dx + 24\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 12\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x + 8t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x + 8t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x + 8t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 25 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

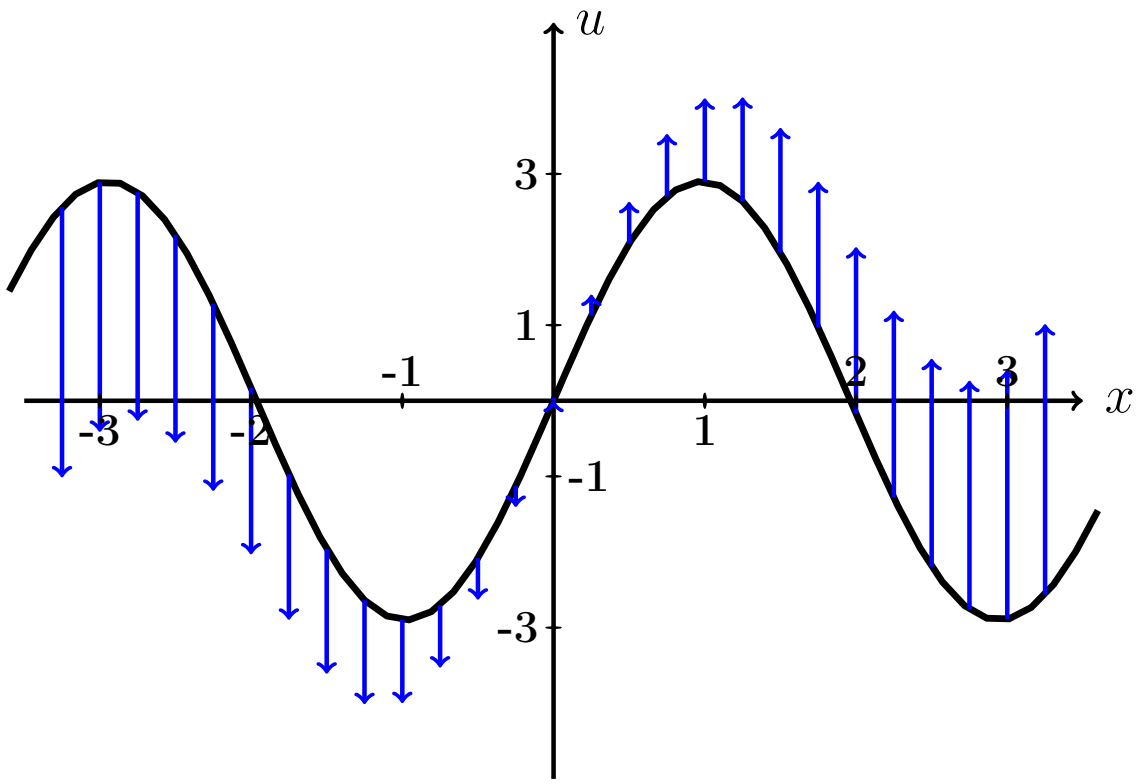


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 25.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 25 задача 4 (по Таблице 25.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 25.2.

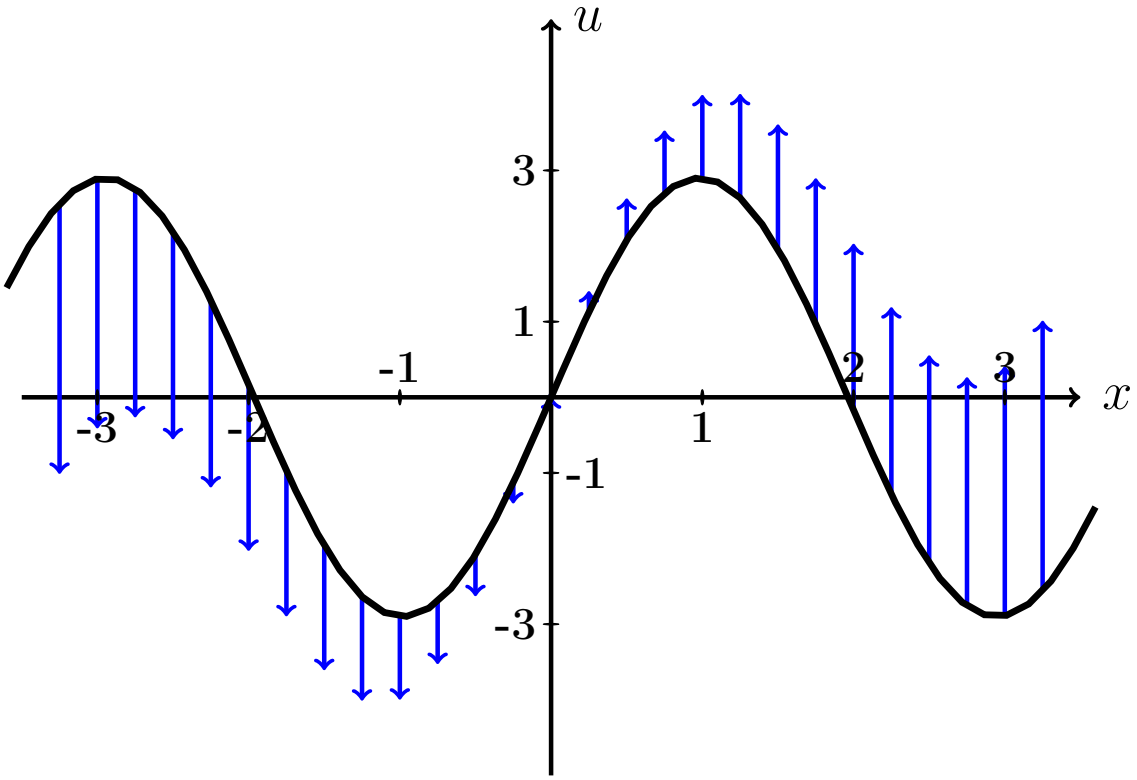


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

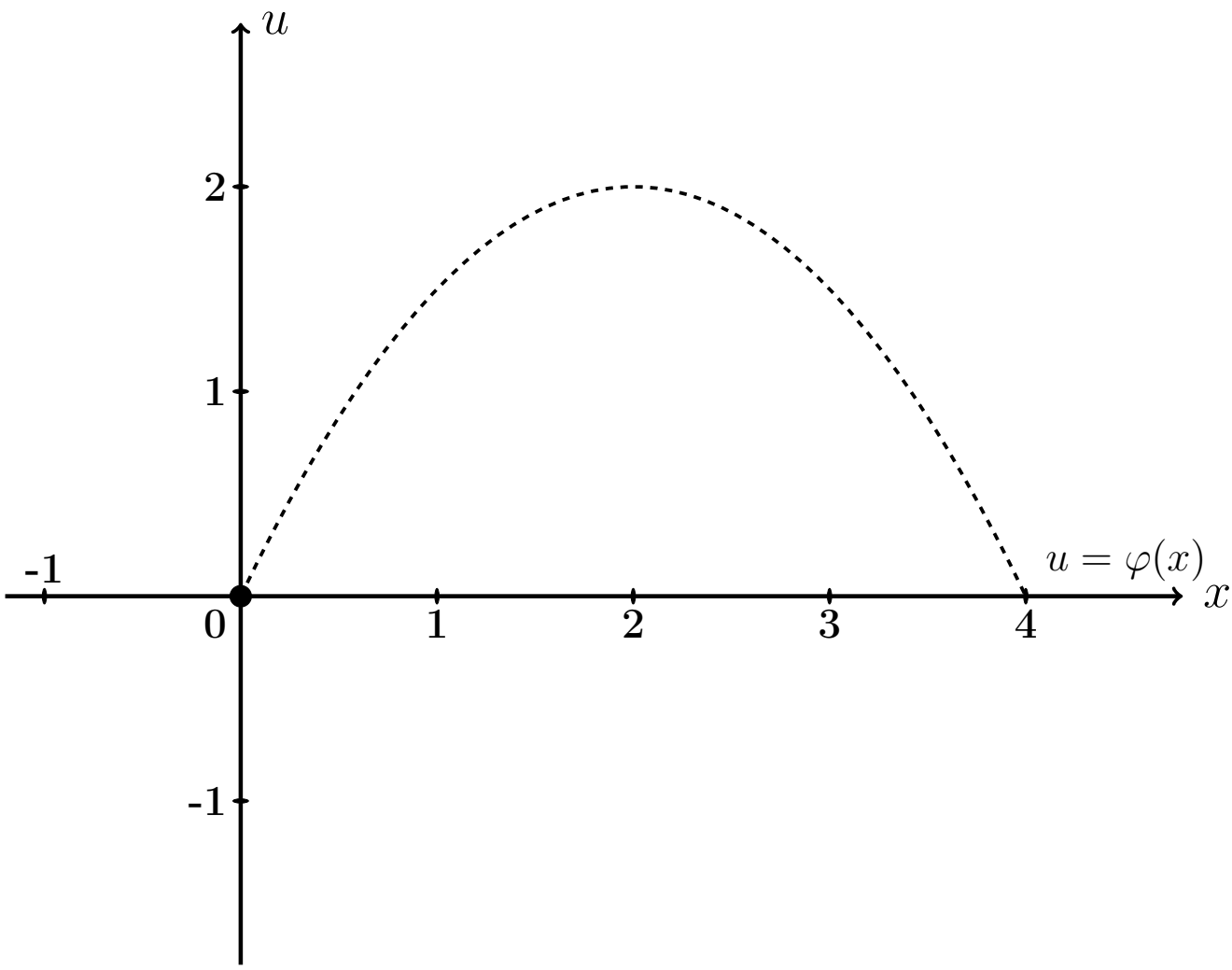


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 25.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 25.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 25.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 25.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 25 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 5 (красные клетки таб. 25.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 25.4.

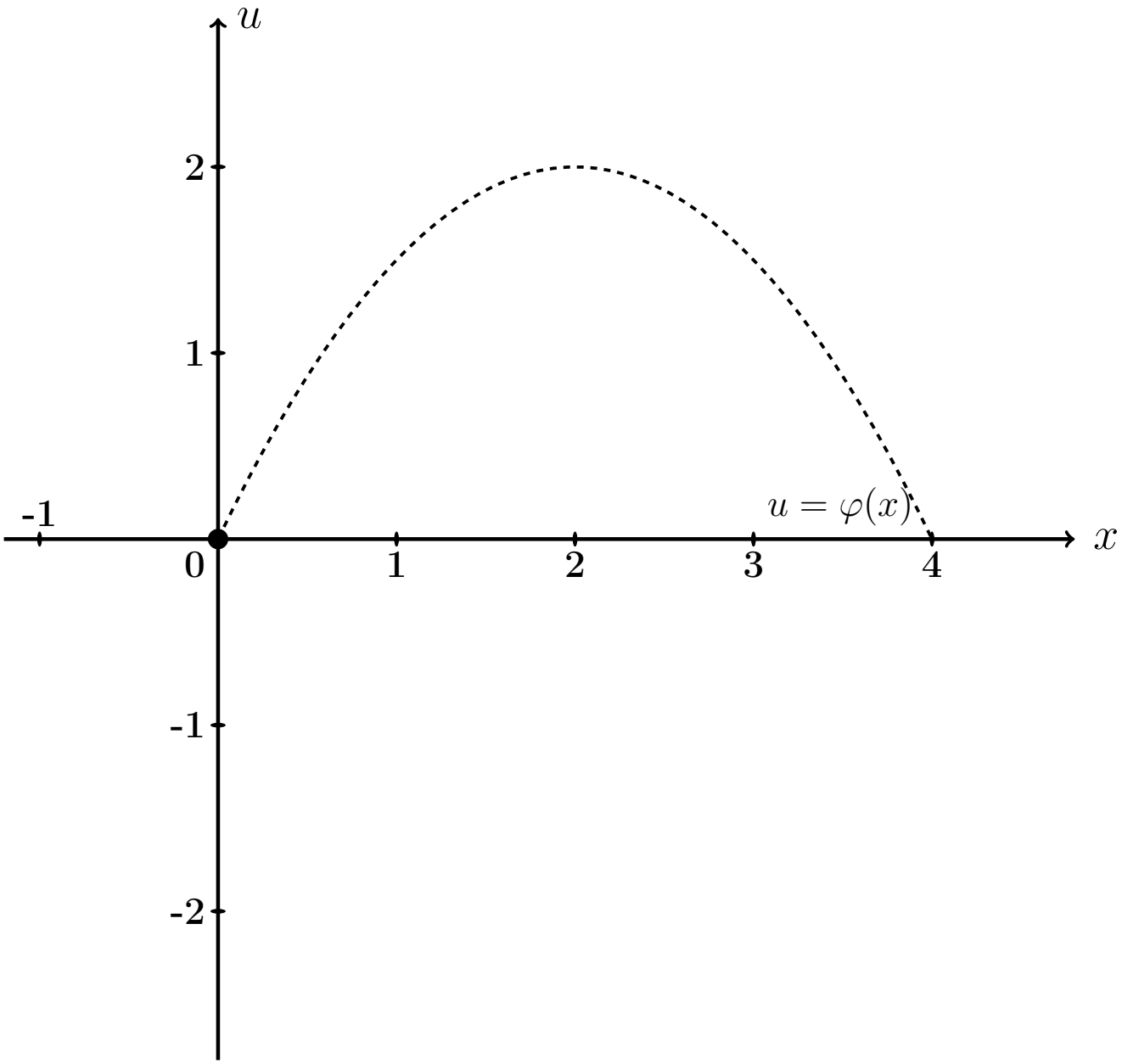


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

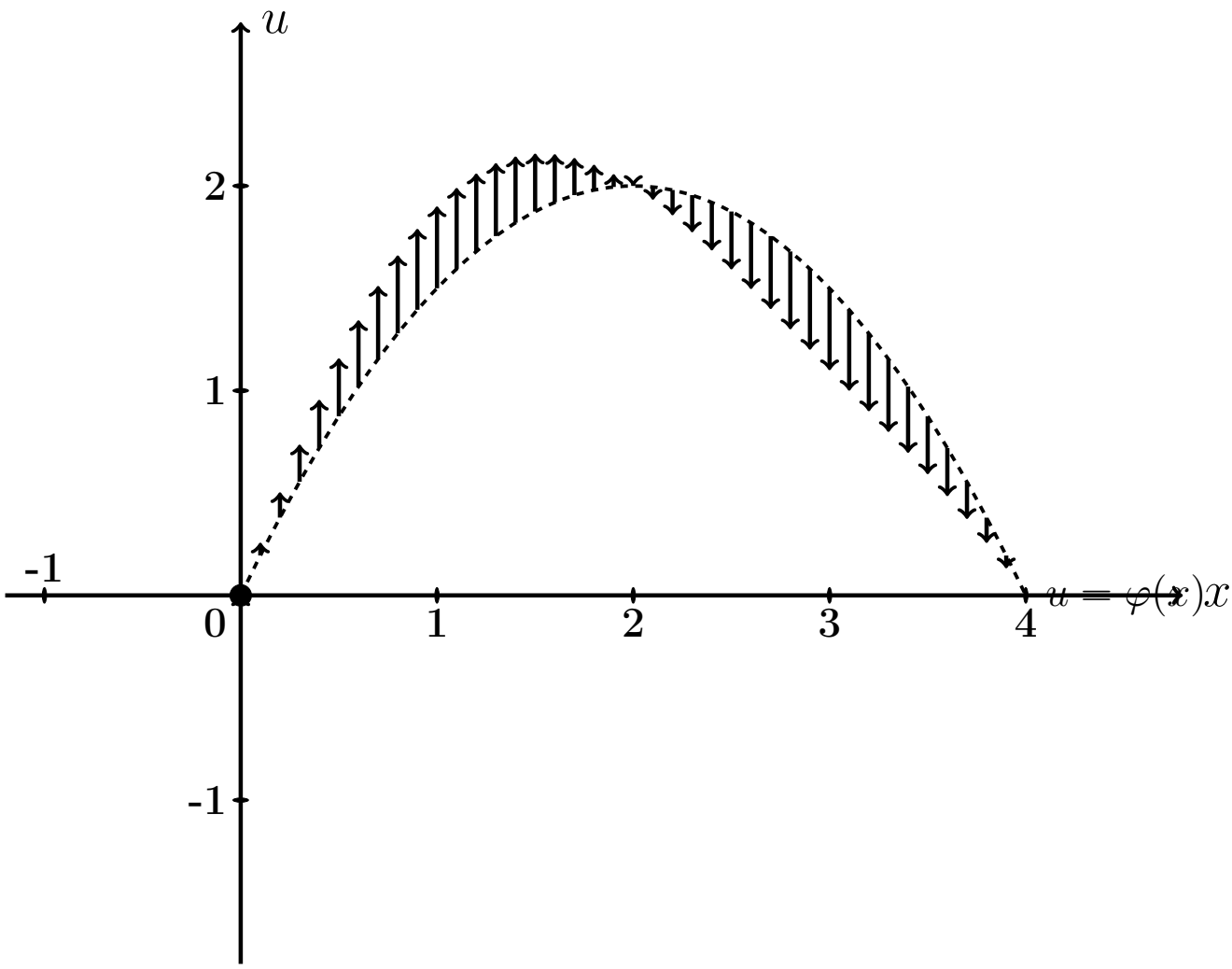


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 25.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 25.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 25.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 25.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 25 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 6 (красные клетки Таблицы 25.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 25.6.

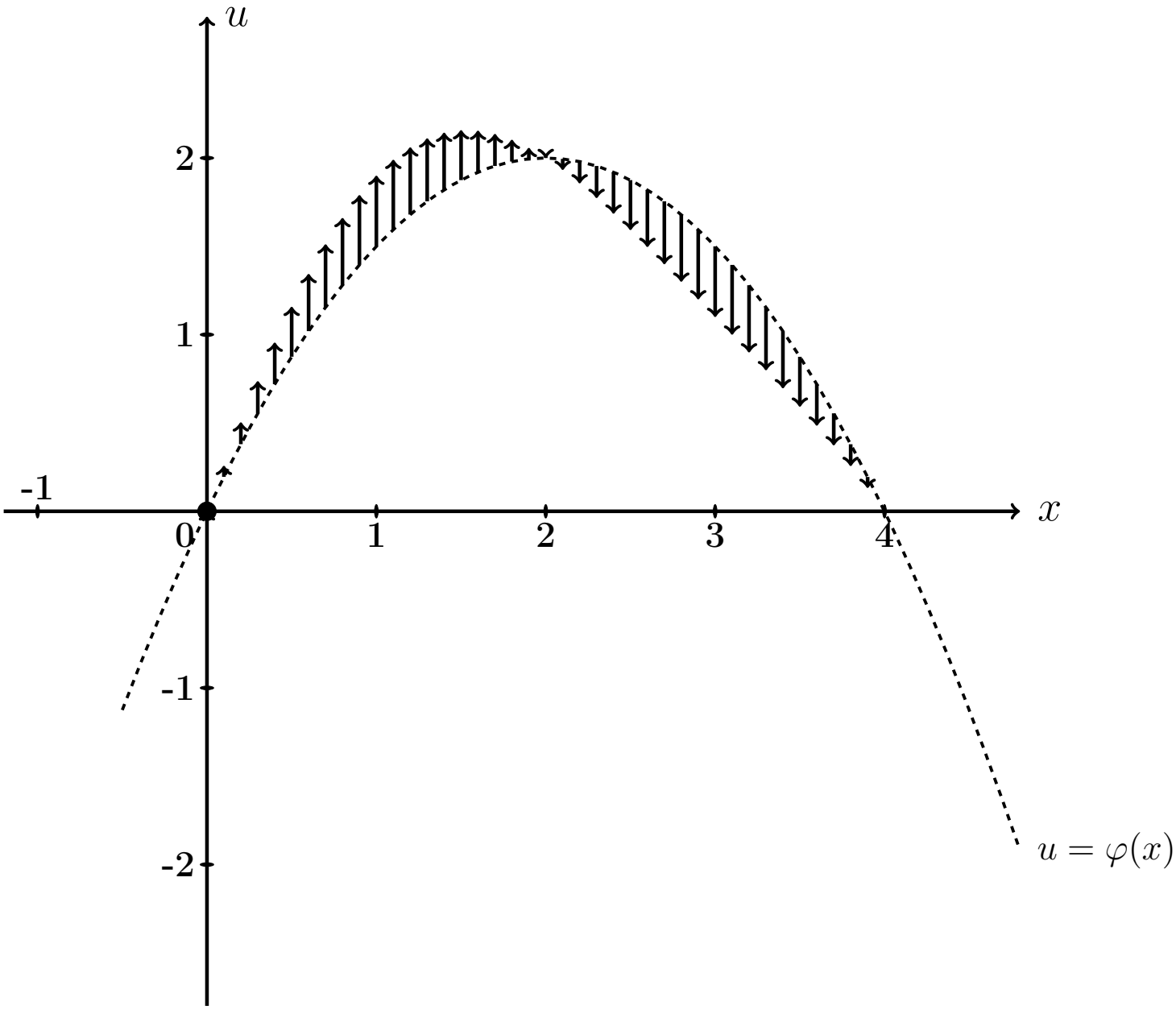


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{25.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{25.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,. \tag{25.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (25.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{25.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (25.2), (25.3). Затабулировать решение уравнения (25.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (25.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (25.2), (25.3). Затабулировать решение уравнения (25.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (25.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 25.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{25.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (25.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{25.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (25.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (25.4) при граничных условиях (25.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{25.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{25.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{25.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (25.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (25.9). Следовательно, по формуле (25.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{25.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{25.11}$$

Шаг 6.

Таблица 25.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 25.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (25.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 25.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 25.9

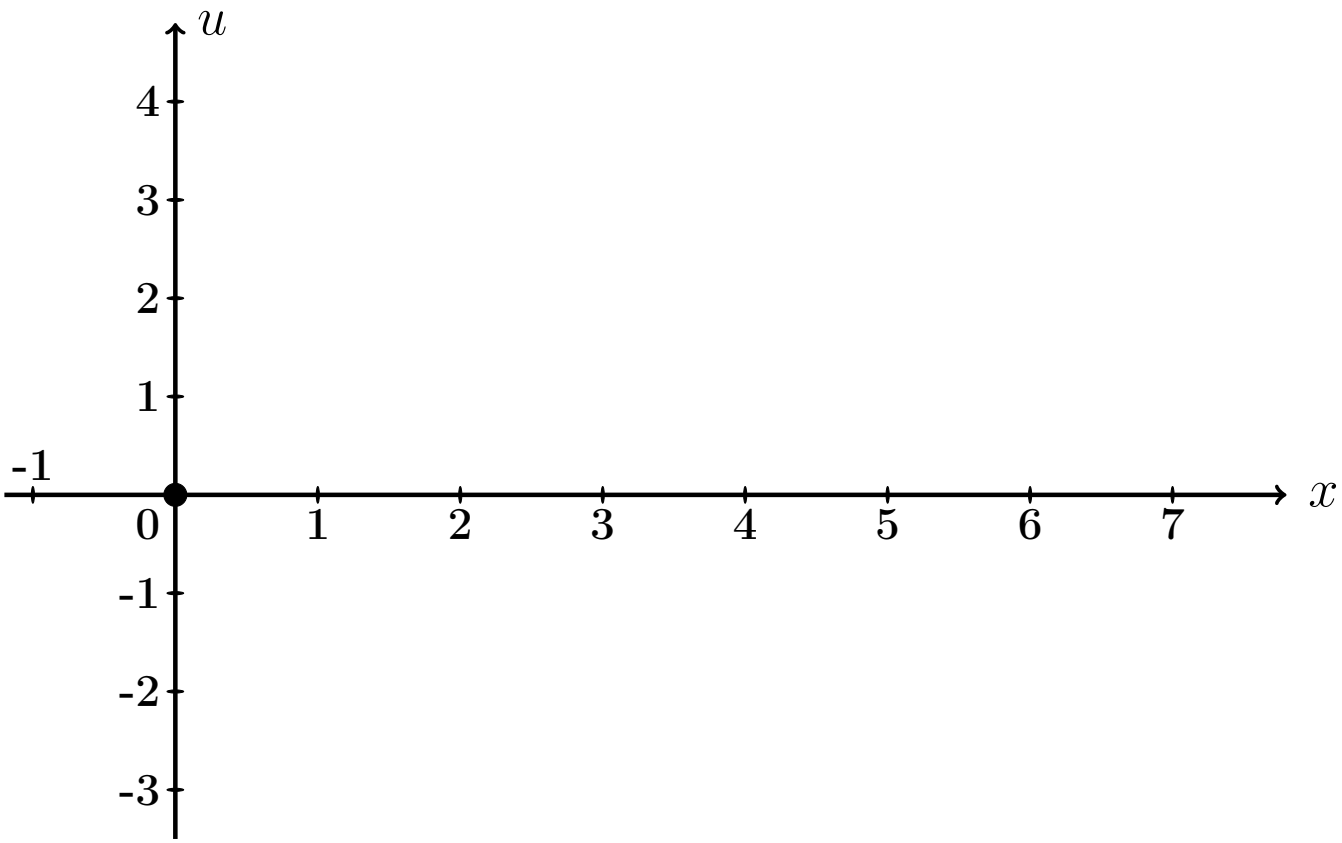


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 25 задача 7 (по Таб. 25.7, 25.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 7 (по таблице 25.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (25.6) и (25.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (25.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (25.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (25.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (25.9). Следовательно, по формуле (25.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (25.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (25.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (25.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 25.7,

$\ell =$ ____, $a =$ ____, $\Omega =$ _____,

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (25.5),

$C_1' =$ _____ по формуле (25.12)

и $C_3 =$ _____ по таблице 25.8 . Окончательно

$u_{\text{прибл}}(x,t) =$ _____ $+$ _____ $+$

$+$ _____ $+$

$+$ _____ .

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 25.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

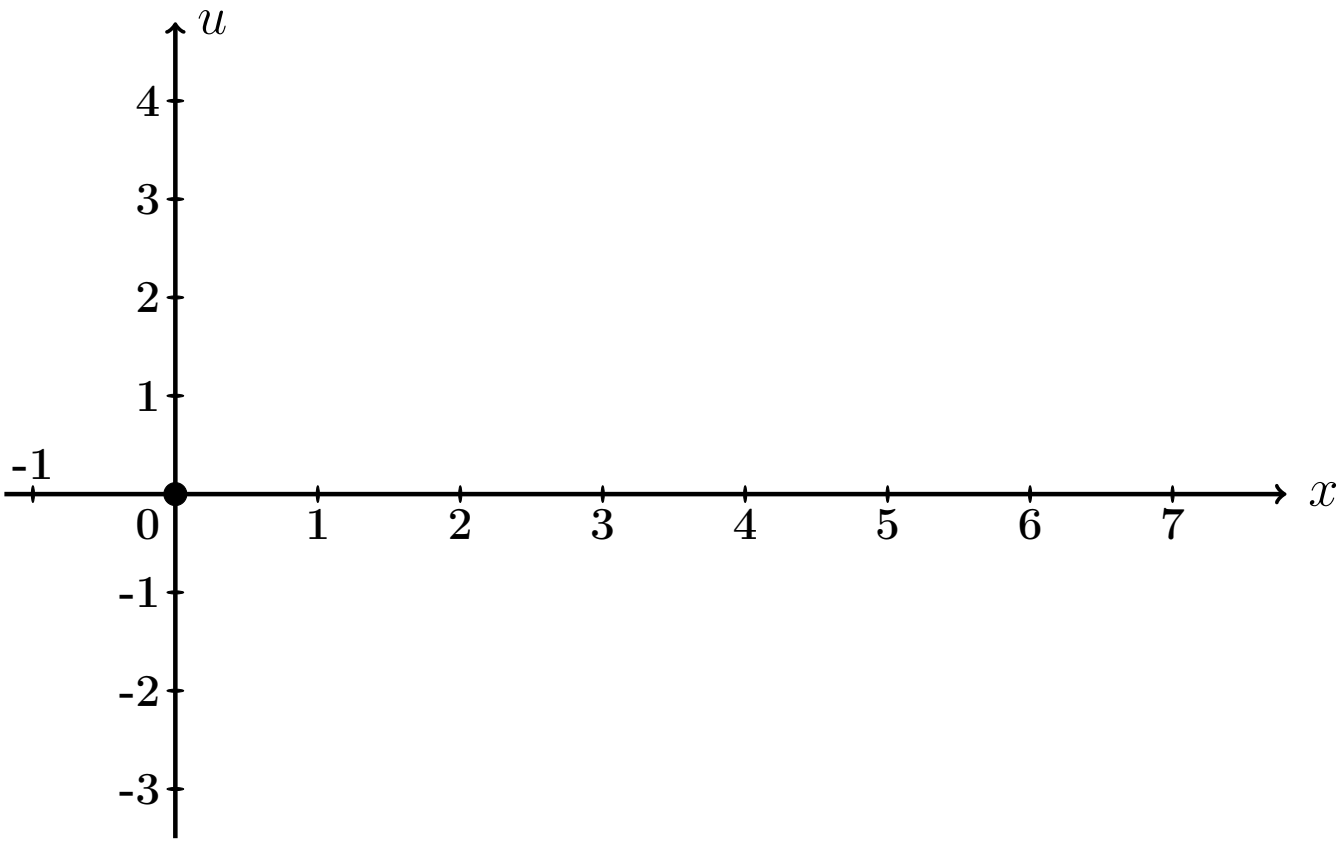


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 25 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (25.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 25 задача 7 (по таблице 25.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{25.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{25.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (25.1). Затабулировать решение уравнения (25.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

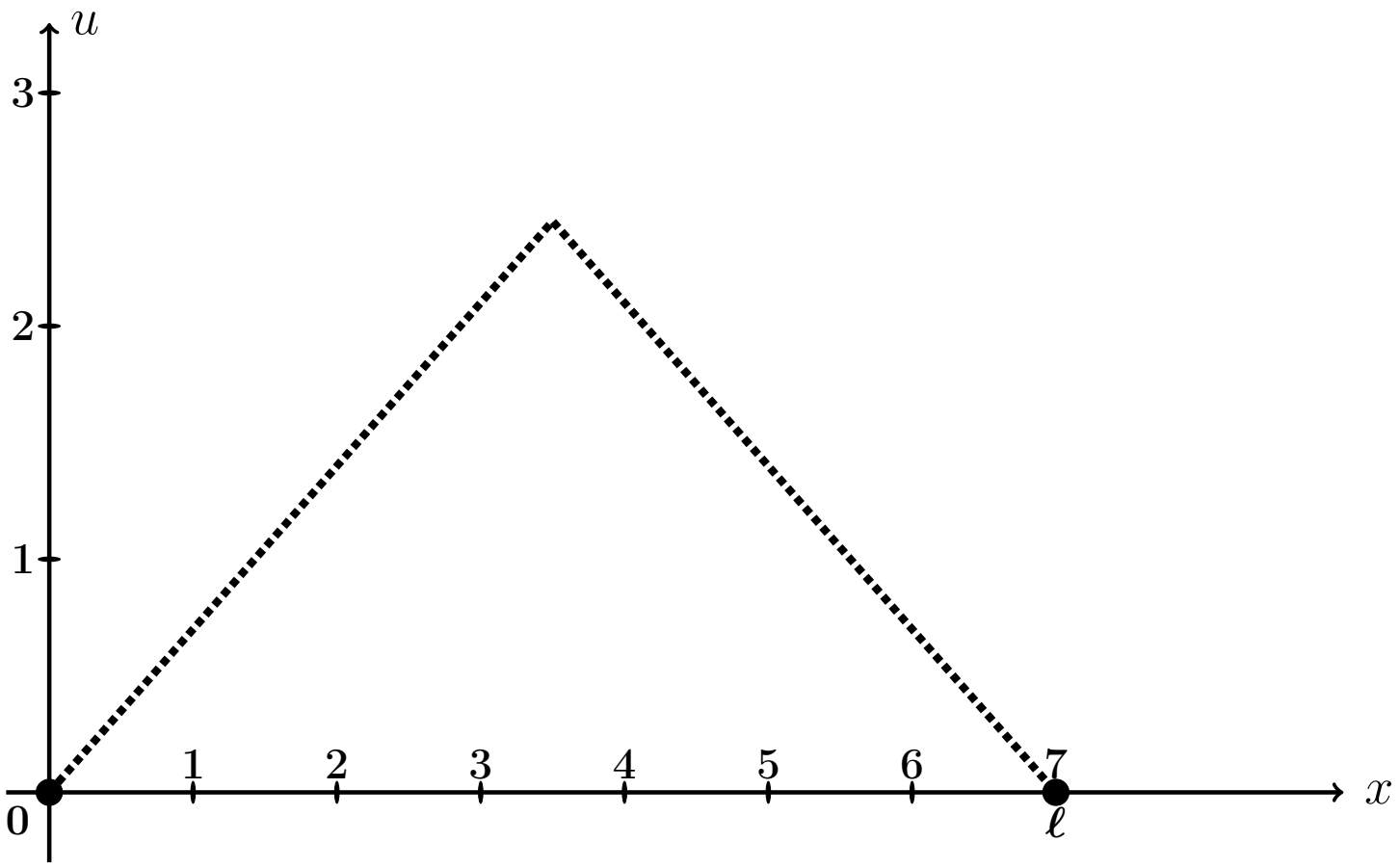


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (25.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \qquad (25.3)$$

где $\ell = 7$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 25.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 25.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 25.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 25.12, 25.13) формулы (25.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 25.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 25.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 25.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 25.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

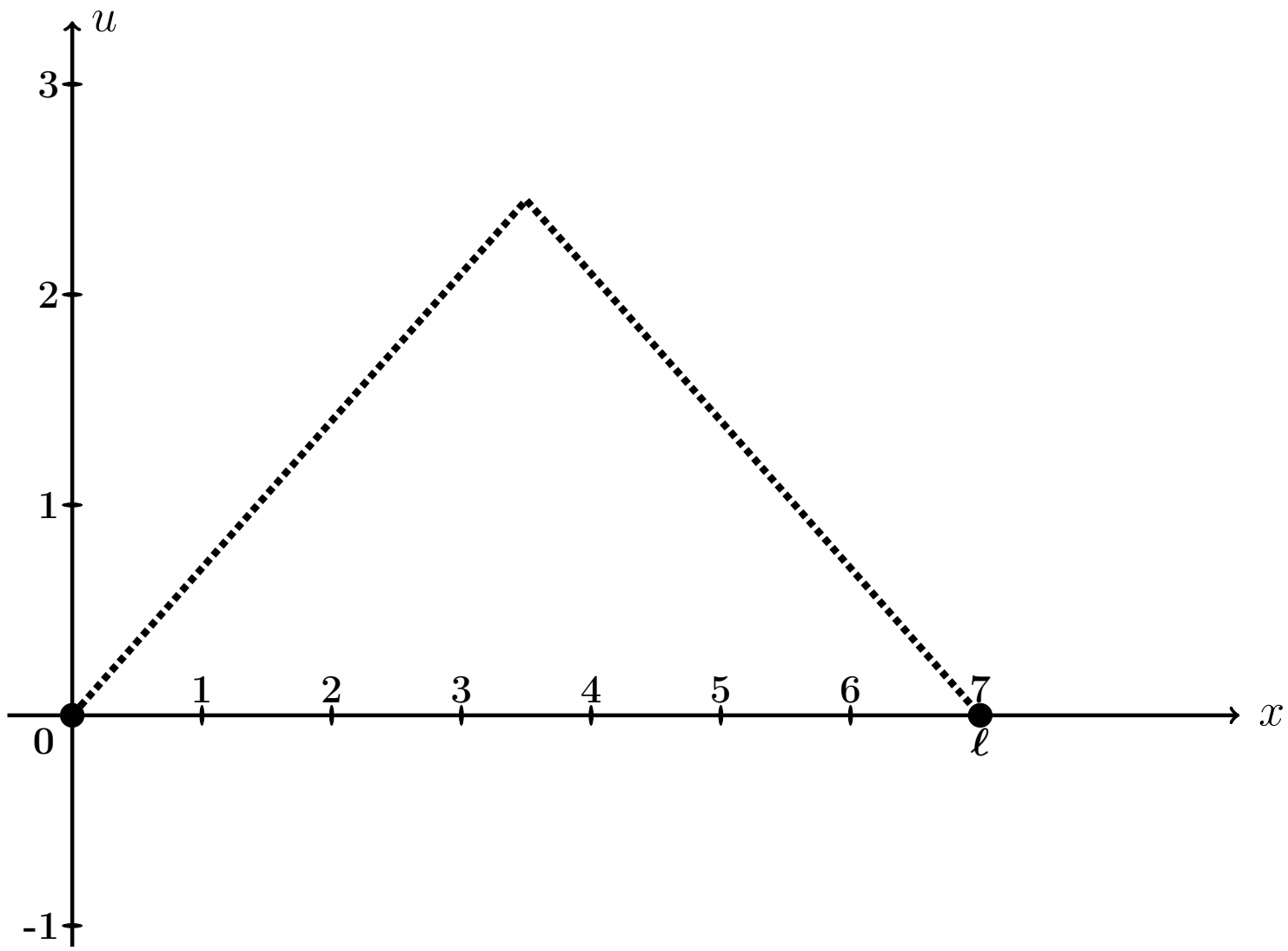


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (25.2).

Выборочная проверка вариант 25 задача 8 (по таблице 25.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 8 (по таблице 25.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 8 (по таблице 25.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 8 (по таблице 25.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{25.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(17.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{25.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{25.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

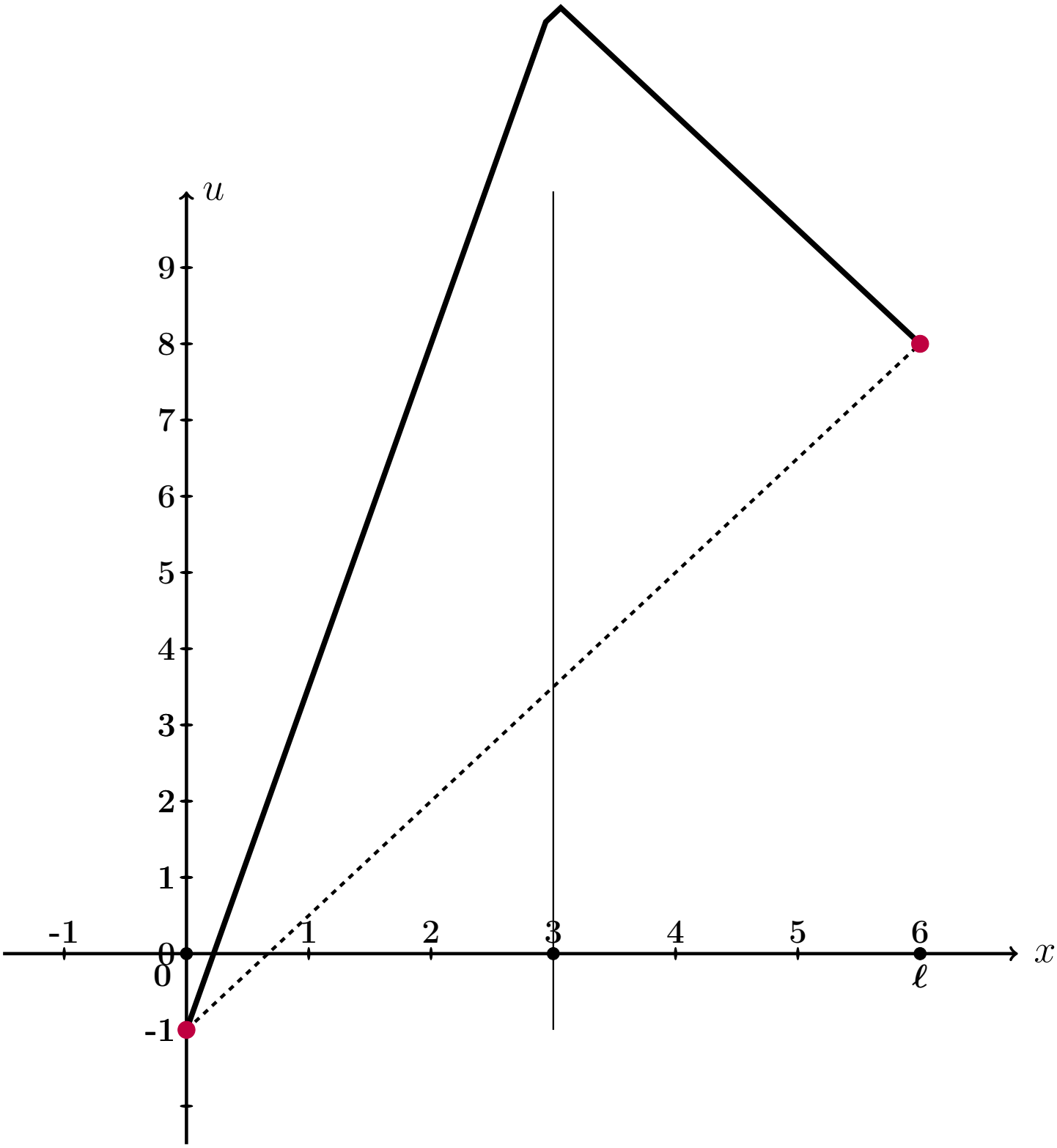


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (25.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (25.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (25.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{25.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad\qquad , & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{25.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad\qquad - \qquad\qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad\qquad - \qquad\qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (25.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (25.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad \end{aligned}\right\} \tag{25.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{25.7}$$

Таблица 25.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (25.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (25.1) с начальным условием (25.2) и граничными условиями (25.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (25.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_6 = 8.0$ — значения граничных условий (25.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 25.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 25.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-1	1,7	4,4	7,1	9,8	12,5	11,6	10,7	9,8	8,9	8
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 25.16.

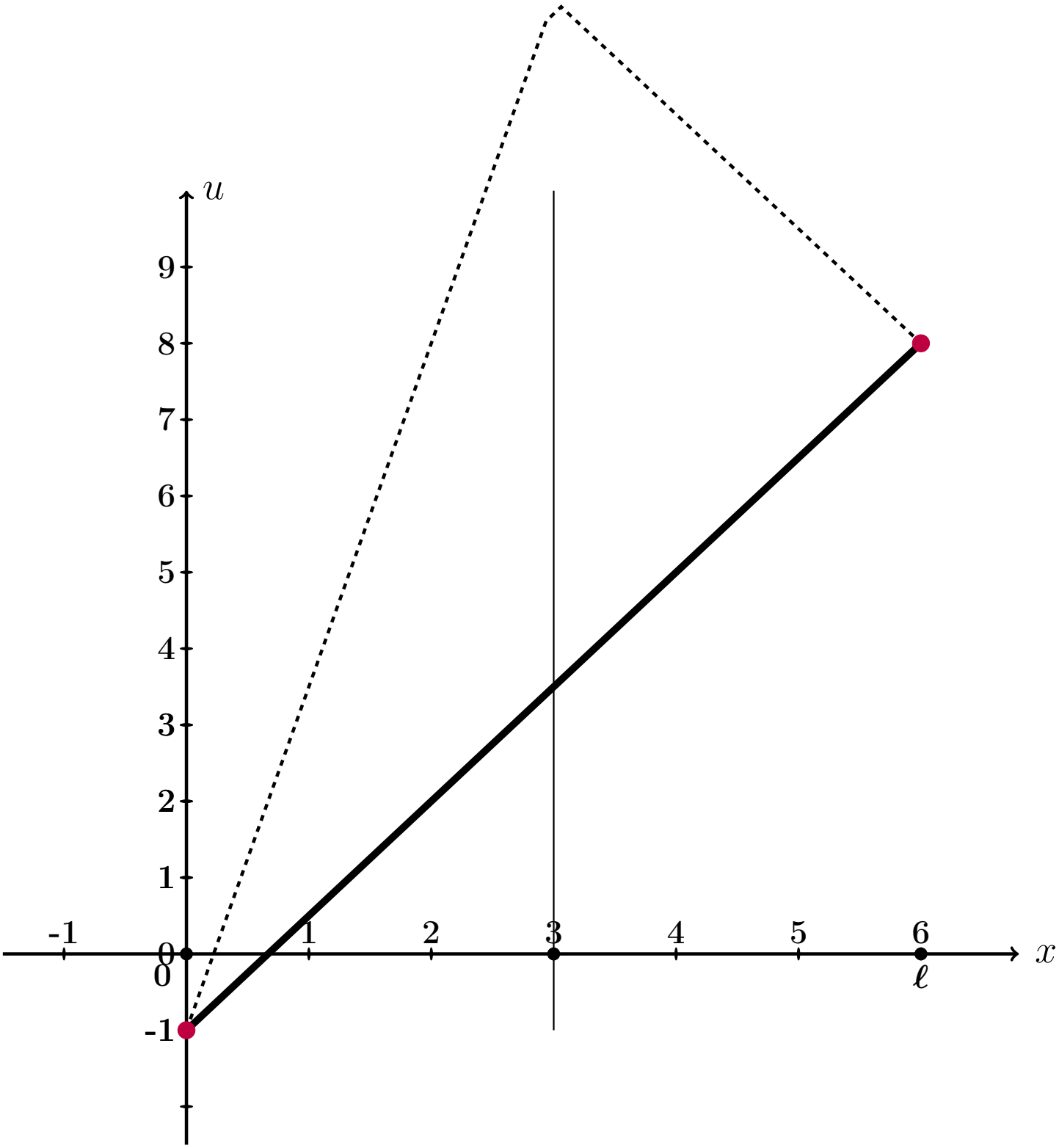


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (25.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (25.3).

