

**ЛИСТОК 7. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К ЗАДАЧАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

АНАЛИЗ, 2 КУРС, **12.04.2020**

7♦1 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

7♦2 Концы стержня $[0, 1]$ поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = a$, $u|_{x=1} = b$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

7♦3 Решите методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

(Указание к задачам 2 и 3: выберите такое частное решение $v(x, t)$ рассматриваемого уравнения, чтобы граничные условия разности $u(x, t) - v(x, t)$ стали нулевыми, и решите для разности это уравнение с новыми начальными условиями.)

7♦4 Найдите формулу решения следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $[0, a] \times [0, b]$ методом Фурье:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, b) = \psi(x).$$

7♦5 Решите следующие задачи Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все собственные значения λ и соответствующие им собственные функции $y(x)$:

а) $-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(l) = 0;$

б) $-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(l) = 0.$

в) Доказать полноту в $L_2[0, l]$ этих систем собственных функций.

7♦6 Доказать, что оператор Штурма–Лиувилля задачи

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda y(x), \\ \alpha y'(0) + \beta y(0) &= 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0. \end{aligned}$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, является симметричным. При каких условиях на эти константы оператор положителен?

7♦7 (*) Доказать, что дифференциальный оператор

$$A := -\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} \right]$$

является симметричным и положительным в пространстве $L_2[-1, 1]$ с областью определения $D_A = \{y(x) | y(x) \in C^2[0, l]\}$ (граничные условия отсутствуют), а полиномы Лежандра $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, служат собственными функциями оператора A с собственными значениями $n(n+1)$.

(Оператор A не порождает задачу Штурма–Лиувилля, т.к. здесь отсутствуют граничные условия, и, как можно проверить, $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$).

7♦8 (*) Исходя из полноты ортогональной системы полиномов Лежандра в $L_2[-1, 1]$, покажите, что у оператора A нет других собственных функций и собственных значений, кроме $P_n(x)$ и $n(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$.