

Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Задачи для коллоквиума за 3 модуль 2020 г.

1. Является ли множество $X_0 = \{x \in X \mid x(0) = x(1)\}$ замкнутым в пространстве
а) $X = C[0, 1]$ с нормой $\max$; б) $X = C_2[0, 1]$ с нормой $L_2(0, 1)$?
2. Вывести из неравенства Коши-Буняковского неравенство треугольника для нормы в евклидовом пространстве.
3. Привести пример бесконечномерного полного евклидова пространства.
4. Привести пример неполного евклидова пространства.
5. Привести пример нормированного пространства, которое не является евклидовым.
6. Доказать, что в евклидовом пространстве векторы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).
7. Доказать неравенство Коши-Буняковского для комплексного евклидова пространства.
8. Доказать, что в комплексном евклидовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
9. Пусть в комплексном евклидовом пространстве для элементов x и y выполнены равенства $\operatorname{Re}(x, y) = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Доказать, что $x = y$.
10. Привести пример неполной бесконечной ортогональной системы в евклидовом пространстве ℓ_2 .
11. Пусть M – произвольное множество в гильбертовом пространстве H . Доказать, что $M^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0, \forall y \in M\}$ является (замкнутым) линейным подпространством H .
12. В евклидовом пространстве $L_2[0, 1]$ найти угол между векторами $x(t) = 1$ и $y(t) = t$.
13. В евклидовом пространстве $L_2[-1, 1]$ найти углы треугольника с вершинами в точках $x(t) = 0$, $y(t) = 1$ и $z(t) = t$.
14. Пусть векторы $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ образуют правильный тетраэдра со стороной 1. Прodelать ортогонализацию для этой системы.
15. Пусть $\{x_n\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H . Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^n x_k$ сходится в H если, и только если, числовой ряд $\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ сходится.
16. Примените процесс ортогонализации к системе $\{1, t, t^2\}$ в пространстве $L_2[-1, 1]$.
17. В пространстве $L_2[-1, 1]$ построить ортогональное дополнение для множества $M = \{x \in L_2[-1, 1] : \int_{-1}^1 x(t)dt = 0\}$.
18. Найти расстояние в $L_2(0, \pi)$ от вектора $x(t) = \sin t$ до подпространства $H_0 = \{x \in L_2(0, \pi) \mid \int_0^\pi tx(t)dt = 0\}$.
19. Пусть M – линейное подпространство гильбертова пространства H . Доказать, что $(M^\perp)^\perp = M$.

20. Доказать, что для произвольного множества X в гильбертовом пространстве выполнено следующее включение: $X \subset (X^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?

21. Ортогонализируйте следующую систему функций в $L_2[0, \pi]$:

$$\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2} \sin x, \dots, \sin \frac{x}{2} \sin nx \dots$$

22. Доказать, что система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n+1/2)t} \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ является ортогональным нормированным базисом в $L_2[-\pi, \pi]$.

23. Вывести из теоремы Вейерштрасса, что система $1/2, \cos nt, \sin nt$ ($n = 1, 2, \dots$) является полной в $L_2[-\pi, \pi]$.

24. Доказать, что система функций $\{\sin(k - \frac{1}{2})x, k \in \mathbb{N}\}$ ортогональна и полна в $L_2[0, \pi]$.

25. Привести пример незамкнутого линейного многообразия в гильбертовом пространстве ℓ_2 .

26. Привести пример функции, из $L_1[0, 1]$, которая не принадлежит $L_2[0, 1]$.

27. Привести пример функции, из $L_2(\mathbb{R})$, которая не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

28. Привести пример функциональной последовательности, которая сходится к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но которая не имеет предела в $L_1(\mathbb{R})$.

29. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в пространстве $L_2[0, 1]$ к функции $f(x)$, то $f^2(x) \in L_1[0, 1]$, и $\{f_n^2(x)\}$ сходится к $f^2(x)$ в пространстве $L_1[0, 1]$.

30. Привести пример последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$, которая сходится по мере, но не сходится в $L_1[0, 1]$.

31. Привести пример последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$, которая сходится по мере, но не сходится ни в какой точке $x \in [0, 1]$.

32. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x), x \in [0, 1]\}$ сходится в среднеквадратичном, то из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

33. Привести пример последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$, которая сходится к 0 всюду на этом отрезке, но никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем.

34. Привести пример последовательности функций $\{f_n(x), x \in \mathbb{R}\}$, которая сходится к 0 равномерно, но не сходится ни в среднем, ни в среднеквадратичном.

35. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ тригонометрическим рядом Фурье какой-то функции из $L_2(-\pi, \pi)$.

36. Функцию $f(x) = x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0, \pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx, k \in \mathbb{N}\}$ и записать для нее равенства Парсеваля.

37. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ по тригонометрической системе.

38. Функцию $f(x) = \cos^3 x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0, \pi]$ по ортогональной системе $\{\cos kx, k \in \mathbb{Z}_+\}$.

39. Функцию $f(x) = \cos x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0, \pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx, k \in \mathbb{N}\}$.

40. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi, \pi]$, и объяснить, куда сходится этот ряд в каждой точке x .
41. Пусть $\{c_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_2[0, \pi]$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$. Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$?
42. Пусть функция $f(x) \in L_1[-\pi, \pi]$ удовлетворяет в точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ локальному условию Липшица, т.е. существуют такие числа $\delta > 0$ и $L > 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{O}_\delta(x_0).$$

Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе сходится в точке x_0 .

43. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|$ сходится. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно при $x \in \mathbb{R}$ и его сумма является непрерывной периодической функцией. Чему равны коэффициенты Фурье этой функции по тригонометрической системе?
44. Пусть $f \in C[0, \pi]$ и c_n – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе $\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \cos nx$. Чем является сумма $F(x)$ этого ряда для функции $f(x)$?