Выборочная проверка вариант 25 задача 9 (по формулам (25.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 9 (по таблице 25.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 25 задача 9 (по таблице 25.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 26

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 1 \cdot x + 10$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 1 \cdot x + 10$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 1 \cdot x + 10$.

$$y = 1 \cdot x + 10 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (1 \cdot x + 10)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x + 10)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{10}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{10}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(1\cdot x + 10)\cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{10}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{10}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$1 \cdot x + 10 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right) = \boxed{} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k = 1, 2, 3$:

$$S_1(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} = \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5}$$

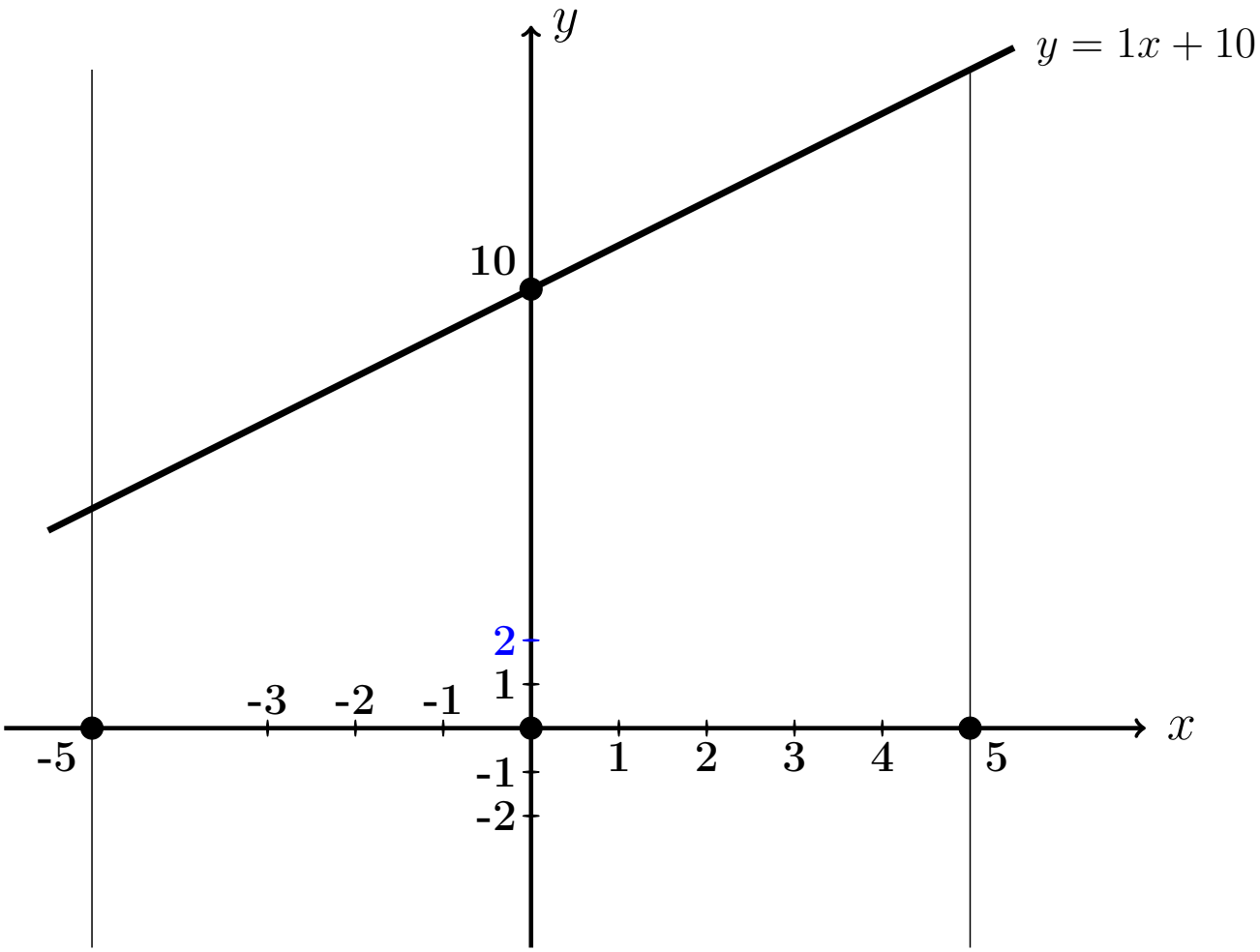
$$S_3(x) = \frac{A_0}{2} + B_1 \cdot \sin \frac{1\pi x}{5} + B_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + B_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{5} =$$
$$= \boxed{} + \boxed{} \cdot \sin \frac{\pi x}{5} - \boxed{} \cdot \sin \frac{2\pi x}{5} + \boxed{} \cdot \sin \frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 26.1 (Табулировка $y = 1x + 10$ и $y = S_n(x)$, $n = 1, 2, 3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1x + 10$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$y = S_1(x)$		*									
$y = S_2(x)$					*						
$y = S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 26.1



Выборочная проверка вариант 26 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 1 (по Таблице 26.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sqrt{x} + \frac{24}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(8\sqrt{x} + \frac{24}{y}\right)dx = 8\int x^{1/2}dx + 24\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad + C(y) = \qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad + C(y) = 12\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 8x^3 + 7\sin 4t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x \ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 8x^3 + 7\sin 4t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (8x^3 + 7\sin 4t)dt = \qquad + C(x) \ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$ $\qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$

Выборочная проверка вариант 26 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи $\qquad$ Клик $\qquad$

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

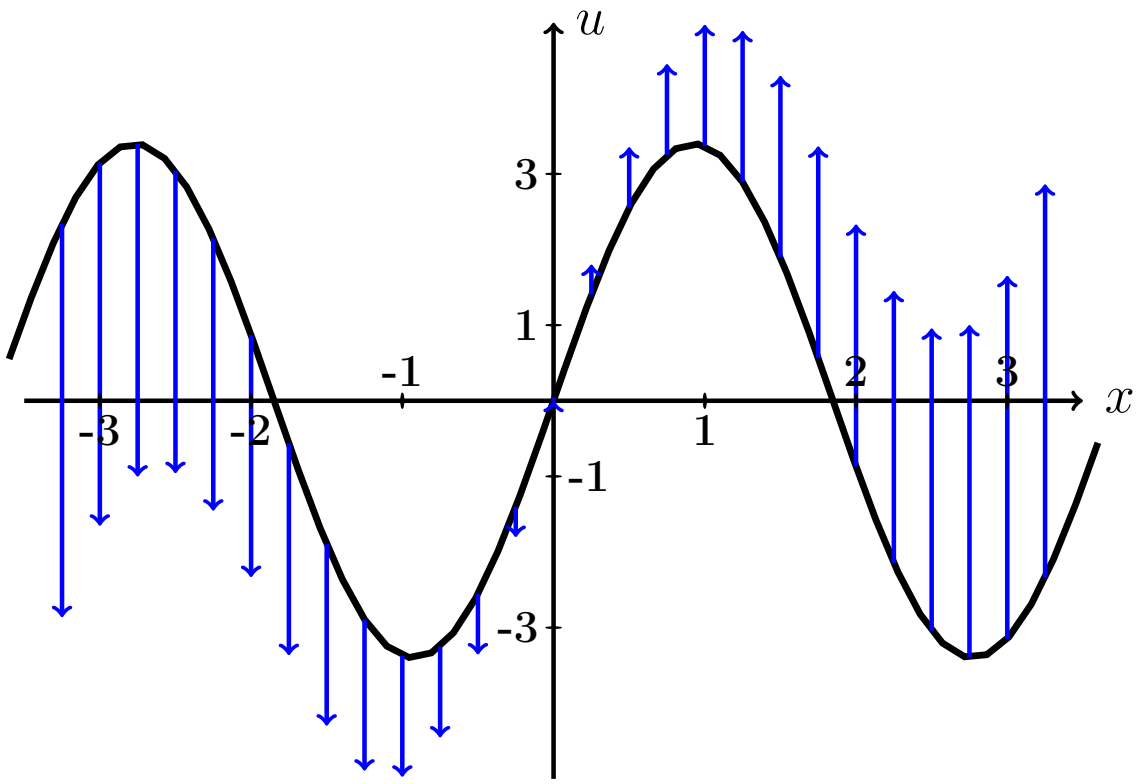


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 26.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 26 задача 4 (по Таблице 26.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 26.2.

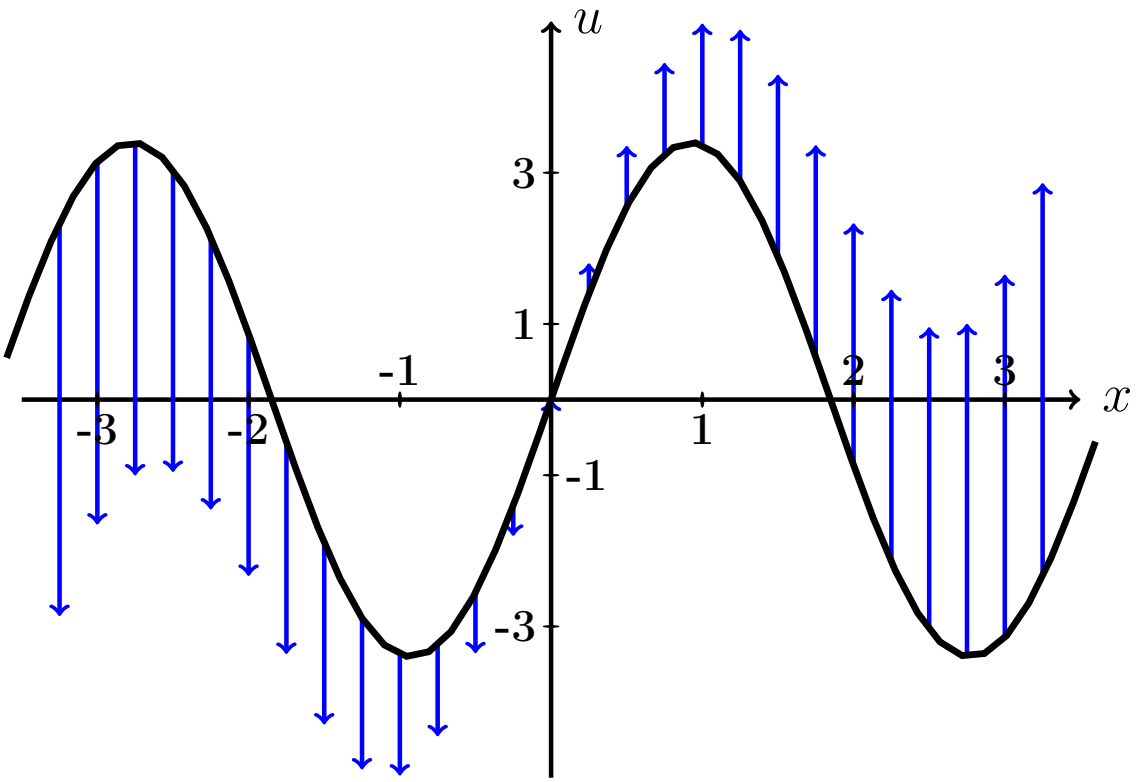


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

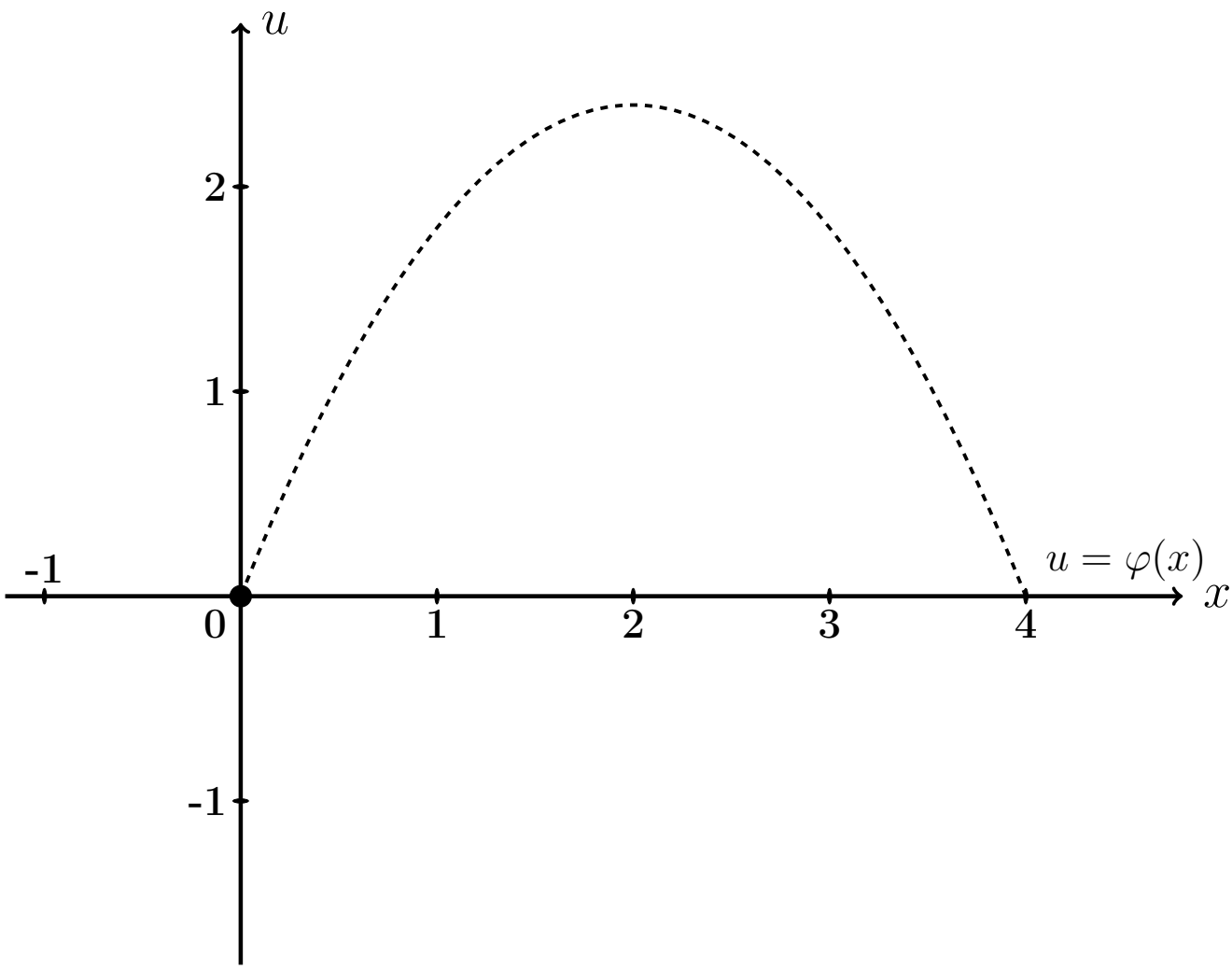


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 26.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 26.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 26.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 26.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 26 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 5 (красные клетки таб. 26.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 26.4.

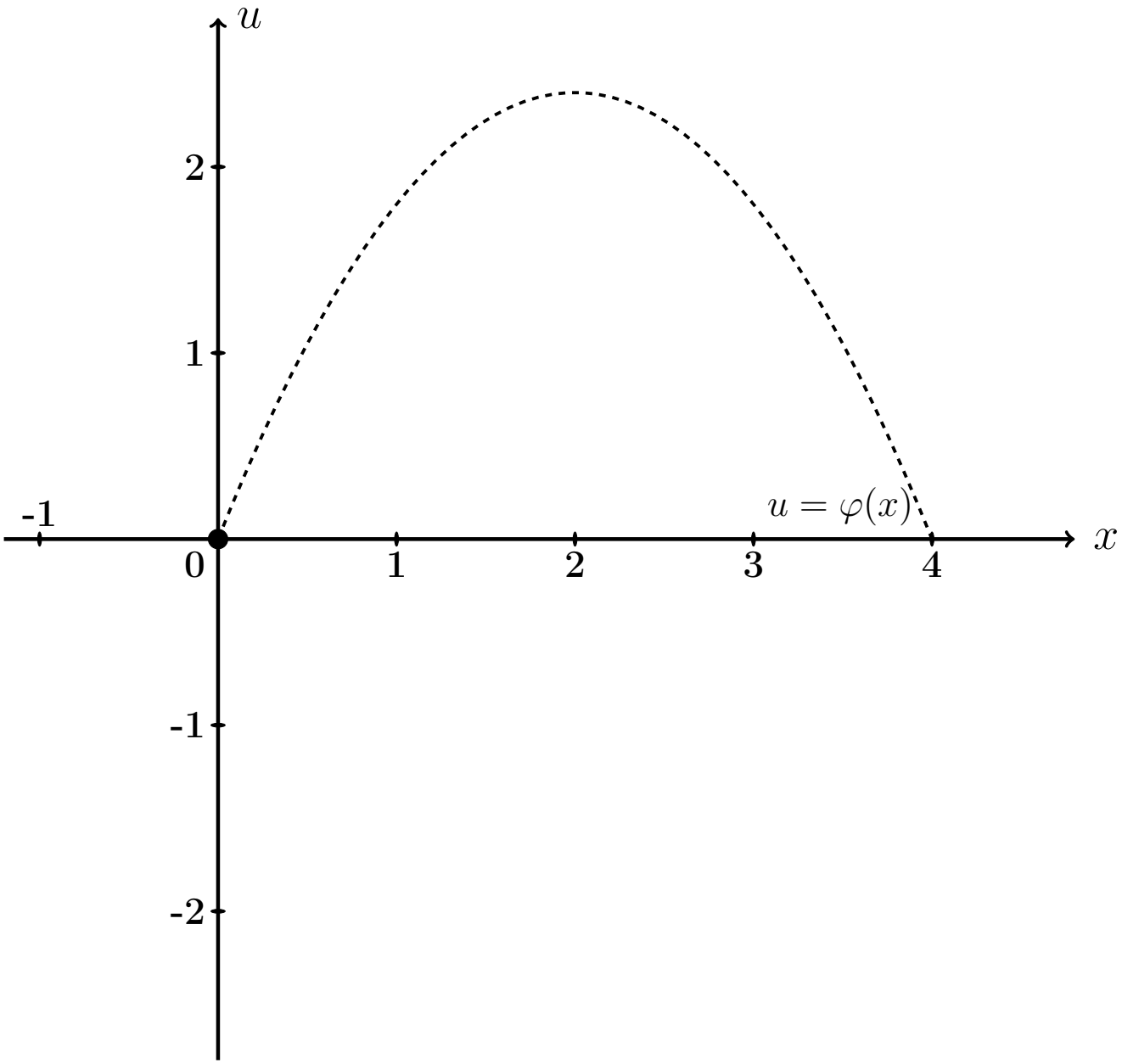


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

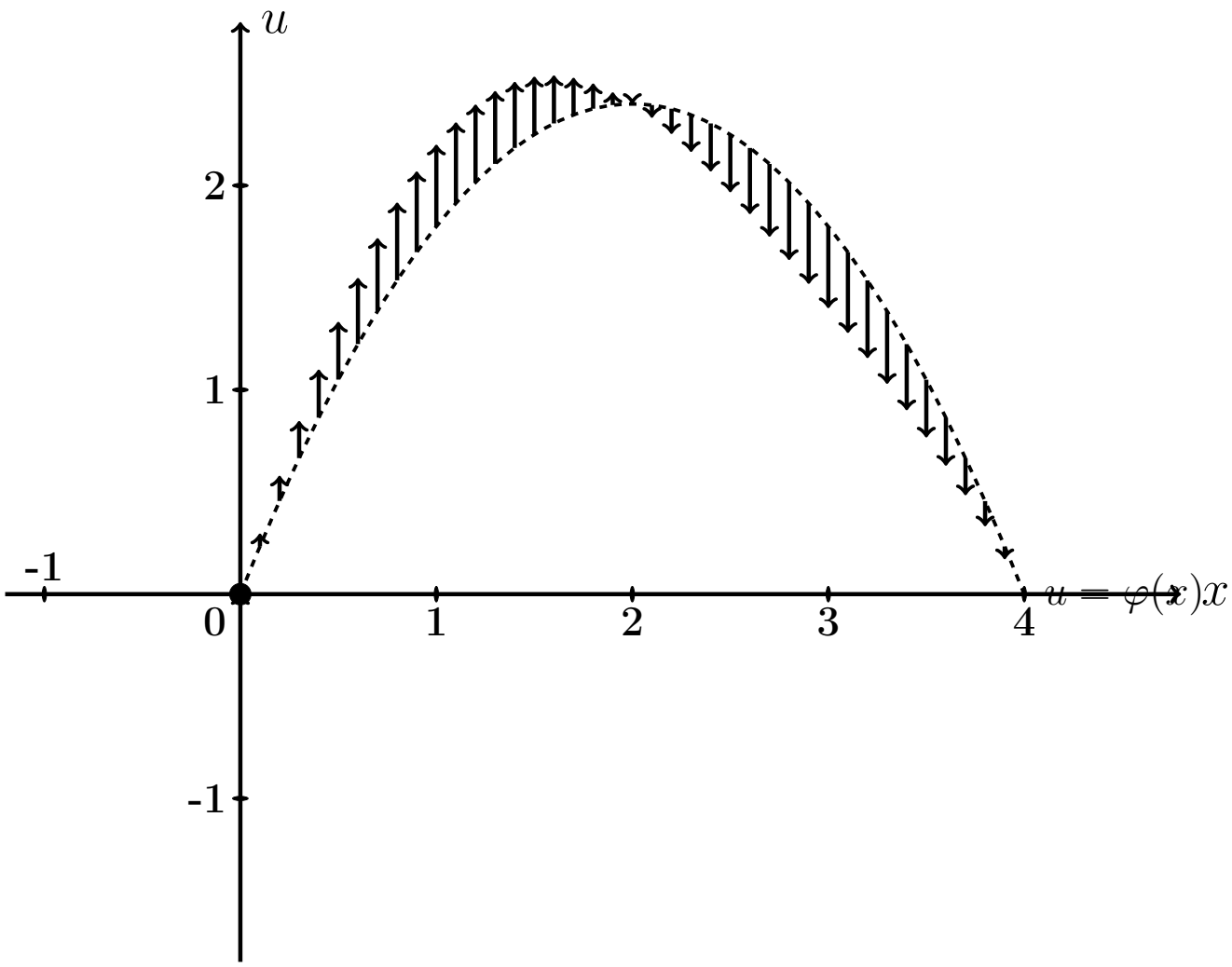


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 26.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.0\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.34$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 26.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 26.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 26.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 26 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 6 (красные клетки Таблицы 26.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 26.6.

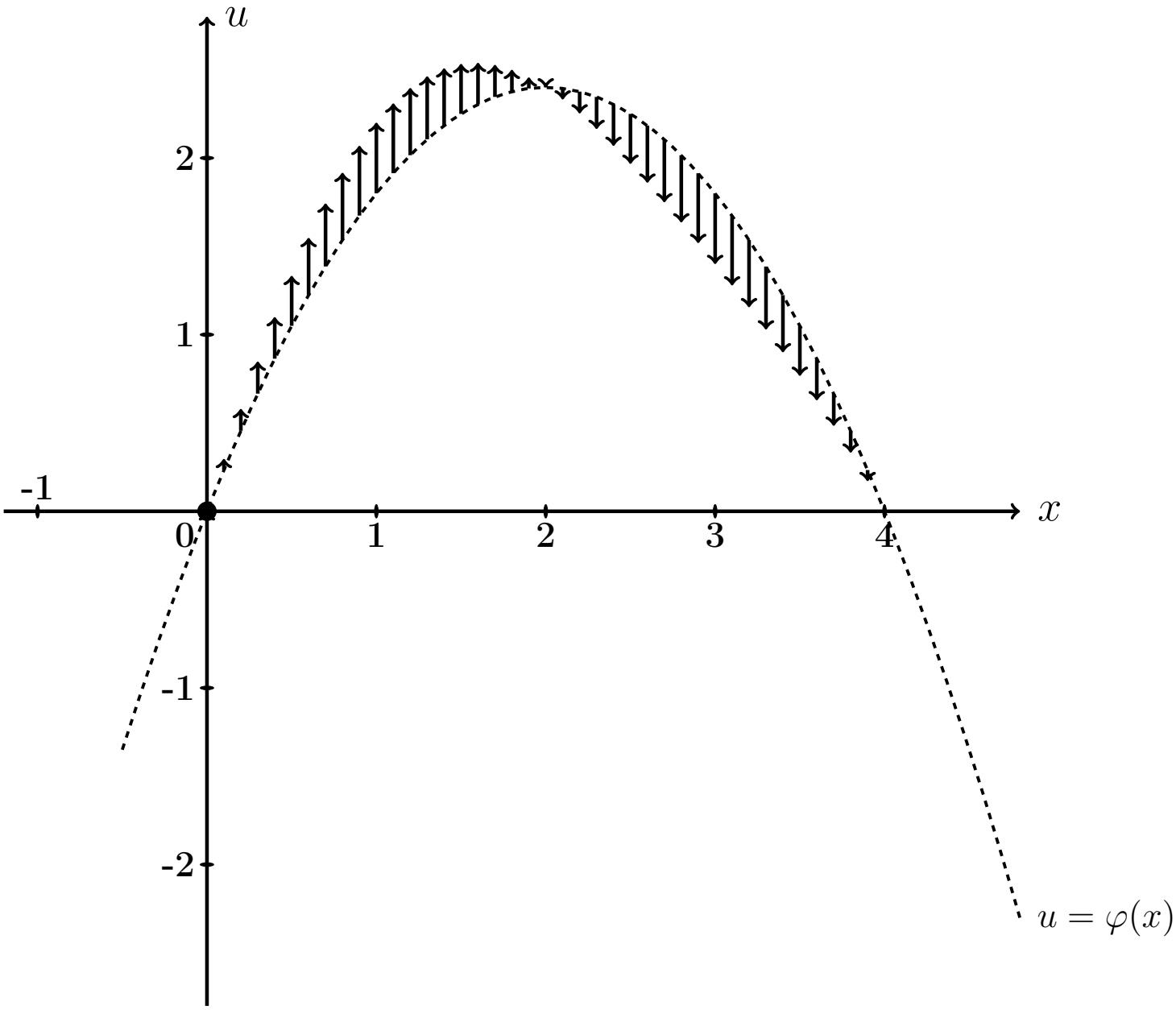


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{26.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{26.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (26.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{26.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (26.2), (26.3). Затабулировать решение уравнения (26.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (26.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (26.2), (26.3). Затабулировать решение уравнения (26.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (26.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 26.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{6} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{6} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{26.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (26.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{26.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (26.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (26.4) при граничных условиях (26.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{26.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{26.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{26.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (26.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (26.9). Следовательно, по формуле (26.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{26.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{26.11}$$

Шаг 6.

Таблица 26.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 26.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (26.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 26.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 26.9

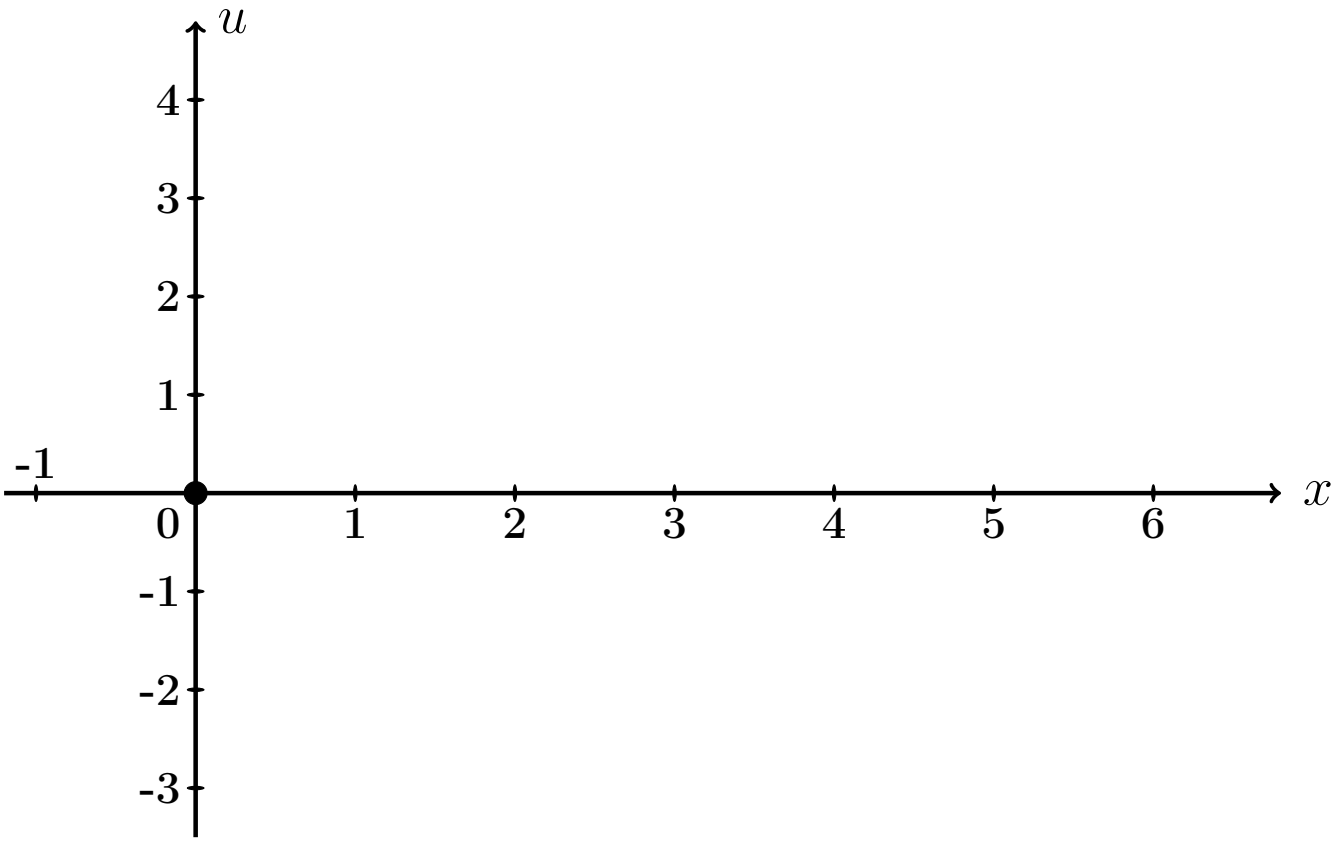


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 26 задача 7 (по Таб. 26.7, 26.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 7 (по таблице 26.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (26.6) и (26.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (26.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (26.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (26.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (26.9). Следовательно, по формуле (26.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (26.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (26.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (26.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 26.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (26.5),

$C_1' =$ по формуле (26.12)

и $C_3 =$ по таблице 26.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 26.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

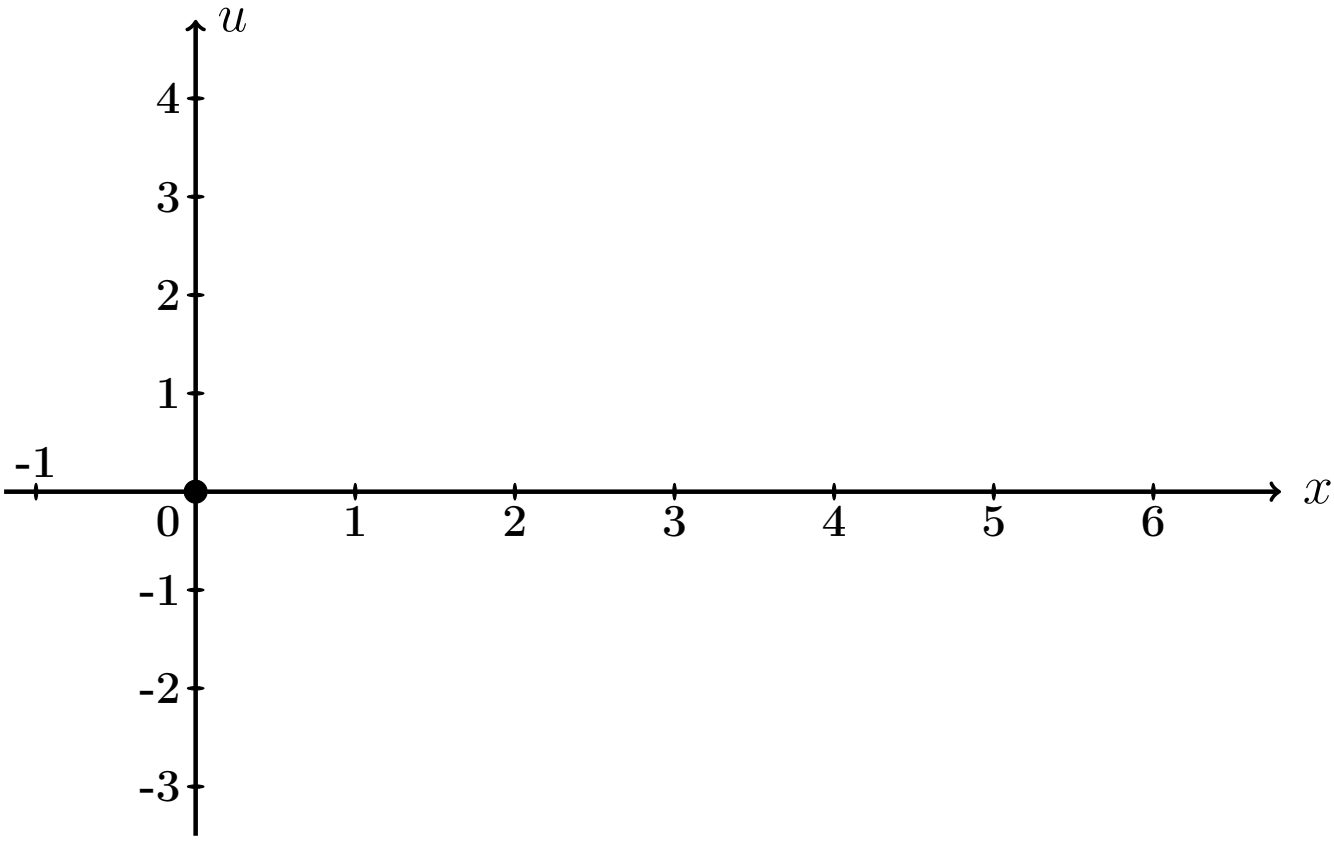


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 26 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (26.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 26 задача 7 (по таблице 26.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{26.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (26.1). Затабулировать решение уравнения (26.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

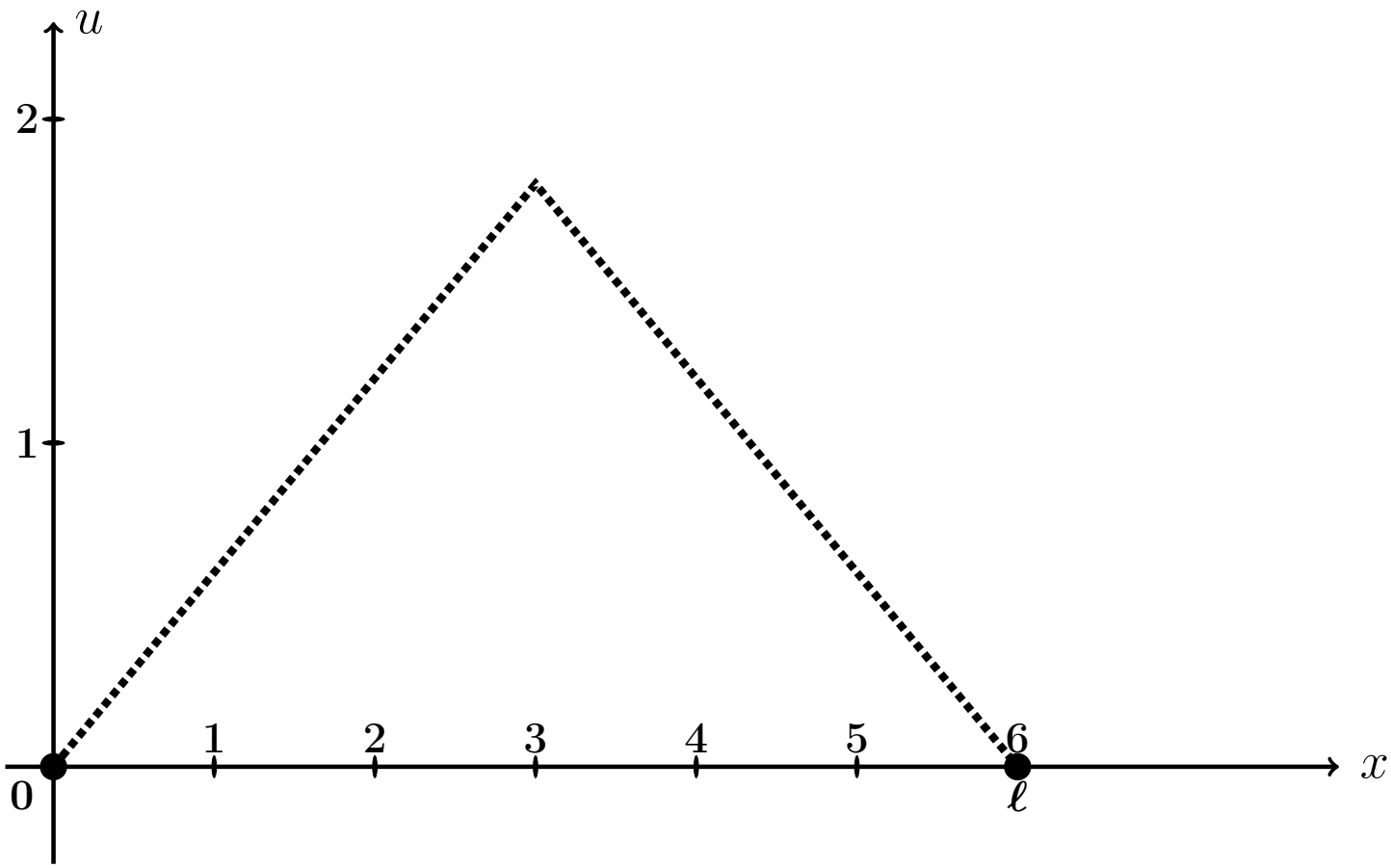


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (26.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \qquad (26.3)$$

где $\ell = 6$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 26.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 26.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 26.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 26.12, 26.13) формулы (26.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 26.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 26.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 26.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 26.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

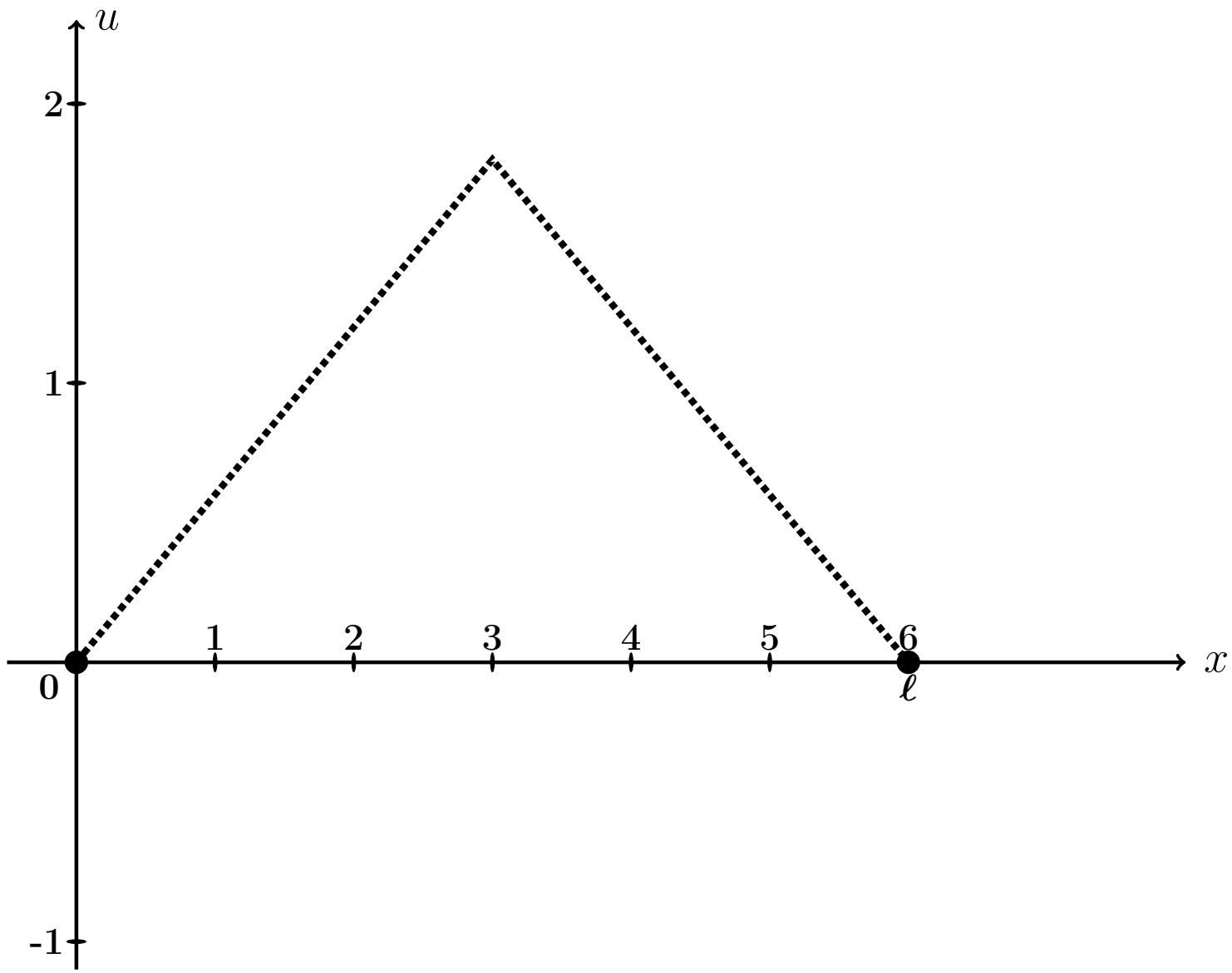


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (26.2).

Выборочная проверка вариант 26 задача 8 (по таблице 26.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 8 (по таблице 26.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 8 (по таблице 26.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 8 (по таблице 26.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(3.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{26.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{26.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

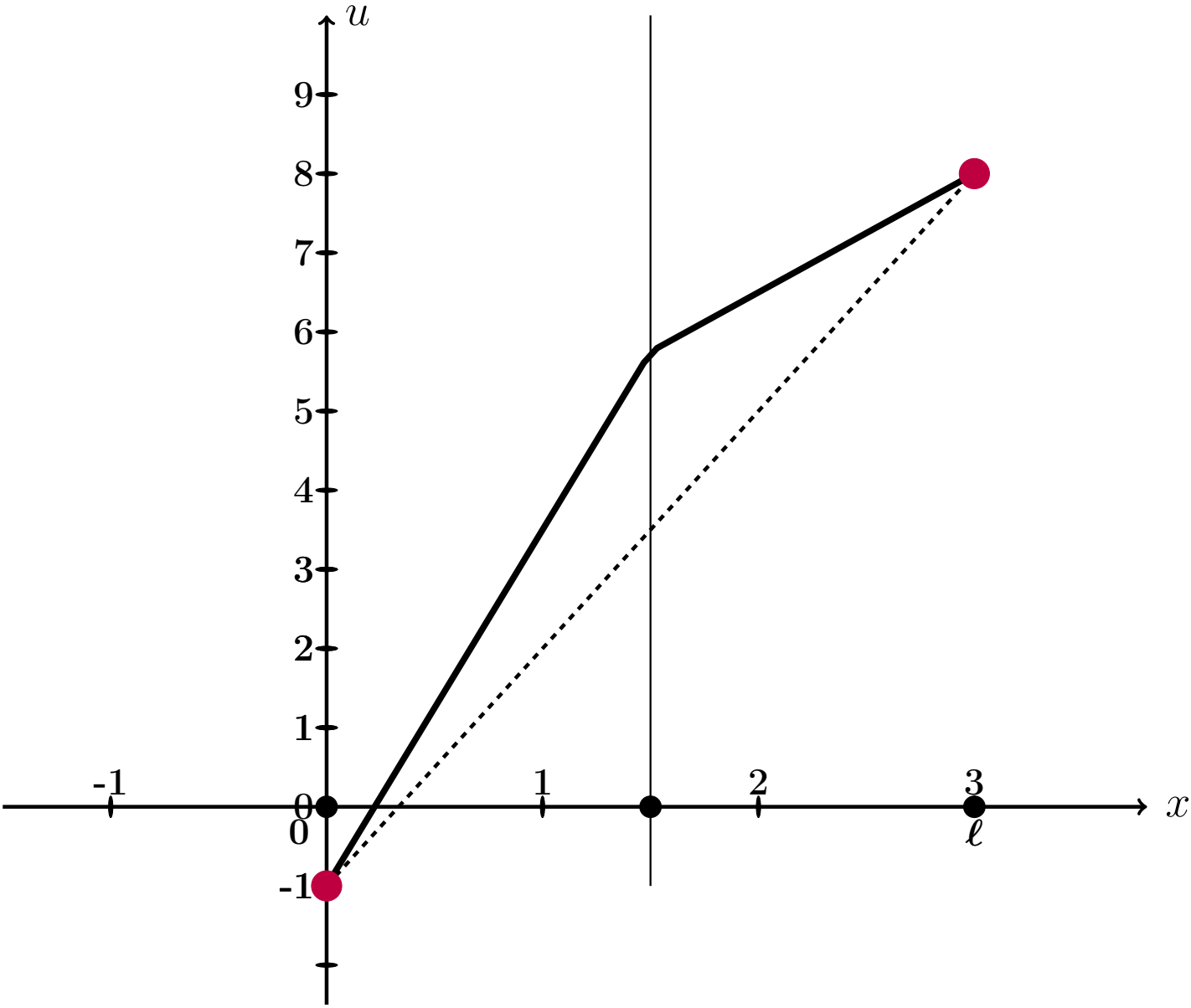


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (26.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (26.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (26.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{26.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{26.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (26.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (26.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{26.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{26.7}$$

Таблица 26.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (26.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (26.1) с начальным условием (26.2) и граничными условиями (26.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (26.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_3 = 8.0$ — значения граничных условий (26.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 26.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 26.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-1	0,35	1,7	3,05	4,4	5,75	6,2	6,65	7,1	7,55	8
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 26.16.

