Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Программа экзамена 2020 г. за 4 модуль

1. Доказать изопериметрическое неравенство. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).

2. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Записать формулу для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности с помощью функции Грина этой задачи и обосновать ее.

3. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи неоднородного уравнения упругих колебаний струны с правой частью (без доказательства) и вывести формулу для решения.

4. Сформулировать общую задачу Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля (без доказательства).

5. Вывести формулу Фурье для функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ формально из ряда Фурье этой функции (без обоснования сходимости). Доказать теорему о сходимости интеграла Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при выполнении условия Дини. Записать интеграл Фурье в комплексной форме и дать определение преобразования Фурье. Доказать однозначность (инъективность) преобразования Фурье для функции из $L_1(\mathbb{R})$. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

6. Доказать равномерную сходимость последовательности $\{F[f_n]\}$ преобразования Фурье, если известно, что $\{f_n\}$ сходится в норме $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ является ограниченной непрерывной функцией, причем $F[f](\lambda) \to 0$ $(|\lambda| \to \infty)$. Вывести формулу для преобразования Фурье производной $f'(x)$ при условии, что $f,\ f' \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $f(x)$. Связь порядка гладкости функции со степенью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье. Вывести формулу производной преобразования Фурье $F[f](\lambda)$ при условии, что $f(x)$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $F[f](\lambda)$. Связь порядка гладкости функции $F[f](\lambda)$ со степенью убывания на бесконечности функции $f(x)$.

7. Дать определение пространства Шварца S. Привести примеры функций из пространства Шварца. Доказать, что операторы дифференцирования и умножения на полином переводят пространство Шварца в себя. Доказать, что преобразование Фурье

переводит пространство Шварца в себя. Формула обратного преобразования Фурье в пространстве Шварца. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца. Дать определение преобразования Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сформулировать теорему об обращении преобразования Фурье при выполнении условия Дини в $\mathbb{R}^n$. Дать определение пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^n)$.

8. Получить формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ методом разделения переменных (без строго обоснования). Вывести формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ в пространстве Шварца с помощью преобразования Фурье. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца. Доказать основные свойства ядра Пуассона $G(x, y, t)$: положительность, бесконечную дифференцируемость по всем аргументам при $t > 0$, выполнение уравнения теплопроводности для $G(x, y, t)$ при $t > 0$, и равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)dx = 1$. Доказать, что формула Пуассона, где φ – непрерывная и ограниченная функция, задает бесконечно дифференцируемую функцию $u(x, t)$ при $t > 0$, которая является решением уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает непрерывную функцию $u(x, t)$ при $t \geq 0$, которая удовлетворяет начальному условию $\varphi(x)$.

9. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ с начальным условием из пространства Шварца. Вывести формулу для решения уравнения упругих колебаний бесконечной струны в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье. Доказать теорему Даламбера о представлении произвольного решения уравнения колебаний струны класса $C^2(D)$ в выпуклой области D в виде суммы двух бегущих волн. Вывести формулу Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны.

10. Дать определение свертки $f_1 * f_2$ функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что $f_1 * f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Вывести формулу преобразования Фурье от свертки двух функций. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши одномерного уравнения теплопроводности в пространстве S с помощью формулы преобразования Фурье свертки. Сформулировать теорему Планшереля. Дать определение преобразованию Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Доказать формулу Планшереля для функции из пространства Шварца S. Доказать теорему Планшереля для финитных функций из $L_2(\mathbb{R})$. Предполагая доказанной теорему Планшереля для финитных функций из $L_2(\mathbb{R})$, доказать эту теорему для любых функций из $L_2(\mathbb{R})$.