Листок 5. Ортогональные системы

Анализ, 2 курс, весенний семестр, **17.01.2020**

5⋄1 Доказать, что в конечномерном линейном векторном пространстве L любые две нормы эквивалентны. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными, если для некоторых чисел $a, b > 0$ выполнены неравенства $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$ для для всех $x \in L$.

5⋄2 Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ две нормы: $\|f\|_C = \max\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ и $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Доказать, что эти нормы не эквивалентны.

5⋄3 Пусть (x, y) обозначает скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.
а) Докажите, что функция $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.
б) Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ выполнено тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

5⋄4 Доказать, что нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

5⋄5 Докажите, что следующие пространства не являются евклидовыми: **а)** l_p при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$; **б)** $C[0,1]$. Пространство l_p состоит из последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, и норма в нем задается формулой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

5⋄6 В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональное дополнение для следующих множеств
а) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = 0$ для всех $t \leq 0\}$;
б) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = x(-t)$ для всех $t \in [-1,1]\}$;
в) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ \int_{-1}^0 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt\}$.

5⋄7 В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от вектора $x(t) = t^n$ до подпространства $H_0 = \{x \in L_2[0,1] :\ \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

5⋄8 Докажите, что система Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортонормирована, но не полна в $L_2[0,1]$.

5⋄9 Докажите, что в системе многочленов Чебышева I рода

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ n = 0, 1, \ldots$$

а) $T_n(t)$ является многочленом степени n;
б) функция $T_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0;$$

в) все функции ортогональны в пространстве $L_2[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$;
г) образуют в этом пространстве ортогональный базис.

5⋄10 (*) Докажите, что среди всех многочленов вида $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ наименьшую норму в вещественном пространстве $C[-1,1]$ имеет многочлен Чебышева I рода $T_n(t) = 2^{1-n}\cos(n \arccos t)$.