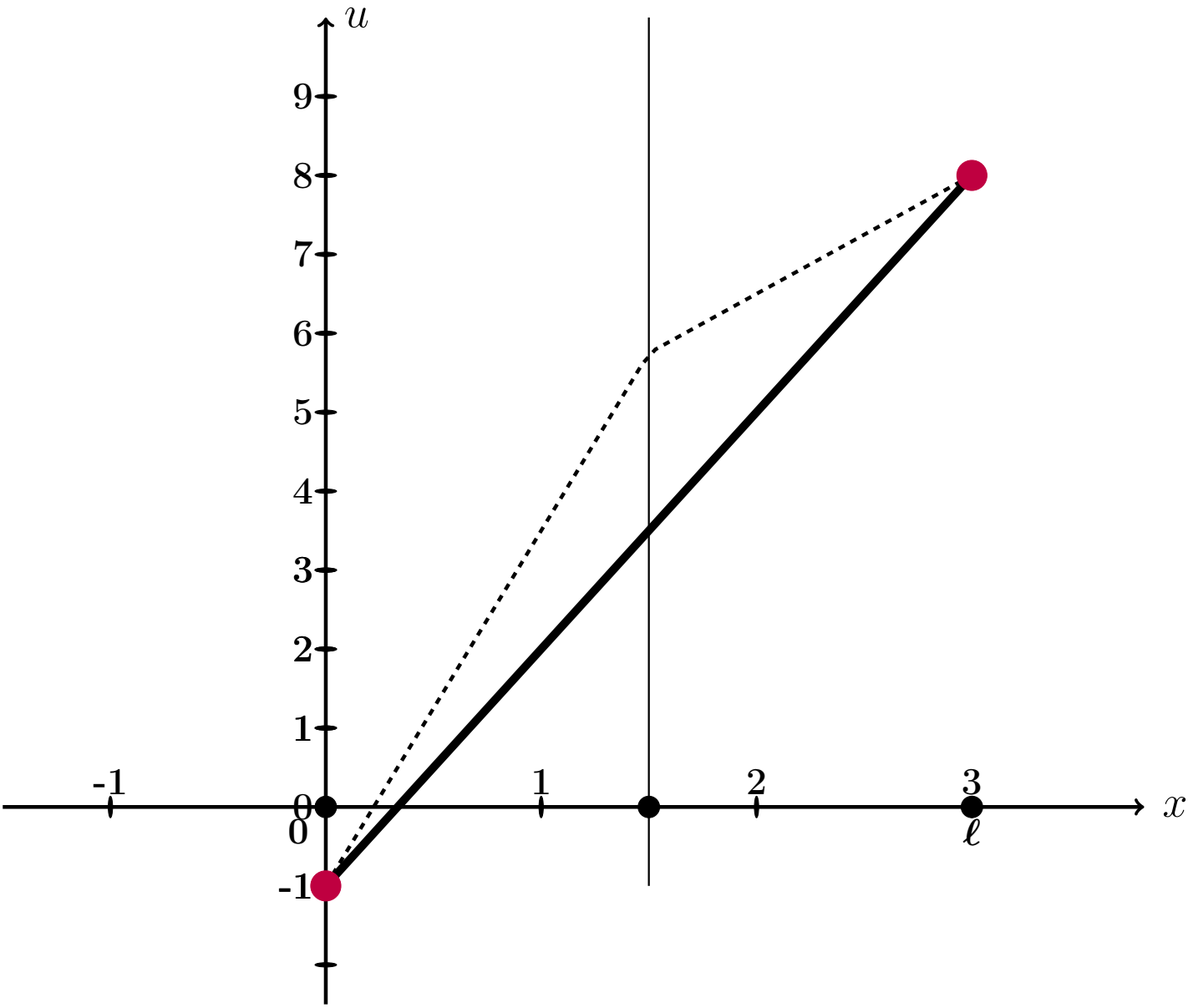


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (26.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (26.3).

Выборочная проверка вариант 26 задача 9 (по формулам (26.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 9 (по таблице 26.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 26 задача 9 (по таблице 26.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 27

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 2 \cdot x + 9$.

$$y = 2 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (2 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{9}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{9}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(2\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{9}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{9}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+9=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

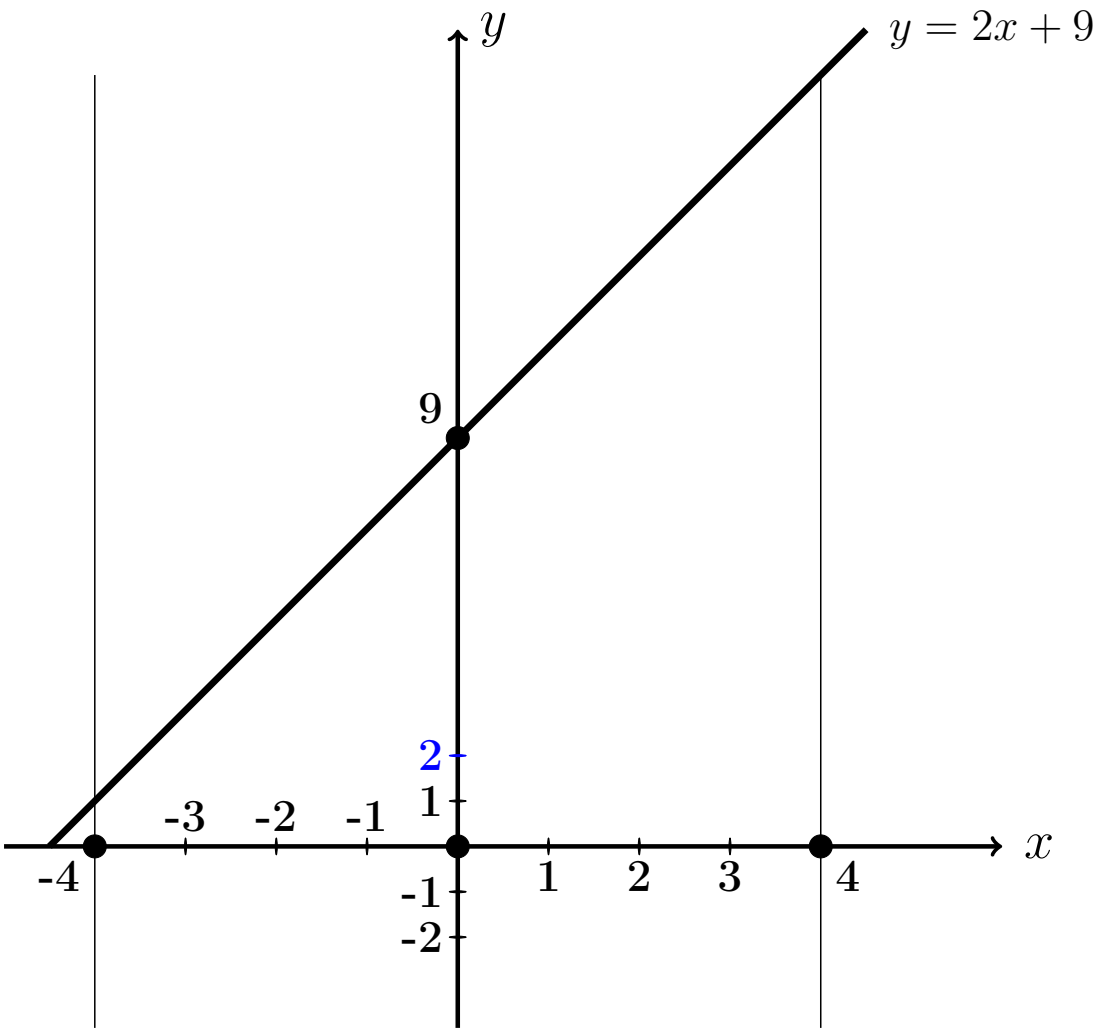
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 27.1 (Табулировка $y=2x+9$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x+9$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y=S_1(x)$		*							
$y=S_2(x)$					*				
$y=S_3(x)$								*	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 27.1



Выборочная проверка вариант 27 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 1 (по Таблице 27.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 10\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 15\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 10\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 10\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 15\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 15x^2 + 15t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 5x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 15x^2 + 15t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (15x^2+15t)\,dt = \qquad\qquad + C(x) = \qquad\qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 5x^2 \\ \qquad = 4e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 27 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

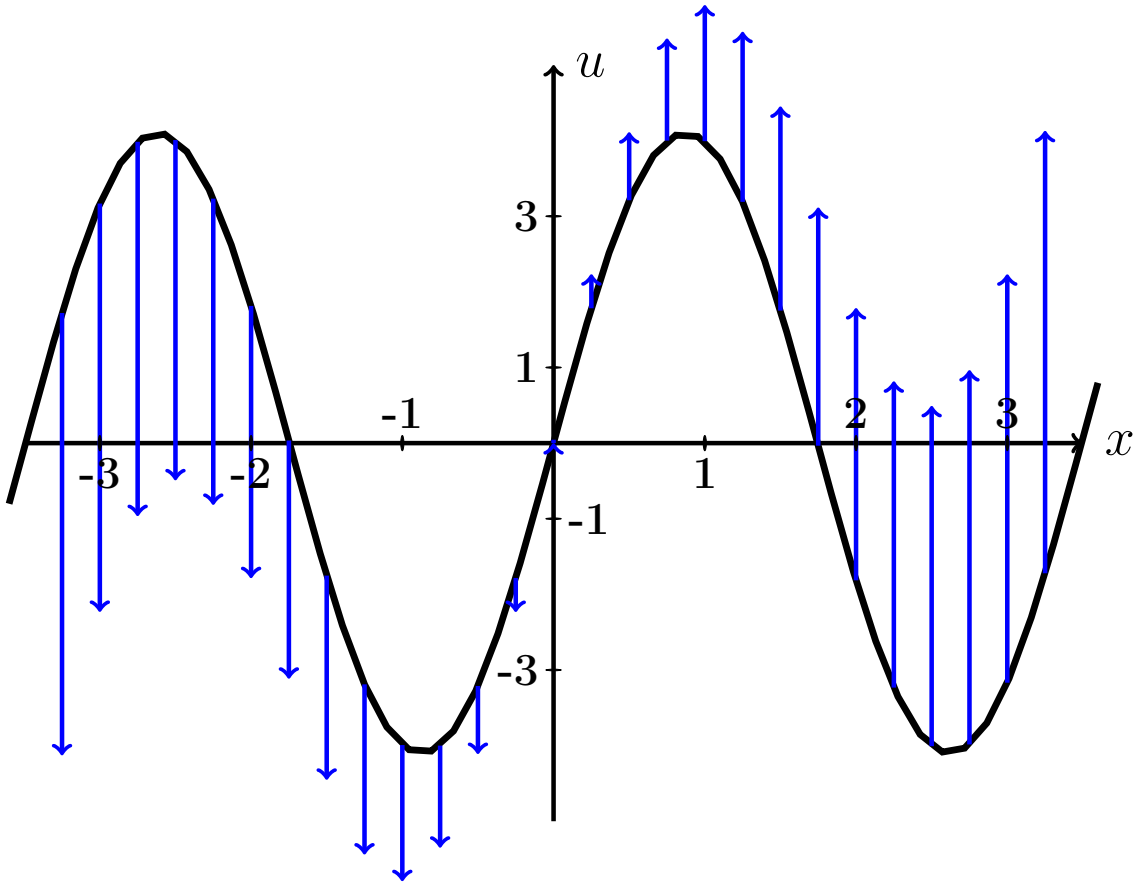


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 27.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 27 задача 4 (по Таблице 27.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 27.2.

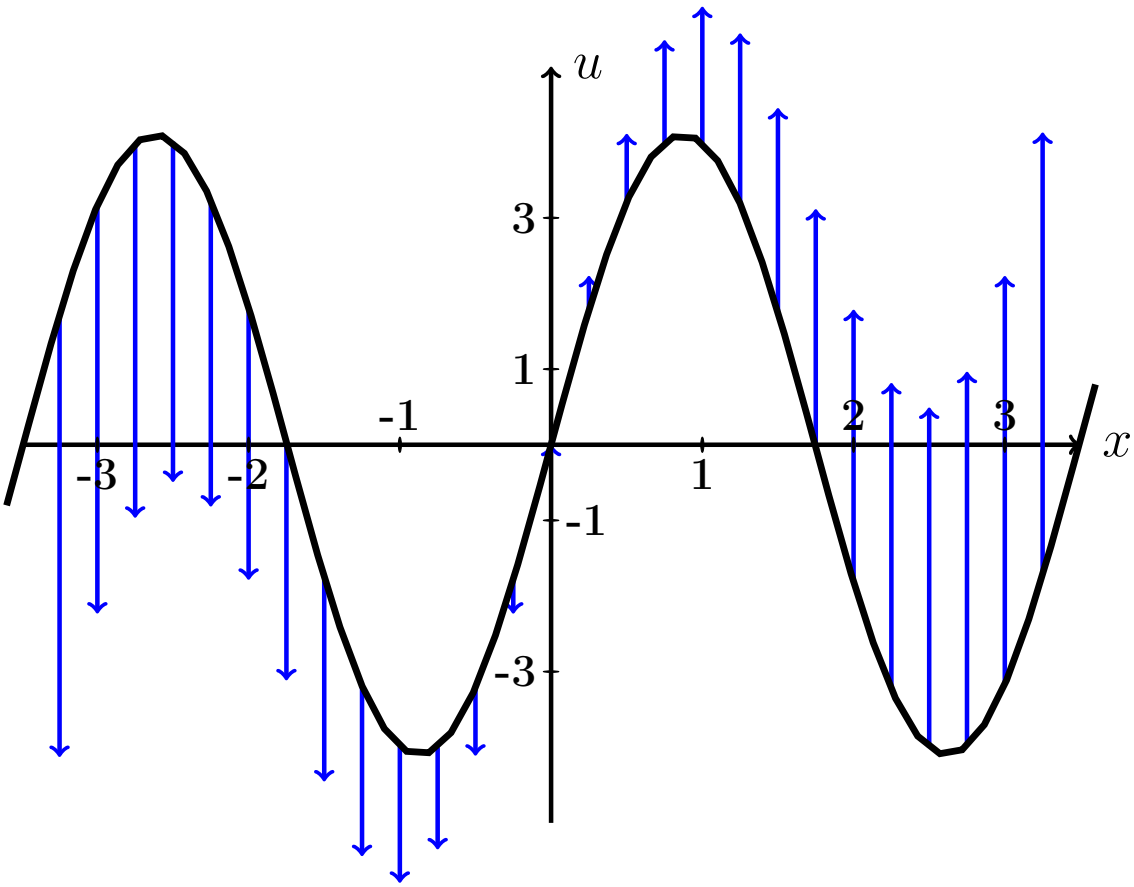


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

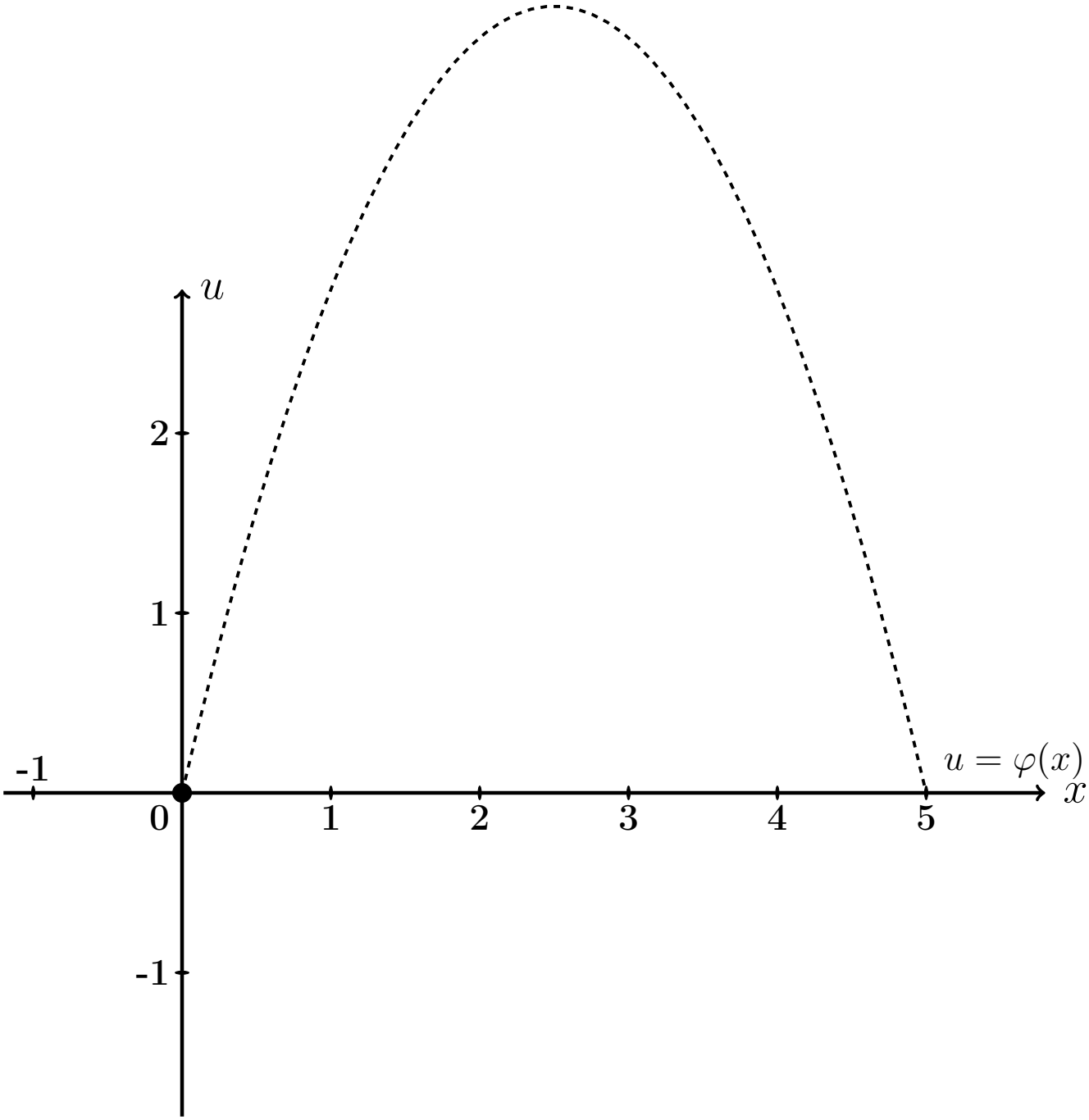


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 27.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 27.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 27.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 27.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 27 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 5 (красные клетки таб. 27.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 27.4.

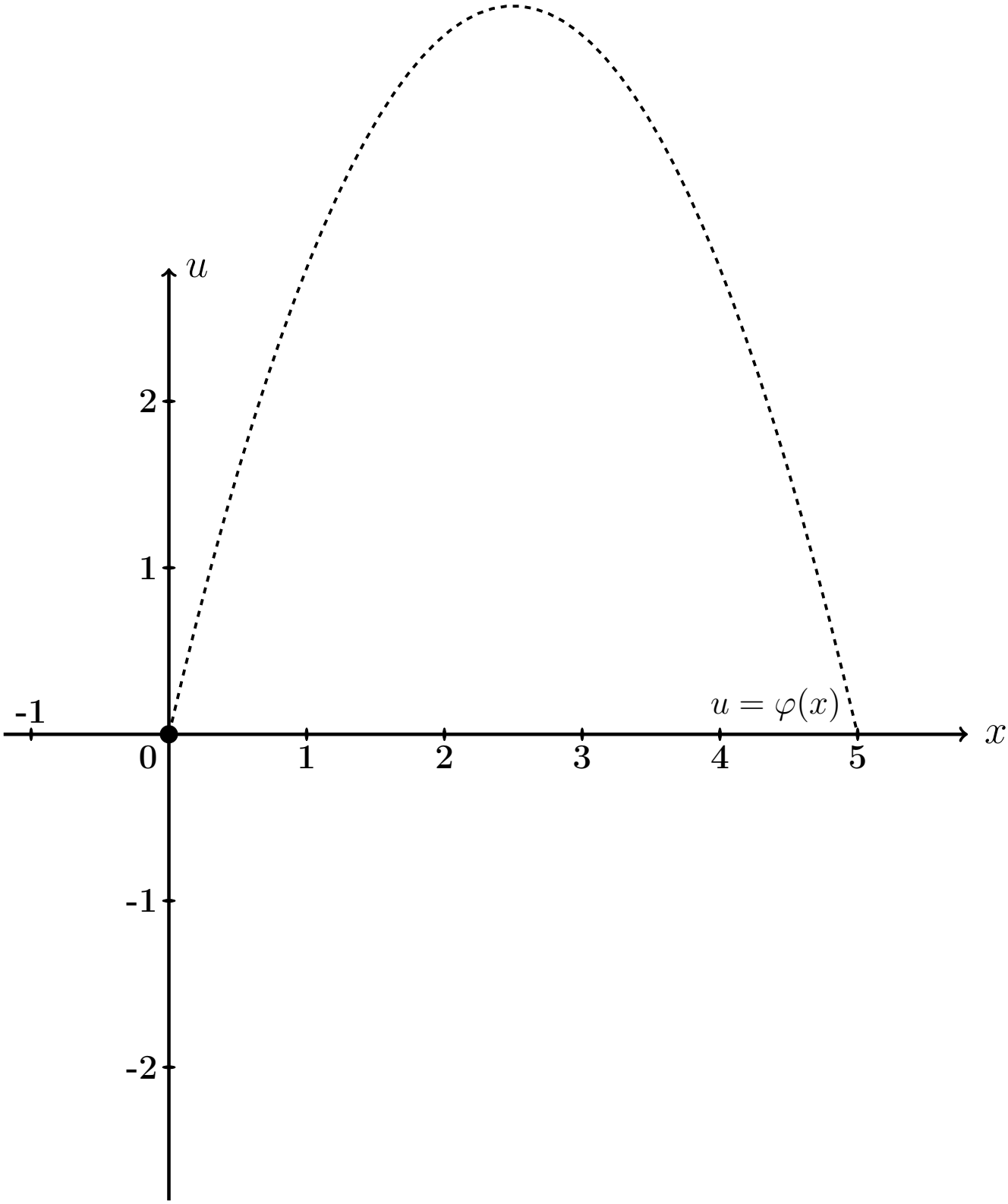


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.0 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

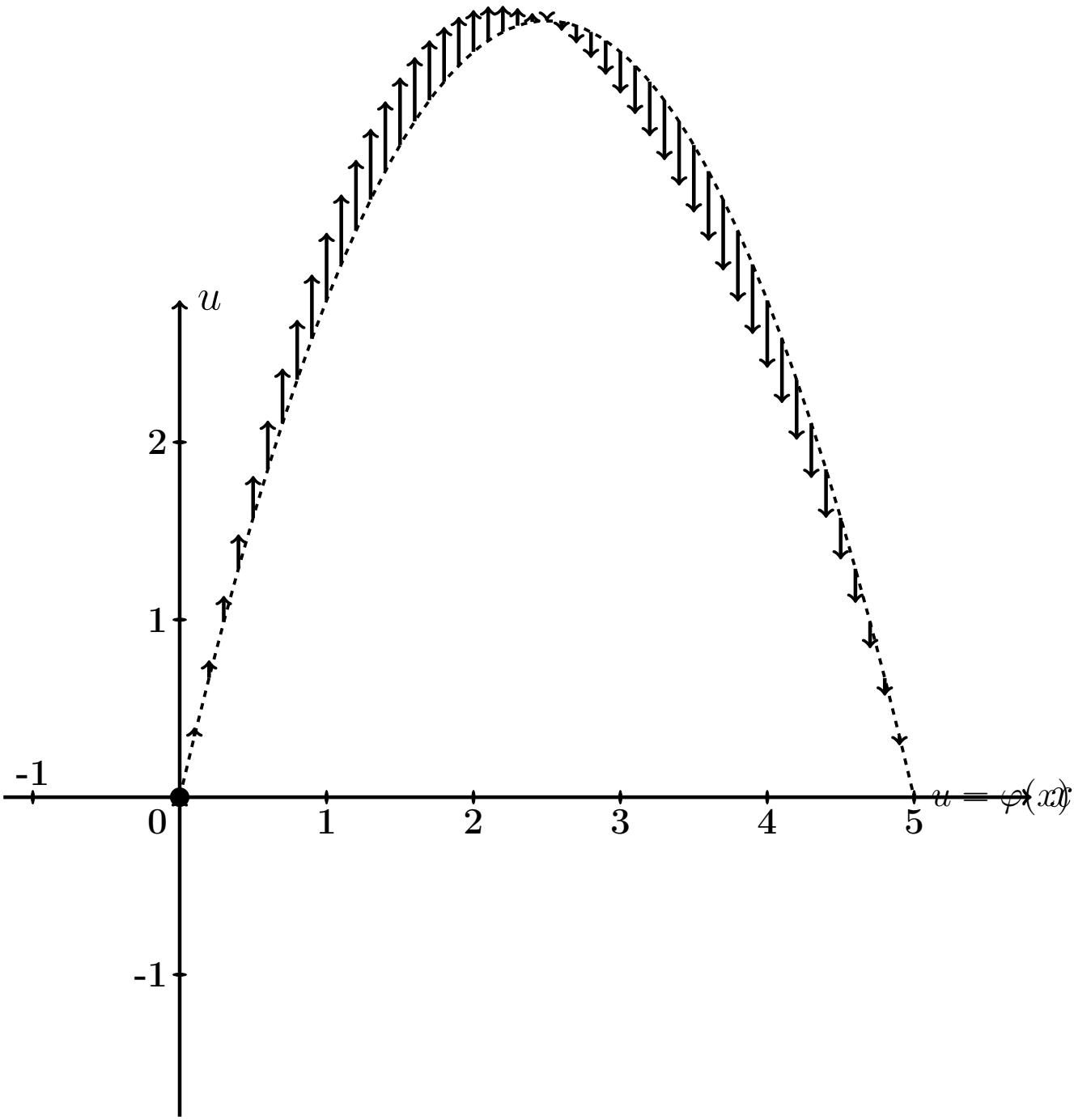


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.0 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 27.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.0\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad} + B_2 \sin \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.41$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 27.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 27.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 27.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 27 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 6 (красные клетки Таблицы 27.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 27.6.

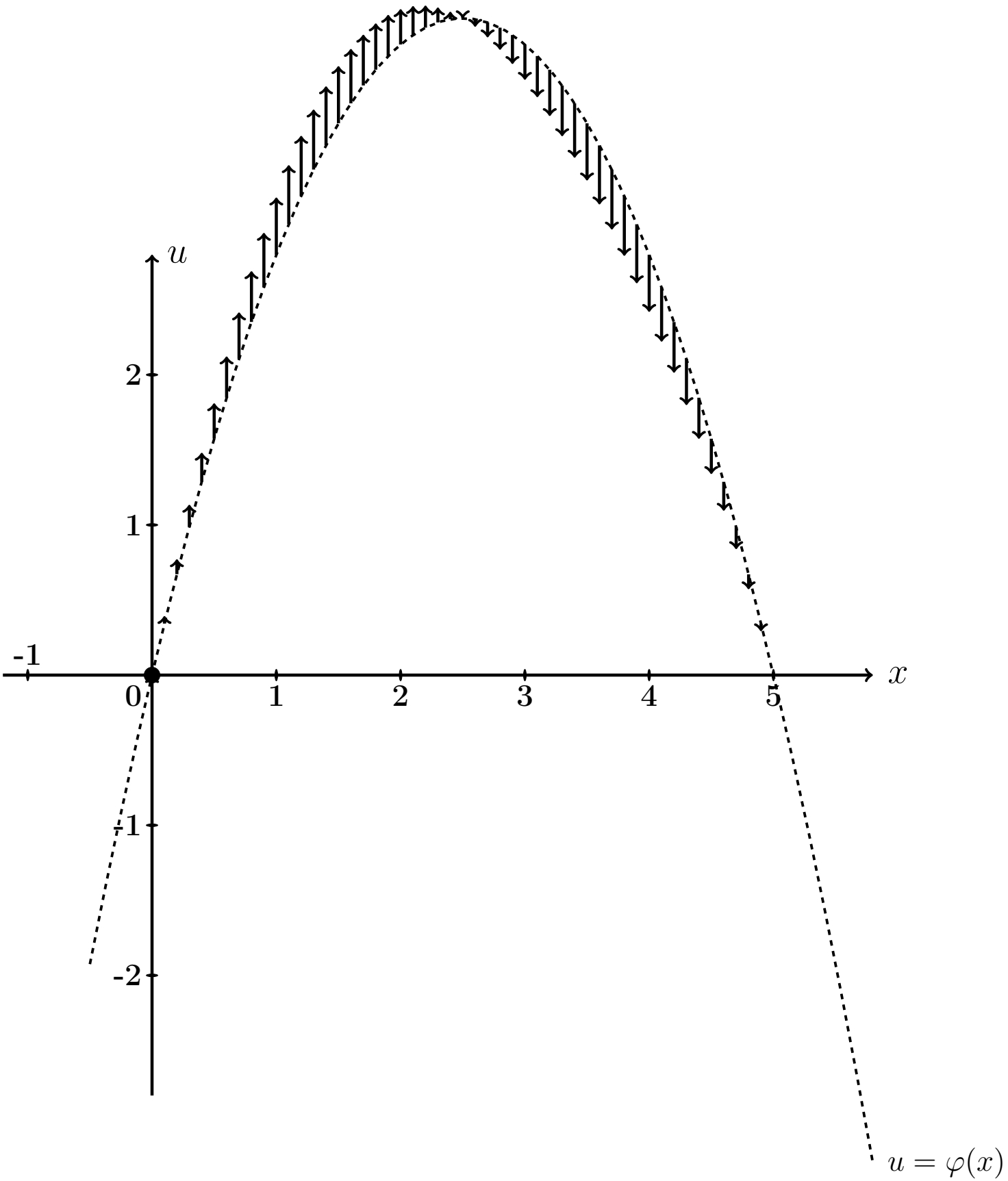


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{27.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{27.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{27.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (27.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{27.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (27.2), (27.3). Затабулировать решение уравнения (27.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (27.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (27.2), (27.3). Затабулировать решение уравнения (27.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (27.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 27.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{27.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (27.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{27.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (27.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (27.4) при граничных условиях (27.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{27.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{27.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{27.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (27.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (27.9). Следовательно, по формуле (27.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{27.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{27.11}$$

Шаг 6.

Таблица 27.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 27.7,

$$\ell = ___, \quad a = ___, \quad \Omega = ___,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (27.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 27.8. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ .$$

Таблица 27.9 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0										
$u(x,1)$	0										
$u(x,2)$	0										

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 27.9

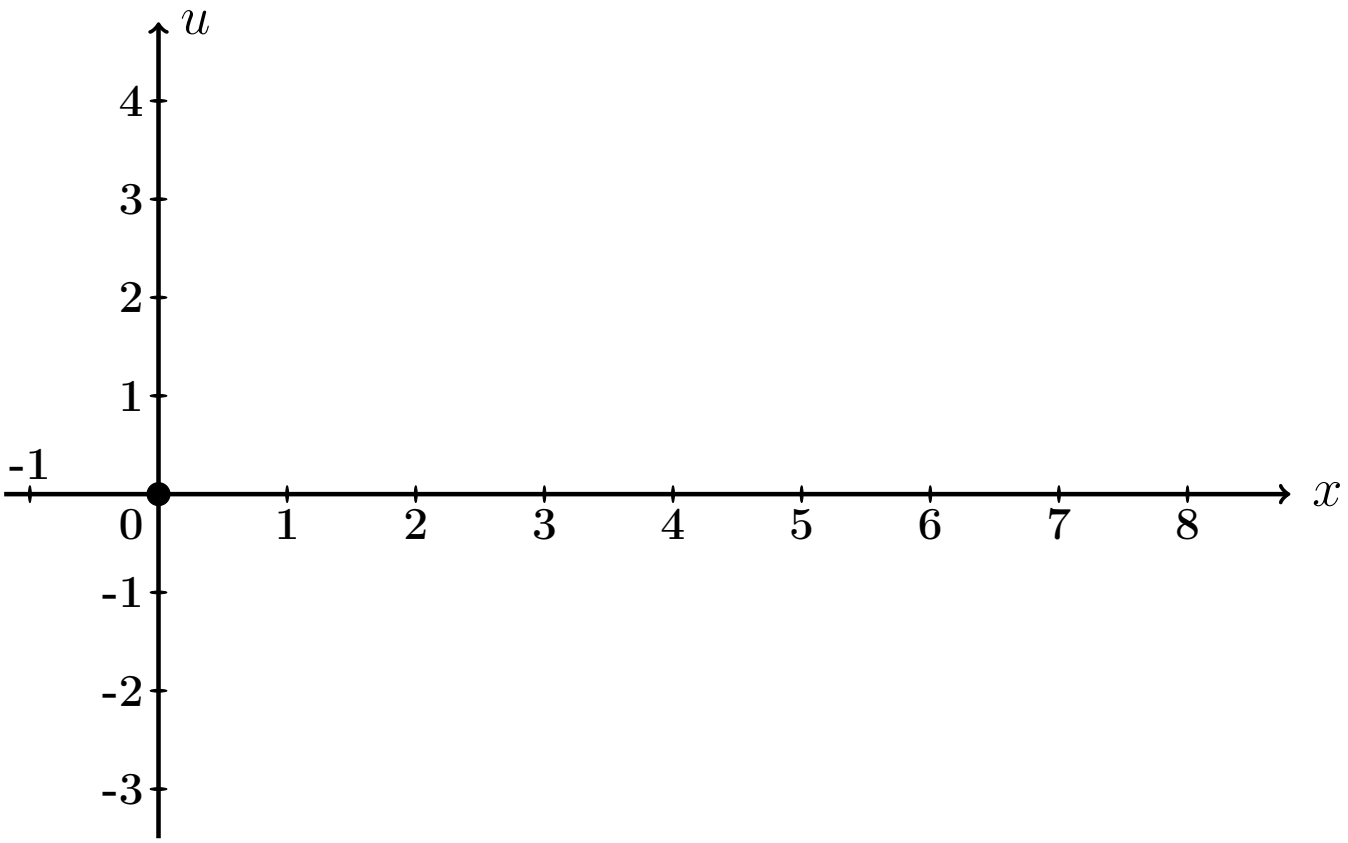


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 27 задача 7 (по Таб. 27.7, 27.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 27 задача 7 (по таблице 27.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (27.6) и (27.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (27.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (27.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (27.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (27.9). Следовательно, по формуле (27.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (27.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (27.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (27.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 27.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (27.5),

$C_1' =$ по формуле (27.12)

и $C_3 =$ по таблице 27.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 27.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

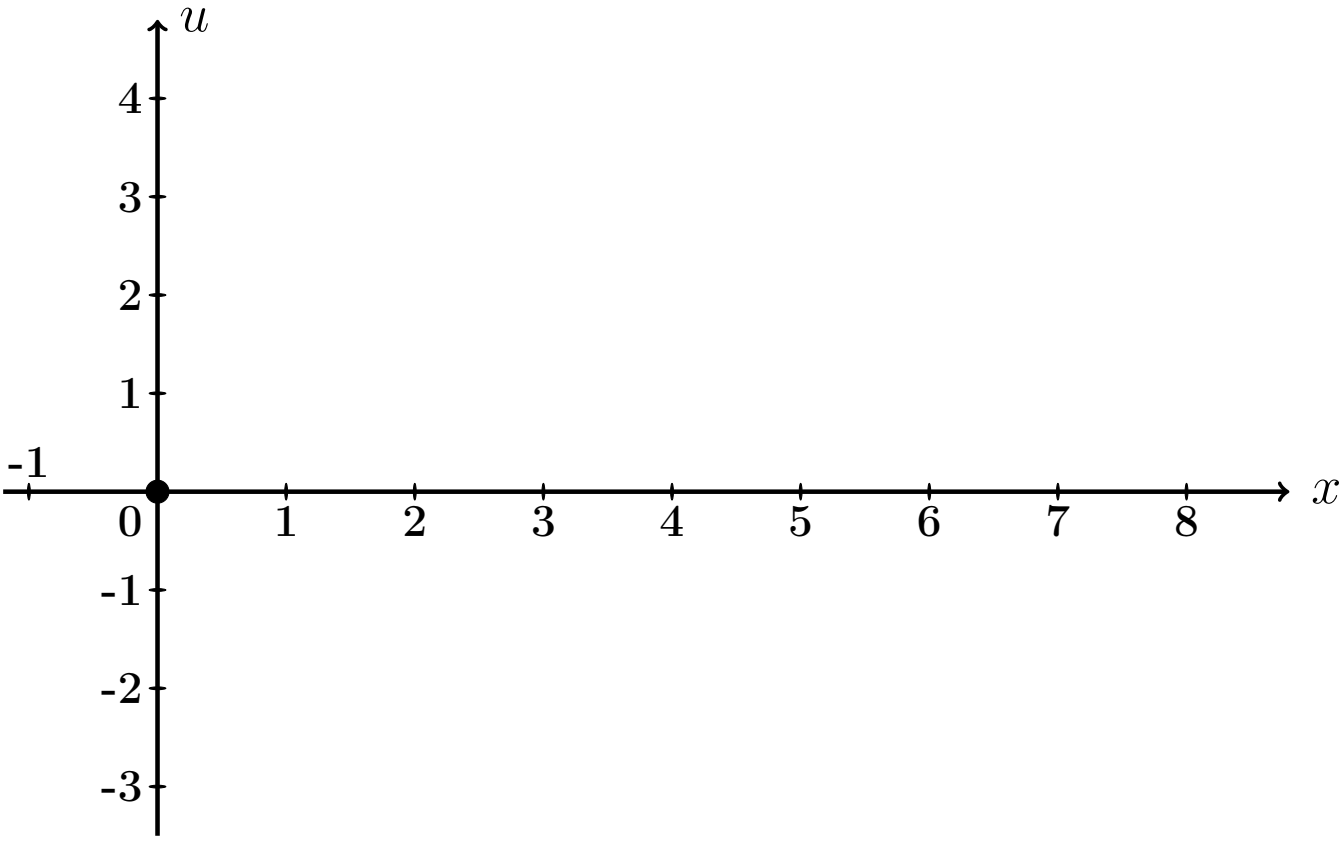


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 27 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (27.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 27 задача 7 (по таблице 27.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{27.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 3$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{27.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (27.1). Затабулировать решение уравнения (27.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

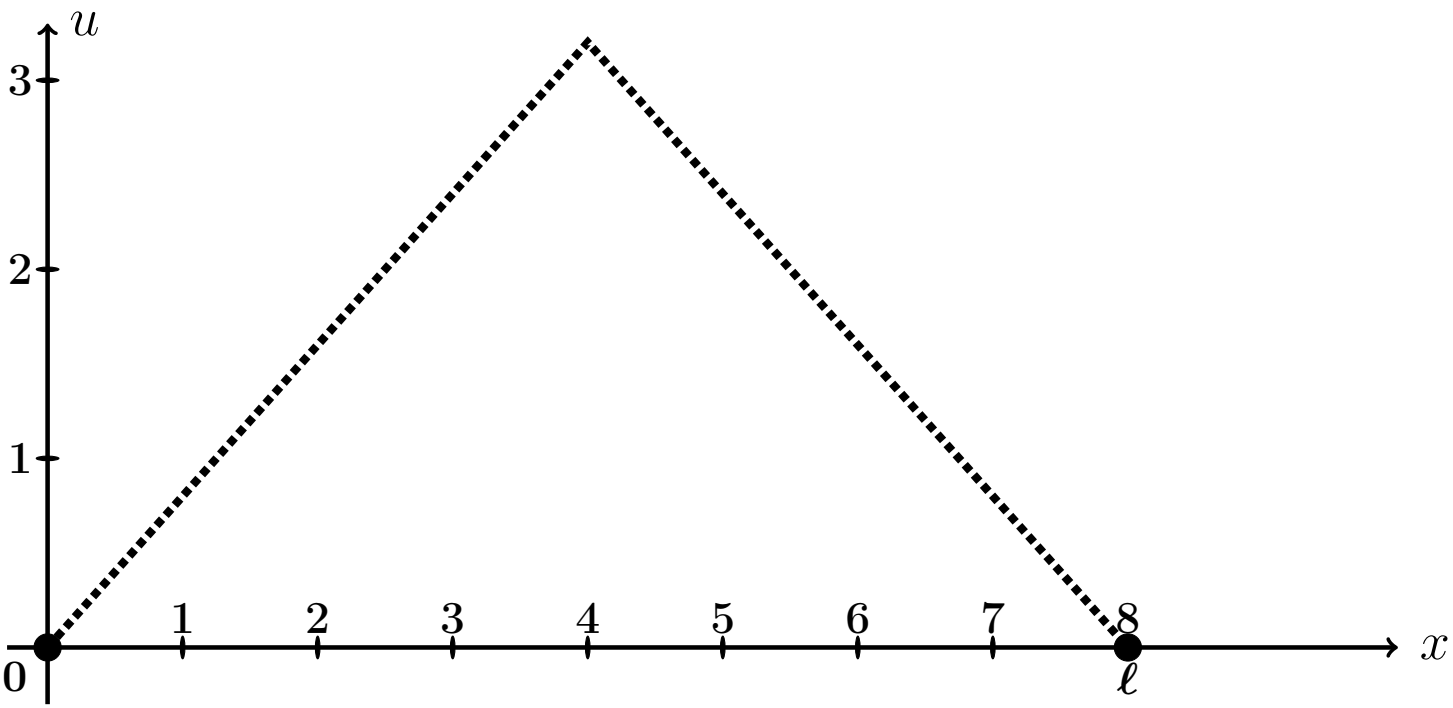


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (27.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (27.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 27.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$\qquad = \qquad + \qquad =$

$= \qquad .$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$A_k =$

$\qquad =$

$= \qquad$

$\qquad =$

$= \qquad - \qquad +$

$+ \qquad - \qquad -$

$- \qquad + \qquad =$

$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$

$+ \qquad - \qquad .$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$A_k = \qquad =$

Таблица 27.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 27.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 27.12, 27.13) формулы (27.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 27.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 27.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 27.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 27.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

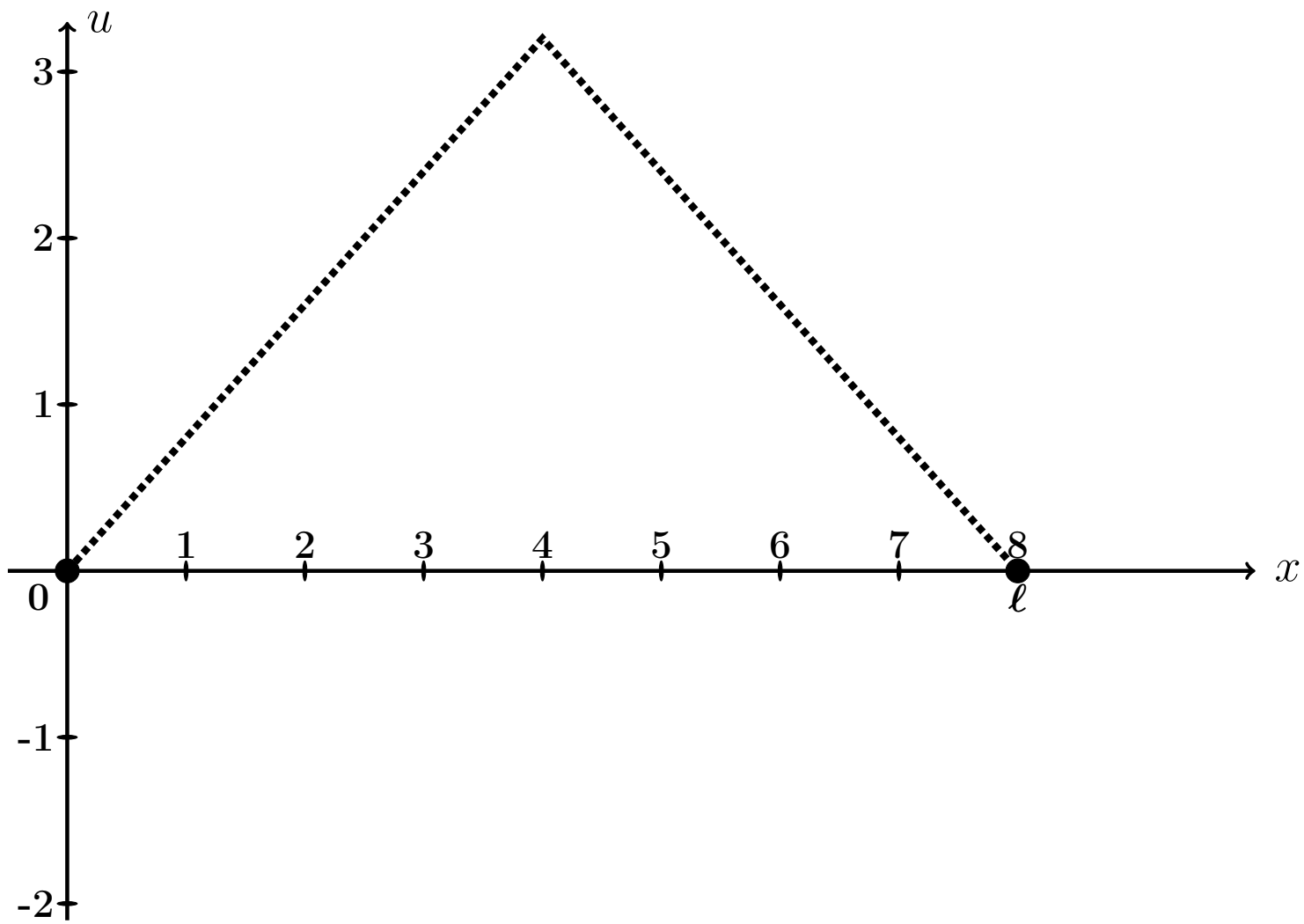


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (27.2).

Выборочная проверка вариант 27 задача 8 (по таблице 27.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 8 (по таблице 27.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 8 (по таблице 27.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 8 (по таблице 27.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{27.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.30)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-1.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.70)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(11.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{27.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-1.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{27.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

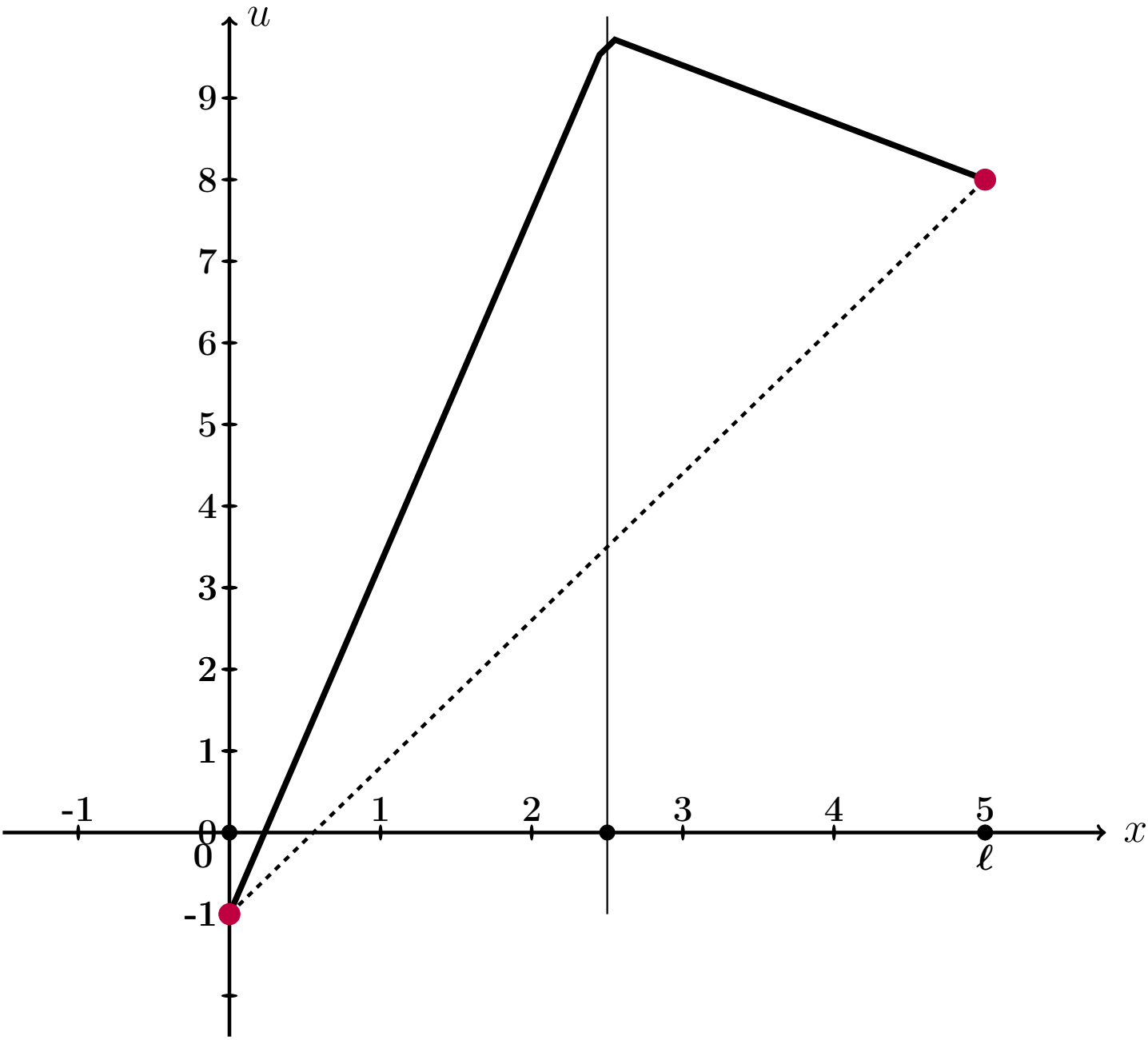


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (27.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (27.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (27.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{27.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{27.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (27.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (27.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{27.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{27.7}$$

Таблица 27.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (27.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (27.1) с начальным условием (27.2) и граничными условиями (27.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (27.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -1.0$ и $T_5 = 8.0$ — значения граничных условий (27.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 27.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 27.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-1	1,15	3,3	5,45	7,6	9,75	9,4	9,05	8,7	8,35	8
$u(x,0)$	-1	*									
$u(x,1)$	-1				*						
$u(x,2)$	-1									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 27.16.

