

ЛИСТОК 8. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

АНАЛИЗ, 2 КУРС, 18.05.2020

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Интегралом Фурье функции f в точке x называется величина

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda = \frac{1}{2\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda.$$

Преобразованием Фурье от f называется функция

$$F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Напомним формулу обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8♦1 Лемма Римана на $\mathbb{R}$. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iAt} dt = 0.$$

8♦2 Принцип локализации для интеграла Фурье. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$, то интегралы Фурье функций f и g в точке x_0 сходятся или расходятся одновременно к одному и тому же значению.

8♦3 Представьте функцию $f(x)$ в виде интеграла Фурье, если

$$\text{а) } f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \text{sign } x, & \text{при } |x| < a \\ 0, & \text{при } |x| \geq a. \end{cases}$$

8♦4 Найти преобразования Фурье следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = x \chi_{a,b}(x); \quad \text{б) } f(x) = \frac{d^2}{dx^2} (x^3 e^{-|x|}).$$

8♦5 Какой функцией будет преобразование Фурье функции $f(x)$, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная, 3) вещественная, 4) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$? Аналогичный вопрос про функцию f , если этими свойствами обладает ее преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ по переменной λ .

8♦6 Восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $F[f](\lambda)$, если

$$\text{а) } F[f](\lambda) = \frac{1}{a+i\lambda}; \quad \text{б) } F[f](\lambda) = \frac{\sin a\lambda}{\lambda} \quad (a > 0).$$

8♦7 Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, причем $f'(x), f''(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье $F[f](\lambda) \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.

8♦8 а) Доказать, что функция $f(x) = e^{-x^2}$ принадлежит пространству Шварца S .

б) Принадлежит ли функция $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$ пространству Шварца S ?

8♦9 а) Пусть F преобразование Фурье в пространстве Шварца S . Что представляет собой отображение $G = F \circ F$, т.е. $G[f] = F[F[f]]$?

б) Пусть $f_1(x), f_2(x) \in S$. Доказать, что $(F[f_1], f_2) = 2\pi(f_1, F^{-1}[f_2])$, где F^{-1} – обратное преобразование Фурье.

8♦10 (*) Формула Пуассона. Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Докажите равенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F[f](n) e^{inx}.$$

Указание: левая часть является периодической функцией. Найдите для нее коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e^{inx}\}$ и убедитесь в равномерной сходимости соответствующего ряда Фурье.

8♦11 (*) Пусть функция $u = u(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ принадлежит пространству Шварца по переменной x равномерно по y (т.е., константы в оценках производных $u(x, y)$ по по переменной x не зависят от y) и является решением следующей задачи в верхней полуплоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \quad (\text{уравнение Лапласа}),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{граничное условие}).$$

причем $u(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

а) Проверьте, что преобразование Фурье функции $u(x, y)$ по переменной x имеет следующий вид

$$F[u](\lambda) = F[\varphi](\lambda) e^{-y|\lambda|}, \quad \forall y \geq 0.$$

б) С помощью формулы обращения получите формулу для решения рассматриваемой задачи в виде интеграла Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \varphi(\xi) d\xi.$$