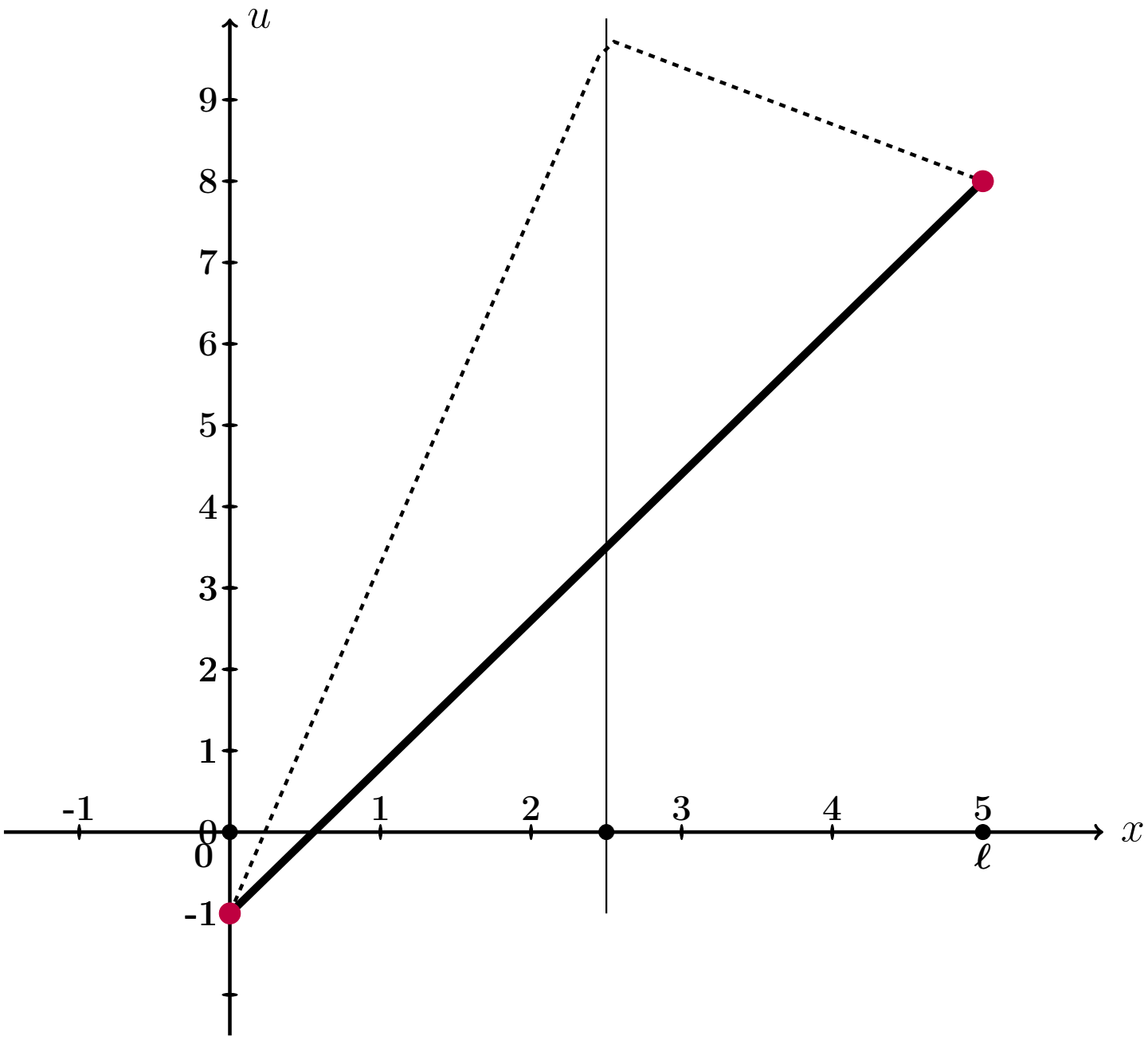


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (27.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (27.3).

Выборочная проверка вариант 27 задача 9 (по формулам (27.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 9 (по таблице 27.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 27 задача 9 (по таблице 27.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 28

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 7$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 7$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 3 \cdot x + 7$.

$$y = 3 \cdot x + 7 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (3 \cdot x + 7)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \boxed{\square}.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+7)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{7}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(3\cdot x+7)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{7}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{7}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+7=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

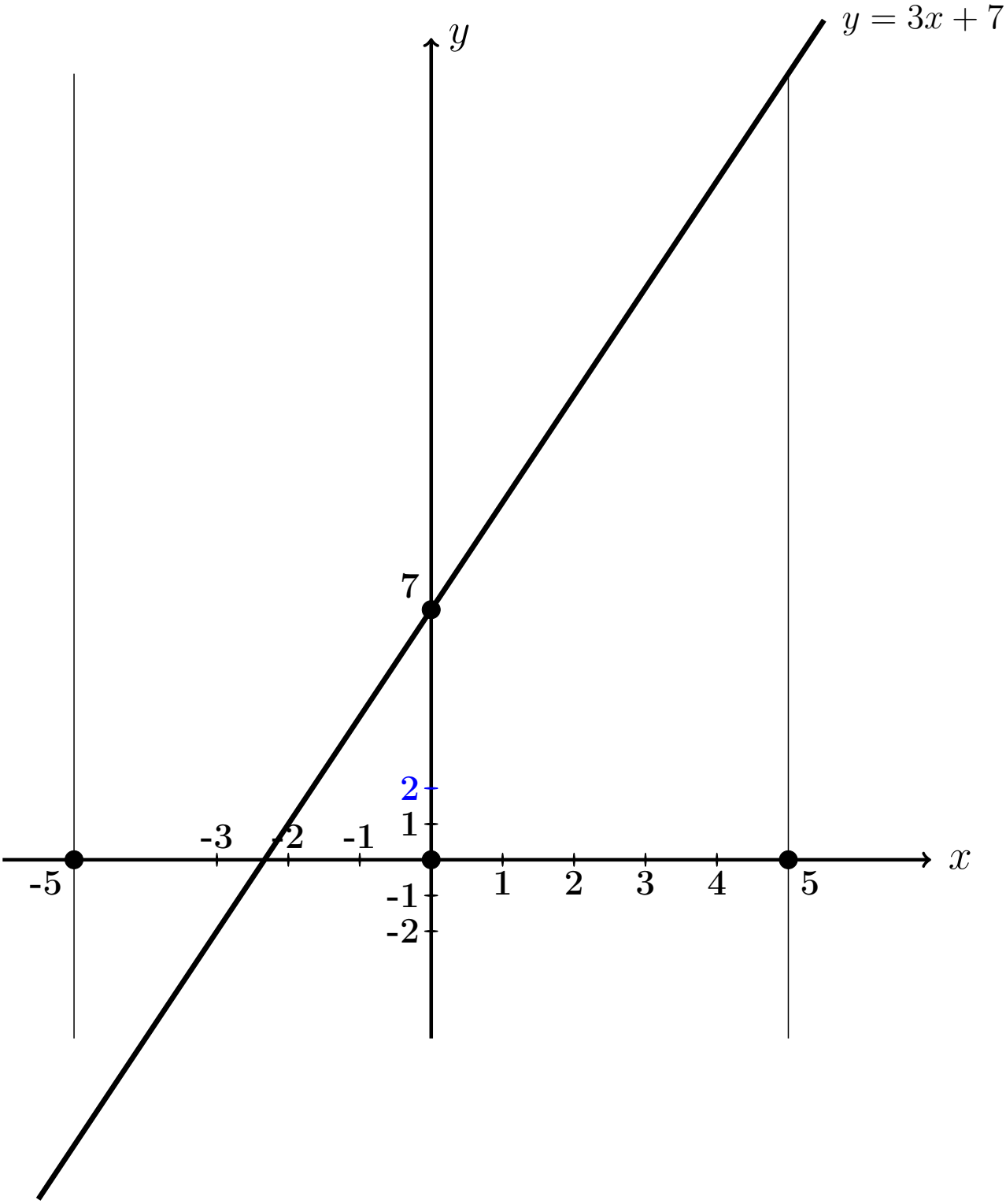
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 28.1 (Табулировка $y=3x+7$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=3x+7$	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22
$y=S_1(x)$		$*$									
$y=S_2(x)$					$*$						
$y=S_3(x)$								$*$			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 28.1



Выборочная проверка вариант 28 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 1 (по Таблице 28.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 18\sqrt{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x, y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x, y)$ при условии $u(x, y)\big|_{x=7} = 9\cos y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1, 2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x, y) = \int (6x^2+18\sqrt{y})dx = 6\int x^2\,dx+18\int \sqrt{y}\,dx = \qquad\qquad$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad\qquad\qquad = 9\cos y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x, y) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1, 2) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1, 2)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9x^2 + 6t$. Найти общее решение $u_{\text{общ}}(x,t)$, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 3\cos x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x\,.$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9x^2 + 6t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (9x^2 + 6t)dt = \qquad = \qquad ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad \Big) dt = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad ,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 3\cos x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 5x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad\qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad\qquad$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.1$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.2\sin(2.0\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

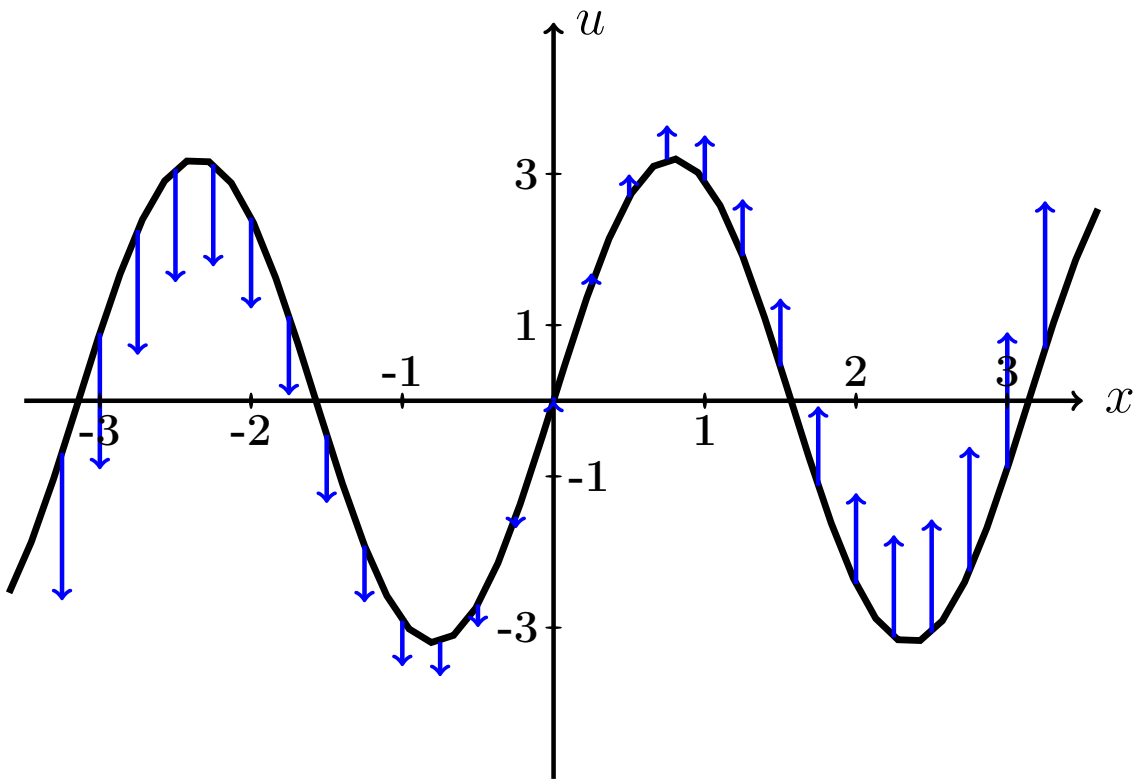


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 28.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 28 задача 4 (по Таблице 28.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 28.2.

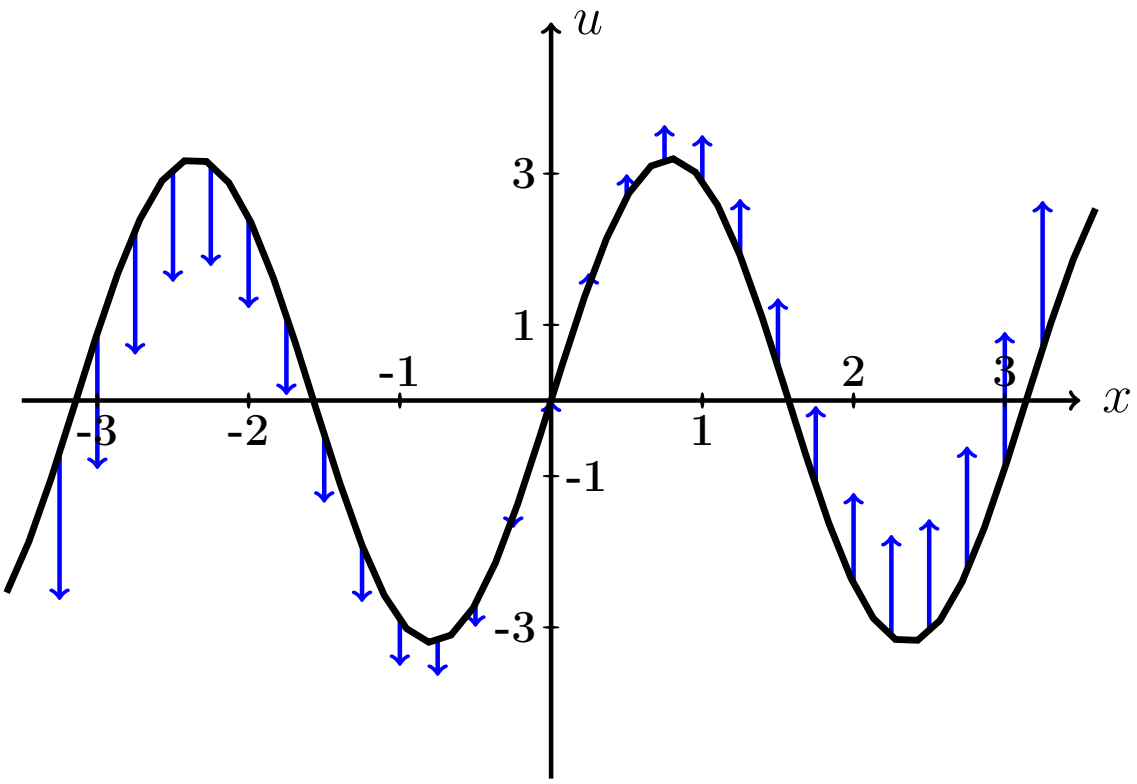


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.2 \cdot \sin(2.0\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 0.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

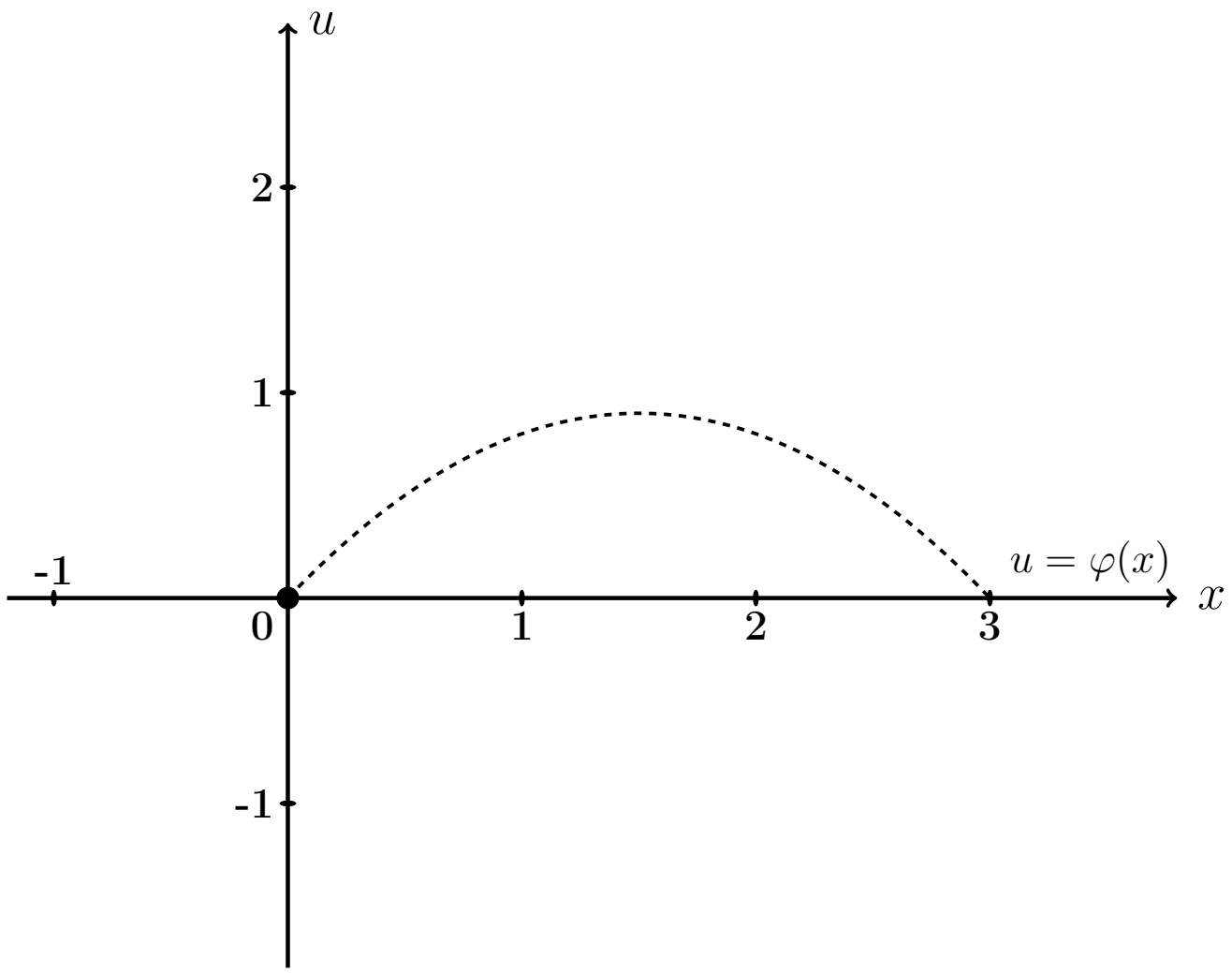


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 28.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 28.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 28.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 28.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 28 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 5 (красные клетки таб. 28.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 28.4.

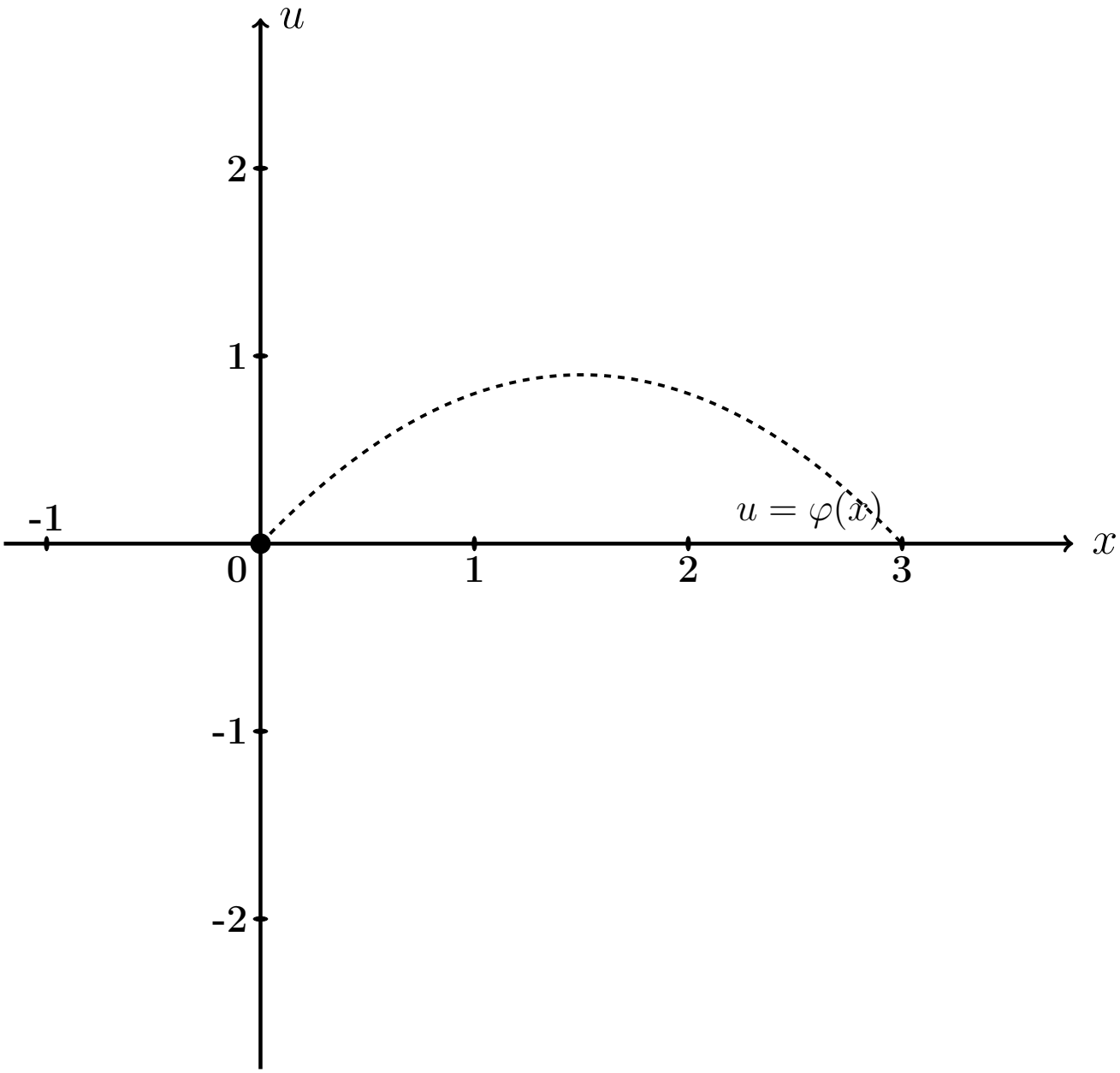


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 3.6$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.4\,x^2 + 1.2x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{3} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

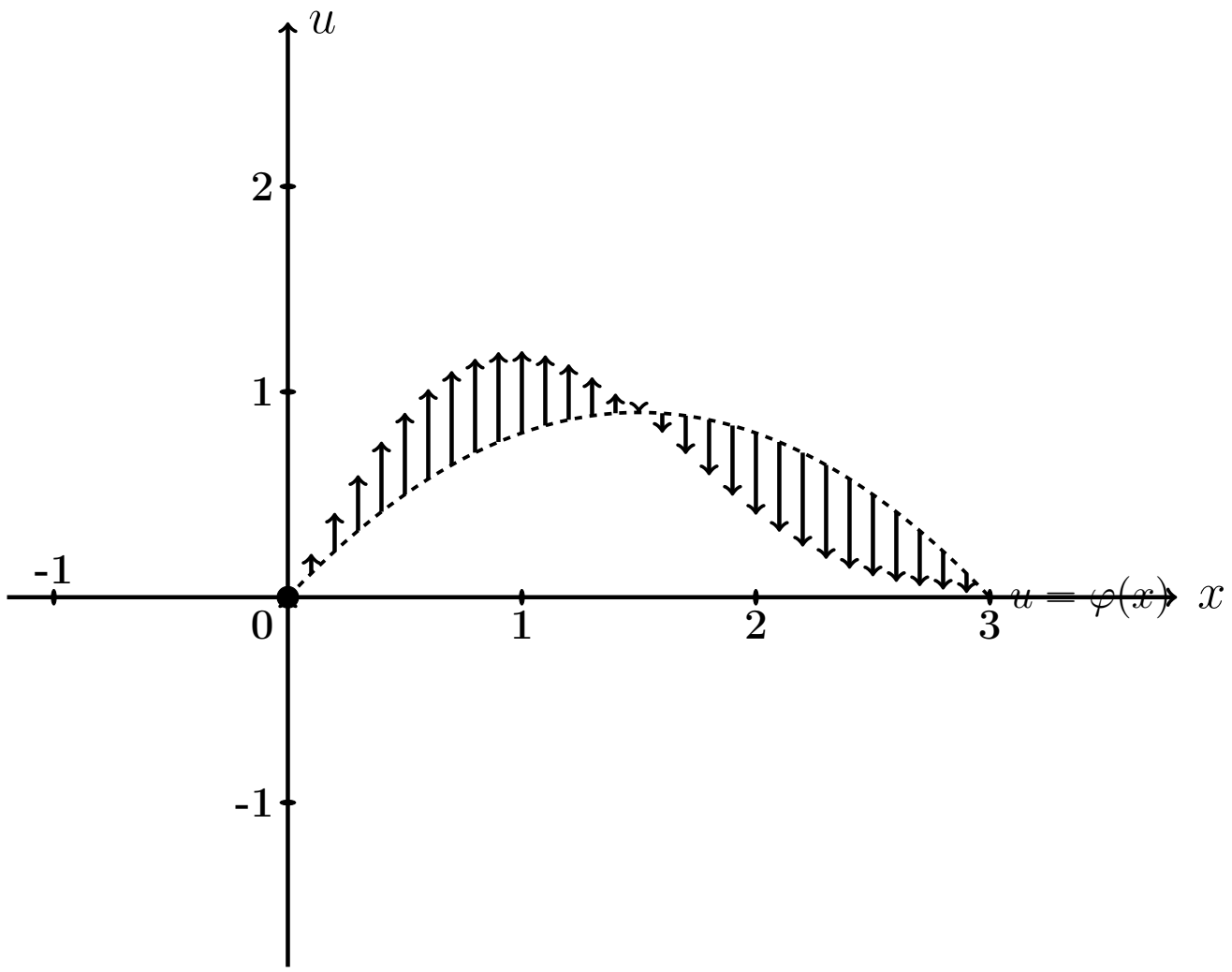


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{3}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{3}\int_0^{3}(-0.4\,x^2+1.2x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 28.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^3 2.3\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.31$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 28.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 28.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 28.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	0	0,32	0,58	0,76	0,86	0,9	0,86	0,76	0,58	0,32	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 28 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 6 (красные клетки Таблицы 28.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 28.6.

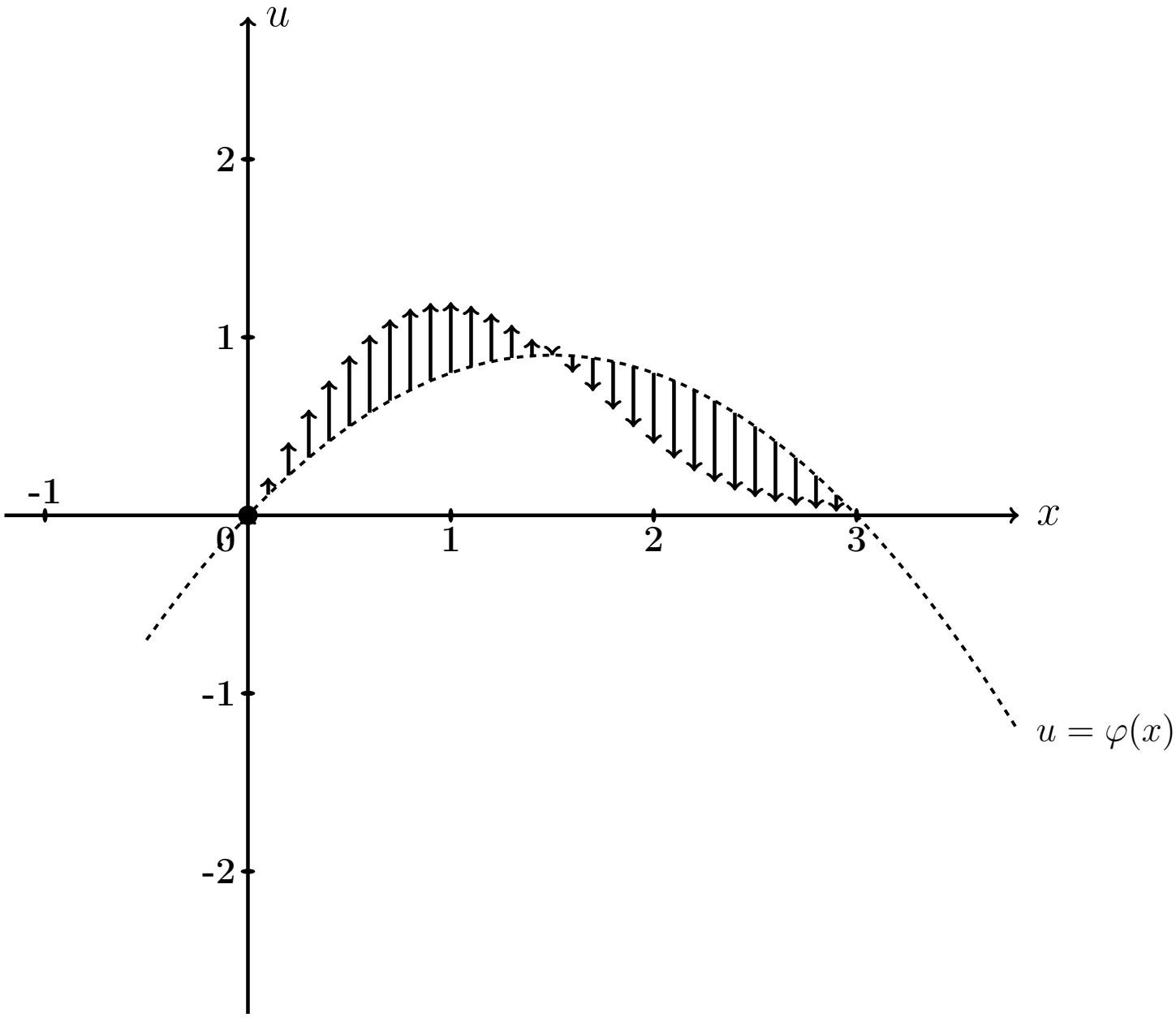


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.4\,x^2 + 1.2\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{3}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.1$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.00 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 1.00 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{28.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{28.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (28.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{28.4}$$

при $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, $\Omega = 4.0$, с теми же начальными и граничными условиями (28.2), (28.3). Затабулировать решение уравнения (28.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (28.4) при тех же исходных данных $\ell = 5$, $a = 3.1$, $E = 10.0$, и при резонансном значении $\Omega = 0.62\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (28.2), (28.3). Затабулировать решение уравнения (28.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (28.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 28.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{5} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{5} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{28.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (28.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{28.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (28.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (28.4) при граничных условиях (28.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{28.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{28.8}$$

где $\ell = 5$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{28.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.0$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (28.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (28.9). Следовательно, по формуле (28.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{28.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{28.11}$$

Шаг 6.

Таблица 28.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 28.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (28.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 28.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 28.9

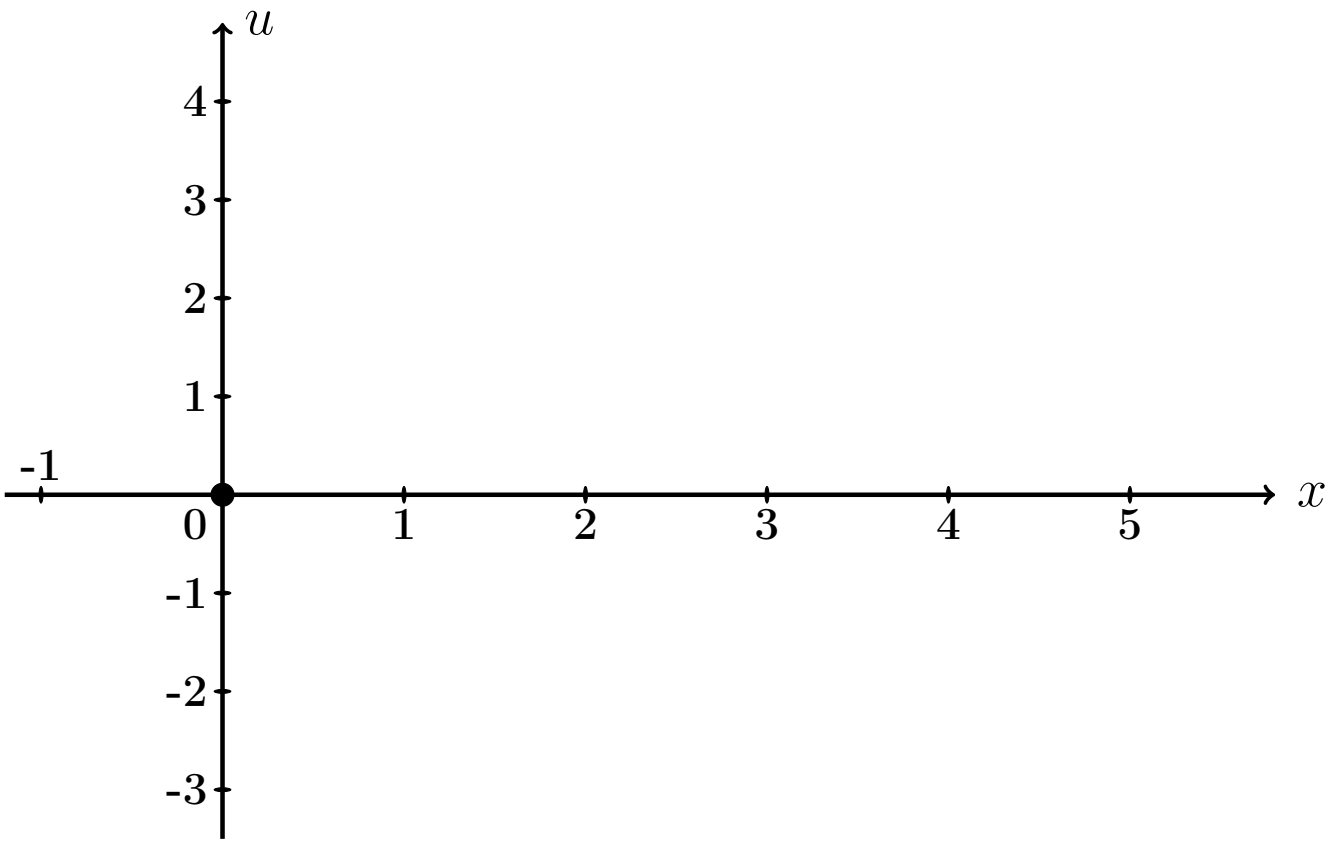


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 28 задача 7 (по Таб. 28.7, 28.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 28 задача 7 (по таблице 28.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (28.6) и (28.8). Однако данное значение $\Omega = 0.62\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (28.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (28.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (28.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (28.9). Следовательно, по формуле (28.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (28.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (28.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (28.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 28.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (28.5),

$C_1' =$ по формуле (28.12)

и $C_3 =$ по таблице 28.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 28.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2	1,5	1	0,5	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

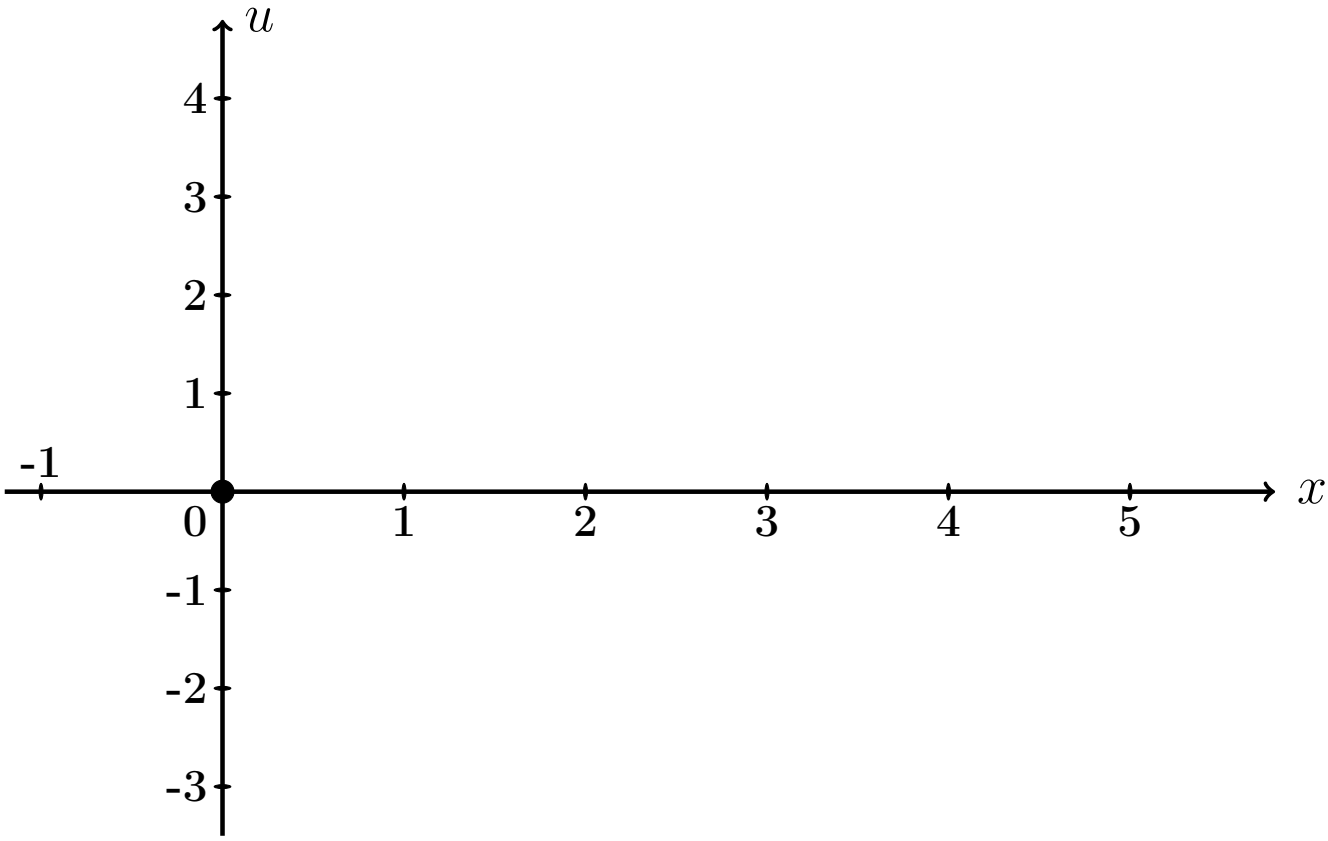


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 28 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (28.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 28 задача 7 (по таблице 28.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.50 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ 0.50 \cdot (5 - x), & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{28.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 .$$

Определить собственные частоты решения уравнения (28.1). Затабулировать решение уравнения (28.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

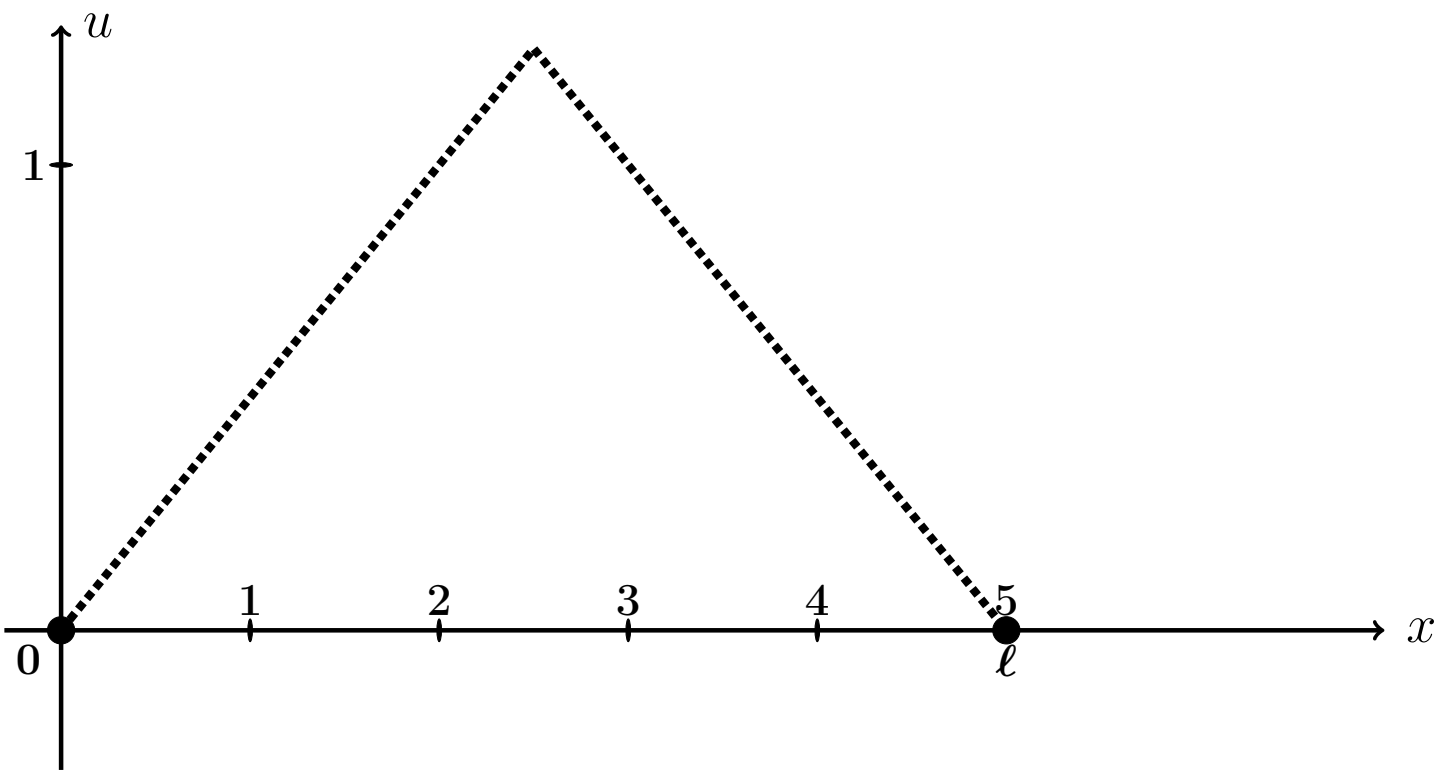


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (28.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{5}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (28.3)$$

где $\ell = 5$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 28.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 28.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 28.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 28.12, 28.13) формулы (28.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 5$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 28.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 28.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 28.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 28.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

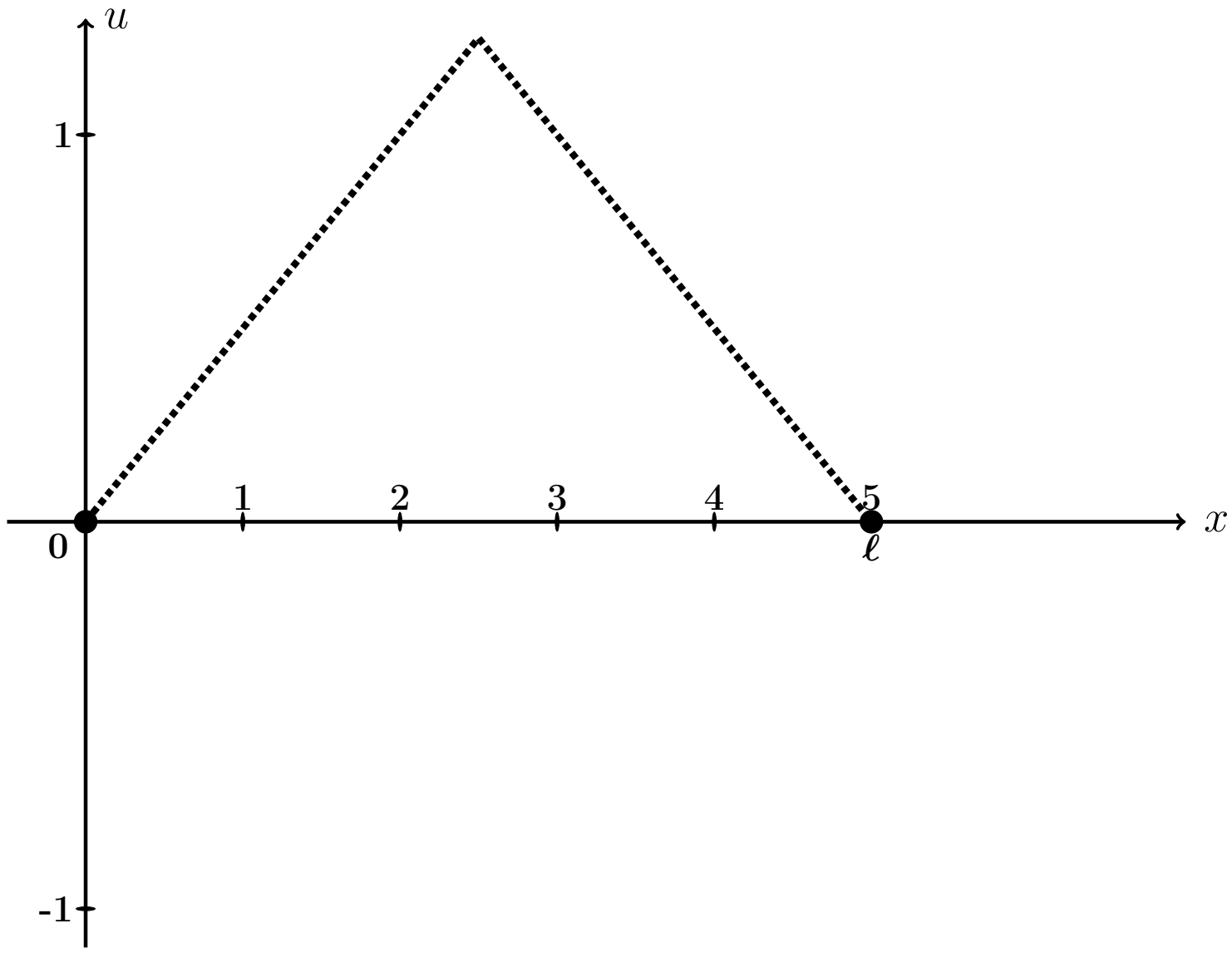


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (28.2).

Выборочная проверка вариант 28 задача 8 (по таблице 28.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 8 (по таблице 28.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 8 (по таблице 28.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 8 (по таблице 28.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 0.4$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{(0.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(6.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{28.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{28.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

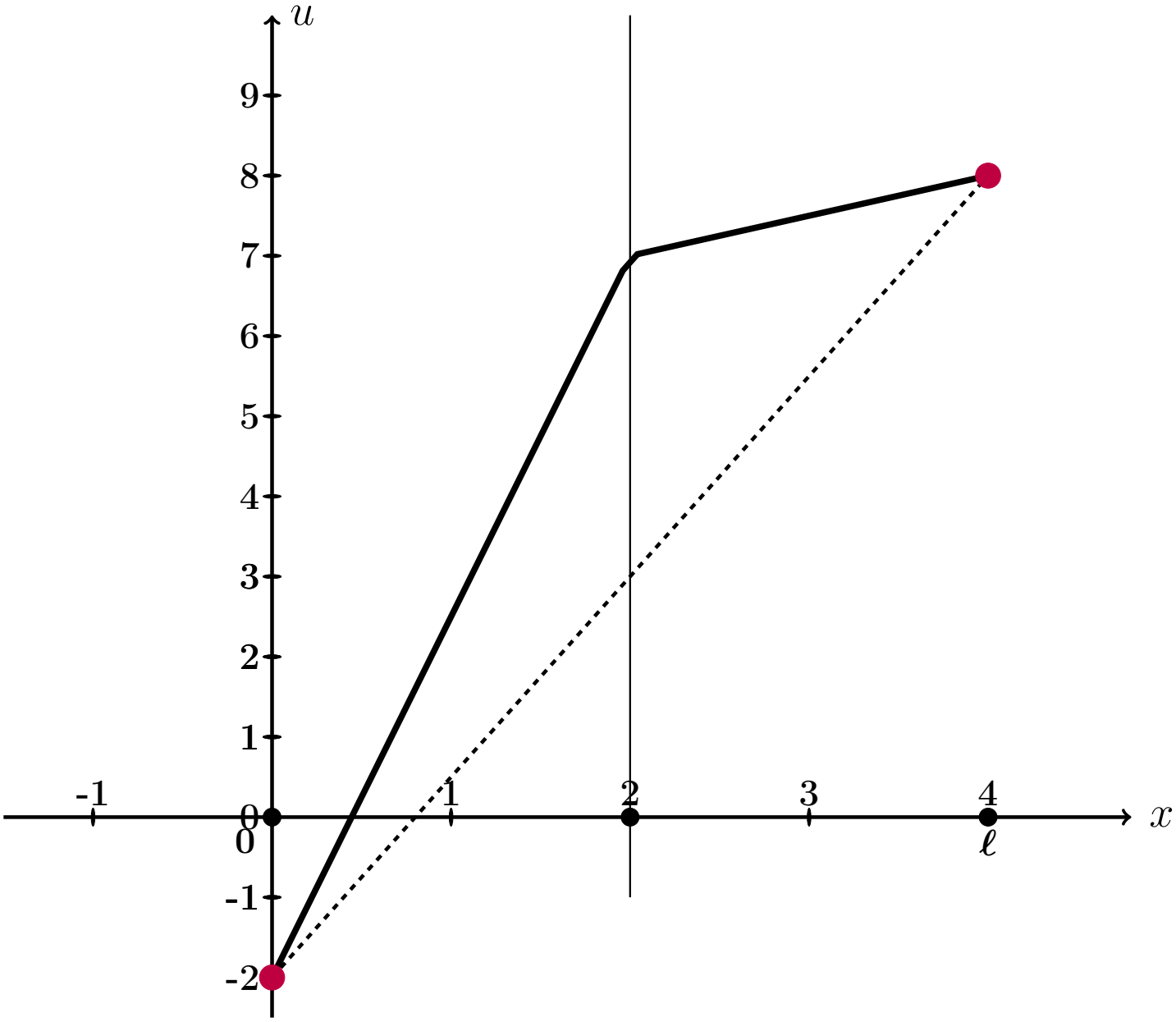


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (28.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (28.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (28.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{28.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 4/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 4/2 \le x \le 4 \end{cases}}_{f(x)} \tag{28.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (28.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (28.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^{4} f(x)\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{28.7}$$

Таблица 28.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (28.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (28.1) с начальным условием (28.2) и граничными условиями (28.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (28.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_4 - T_0}{4} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_4 = 8.0$ — значения граничных условий (28.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 28.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 28.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}2$	1,6	3,4	5,2	7	7,2	7,4	7,6	7,8	8
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 28.16.

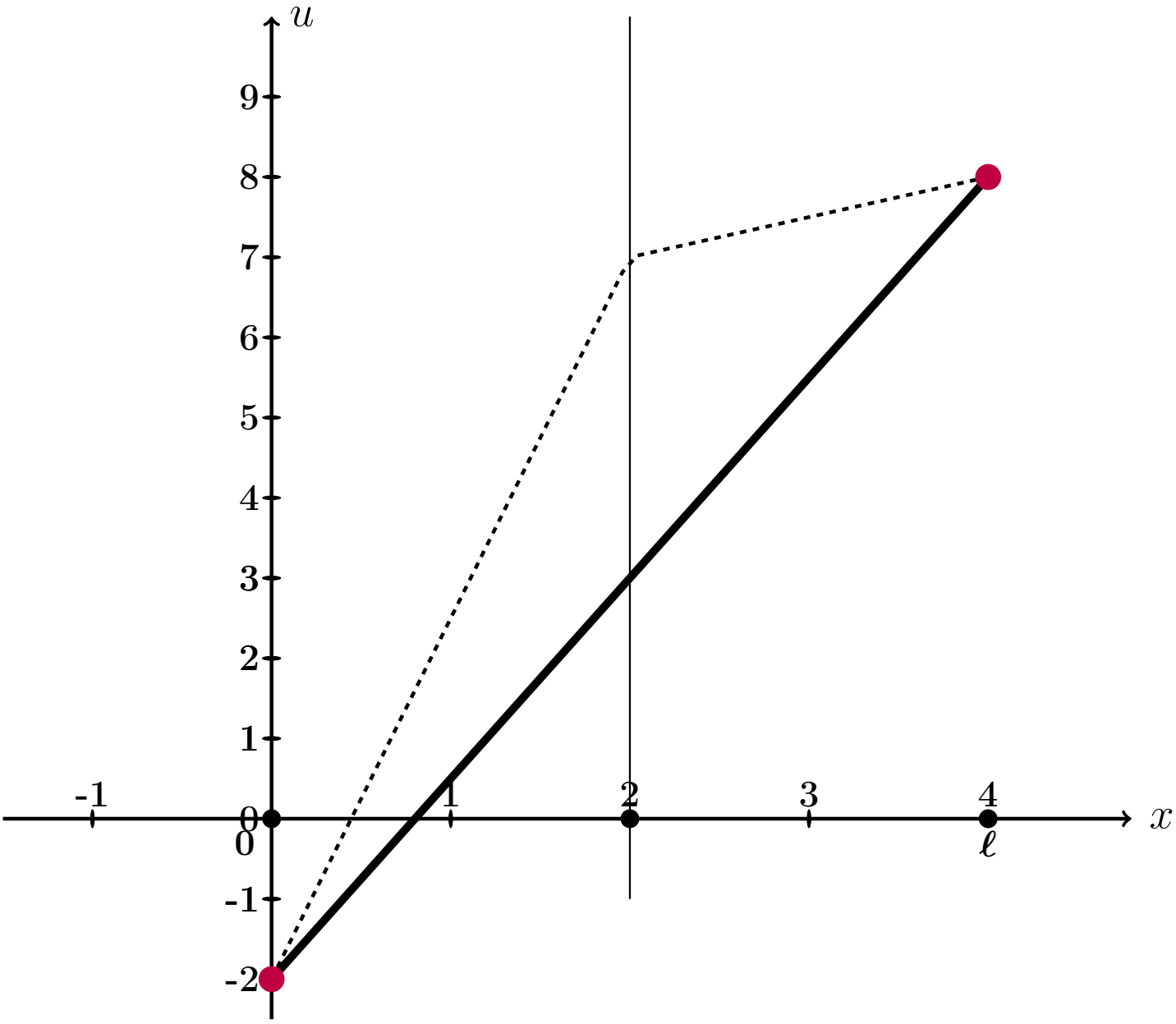


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (28.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (28.3).

Выборочная проверка вариант 28 задача 9 (по формулам (28.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 9 (по таблице 28.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 28 задача 9 (по таблице 28.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 29

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 4 \cdot x + 6$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 4 \cdot x + 6$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 4 \cdot x + 6$.

$$y = 4 \cdot x + 6 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (4 \cdot x + 6)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+6)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{6}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(4\cdot x+6)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{4}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{6}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{4}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{6}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$4\cdot x+6=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

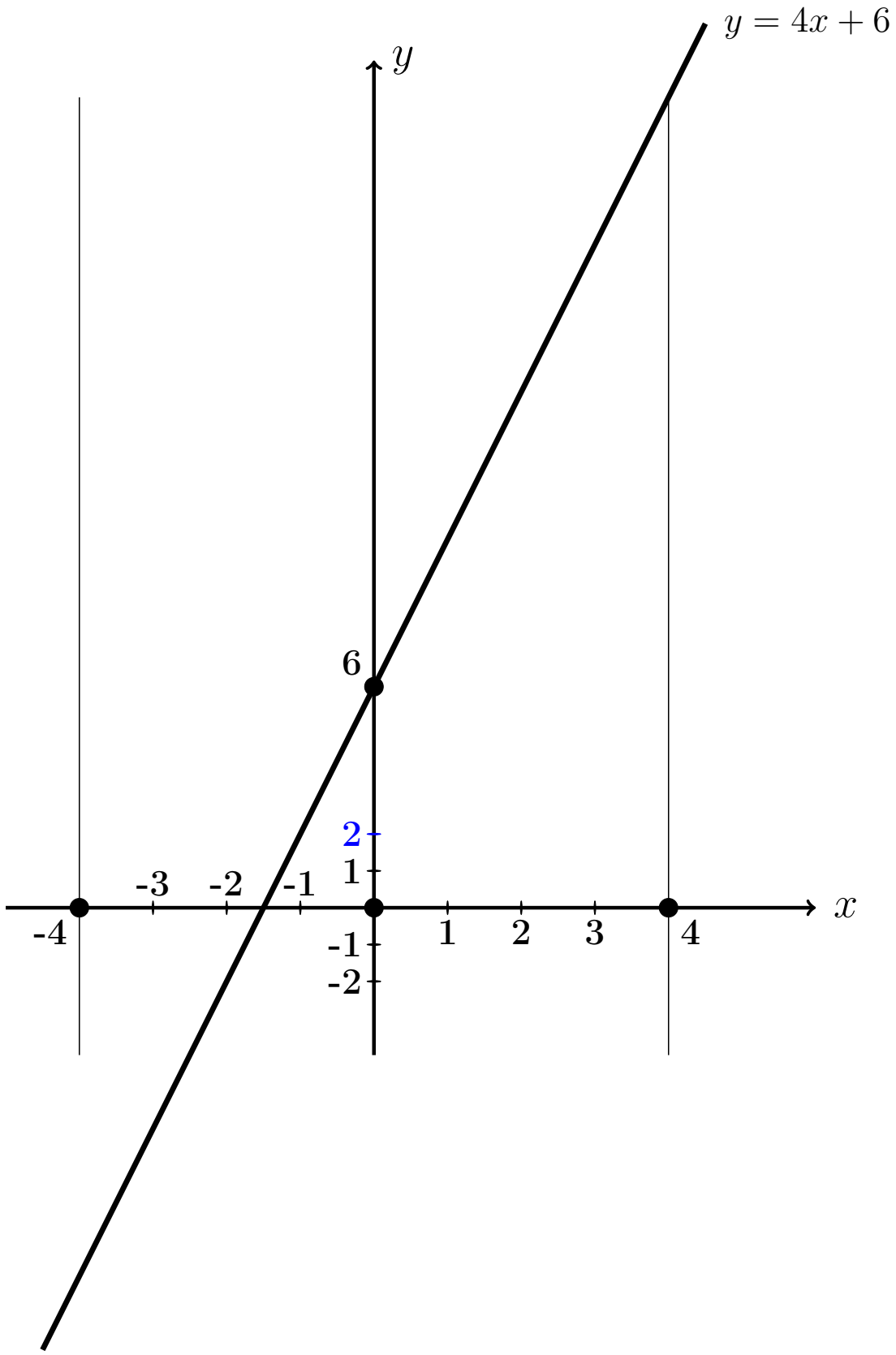
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 29.1 (Табулировка $y=4x+6$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=4x+6$	-10	-6	-2	2	6	10	14	18	22
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 29.1



Выборочная проверка вариант 29 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 1 (по Таблице 29.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sin x + 24y^3$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sqrt{y}$,
численное значение $u_{\text{част}}(3,1)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int (8\sin x + 24y^3)dx = 8\int \sin x\,dx + 24\int y^3\,dx =$$

$$= \qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$= 12\sqrt{y},$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(3,1) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(3,1)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 12x + 8t^2$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4\sin x \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 6x^2 .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(4,2)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 12x + 8t^2$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (12x + 8t^2)\,dt = \qquad + C(x) = \qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \qquad + C(x)\big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4\sin x \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{0} + C(x) = 6x^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,t) = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(4,2) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 29 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(4,2)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.2$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{2.9\sin(1.6\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.1\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

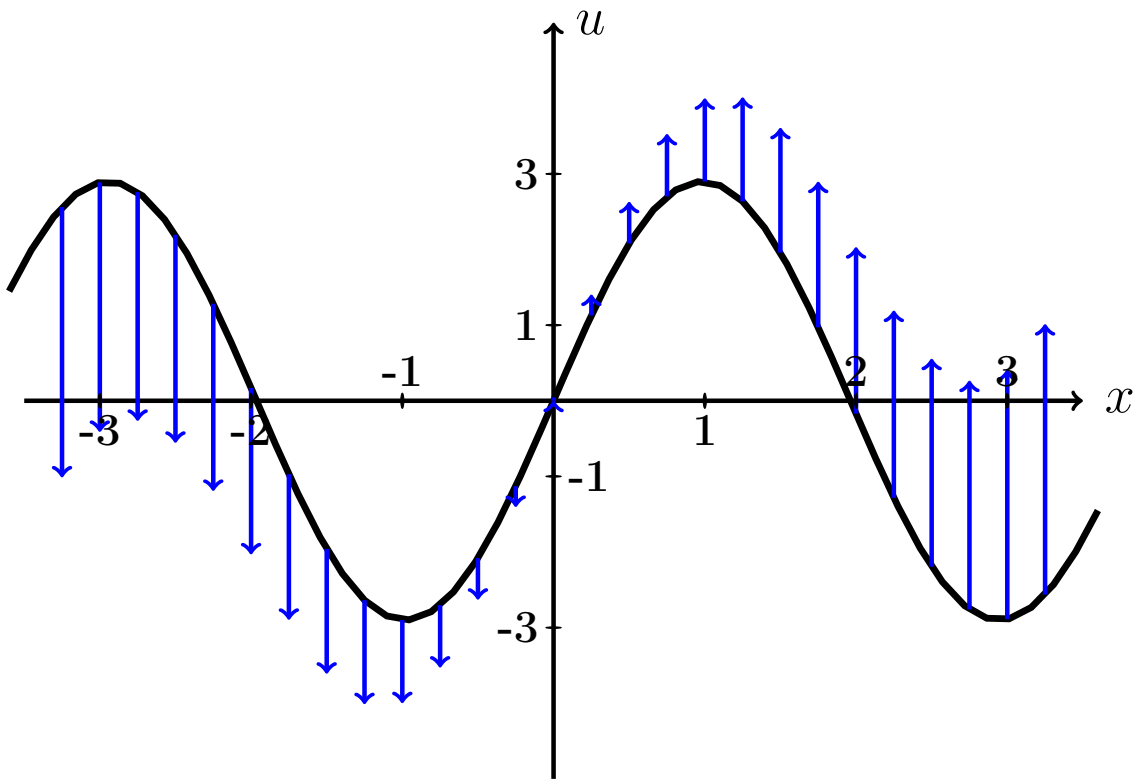


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 29.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 29 задача 4 (по Таблице 29.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 29.2.

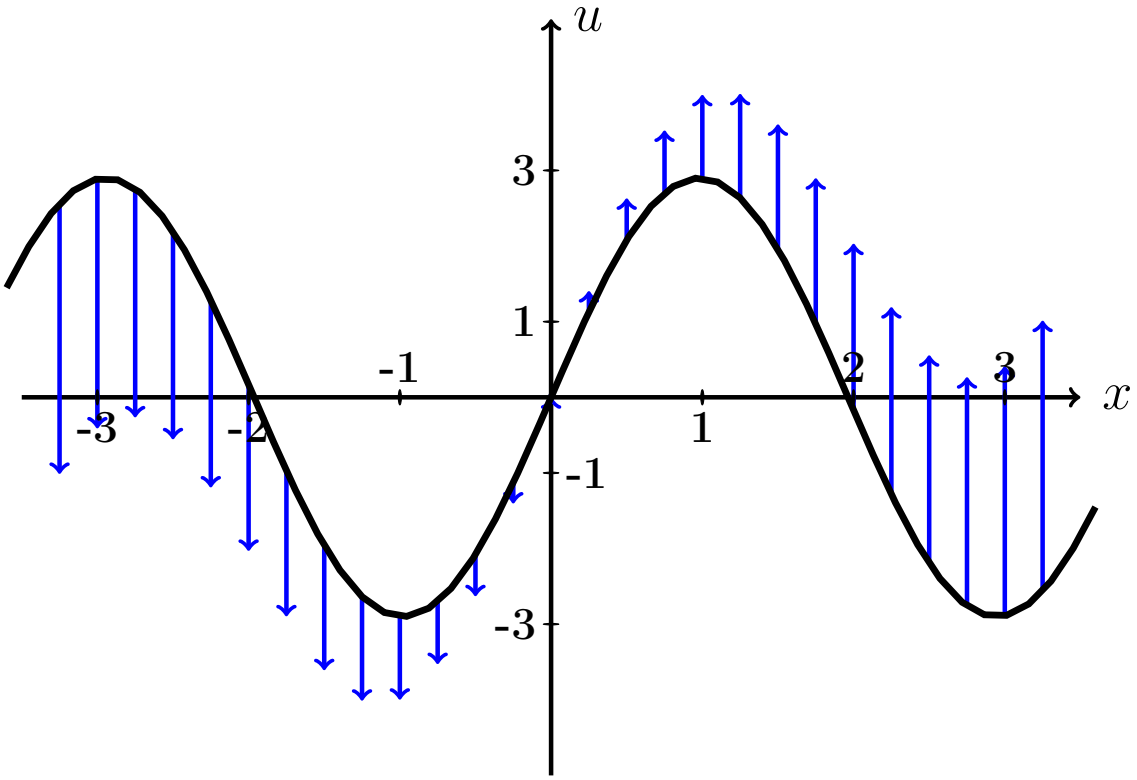


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 2.9 \cdot \sin(1.6\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.1 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

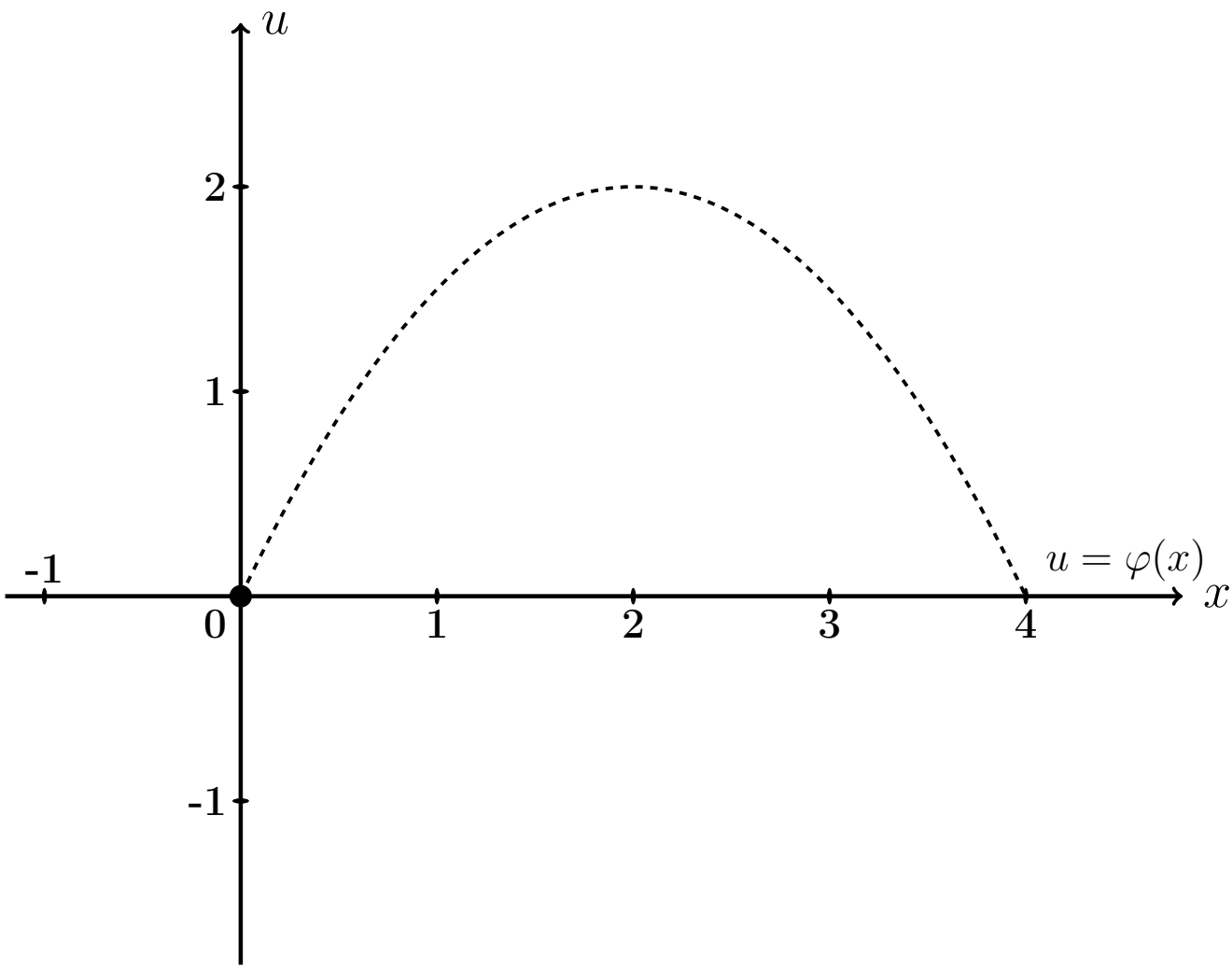


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 29.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 29.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 29.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 29.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 29 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 5 (красные клетки таб. 29.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 29.4.

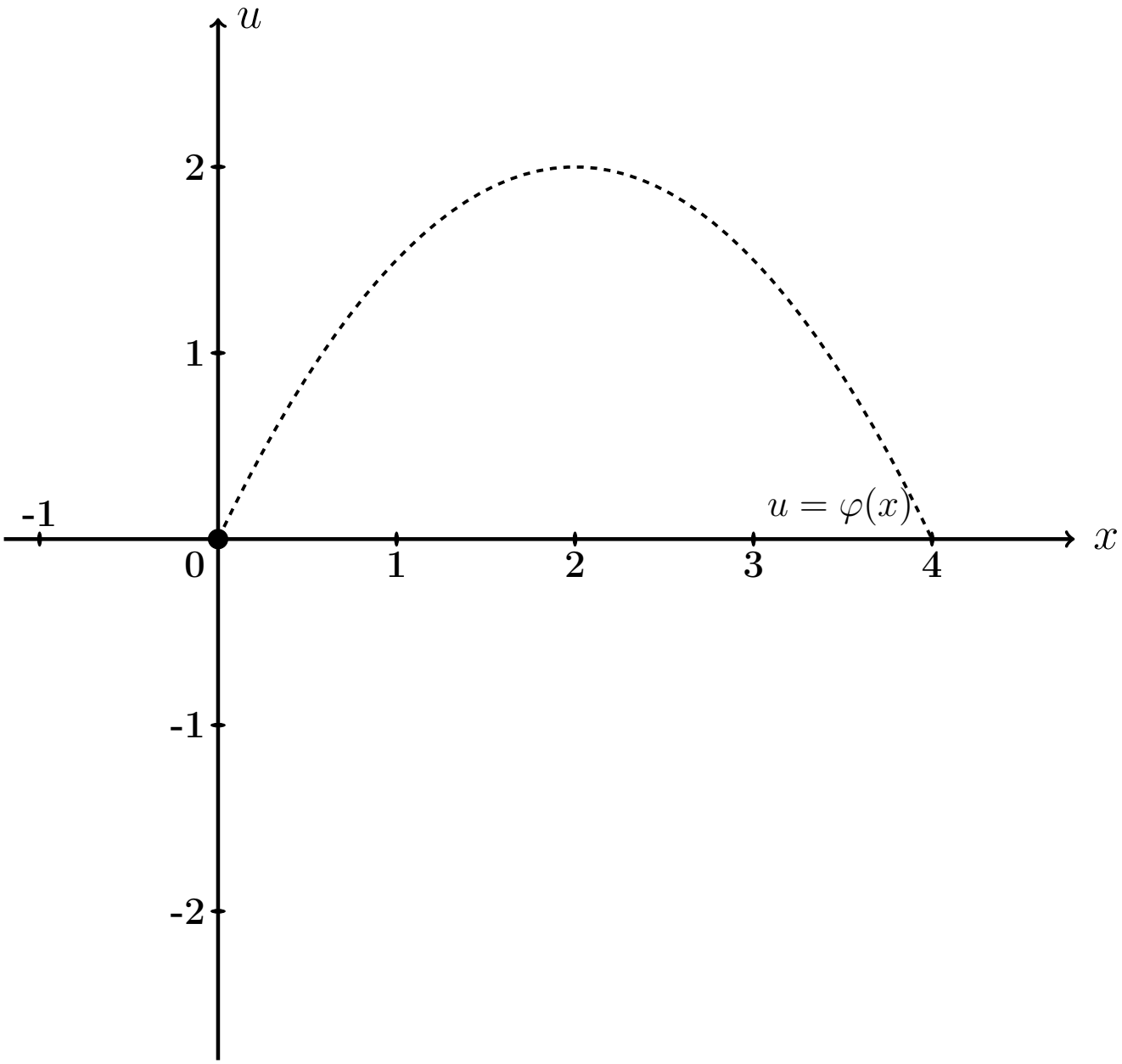


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.7$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.5\,x^2 + 2.0x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

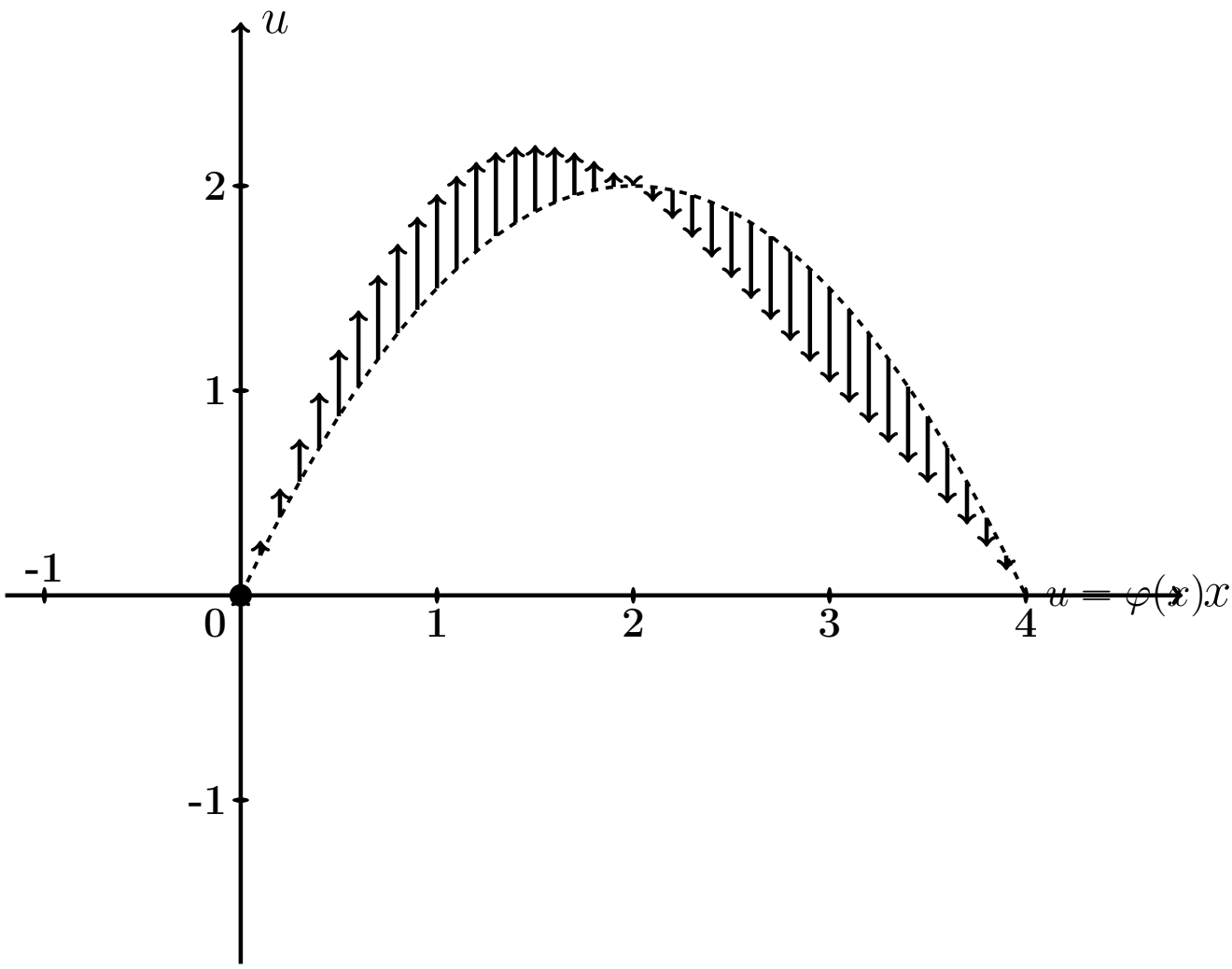


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.5\,x^2 + 2.0x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 29.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.40$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 29.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 29.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 29.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,72	1,28	1,68	1,92	2	1,92	1,68	1,28	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 29 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 6 (красные клетки Таблицы 29.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 29.6.

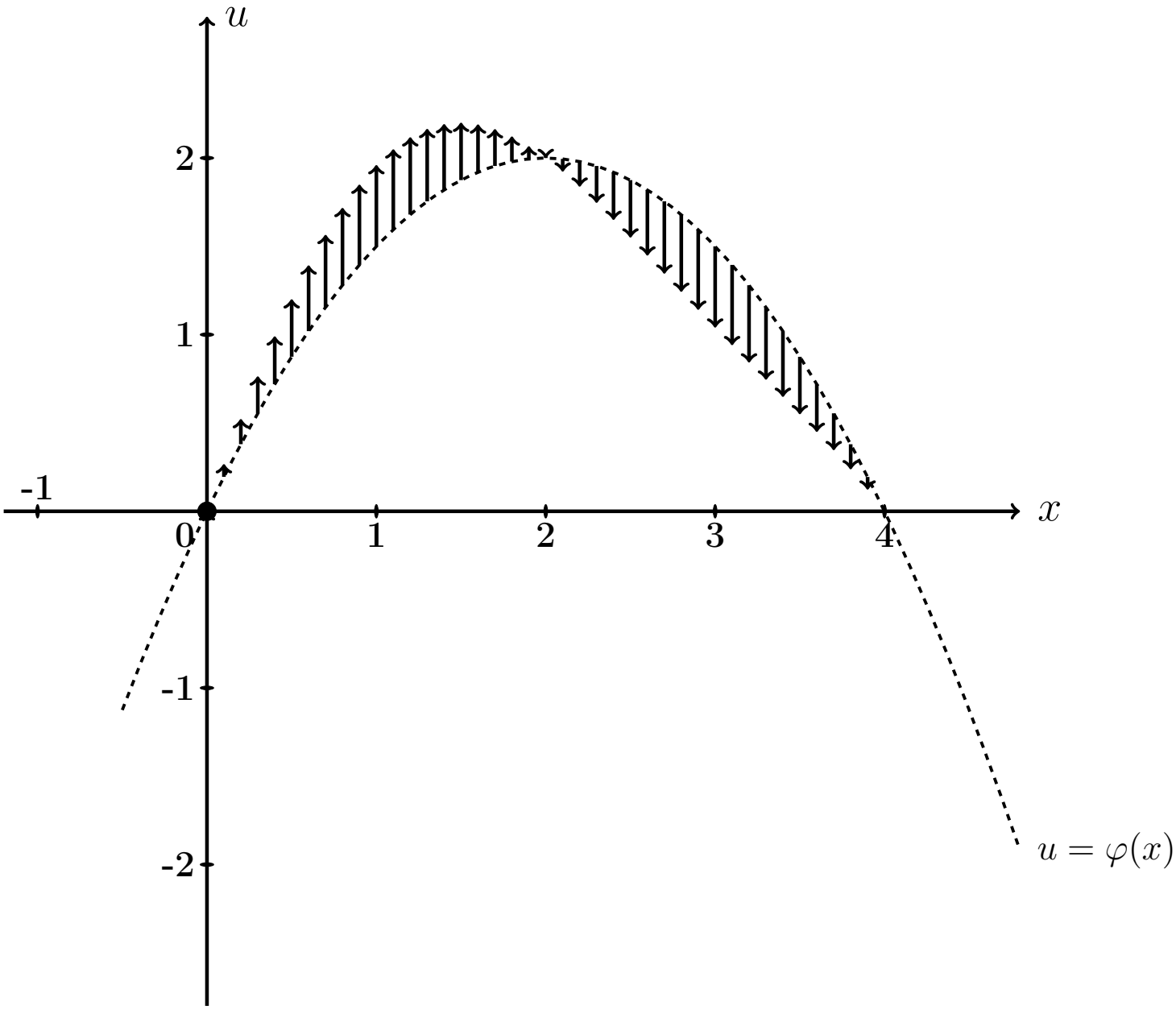


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.5\,x^2 + 2.0\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{29.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 3.5$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.40 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 1.40 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{29.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{29.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (29.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{29.4}$$

при $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, $\Omega = 4.1$, с теми же начальными и граничными условиями (29.2), (29.3). Затабулировать решение уравнения (29.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (29.4) при тех же исходных данных $\ell = 7$, $a = 3.5$, $E = 10.1$, и при резонансном значении $\Omega = 0.50\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (29.2), (29.3). Затабулировать решение уравнения (29.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (29.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{7}\int_0^{7} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{7}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 29.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^7 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{7}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{29.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (29.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{29.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (29.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (29.4) при граничных условиях (29.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{29.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{29.8}$$

где $\ell = 7$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{29.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.1$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (29.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (29.9). Следовательно, по формуле (29.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{29.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{29.11}$$

Шаг 6.

Таблица 29.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 29.7,

$$\ell = ___, \quad a = ___, \quad \Omega = ___,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (29.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 29.8. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ +$$
$$+ _____ .$$

Таблица 29.9 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,98	1,96	2,94	3,92	4,9	3,92	2,94	1,96	0,98	0
$u(x,0)$	0										
$u(x,1)$	0										
$u(x,2)$	0										

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 29.9

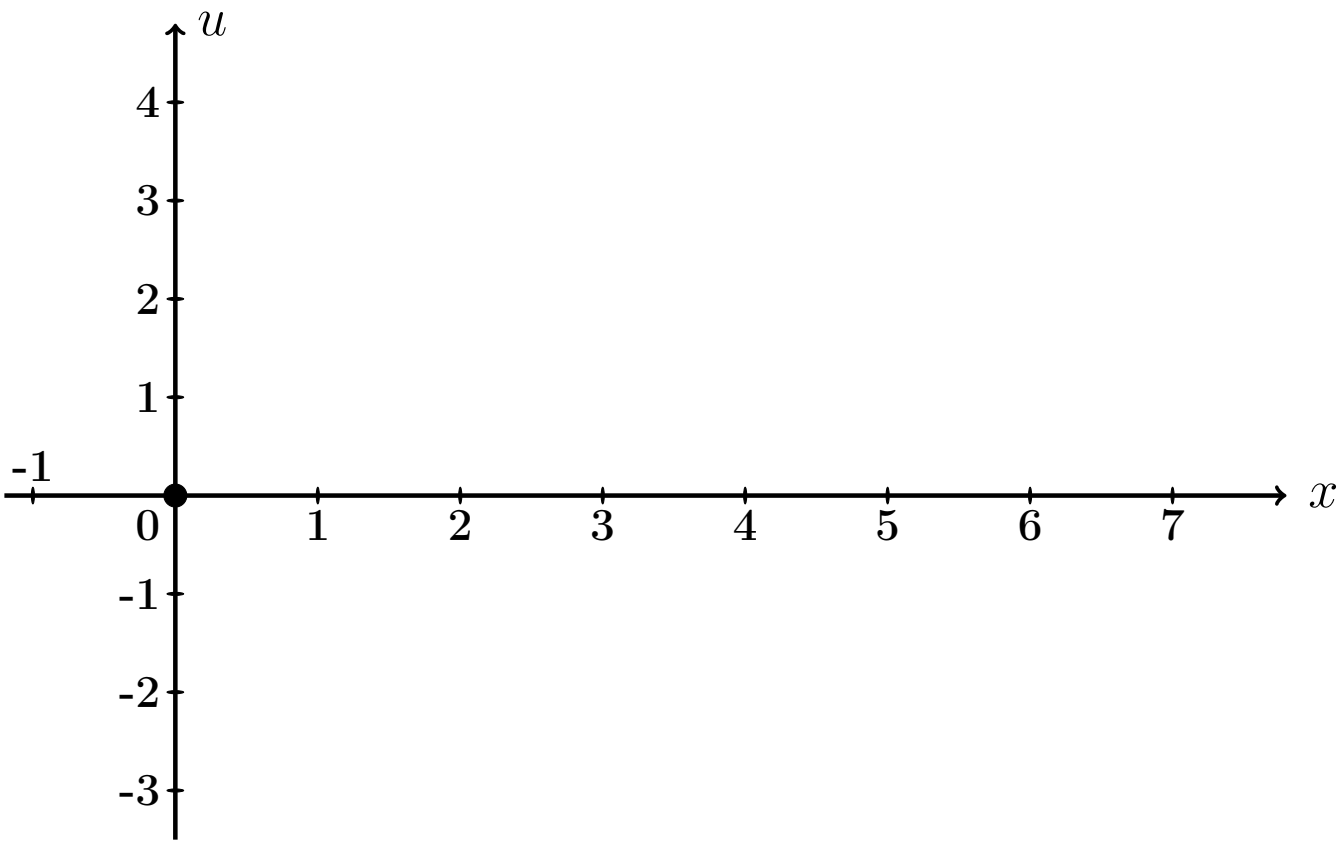


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 29 задача 7 (по Таб. 29.7, 29.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 29 задача 7 (по таблице 29.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (29.6) и (29.8). Однако данное значение $\Omega = 0.50\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (29.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (29.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (29.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (29.9). Следовательно, по формуле (29.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (29.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (29.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (29.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 29.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (29.5),

$C_1' =$ по формуле (29.12)

и $C_3 =$ по таблице 29.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 29.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,98	1,96	2,94	3,92	4,9	3,92	2,94	1,96	0,98	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

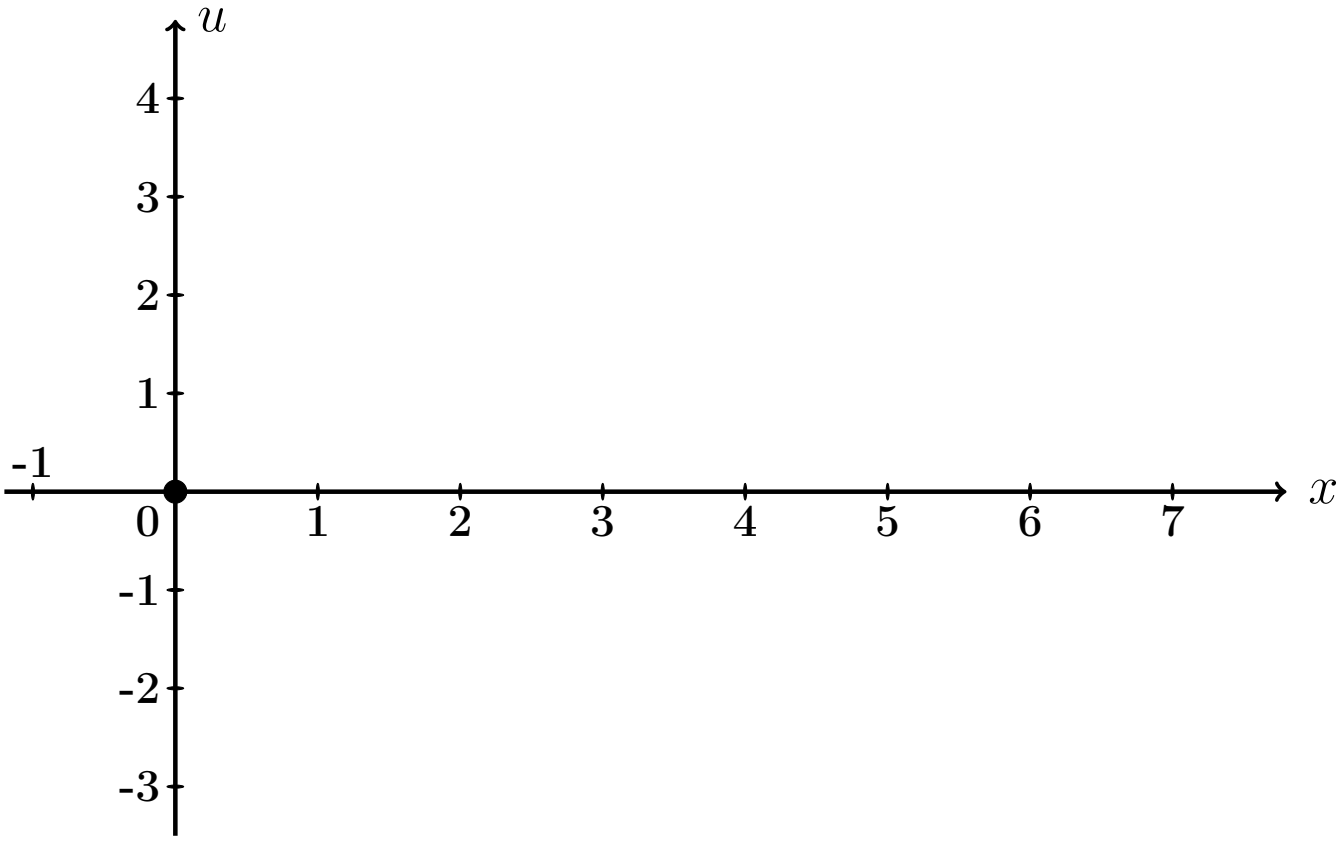


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 29 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (29.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 29 задача 7 (по таблице 29.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{29.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 7$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.70 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 7/2 \\ 0.70 \cdot (7 - x), & \text{при } 7/2 \le x \le 7 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{29.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (29.1). Затабулировать решение уравнения (29.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 7$ с шагом $\Delta x = 0.7$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

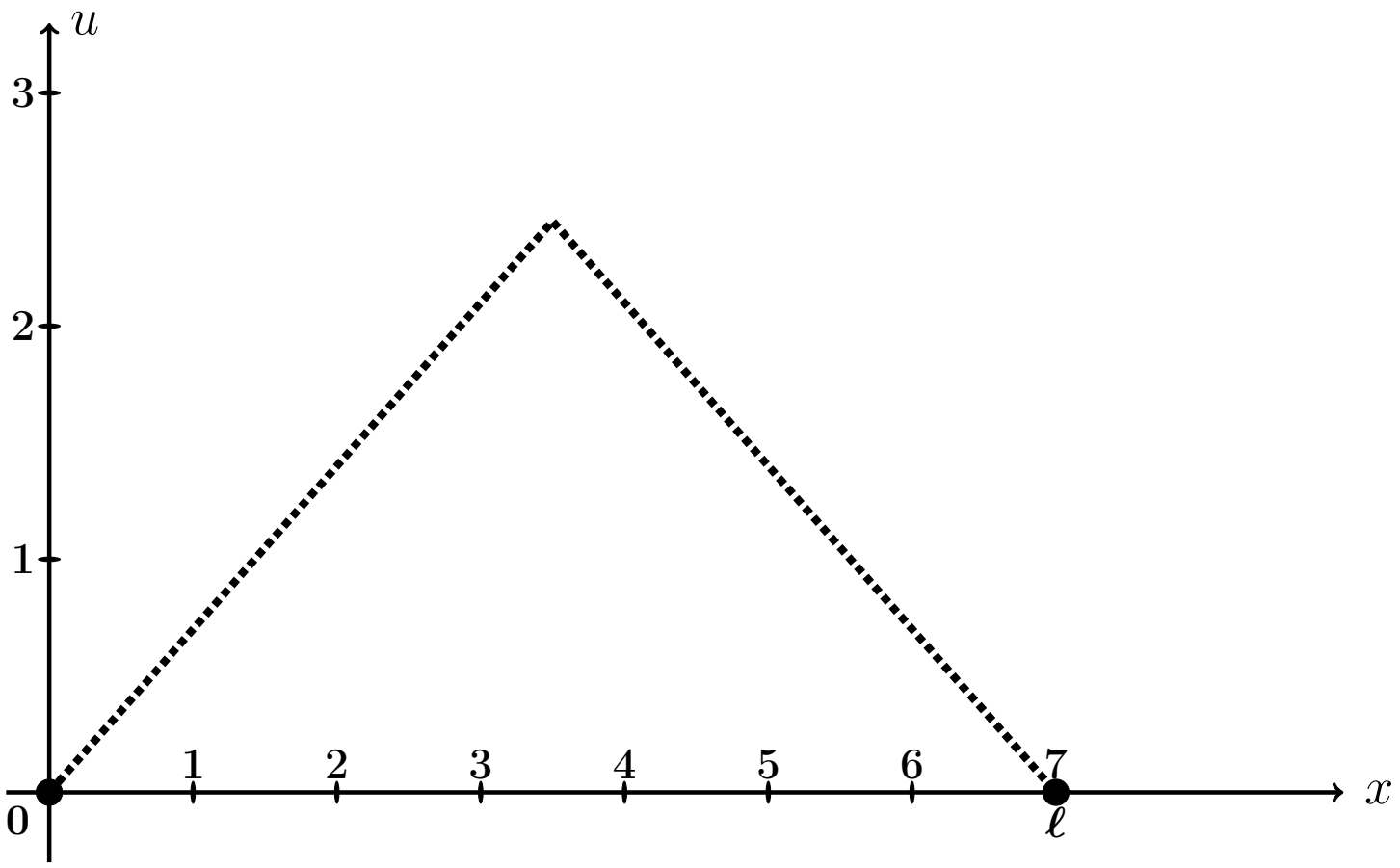


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (29.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{7} , \end{aligned}\right\} \qquad (29.3)$$

где $\ell = 7$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 29.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad\qquad =$

$$= \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{7}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

Таблица 29.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 29.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 29.12, 29.13) формулы (29.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 7$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 29.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 29.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 29.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 29.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30	7
$\varphi(x)$	0	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

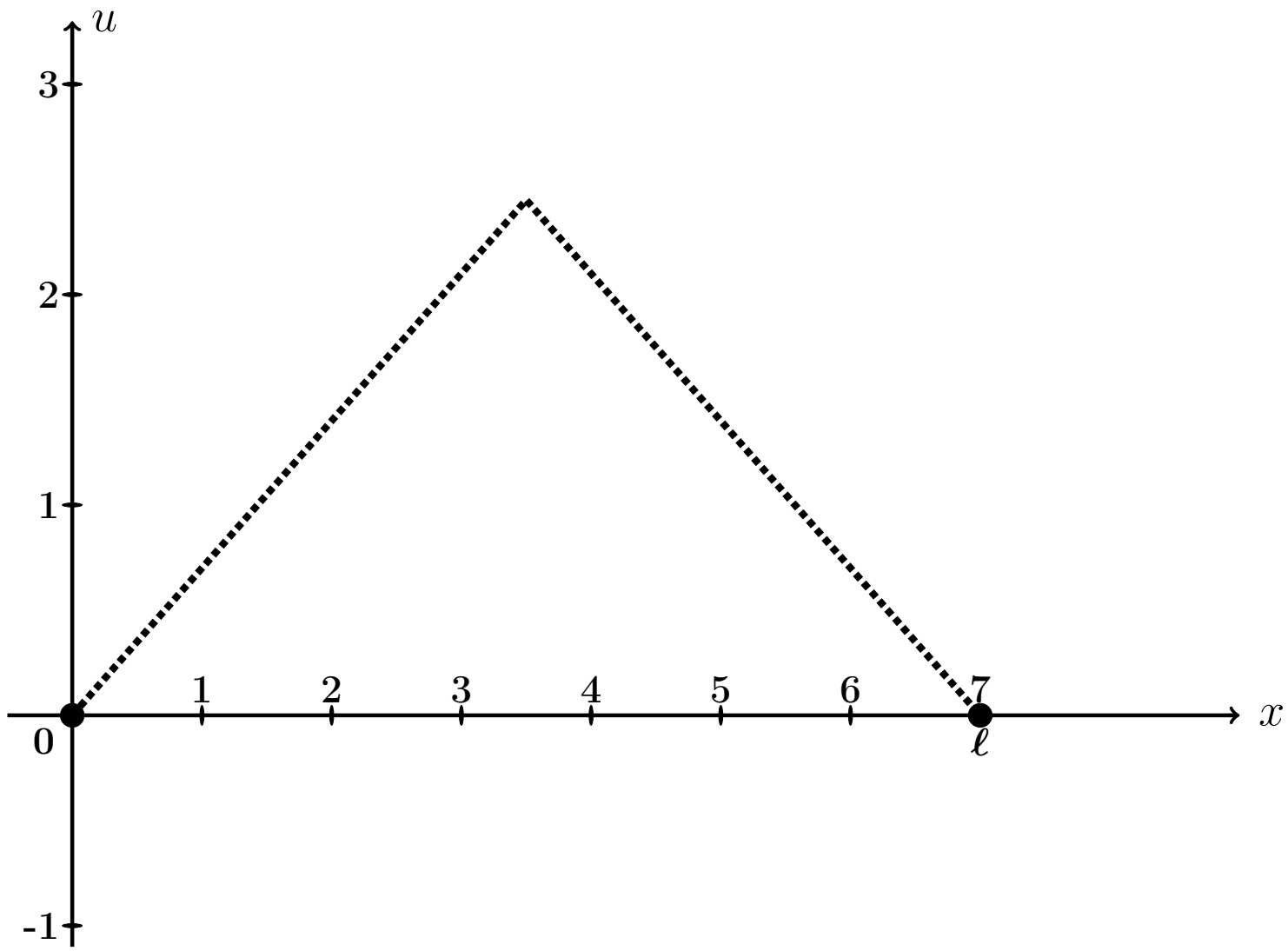


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (29.2).

Выборочная проверка вариант 29 задача 8 (по таблице 29.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 8 (по таблице 29.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 8 (по таблице 29.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 8 (по таблице 29.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.70, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.80, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(6.30, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{29.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 0.7$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.67)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{(-1.33)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(16.00)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{29.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{29.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

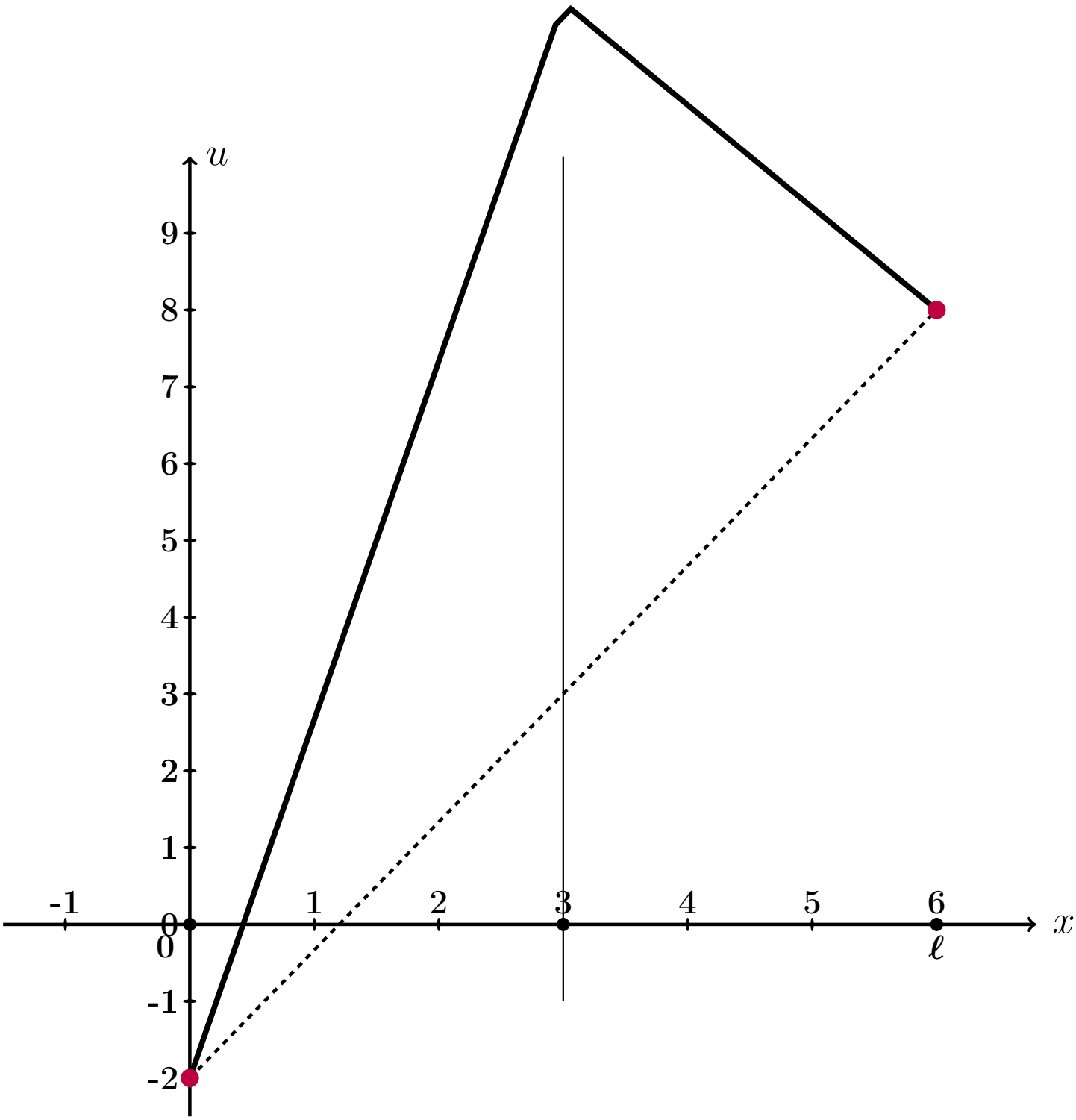


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (29.2), а черным пунктиром — график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (29.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (29.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{29.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \qquad , & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{f(x)} \tag{29.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (29.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (29.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{29.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} f(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{29.7}$$

Таблица 29.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (29.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (29.1) с начальным условием (29.2) и граничными условиями (29.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (29.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_6 - T_0}{6} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_6 = 8.0$ — значения граничных условий (29.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 29.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 29.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	-2	0,8	3,6	6,4	9,2	12	11,2	10,4	9,6	8,8	8
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 29.16.

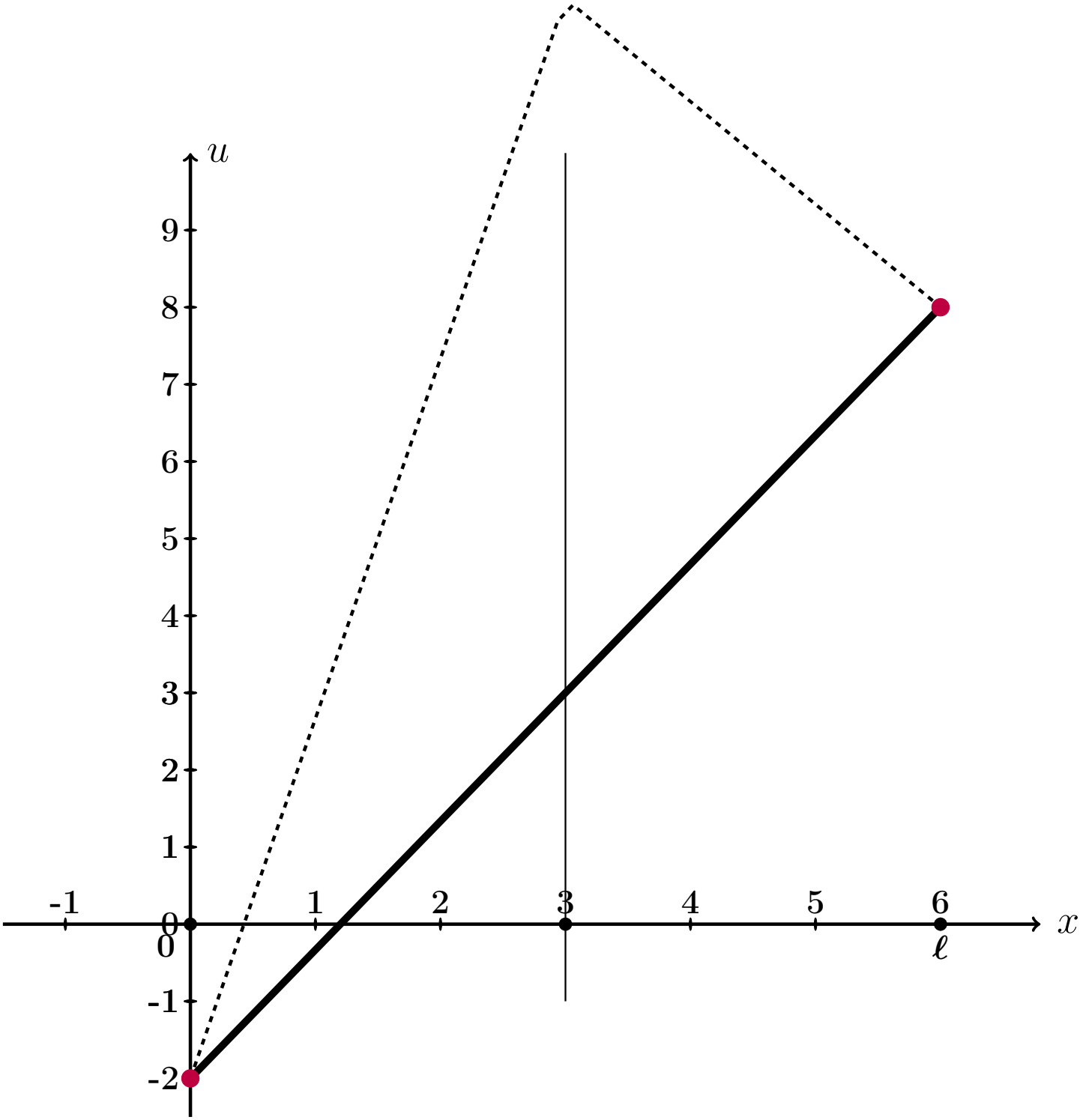


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (29.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (29.3).

Выборочная проверка вариант 29 задача 9 (по формулам (29.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 9 (по таблице 29.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 29 задача 9 (по таблице 29.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 30

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 2 \cdot x + 9$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-5, 5)$. Табулировать и построить график $y = 2 \cdot x + 9$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 5$ и $f(x) = 2 \cdot x + 9$.

$$y = 2 \cdot x + 9 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{5} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{5} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9) \cdot \cos \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9) \cdot \sin \frac{k\pi x}{5}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} (2 \cdot x + 9)\, dx = \frac{1}{5} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{5^2}{2} + \square \cdot 5 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-5)^2}{2} + \square \cdot (-5) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{5}$, $\ell = 5$.

$$A_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+9)\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\cos\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \frac{9}{5}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 5$.

$$B_k = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(2\cdot x+9)\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\int_{-5}^{5} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx + \frac{9}{5}\int_{-5}^{5}\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \frac{9}{5}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 5}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 5}{5}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-5)}{5}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-5)}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$2\cdot x+9=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{5}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{5}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}$$

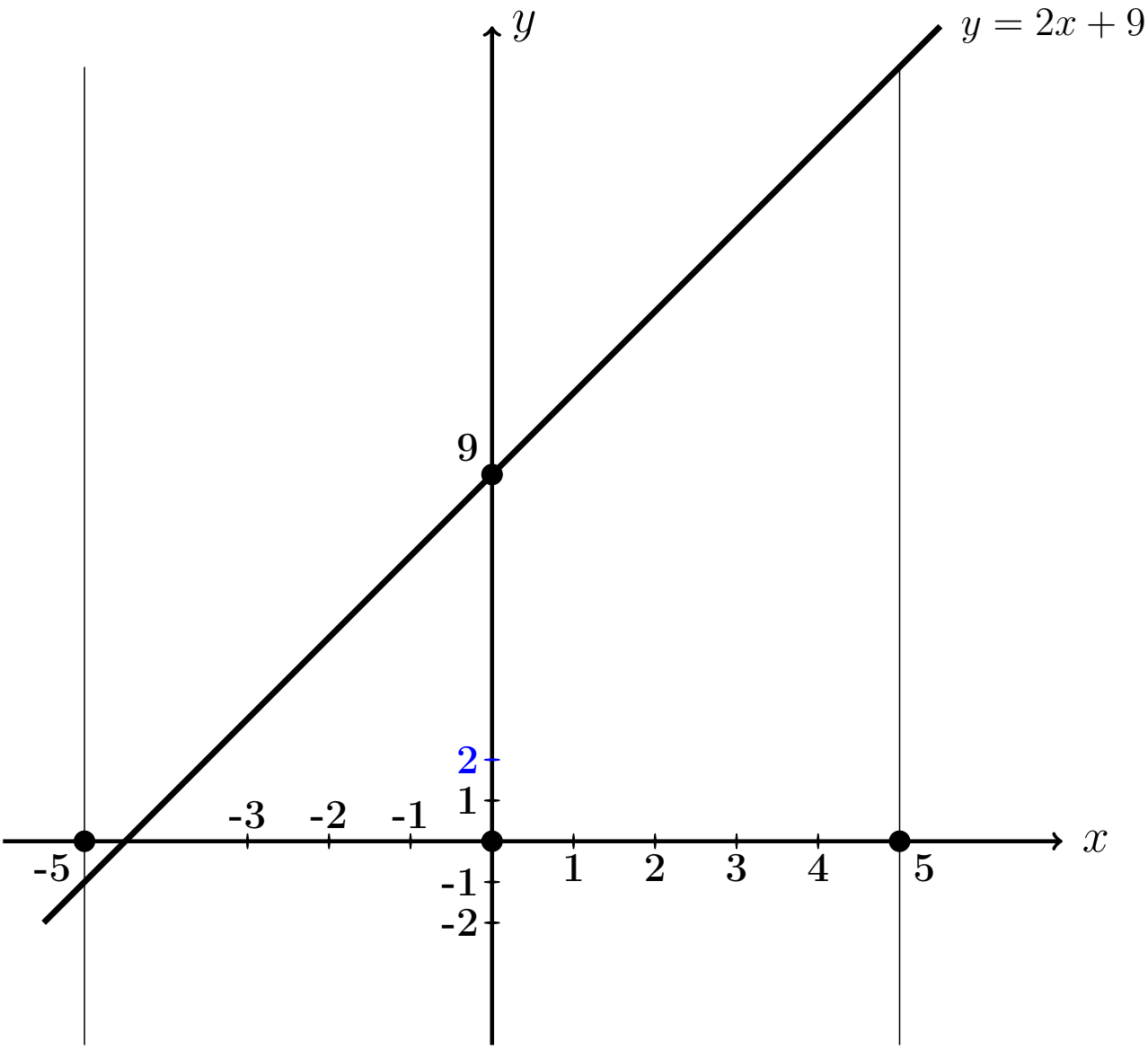
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{5}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{5}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{5}$$

Шаг 5.

Таблица 30.1 (Табулировка $y=2x+9$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=2x+9$	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$y=S_1(x)$		*									
$y=S_2(x)$					*						
$y=S_3(x)$								*			

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 30.1



Выборочная проверка вариант 30 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 1 (по Таблице 30.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-4.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(-1.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(2.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 8\sqrt{x} + \frac{24}{y}$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=3} = 12\sin y$,
численное значение $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(8\sqrt{x} + \frac{24}{y}\right)dx = 8\int x^{1/2}dx + 24\int y^{-1}\,dx =$$

$$= \qquad + C(y) = \qquad ,$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad + C(y) = 12\sin y\,,$$

откуда $C(y) = \qquad = \qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad .$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 8x^3 + 7\sin 5t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 4x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 3x \ .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(2,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 8x^3 + 7\sin 5t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (8x^3 + 7\sin 5t)dt = \qquad + C(x) \ ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \Big(\qquad + C(x)\Big)dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x)\ ,$$

где и $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0} + C_1(x) = 4x^2 \\ \qquad\qquad + C(x) = 3x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) = \qquad = \qquad$.

Из первого уравнения, $C_1(x) = \qquad$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(2,4) = \qquad\qquad = \qquad$

Выборочная проверка вариант 30 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(2,4)$ введи [ ] Клик [ ]

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.3$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{3.4\sin(1.7\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.6\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

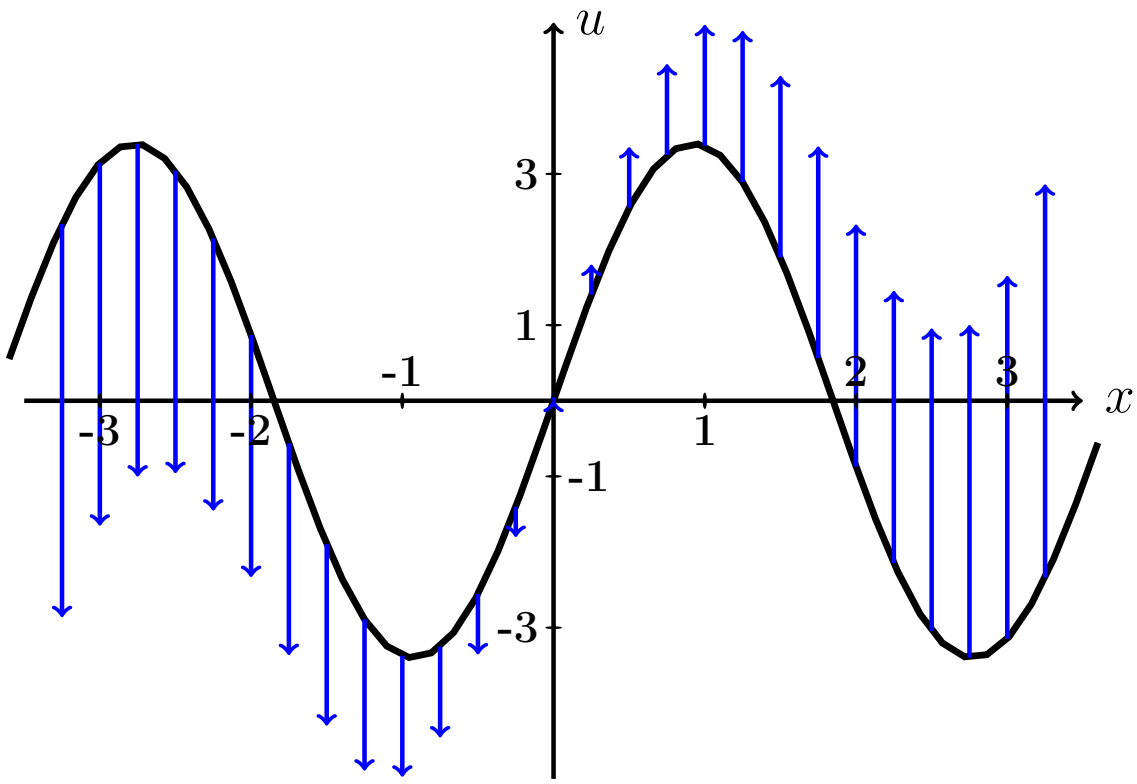


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 30.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 30 задача 4 (по Таблице 30.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 30.2.

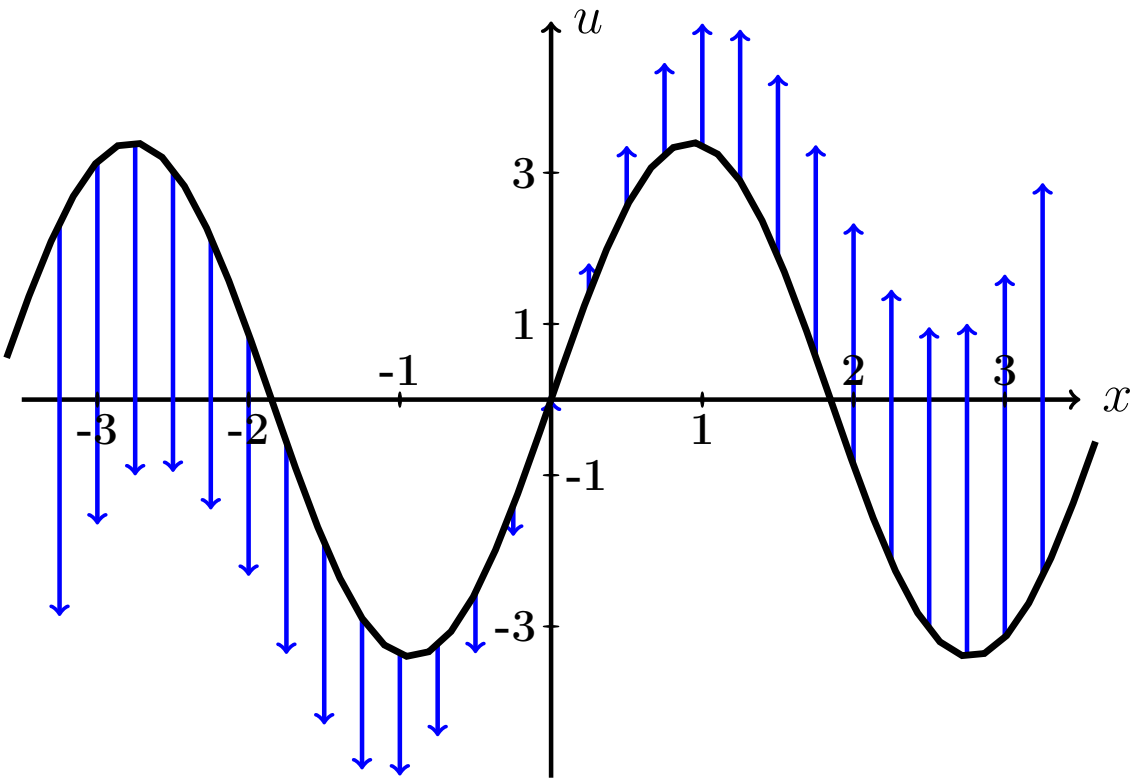


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 3.4 \cdot \sin(1.7\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.6 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 4$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

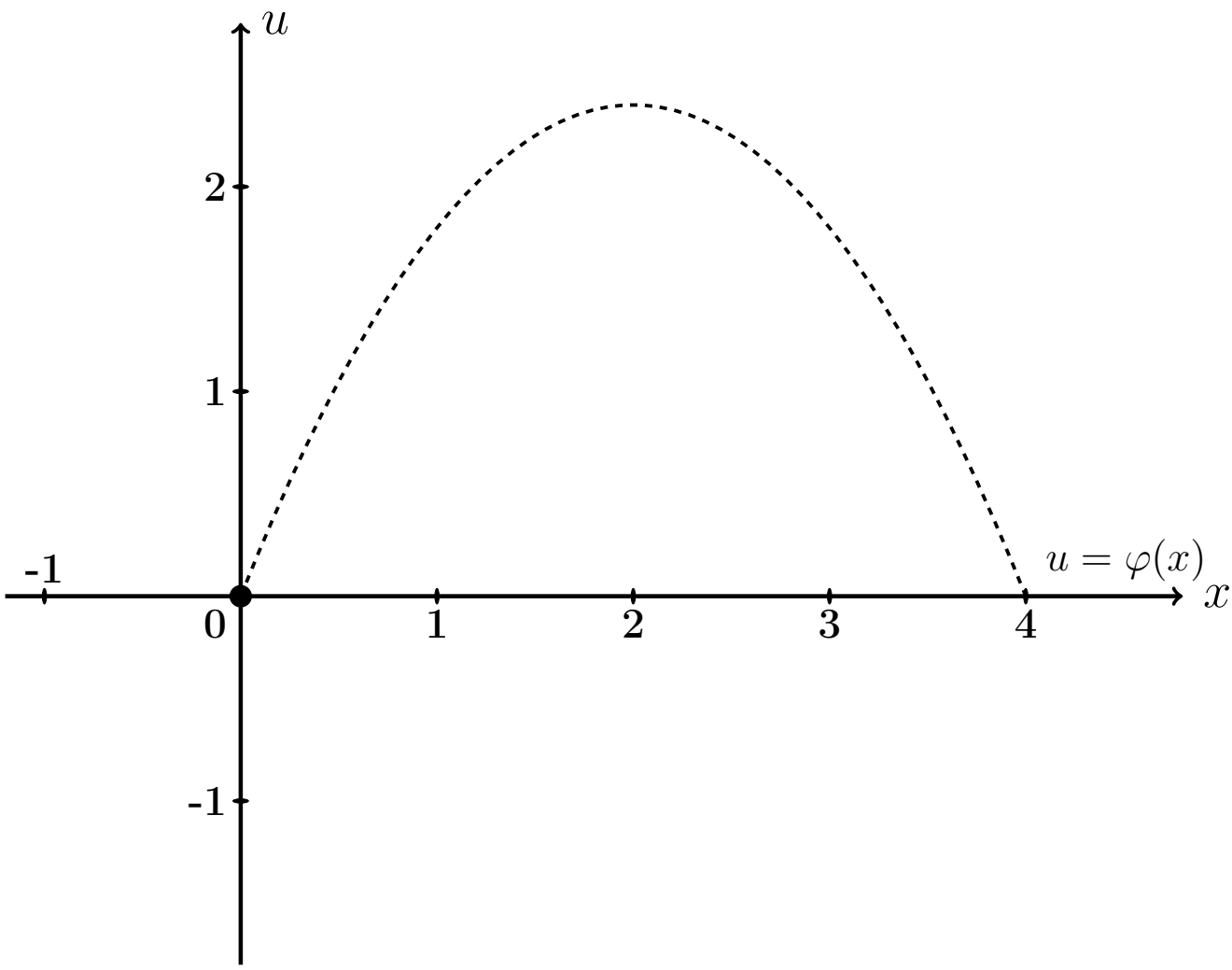


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 30.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 30.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 30.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 30.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 30 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 5 (красные клетки таб. 30.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 30.4.

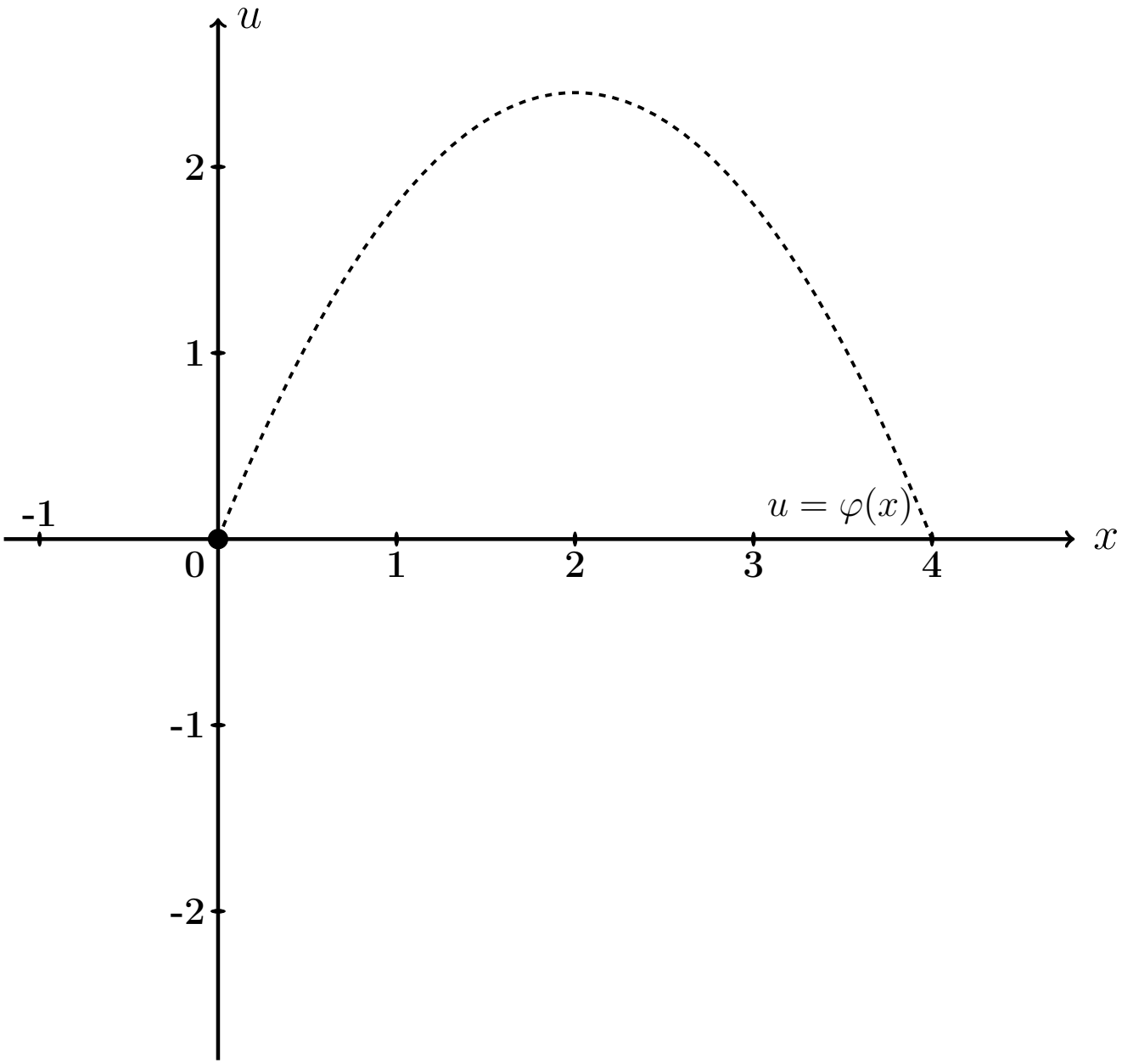


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 4$, $a = 3.8$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.6\,x^2 + 2.4x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{4} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.4$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

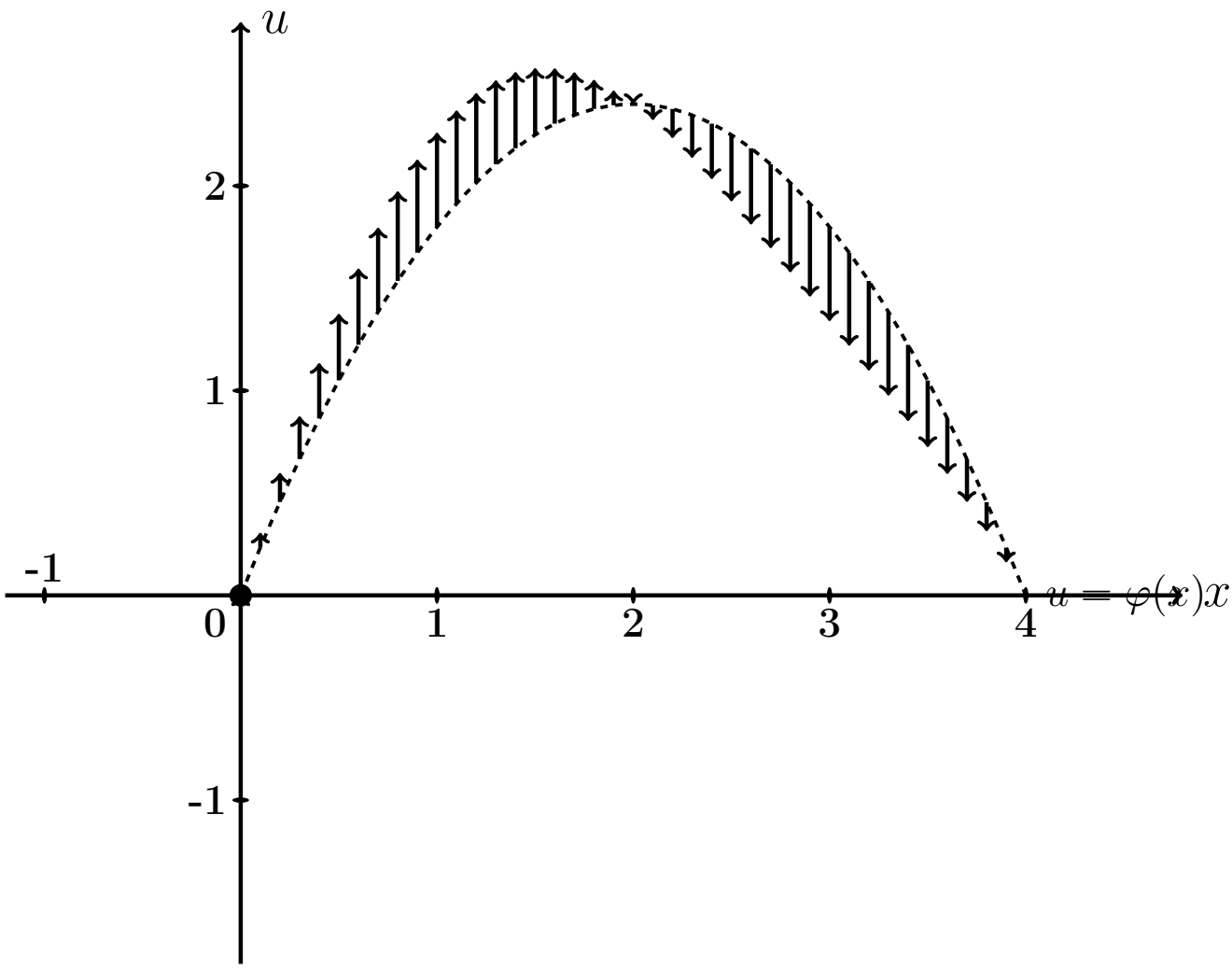


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin \frac{2\pi x}{4}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{4}\int_0^{4}(-0.6\,x^2+2.4x)\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 30.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^4 2.3\sin\frac{2\pi x}{4}\sin\frac{k\pi x}{4}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.39$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 30.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 30.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 30.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4
$\varphi(x)$	0	0,86	1,54	2,02	2,3	2,4	2,3	2,02	1,54	0,86	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 30 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 6 (красные клетки Таблицы 30.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.40, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.60, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.60, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 30.6.

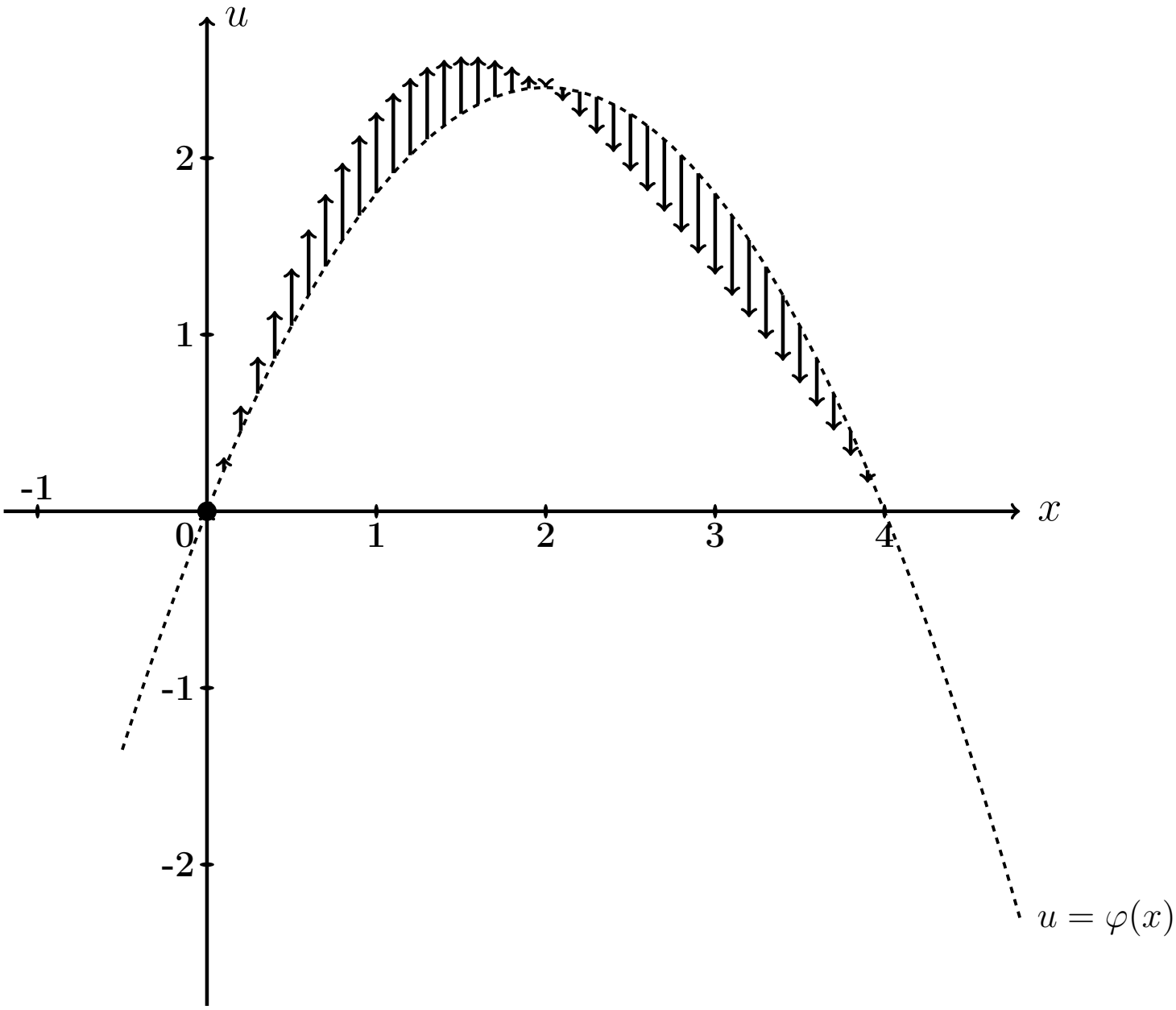


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.6\,x^2 + 2.4\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{4}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{30.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 3.9$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.20 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 1.20 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{30.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{30.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (30.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{30.4}$$

при $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, $\Omega = 4.2$, с теми же начальными и граничными условиями (30.2), (30.3). Затабулировать решение уравнения (30.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (30.4) при тех же исходных данных $\ell = 6$, $a = 3.9$, $E = 10.2$, и при резонансном значении $\Omega = 0.65\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (30.2), (30.3). Затабулировать решение уравнения (30.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (30.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{6}\int_0^{6} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{6}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 30.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^6 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{6}dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{30.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (30.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{30.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (30.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (30.4) при граничных условиях (30.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{30.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{30.8}$$

где $\ell = 6$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)}\cdot\Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}\cdot t\cdot\cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{30.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.2$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (30.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (30.9). Следовательно, по формуле (30.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot \end{aligned} \tag{30.10}$$

где

$$C_k = = \begin{cases} \quad\,, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{30.11}$$

Шаг 6.

Таблица 30.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 30.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (30.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 30.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 30.9

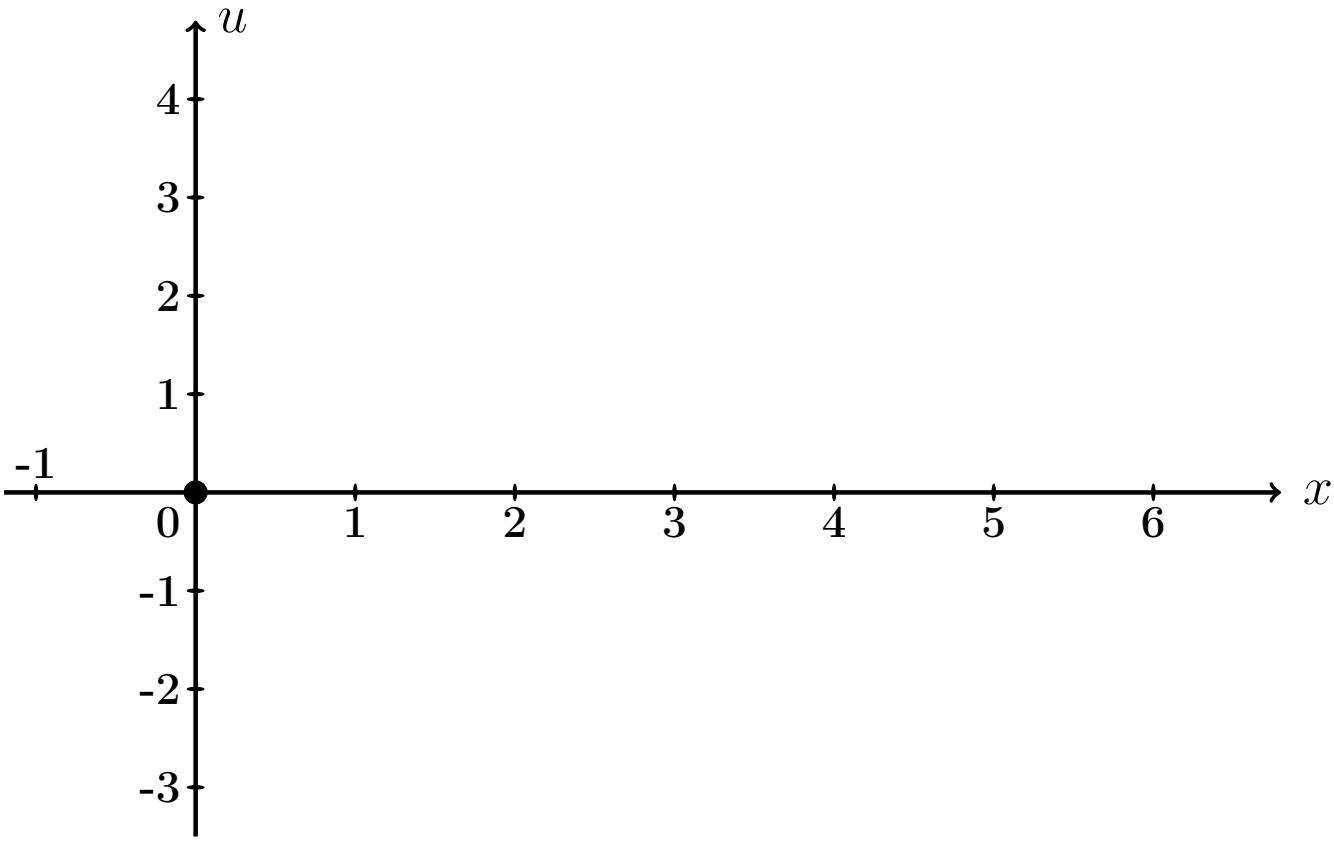


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 30 задача 7 (по Таб. 30.7, 30.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): A_3 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_1 введи [ ] Клик [ ]

Ответ (формат 1.2): C_3 введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 30 задача 7 (по таблице 30.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (30.6) и (30.8). Однако данное значение $\Omega = 0.65\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (30.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (30.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \quad \end{aligned}\right\} \qquad (30.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (30.9). Следовательно, по формуле (30.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (30.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (30.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (30.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$, $A_3 =$ по таблице 30.7,

$\ell =$, $a =$, $\Omega =$,

$\omega_1 =$ $=$ и $\omega_3 =$ $=$ по формуле (30.5),

$C_1' =$ по формуле (30.12)

и $C_3 =$ по таблице 30.8 . Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad + \\ + \quad + \\ + \quad .$$

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 30.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,72	1,44	2,16	2,88	3,6	2,88	2,16	1,44	0,72	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

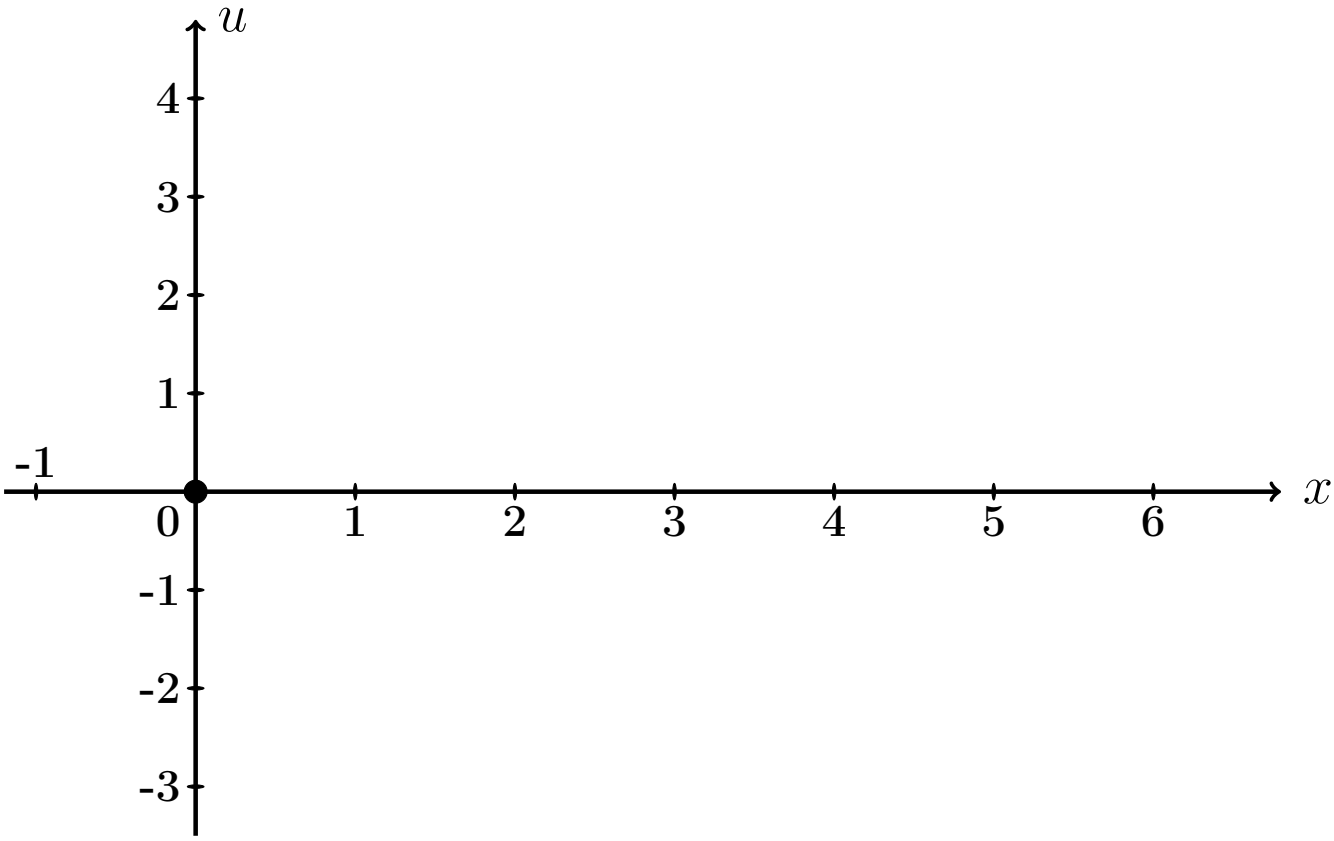


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 30 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (30.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 30 задача 7 (по таблице 30.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{30.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 6$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 6/2 \\ 0.60 \cdot (6 - x), & \text{при } 6/2 \le x \le 6 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{30.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (30.1). Затабулировать решение уравнения (30.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 6$ с шагом $\Delta x = 0.6$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

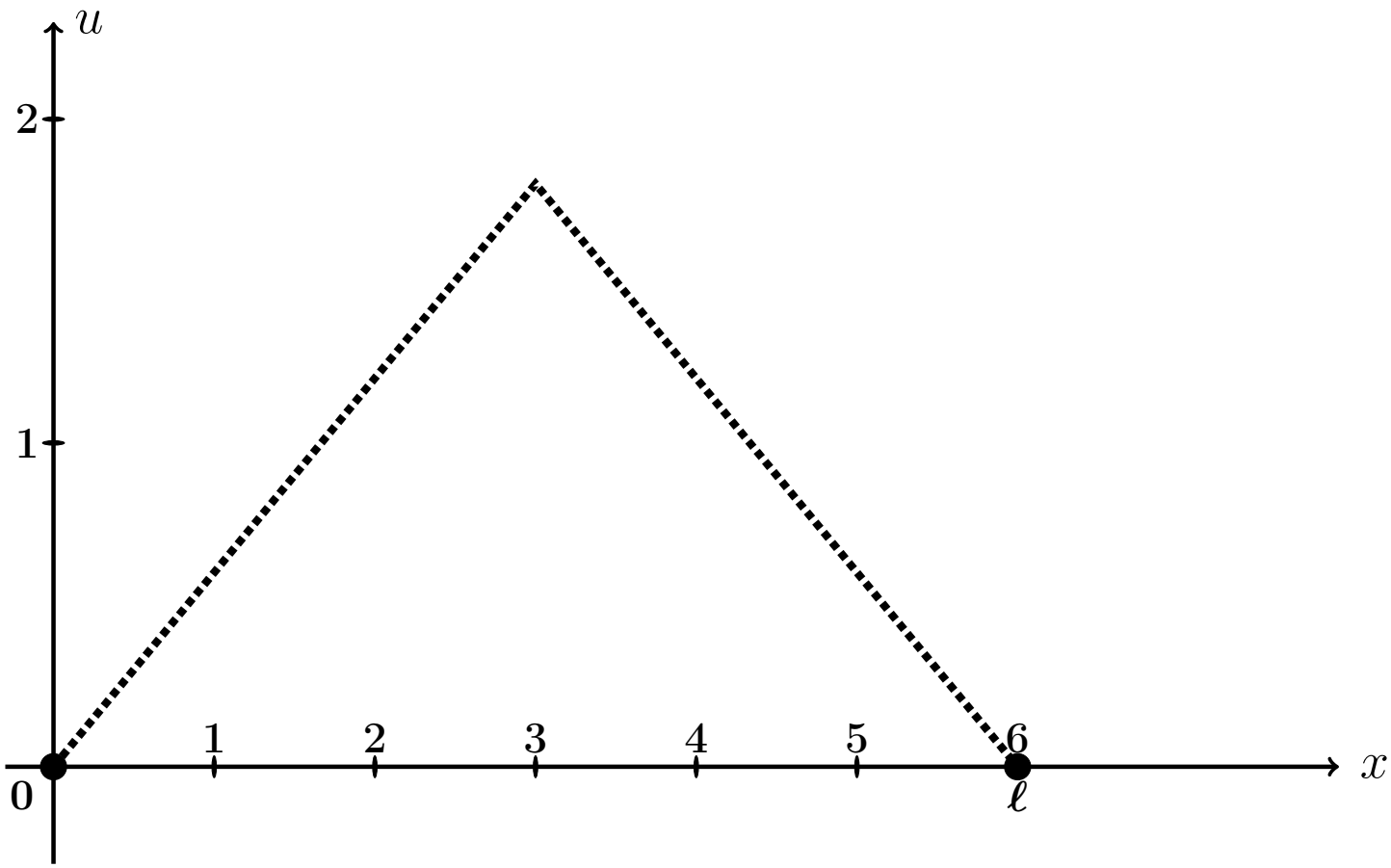


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (30.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{6} , \end{aligned}\right\} \tag{30.3}$$

где $\ell = 6$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx .$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 30.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{6}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 30.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 30.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 30.12, 30.13) формулы (30.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 6$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 30.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 30.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 30.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 30.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40	6
$\varphi(x)$	0	0,36	0,72	1,08	1,44	1,8	1,44	1,08	0,72	0,36	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

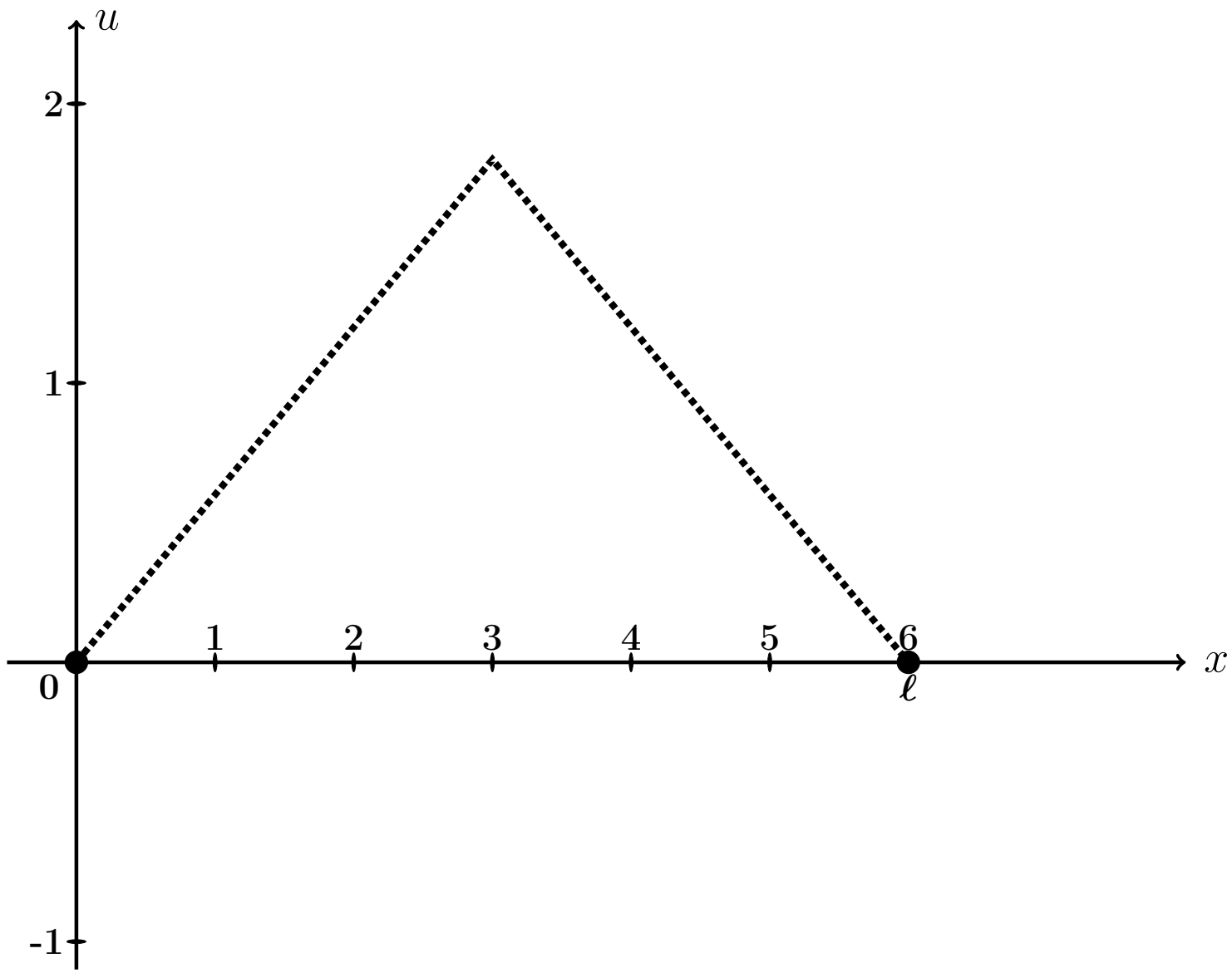


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (30.2).

Выборочная проверка вариант 30 задача 8 (по таблице 30.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 8 (по таблице 30.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 8 (по таблице 30.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 8 (по таблице 30.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.60, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.40, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(5.40, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{30.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 3$, $a = 1.0$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.83)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{(1.83)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(2.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{30.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{30.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.3$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

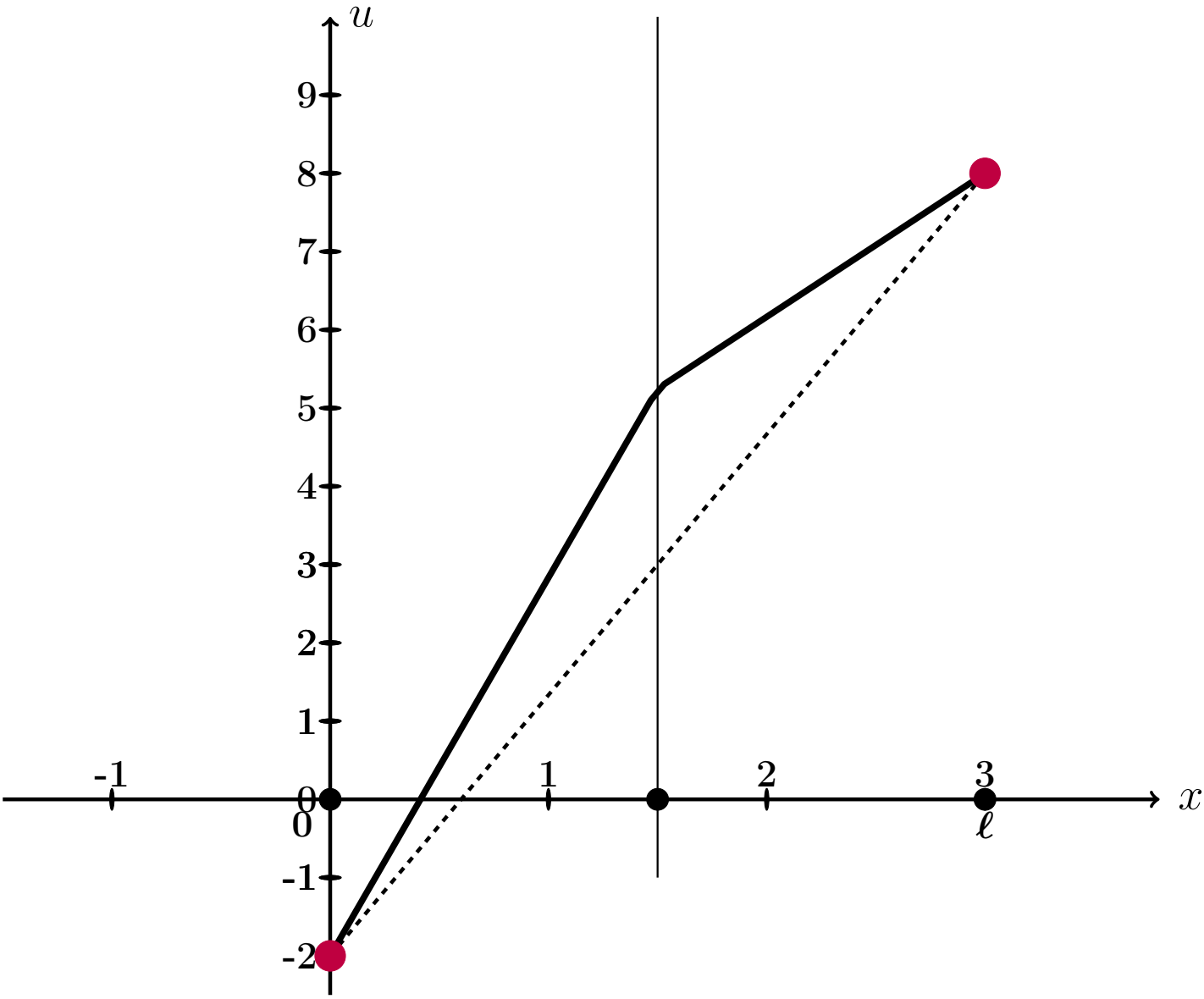


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (30.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (30.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (30.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{30.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x \quad , & \text{при } 0 \le x \le 3/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 3/2 \le x \le 3 \end{cases}}_{f(x)} \tag{30.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (30.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (30.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{30.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{3}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{30.7}$$

Таблица 30.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (30.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (30.1) с начальным условием (30.2) и граничными условиями (30.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (30.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_3 - T_0}{3} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_3 = 8.0$ — значения граничных условий (30.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 30.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 30.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3
$\varphi(x)$	-2	$-0{,}55$	0,9	2,35	3,8	5,25	5,8	6,35	6,9	7,45	8
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 30.16.

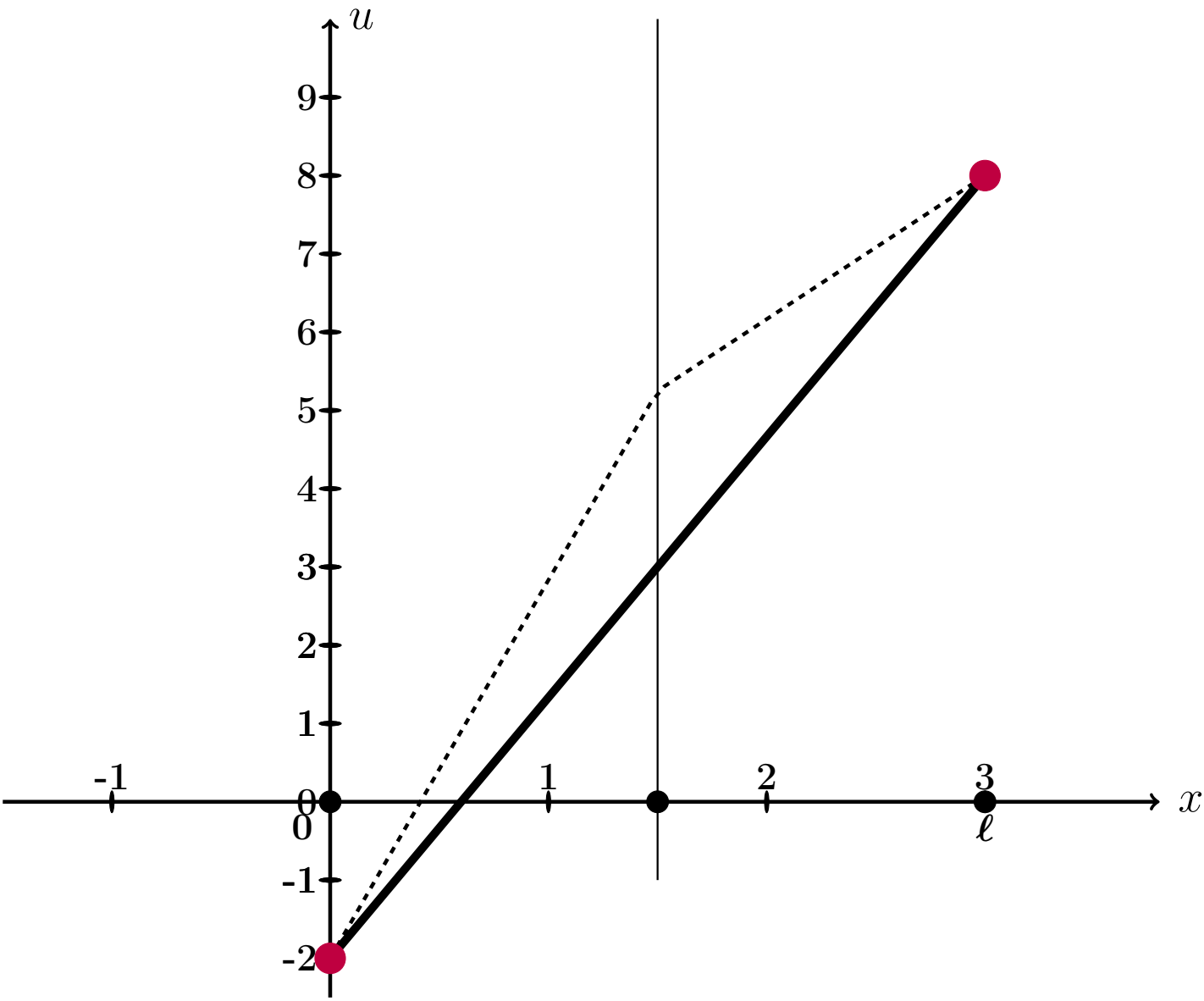


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (30.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (30.3).

Выборочная проверка вариант 30 задача 9 (по формулам (30.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 9 (по таблице 30.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 30 задача 9 (по таблице 30.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.30, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(1.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.70, 2)$ введи Клик

возврат огл

Вариант 31

возврат огл

Задача 1

Разложить функцию $y = 3 \cdot x + 8$ в тригонометрический ряд на промежутке $(-4, 4)$. Табулировать и построить график $y = 3 \cdot x + 8$ и графики частичных сумм $y = S_1(x)$, $y = S_2(x)$, $y = S_3(x)$.

Решение. Решаем по образцу примера 1. Используем формулы Таблицы 7.1 при $\ell = 4$ и $f(x) = 3 \cdot x + 8$.

$$y = 3 \cdot x + 8 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi x}{4} + B_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{4} \right)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8)\, dx$$

$$A_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8) \cdot \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

$$B_k = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8) \cdot \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \qquad (k \geq 1)$$

Шаг 1. Вычисляем A_0 по формулам Таблицы 3, $p = \frac{k\pi}{4}$.

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} (3 \cdot x + 8)\, dx = \frac{1}{4} \left(\square \cdot \frac{x^2}{2} + \square \cdot x \right) \Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\square \cdot \frac{4^2}{2} + \square \cdot 4 \right) - \left(\square \cdot \frac{(-4)^2}{2} + \square \cdot (-4) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [\square - (\square)] = \square.$$

Шаг 2. Вычисляем A_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{4}$, $\ell = 4$.

$$A_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+8)\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \frac{8}{4}\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(\square\cdot x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right) + \left(\square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\square\cdot\sin(k\pi) + \square\cdot\cos(k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\sin(-k\pi) + \square\cdot\cos(-k\pi)\right) + \left(\square\cdot\sin(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^k\right) + 0\right] - \left[\left(0 + \square\cdot(-1)^{-k}\right) + 0\right] =$$

$$= \square\cdot\left[(-1)^k - (-1)^{-k}\right] = \square,$$

так как $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Итак, $A_k = \square$.

Шаг 3. Вычисляем B_k по формулам Таблицы 4, $p = \frac{k\pi}{3}$, $\ell = 4$.

$$B_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}(3\cdot x+8)\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx + \frac{8}{4}\int_{-4}^{4}\sin\frac{k\pi x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \frac{8}{4}\left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\square\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4} =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi 4}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi 4}{4}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(-\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4} + \square\cdot\sin\frac{k\pi(-4)}{4}\right) - \left(\square\cdot\cos\frac{k\pi(-4)}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\square\cdot\cos(k\pi) + \square\cdot\sin(k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(k\pi)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\square\cdot\cos(-k\pi) + \square\cdot\sin(-k\pi)\right) - \left(\square\cdot\cos(-k\pi)\right)\right] =$$

Дальше используем формулы Таблицы 5,

$$\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k,$$

члены отмеченные розовым обращаются в 0.

$$= -\square\cdot\cos(k\pi) = -\square\cdot(-1)^k.$$

Итак, $B_k = -\square\cdot(-1)^k$. В частности,

$$B_1 = \square = \square$$

$$B_2 = \square = \square$$

$$B_3 = \square = \square$$

Шаг 4. Результат

$$3\cdot x+8=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cdot\cos\frac{k\pi x}{4}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}\right)=\boxed{}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Для выражения $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ берем частичные суммы при $k=1,2,3$:

$$S_1(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}$$

$$S_2(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}$$

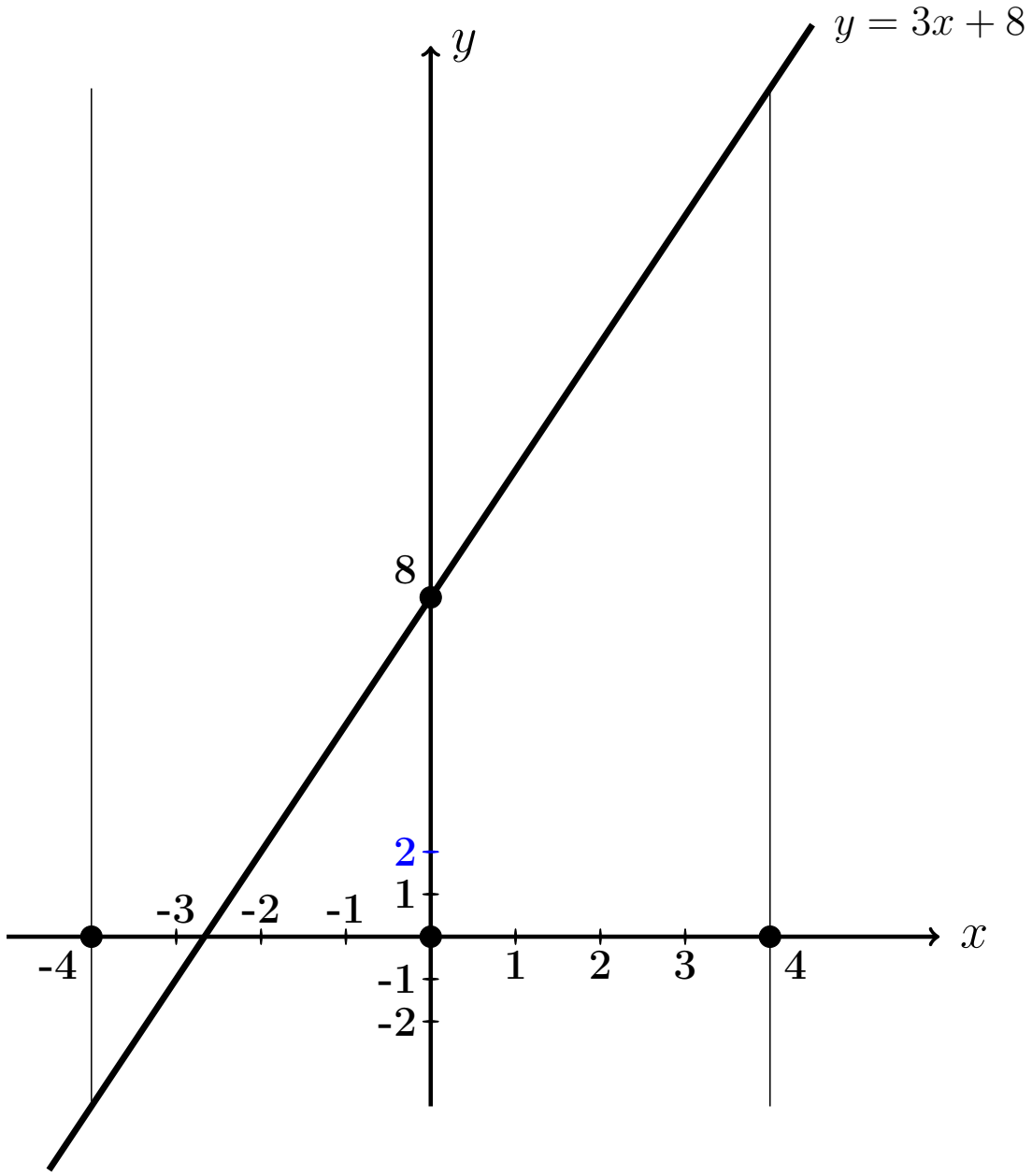
$$S_3(x)=\frac{A_0}{2}+B_1\cdot\sin\frac{1\pi x}{4}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}=$$
$$=\boxed{}+\boxed{}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}-\boxed{}\cdot\sin\frac{2\pi x}{4}+\boxed{}\cdot\sin\frac{3\pi x}{4}$$

Шаг 5.

Таблица 31.1 (Табулировка $y=3x+8$ и $y=S_n(x)$, $n=1,2,3$)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3x+8$	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20
$y=S_1(x)$		$*$							
$y=S_2(x)$					$*$				
$y=S_3(x)$								$*$	

Шаг 6. График, табулировка по Таблице 31.1



Выборочная проверка вариант 31 задача 1

Ответ (формат 1.23): A_0 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_2 введи Клик

Ответ (формат 1.23): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 1 (по Таблице 31.1)

Ответ (формат 1.2): $S_1(-3.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_2(0.00)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $S_3(3.00)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формулы для S_1, S_2, S_3 (шаг 4)

таблица (шаг 5)

графики (шаг 6)

Задача 2

Решить уравнение $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3e^x + 10\cos 4y$. Найти:
общее решение $u_{\text{общ}}(x,y)$,
частное решение $u_{\text{част}}(x,y)$ при условии $u(x,y)\big|_{x=5} = 15\ln y$,
численное значение $u_{\text{част}}(1,4)$.

Решение. Решаем по образцу примера 2.

Общее решение.

$$u_{\text{общ}}(x,y) = \int \left(3e^x + 10\cos 4y\right)dx = 3\int e^x dx + 10\int \cos 4y\, dx =$$

$$= \qquad\qquad + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y.

Частное решение находим из соотношения

$$\qquad\qquad + C(y) = 15\ln y,$$

откуда $C(y) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$.
Окончательно

$$u_{\text{част}}(x,y) = \qquad\qquad.$$

Численное значение

$$u_{\text{част}}(1,4) = \qquad\qquad = \qquad$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 2

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,4)$ введи Клик

Задача 3

Решить уравнение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 15x^2 + 15t$. Найти общее решение, а также частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 5x^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 4e^x .$$

Вычислить $u_{\text{част}}(1,5)$.

Решение. Решаем по образцу примера 3

Общее решение, Шаг 1. Записываем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 15x^2 + 15t$. Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int (15x^2+15t)\,dt = \qquad\qquad + C(x) = \qquad\qquad + C(x) ,$$

где $C(x)$ — произвольная функция от x.

Шаг 2. Интегрируем второй раз:

$$u(x,t) = \int \left(\qquad \right) dt = \qquad + C(x)t + C_1(x) =$$

$$= \qquad + C(x)t + C_1(x) \,,$$

где $C_1(x)$ — еще одна произвольная функция от x.

Частное решение находим из начальных условий, в которых используем формулы для $u(x,t)$ (шаг 2) и для $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (шаг 1), при $t = 0$.

$$\begin{cases} \qquad = 5x^2 \\ \qquad = 4e^x \end{cases}$$

Из второго уравнения, $C(x) =$.

Из первого уравнения, $C_1(x) =$.

Окончательно

$$u_{\text{част}} = \qquad =$$

$$= \qquad$$

Численное значение

$u_{\text{част}}(1,5) =$ $=$

Выборочная проверка вариант 31 задача 3

Ответ (формат 1.2): $u_{\text{част}}(1,5)$ введи Клик

Задача 4

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $a = 1.4$ и при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \underbrace{4.1\sin(1.8\,x)}_{f(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{1.8\,x}_{F(x)}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $-3 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.5$ и построить эти три графика.

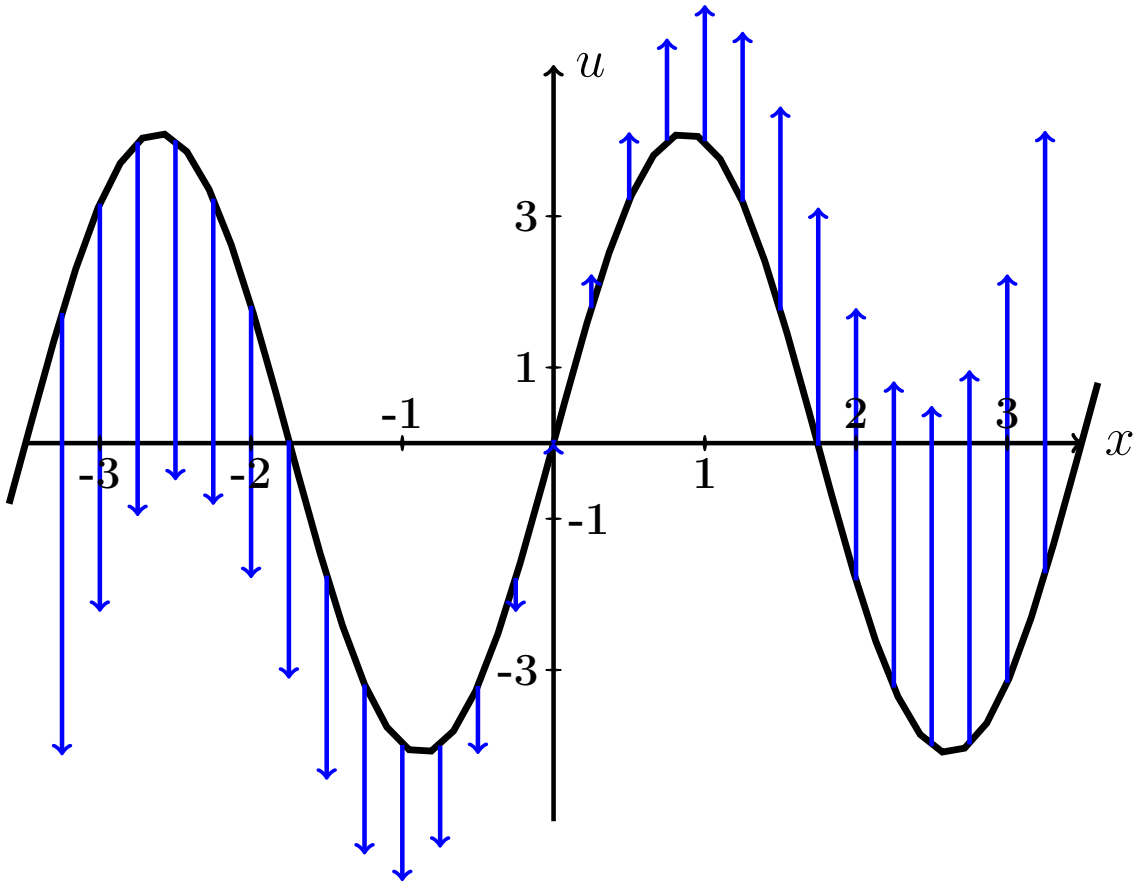


Рис.: Черным дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Решение. Следуем примеру 4.

Шаг 1. Используется формула

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz}$$

где f и F — функции из начальных условий. Получаем

$$u(x,t) = \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Шаг 2. Табулируем $u = u(x,t) =$.

Таблица 31.2 (Табулировка $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	$-3{,}0$	$-2{,}5$	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1{,}0$	$+1{,}5$	$+2{,}0$	$+2{,}5$	$+3{,}0$
$u(x,0)$	*												
$u(x,1)$					*								
$u(x,2)$											*		

Выборочная проверка вариант 31 задача 4 (по Таблице 31.2)

Ответ (формат 1.2): $u(-3,0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(-1,1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2,2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u(x,t)$ (шаг 1)

таблица (шаг 2)

графики (шаг 3)

Шаг 3. Графики функций $y = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ по Таблице 31.2.

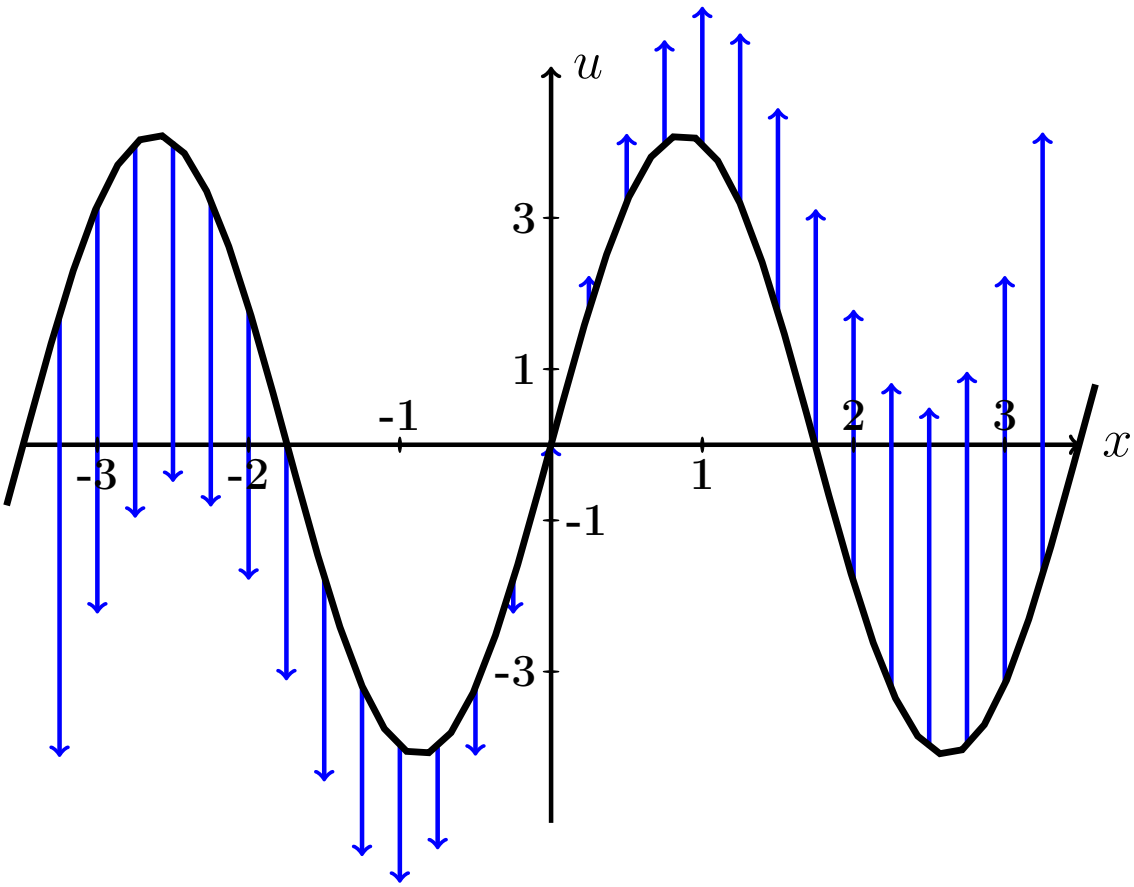


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным (покрыт синим графиком для варианта 0) дан график $u = f(x) = 4.1 \cdot \sin(1.8\,x)$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Синие стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = F(x) = 1.8 \cdot x$.

Задача 5

Решить уравнение закрепленной струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

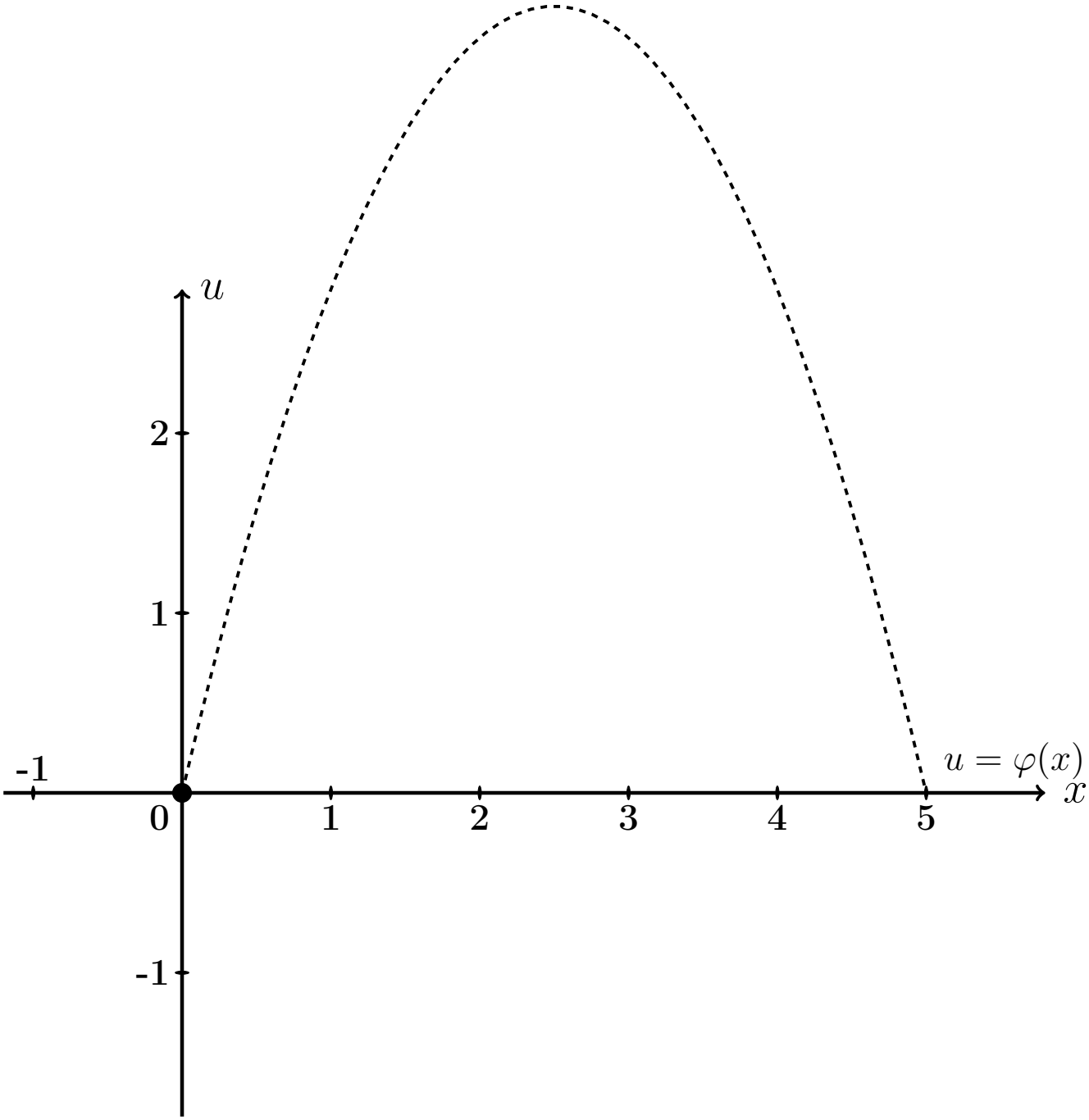


Рис.: Черным пунктироммм дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ = 0 \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 31.3 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. $B_k = 0$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + 0 \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\quad}{\quad} \sin \frac{k\pi x}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2.

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 31.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таб. 31.3. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 31.4 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 31 задача 5

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 5 (красные клетки таб. 31.4)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 31.4.

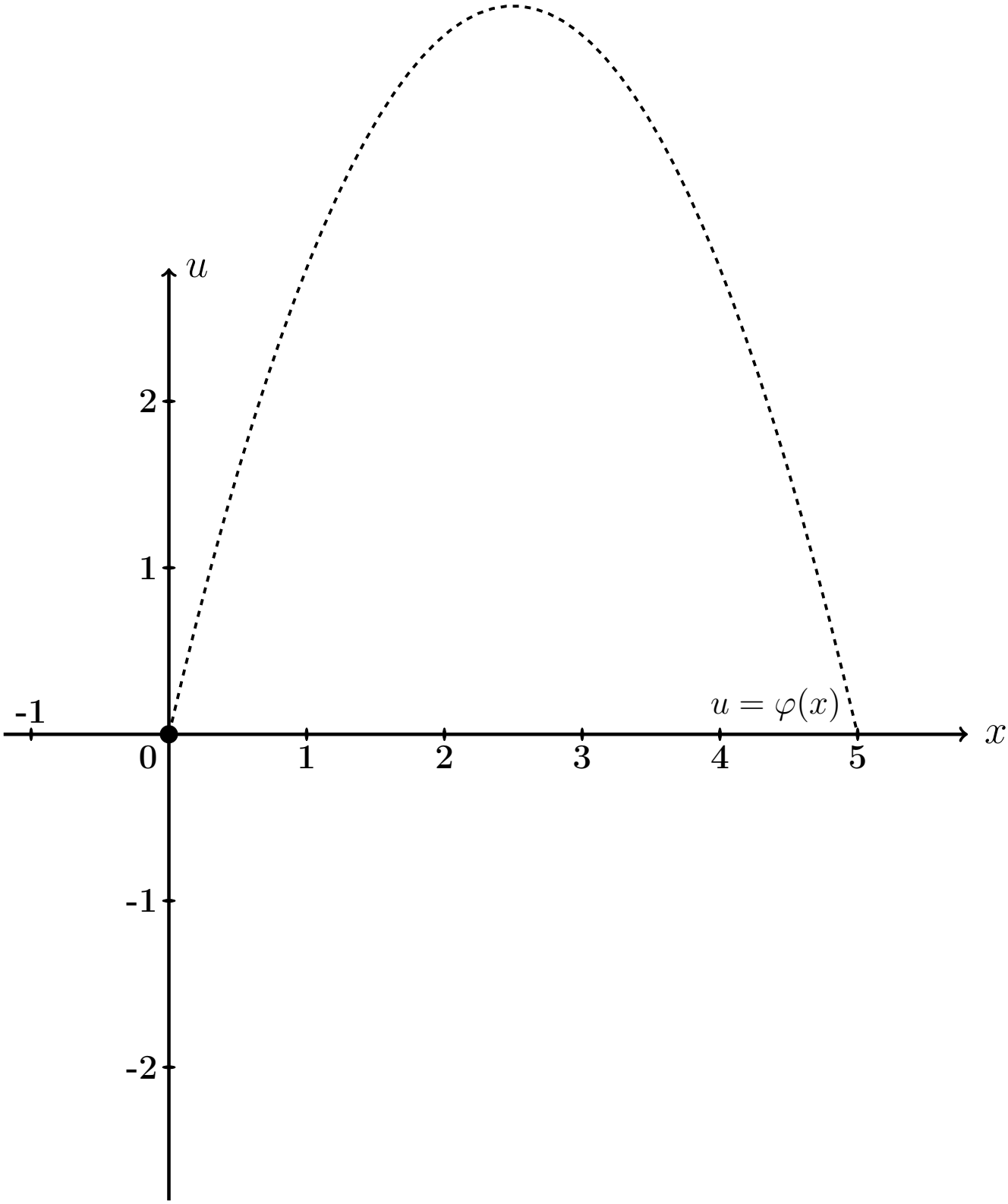


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи.

Задача 6

Решить уравнение закрепленной струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 3.9$, при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{-0.7\,x^2 + 3.5x}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{2.3 \sin \frac{2\pi}{5} x}_{\psi(x)}$$

и при граничных условиях

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le \ell$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по гармоникам для $k = 1, 2, 3$, и построить эти три графика.

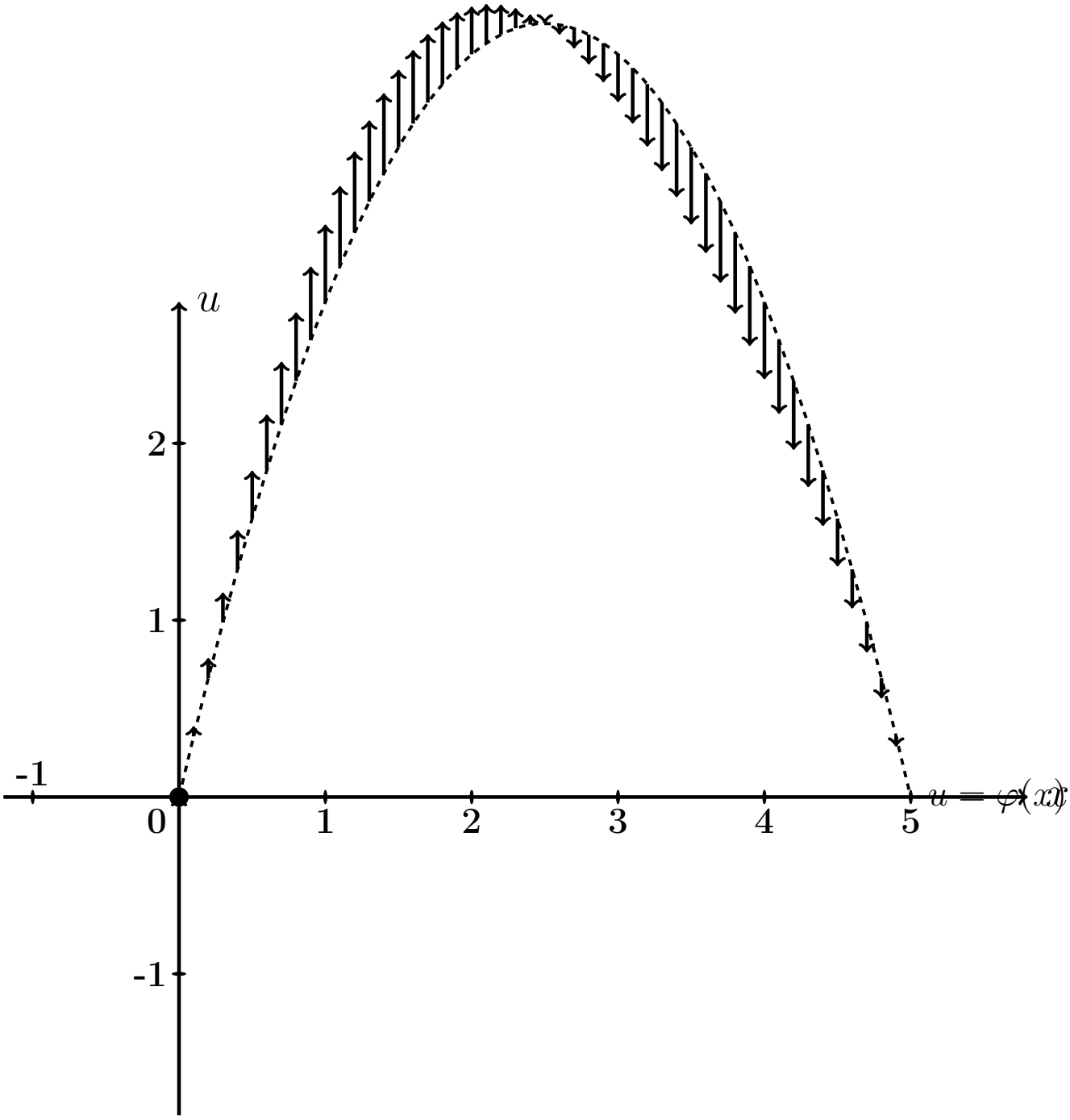


Рис.: Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начальной конфигурации струны согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u = \psi(x) = 2.3 \cdot \sin\frac{2\pi x}{5}$.

Решение. Следуем примеру 5.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ , \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \ . \end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{5}\int_0^{5}(-0.7\,x^2+3.5x)\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 3 и 5 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$= \qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad$$

$$\qquad .$$

Пользуемся тем, что $\sin k\pi = \sin 0 = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos 0 = 1$ (таблица 5).

$$= \qquad$$

Сокращаемые члены выделены цветом.

Окончательно $A_k = \qquad = \qquad .$

Таблица 31.5 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^\ell \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^5 2.3\sin\frac{2\pi x}{5}\sin\frac{k\pi x}{5}dx$

$$= \qquad .$$

Используем формулу таблицы 6 для $\sin\alpha\sin\beta$.

Получаем

$$B_k =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Поэтому $B_k = 0$, так как $\sin n\pi = \sin 0 = 0$ (таблица 5). Значение $k = 2$ — особый случай. Для него

$$B_2 =$$

$$=$$

$$= \qquad = \qquad$$

Окончательно $B_2 = \qquad = \qquad$.

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{\ell} + B_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{k\pi x}{\quad} + B_2\sin\frac{\quad}{\quad}\sin\frac{\quad}{\quad}$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_2 = 0.47$ (шаг 3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по таблице 31.5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

где $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 31.5, а $B_2 =$ (шаг 3). Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \quad + \quad +$$

$$+ \quad +$$

Шаг 6. Табулировка.

Таблица 31.6 (табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	0	1,58	2,8	3,68	4,2	4,38	4,2	3,68	2,8	1,58	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Выборочная проверка вариант 31 задача 6

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_2 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 6 (красные клетки Таблицы 31.6)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик

Сверх этого должны быть сданы:

формула для $u_{\text{прибл}}(x, t)$ (шаг 5)

таблица (шаг 6)

графики (шаг 7)

Шаг 7. Графики по Таблице 31.6.

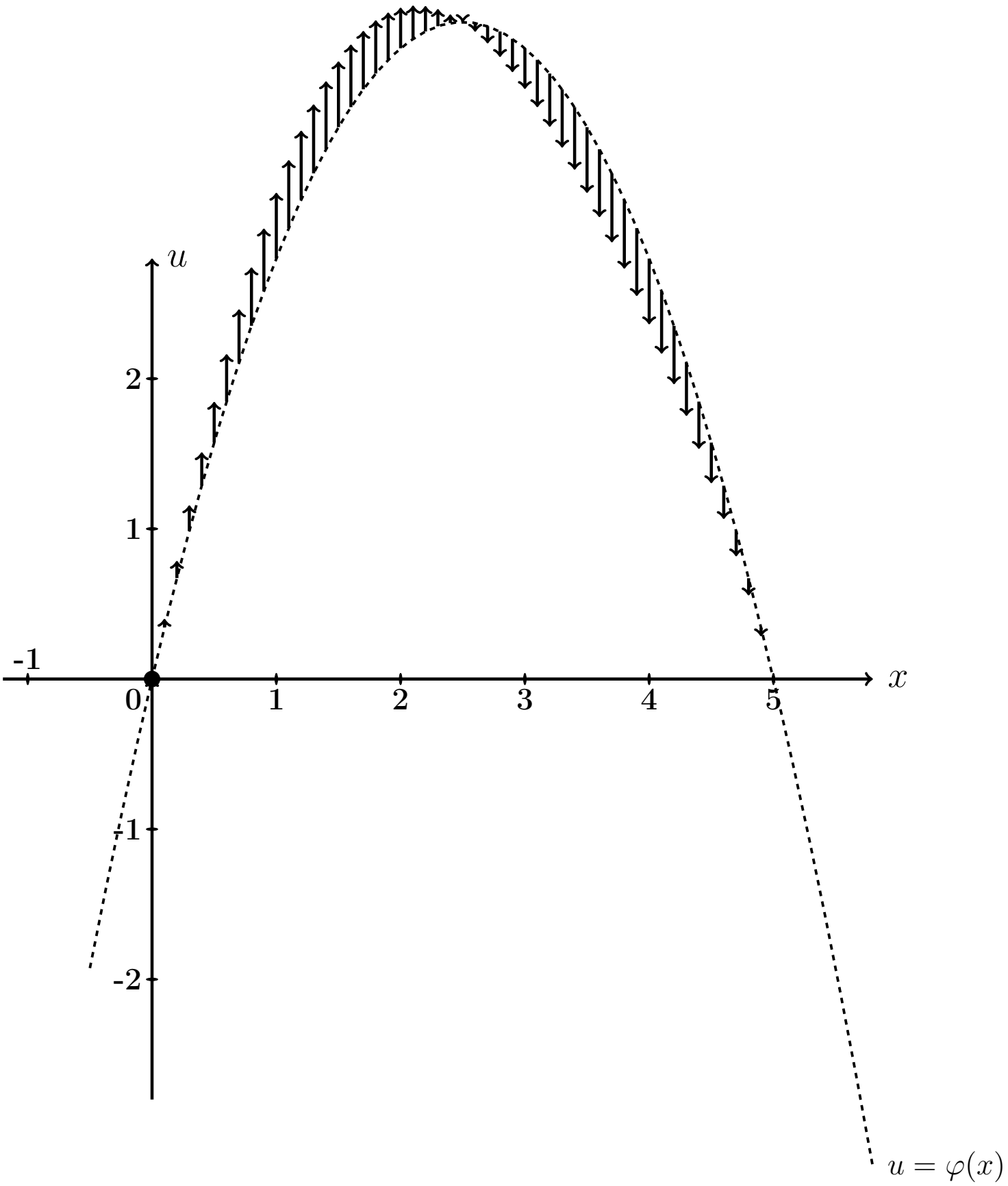


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром (покрыт синим графиком) дан график $u = \varphi(x) = -0.7\,x^2 + 3.5\,x$ начального распределения температуры согласно условию задачи. Черные стрелки показывают поперечные скорости точек струны в начальный момент согласно функции $u_t = \varphi(x) = 2.8\,\sin\frac{\pi x}{5}$.

Задача 7

Часть 1. Найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{31.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4.3$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 1.60 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 1.60 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{31.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{31.3}$$

Определить собственные частоты решения уравнения (31.1).

Часть 2. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{E \sin \Omega t}_{p(x,t)} \tag{31.4}$$

при $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, $\Omega = 4.3$, с теми же начальными и граничными условиями (31.2), (31.3). Затабулировать решение уравнения (31.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Часть 3. Решить уравнение вынужденных колебаний закрепленной струны (31.4) при тех же исходных данных $\ell = 8$, $a = 4.3$, $E = 10.3$, и при резонансном значении $\Omega = 0.54\pi$, с теми же начальными и граничными условиями (31.2), (31.3). Затабулировать решение уравнения (31.4) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 3$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам общего и частного решений, и построить эти три графика.

Решение. Следуем примеру 6.

Часть 1

Шаг 1. Решение $u_{\text{одн}}(x,t)$ уравнения (31.1) находим по формулам

$$u_{\text{одн}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

в которых коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, dx \ .$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{8} \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{8}\,dx =$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 31.7 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. Вычисляем $B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{8} 0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{8} dx = 0$

Шаг 4. По формулам шага 1 получаем

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле шага 2, а $B_k = 0$ (шаг 3).

Собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{\ell} = \qquad = \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{31.5}$$

Часть 2

Шаг 5. Решение уравнения (31.4) находим по формулам

$$u(x,t) = u_{\text{одн}}(x,t) + u_{\text{част}}(x,t) \tag{31.6}$$

где $u_{\text{одн}}(x,t)$ — решение однородного уравнения (31.1) (шаг 4), а $u_{\text{част}}(x,t)$ — частное решение уравнения (31.4) при граничных условиях (31.3) и нулевых начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,. \tag{31.7}$$

Находим частное решение $u_{\text{част}}(x,t)$ по формуле

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,, \tag{31.8}$$

где $\ell = 8$, а коэффициенты $c_k(t)$ находятся в зависимости от соотношения частоты Ω с собственными частотами ω_k по формуле:

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{2E(1-(-1)^k)}{k\pi(\omega_k^2-\Omega^2)} \cdot \Big(\sin\Omega t - \dfrac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big)\,, & \text{если } \omega_k \neq \Omega\,; \\[2ex] \dfrac{-E(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k} \cdot t \cdot \cos\omega_k t\,, & \text{если } \omega_k = \Omega\,. \end{cases} \tag{31.9}$$

Для задачи 5, часть 2, значение $\Omega = 4.3$ **не совпадает ни с одним из значений собственных частот** $\omega_k =$ по формуле (31.5), поэтому все коэффициенты $c_k(t)$ вычисляются по **первой** формуле (31.9). Следовательно, по формуле (31.8),

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \Big(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\Big) \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \end{aligned} \tag{31.10}$$

где

$$C_k = \qquad = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ 0\,, & \text{если } k \text{ четно}\,. \end{cases} \tag{31.11}$$

Шаг 6.

Таблица 31.8 (значения C_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k							

Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и значения $k = 1, 3$ по формулам Шага 5) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell}\,.$$

Здесь следует взять $A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 31.7,

$$\ell = ____, \quad a = ____, \quad \Omega = ____,$$

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (31.5), и $C_1 =$ _____, $C_3 =$ _____ по таблице 31.8. Окончательно

$$\begin{aligned} u_{\text{прибл}}(x,t) &= ___\

Шаг 7. Построение графиков по Таблице 31.9

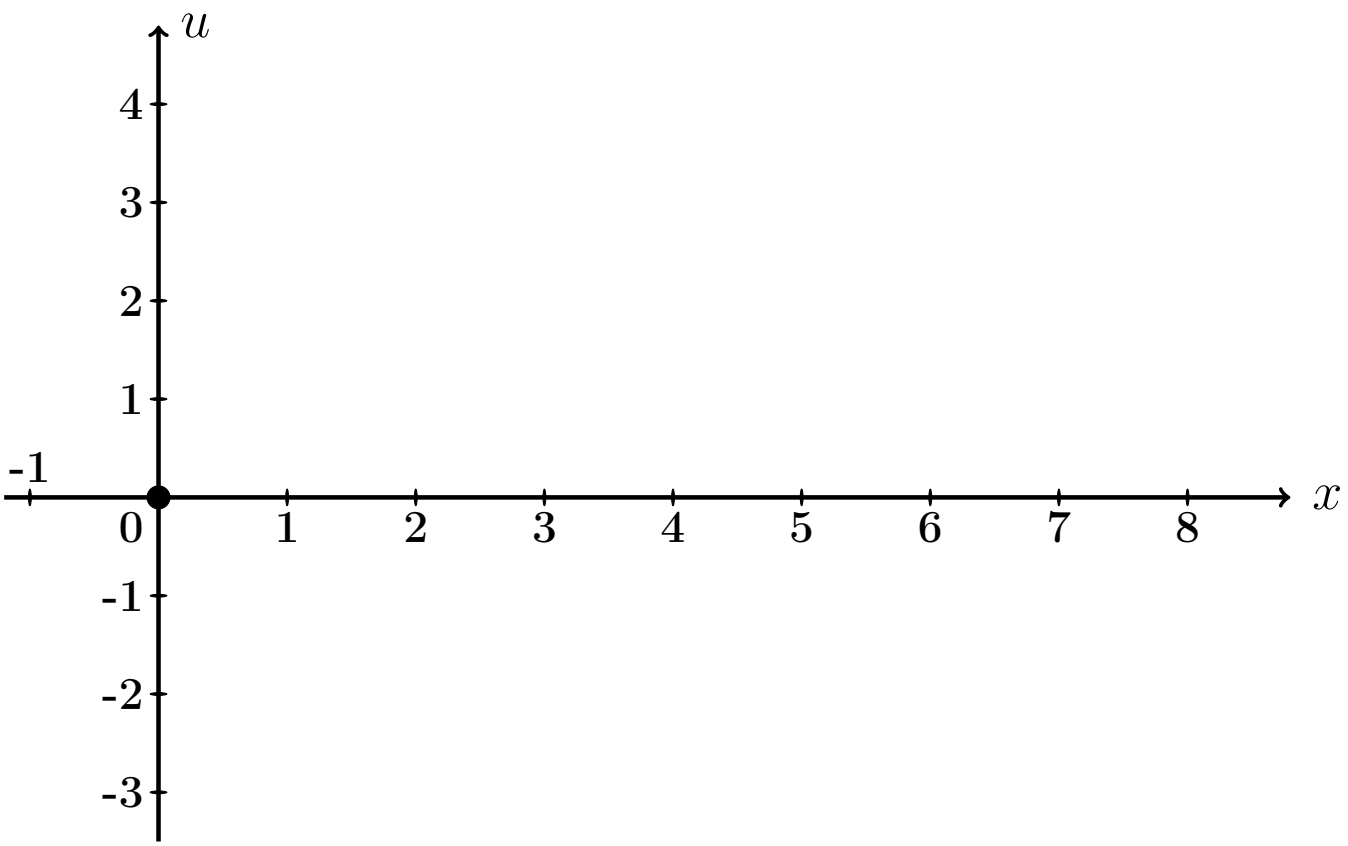


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 31 задача 7 (по Таб. 31.7, 31.8)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): C_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 7 (по таблице 31.9)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Часть 3

Шаг 8. Решение основано на формулах (31.6) и (31.8). Однако данное значение $\Omega = 0.54\pi$ здесь **совпадает со значением собственной частоты** $\omega_1 = \frac{1\pi a}{\ell} =$ (формула (31.5)), поэтому множитель $c_1(t)$ определяется по **второй** формуле (31.9), т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= C_1' \cdot t \cdot \cos\omega_1 t = C_1' \cdot t \cdot \quad , \text{ где} \\ C_1' &= \quad = \quad = \end{aligned}\right\} \qquad (31.12)$$

а все остальные множители $c_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, вычисляются по **первой** формуле (31.9). Следовательно, по формуле (31.8),

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{част}}(x,t) &= c_1(t)\,\sin\frac{1\pi x}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\,\sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ &= \quad + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \quad \end{aligned}\right\} \qquad (31.13)$$

где C_k вычисляется по формулам (31.11).

Шаг 9. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам ($k = 1, 3$ по формуле Шага 4 и $k = 1, 3$ по формуле (31.13)) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = A_1 \cos\frac{1\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + A_3 \cos\frac{3\pi a t}{\ell} \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \\ + C_1' t \cos\omega_1 t \cdot \sin\frac{1\pi x}{\ell} + C_3 \cdot \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_3}\sin\omega_3 t\right) \cdot \sin\frac{3\pi x}{\ell} .$$

Здесь следует взять:

$A_1 =$ _____, $A_3 =$ _____ по таблице 31.7,

$\ell =$ ____, $a =$ ____, $\Omega =$ _____,

$\omega_1 =$ _____ $=$ _____ и $\omega_3 =$ _____ $=$ _____ по формуле (31.5),

$C_1' =$ _____ по формуле (31.12)

и $C_3 =$ _____ по таблице 31.8 . Окончательно

$u_{\text{прибл}}(x,t) =$ _____ $+$ _____ $+$

$+$ _____ $+$

$+$ _____ .

Шаг 10. Табулировка и построение графиков.

Таблица 31.10 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	1,28	2,56	3,84	5,12	6,4	5,12	3,84	2,56	1,28	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

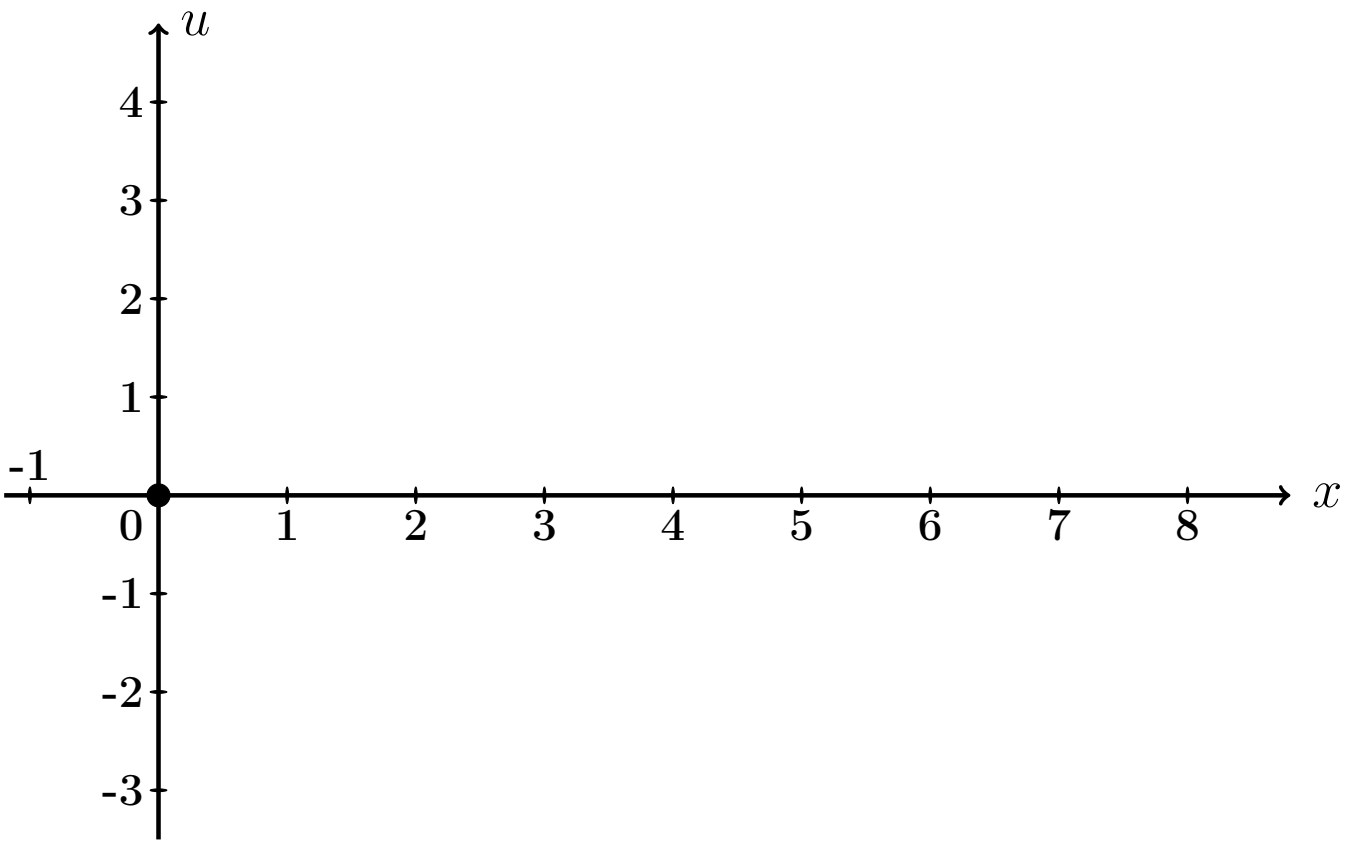


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным.

Выборочная проверка вариант 31 задача 7 (часть 3, C_1' по формуле (31.12))

Ответ (формат 1.2): C_1' введи [ ] Клик [ ]

Выборочная проверка вариант 31 задача 7 (по таблице 31.10)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 8

Найти решение уравнения колебаний струны с сопротивлением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{31.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 8$, $a = 4$, $m = 0.4$, с начальными условиями

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} 0.80 \cdot x, & \text{при } 0 \le x \le 8/2 \\ 0.80 \cdot (8 - x), & \text{при } 8/2 \le x \le 8 \end{cases}}_{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \underbrace{0}_{\psi(x)} \tag{31.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = 0 \,.$$

Определить собственные частоты решения уравнения (31.1). Затабулировать решение уравнения (31.1) для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 8$ с шагом $\Delta x = 0.8$, по первым двум гармоникам, и построить эти три графика.

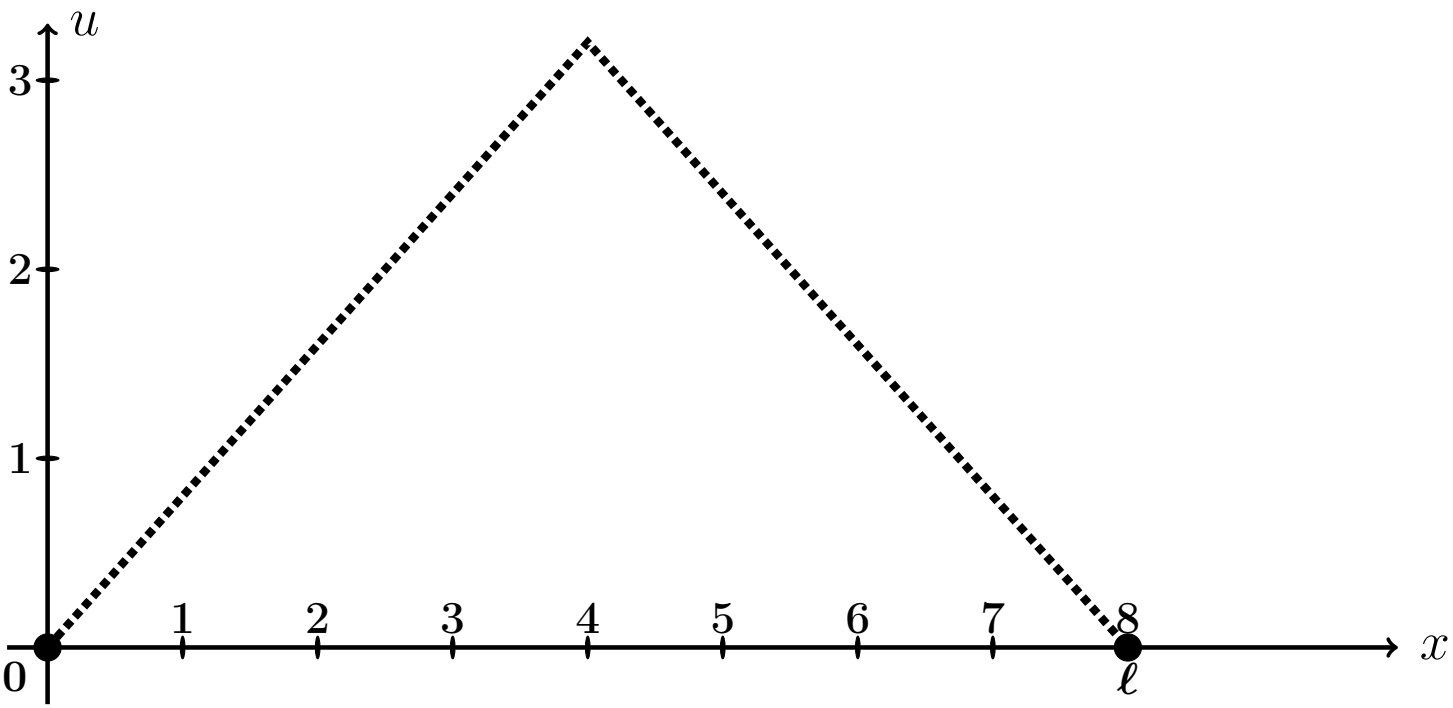


Рис.: Форма струны $u = \varphi(x)$ согласно начальным условиям (31.2).

Решение. Следуем примеру 7.

Шаг 1. Решение находим по формулам

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-mt} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \\ &= e^{-0.4\cdot t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{8}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

где $\ell = 8$, $m = 0.4$, а $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$ — **собственные частоты**, и

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,,$$

$$B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx\,.$$

Шаг 2. Находим собственные частоты

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi \cdot \square}{\square}\right)^2 - (\square)^2}\,.$$

Табулируем для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Таблица 31.11 (значения q_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
q_k							

Шаг 3. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$ $\qquad =$

$$= \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{8}$.

$$A_k = \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad$$

$$\qquad =$$

$$= \qquad - \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$- \qquad + \qquad =$$

$$= \qquad - \qquad - \qquad + \qquad +$$

$$+ \qquad - \qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad = \qquad$$

Таблица 31.12 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 4. Вычисляем $B_k = A_k \cdot \frac{m}{q_k} + \frac{2}{\ell \cdot q_k} \int_0^\ell \underbrace{\psi(x)}_{=0} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{0.4 \cdot A_k}{q_k} =$

$=$

Таблица 31.13 (значения B_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
B_k							

Шаг 5. Приближенное решение по двум первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3$ по таблицам 31.12, 31.13) формулы (31.3) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = e^{-mt} \cdot \Big((A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t) \sin \frac{1\pi x}{\ell} + (A_3 \cos q_3 t + B_3 \sin q_3 t) \sin \frac{3\pi x}{\ell} \Big),$$

где $m = 0.4$, $\ell = 8$, $q_1 =$ и $q_3 =$ по таблице 31.11, $A_1 =$ и $A_3 =$ по таблице 31.12, $B_1 =$ и $B_3 =$ по таблице 31.13. Окончательно,

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \cdot \Big(+ + \Big)$$

Шаг 6.

Таблица 31.14 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8
$\varphi(x)$	0	0,64	1,28	1,92	2,56	3,2	2,56	1,92	1,28	0,64	0
$u(x,0)$	0	*									
$u(x,1)$	0				*						
$u(x,2)$	0									*	

Шаг 7. Построение графиков.

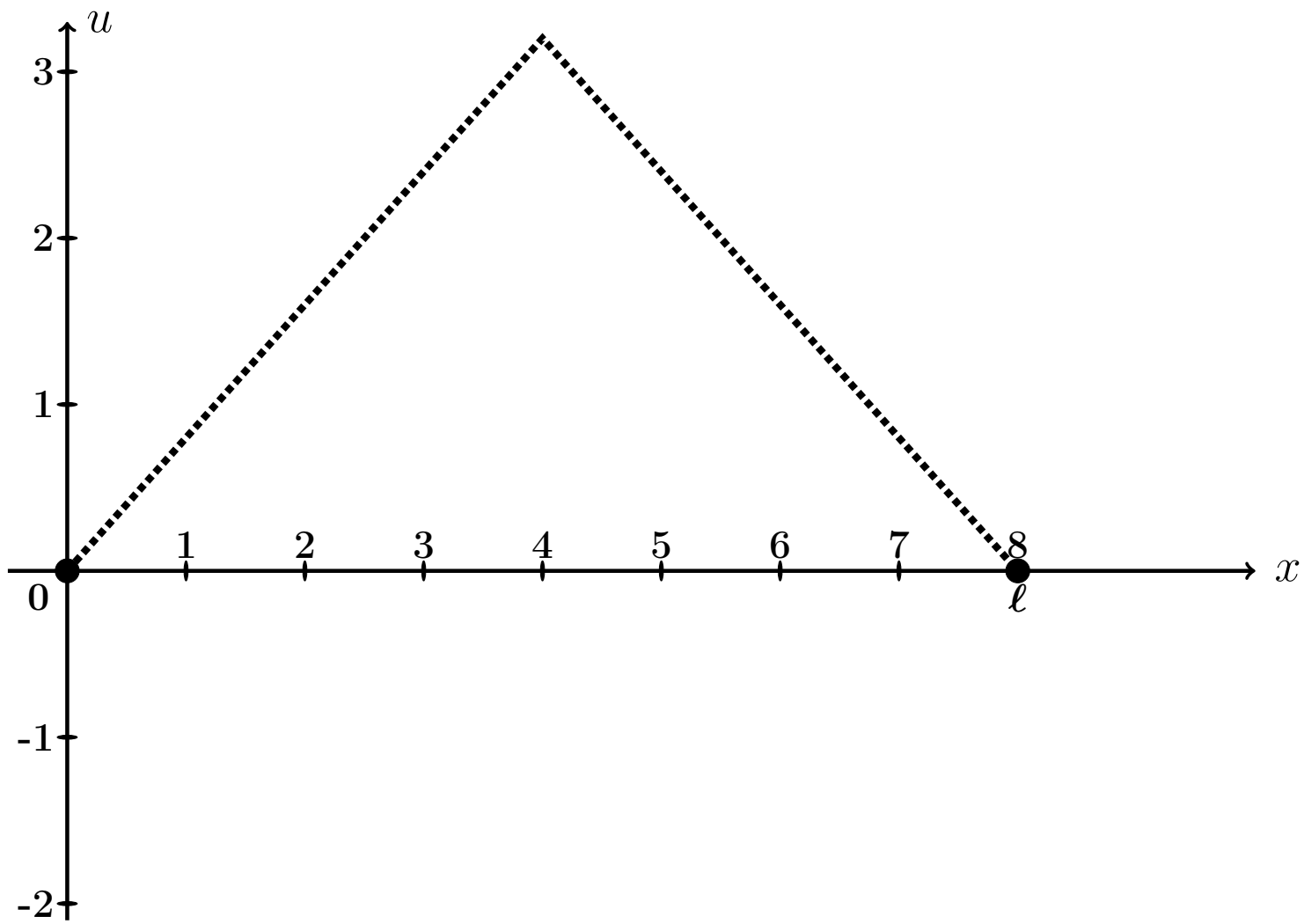


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$, цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ формы струны согласно начальным условиям (31.2).

Выборочная проверка вариант 31 задача 8 (по таблице 31.11)

Ответ (формат 1.2): q_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): q_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 8 (по таблице 31.12)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 8 (по таблице 31.13)

Ответ (формат 1.2): B_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): B_3 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 8 (по таблице 31.14)

Ответ (формат 1.2): $u(0.80, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(3.20, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(7.20, 2)$ введи Клик

Задача 9

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{31.1}$$

на отрезке $[0, \ell]$ при $\ell = 5$, $a = 1.3$, с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{(4.50)}_{k_1(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(-2.00)}_{b_1(\varphi)}, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{(-0.50)}_{k_2(\varphi)} \cdot x + \underbrace{(10.50)}_{b_2(\varphi)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{\varphi(x)} \tag{31.2}$$

и с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \underbrace{-2.0}_{T_0} \quad \text{и} \quad u\Big|_{x=\ell} = \underbrace{8.0}_{T_\ell}. \tag{31.3}$$

Затабулировать решение для $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ и $0 \le x \le 5$ с шагом $\Delta x = 0.5$, по первым трем гармоникам, и построить эти три графика.

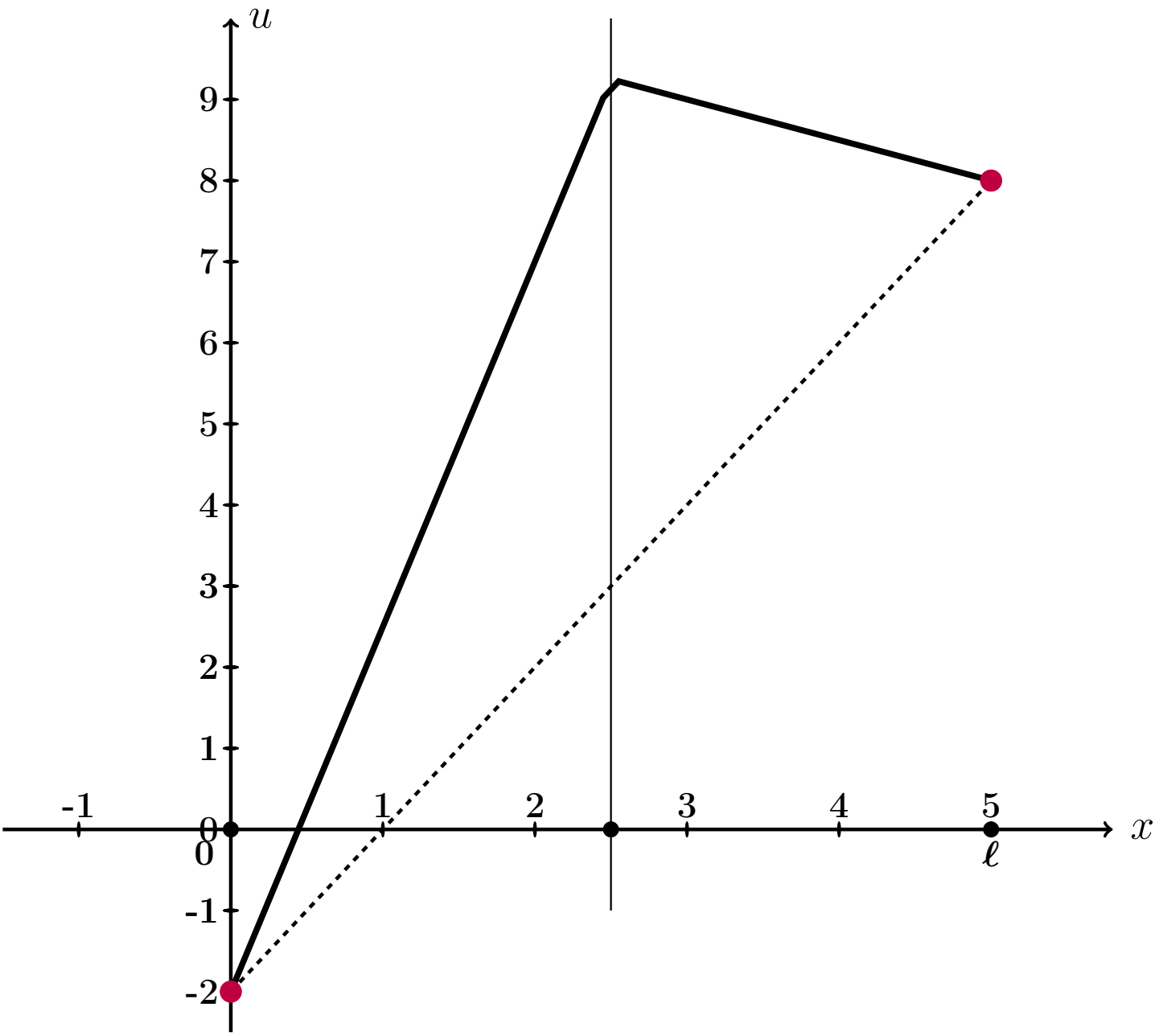


Рис.: Черным дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (31.2), а черным пунктиром – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (31.3).

Решение. Следуем примеру 8.
Шаг 1. Для решения данной задачи, сначала решается вспомогательная задача: уравнение (31.1) с **нулевыми** граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\ell} = 0\,. \tag{31.4}$$

и с пересчитанным начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \underbrace{\begin{cases} \underbrace{\qquad}_{k_1(f)} \cdot x\,, & \text{при } 0 \le x \le 5/2 \\ \underbrace{\qquad}_{k_2(f)} \cdot x + \underbrace{\qquad}_{b_2(f)}, & \text{при } 5/2 \le x \le 5 \end{cases}}_{f(x)} \tag{31.5}$$

по формуле

$$f(x) = \varphi(x) - T_0 - \frac{T_\ell - T_0}{\ell}\cdot x = \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x =$$
$$= \varphi(x) - \qquad - \qquad \cdot x\,.$$

Коэффициенты $k_1(f)$, $k_2(f)$, $b_2(f)$ формулы (31.5) выражаются через коэффициенты $k_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$, $b_2(\varphi)$ формулы (31.2):

$$\left.\begin{aligned} k_1(f) &= k_1(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ k_2(f) &= k_2(\varphi) - \frac{T_\ell - T_0}{\ell} = \qquad = \qquad \\ b_2(f) &= b_2(\varphi) - T_0 = \qquad = \qquad \end{aligned}\right\} \tag{31.6}$$

Решение $u_0(x,t)$ этой вспомогательной задачи находим по формуле

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

в которой коэффициенты вычисляются так:

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\,.$$

Шаг 2. Вычисляем $A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^{5} f(x)\sin\frac{k\pi x}{5}\,dx =$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad .$$

Используем формулы 1 и 3 таблицы 4 при $p = \frac{k\pi}{5}$.

$$A_k = \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad$$

$$\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$

$$- \qquad\qquad + \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad .$$

Фоном выделены взаимно сокращаемые члены, а красным цветом — член, равный 0, так как $\sin k\pi = 0$. Окончательно

$$A_k = \qquad\qquad = \qquad\qquad \tag{31.7}$$

Таблица 31.15 (значения A_k при $k = 1, \ldots, 7$)

k	1	2	3	4	5	6	7
A_k							

Шаг 3. По формулам шага 1 получаем

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell} = \qquad\qquad ,$$

где A_k вычисляется по формуле (31.7).

Шаг 4. Решение $u(x,t)$ уравнения (31.1) с начальным условием (31.2) и граничными условиями (31.3) получается из найденного решения $u_0(x,t)$ (с нулевыми граничными условиями (31.4)) при помощи формулы

$$u(x,t) = u_0(x,t) + T_0 + \frac{T_5 - T_0}{5} \cdot x = \qquad\qquad ,$$

где $T_0 = -2.0$ и $T_5 = 8.0$ — значения граничных условий (31.3).

Шаг 5. Приближенное решение по трем первым ненулевым гармоникам (значения $k = 1, 3, 5$ по формуле Шага 4) имеет вид

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Здесь следует взять $A_1 =$, $A_3 =$, $A_5 =$ по таблице 31.15.

Шаг 6. Окончательно

$$u_{\text{прибл}}(x,t) = \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Таблица 31.16 (Табулировка $u = u_{\text{прибл}}(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$)

x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5
$\varphi(x)$	-2	0,25	2,5	4,75	7	9,25	9	8,75	8,5	8,25	8
$u(x,0)$	-2	*									
$u(x,1)$	-2				*						
$u(x,2)$	-2									*	

Шаг 8. Графики по Таблице 31.16.

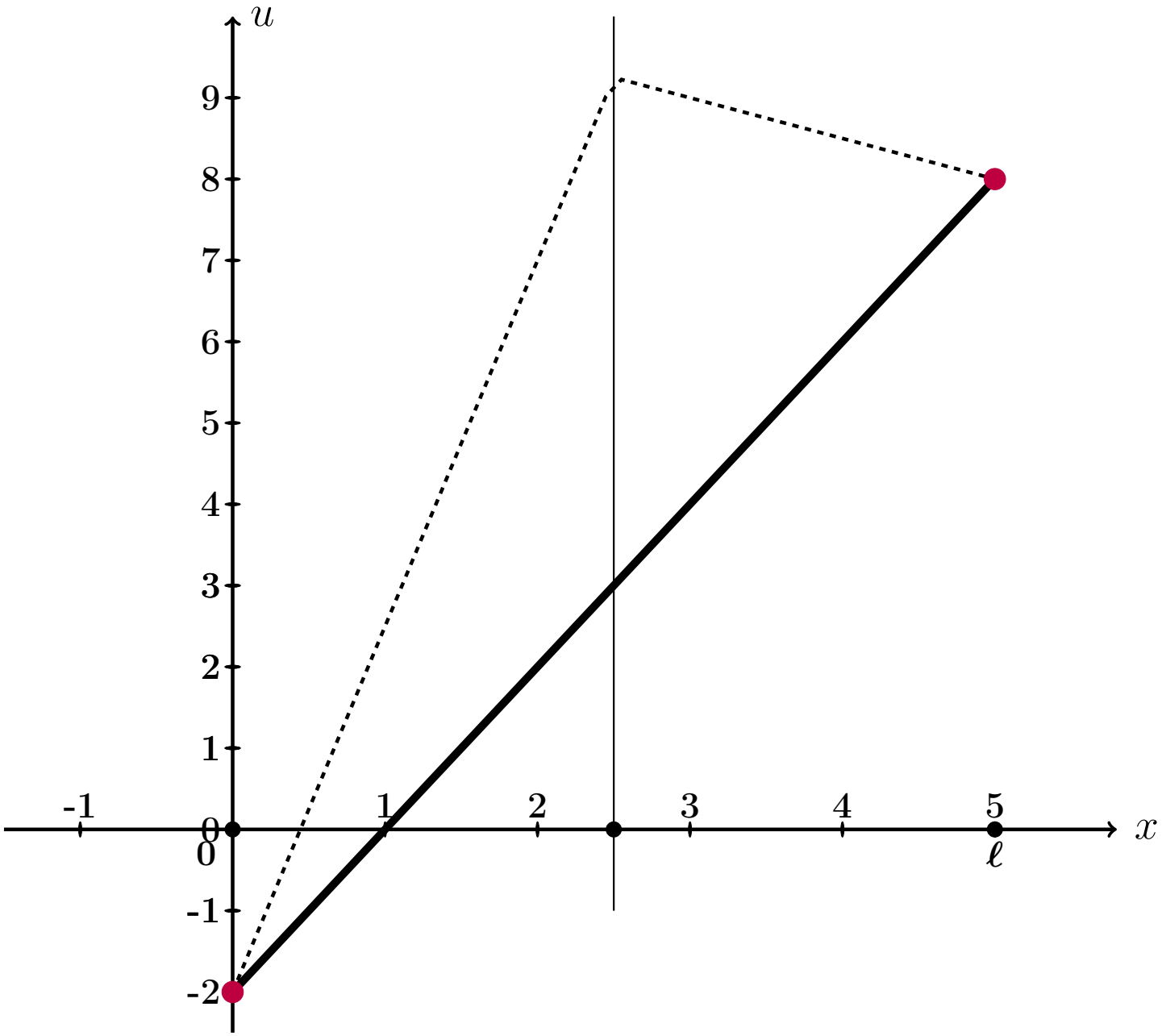


Рис.: Графики функций $u = u(x,t)$ при $t = 0, 1, 2$ даны цветным. Черным пунктиром дан график $u = \varphi(x)$ начального распределения температуры согласно (31.2), а черной сплошной линией – график равномерного распределения температуры, согласованный с условиями (31.3).

Выборочная проверка вариант 31 задача 9 (по формулам (31.6))

Ответ (формат 1.2): $k_1(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $k_2(f)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $b_2(f)$ введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 9 (по таблице 31.15)

Ответ (формат 1.2): A_1 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_3 введи Клик

Ответ (формат 1.2): A_5 введи Клик

Выборочная проверка вариант 31 задача 9 (по таблице 31.16)

Ответ (формат 1.2): $u(0.50, 0)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(2.00, 1)$ введи Клик

Ответ (формат 1.2): $u(4.50, 2)$ введи Клик