МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

О МОЩНОСТИ БАЗ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ НА АЛГЕБРЕ ПОДМНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Дипломная работа студента V-го курса
КАНОВЕЯ ВЛАДИМИРА ГРИГОРЬЕВИЧА

Научный руководитель
профессор УСПЕНСКИЙ ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ

МОСКВА
1973

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим булеву алгебру P всех подмножеств натурального ряда ω_0. В предположении аксиомы выбора легко доказать существование ультрафильтра Φ на P. Будем говорить, что Φ порождается множеством $X \subseteq P$, если $\Phi = \{y \mid \exists x \in X,\ y \supseteq x\}$. Тогда нетрудно с помощью диагонального метода доказать несуществование ультрафильтра на P, порожденного счетным множеством X.

Например, пусть $X = \{x_i\}$. Если хотя бы одно из x_i конечно, то, в силу конечной аддитивности Φ будет $\Phi = P$. Значит, всякое x_i бесконечно. Учитывая, что можно подобрать набор чисел $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ так, что $a_i < b_i < a_{i+1}$ для всякого i, $a_i \in x_i$, $b_i \in x_i$. Возьмем теперь множество $y = \{a_i\}$. Заметим, что невозможно, чтобы для какого-то i было бы $y \supseteq x_i$ (т.к. $b_i \in x_i$ и $b_i \notin y$). Аналогично, если $z = \omega_0 - y$, то невозможно $z \supseteq x_i$, т.к. $a_i \in x_i$ но $a_i \notin z$. Таким образом, ни y ни $z = \omega_0 - y$ - не являются элементами Φ, что противоречит тому, что Φ - ультрафильтр.

Таким образом, порождающее ультрафильтр Φ множество X не может быть счетным. Возникает вопрос: если не выполняется континуум-гипотеза, что можно сказать о мощности X? Может ли она быть меньше континуума?

Конечная цель этой работы - доказать независимость предложения A с тем, что никакое множество X мощности строго меньше континуума не может порождать ультрафильтр.

Непротиворечивость этого предложения доказывается гораздо проще.

При доказательстве главных теорем широко используется метод вынуждения Коэна (см.(1)) в его первоначальной формулировке - в виде полных последовательностей. Во введении рассматривается определение этого метода вынуждения и его основные свойства (без доказательства).

В первой главе рассматриваются так называемые борелевские расширения моделей (терминология (4)), их основные свойства и приложения к доказательству независимости и непротиворечивости ряда предложений дескриптивной теории множеств. В частности, доказывается непротиворечивость $A \& \sim KG$

Во второй главе излагается теория особого класса замкнутых множеств, доказываются их свойства, важные для доказательства независимости A . Вторая глава содержит основные теоремы, ведущие к доказательству независимости A . Также тсследуется способ саксовского расширения модели и некоторые его свойства.

В третьей же главе на основе теорем и методов второй главы доказывается независимость A .

Предполагаемые предварительные значения, необходимые для детального понимания работы можно найти: по методу вынуждения - в (1) и (3), по дискриптивной теории множеств в (2) и (3), по некоторым специальным вопросам - в (4).

Основные результаты работы получены в январе 1971 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕНИЯ

I. Параметрическое пространство.

Параметрическим пространством будем считать всякий класс $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$, где S_α - множества, определенные для всех ординалов α, причем S_α - построены следующим образом.

i) $S_0 = \Lambda$

ii) Для некоторого ординала λ определено множество $\{G_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$; причем $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ называется семейством генерических множеств (предполагается дизъюнктность G_α), причем для предельных α предполагается $G_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$

iii) Определяется $\mathcal{F}_\alpha = \{x \mid \rho(x) < \alpha\}$ (понятие ранга множества аналогично введенному в (I)); $\mathcal{F} = \bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ - класс (также предп. $\mathcal{F}_\alpha$ - дизъюнктны).

iv) S_α для всякого $\alpha > 0$ при непредельном $\alpha = \beta + 1$ определяется так.

$G_\alpha \cup \mathcal{F}_\alpha \subseteq S_\alpha$. Кроме того, в S_α входят всякая запись вида $\hat{x}\, A(x, c_1 \ldots c_n)$, где $A(x, y_1 \ldots y_n)$ - формула ZF с $n+1$-ой свободной переменной (может быть $n = 0$), $c_1 \ldots c_n$ - элементы S_β. Для предельного же α $S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$.

Так определенное S будет обозначать $S = S(\Gamma)$ где $\Gamma = \{\langle G_\alpha, \alpha\rangle \mid \alpha < \lambda\}$

2. Суждениями об S будем считать записи вида $A(c_1 \ldots c_n)$, где $A(x_1 \ldots x_n)$ - формула ZF

с n свободными переменными (м.б. $n=0$), $c_1 \dots c_n$ - элементы S , некоторые (м.б. все или ни одного) кванторы $\mathcal{A}$ снабжены ординальными индексами (если нет квантора без индекса, $\mathcal{A}$ называется ограниченным суждением ; для таких суждений определяется ранг как в (I)).

3. Вынуждение. Элементарными суждениями об S будем считать суждения вида $g_1 \in g_2$, где $g_1 \in G_\alpha$, $g_2 \in G_\beta$, $\alpha < \beta$ а также $f \in g$, где $f \in F$, $g \in G$

Множеством вынуждающих условий назовем всякое частично упорядоченное множество P с наименьшим элементом 0_P . Элементы p_1 и $p_2 \in P$ назовем противоречивыми, если нет такого $q \in P$, что $q \geq p_1$, $q \geq p_2$. Элементы p_1 и p_2 назовем несравнимыми, если не верно, что $p_1 \leq p_2$ или $p_2 \leq p_1$

Пусть Ψ - функция определенная на P и такая, что для всякого p $\Psi(p) = \Psi_p$ состоит из элементарных суждений об S , причем $p_1 \leq p_2 \to \Psi_{p_1} \subseteq \Psi_{p_2}$

Пару $\langle P, \Psi \rangle$ назовем S - вынуждающей парой. Отметим, что S фактически определяется только $\Gamma = \{\langle \alpha, G_\alpha \rangle, \alpha < \lambda\}$; поэтому существует формула ZF $Fors(\Gamma, P, \Psi)$, говорящая, что $\langle P, \Psi \rangle$ является $S(\Gamma)$ - вынуждающей парой, где $S(\Gamma)$ определено согласно $\Gamma = \{\langle \alpha, G_\alpha \rangle | \alpha < \lambda\}$.

Определим теперь двуместный предикат $p \; for_{P,\Psi} \; \mathcal{A}$ между $p \in P$ и ограниченными суждениями $\mathcal{A}$ об S .

i) Если $\mathcal{A}$ - элементарное, то

$$p \; for_{P,\Psi} \; \mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \in \Psi_p$$

ii) Если $A =$ "$x \in y$" , то

$p \Vdash_{P,\Psi} A \equiv x \in y$

iii) На более сложные суждения определение $\Vdash$ переносится индукцией по рангу как в (I) .

Вместо $p \Vdash_{P,\Psi} \sim\sim A$ будем писать

$p \Vdash_{P,\Psi} A$ (" слабое вынуждение ").

Когда из контекста ясно, какие P и Ψ имеются в виду индексы под символами вынуждения будем опускать и писать просто $p \Vdash A$, $p \Vdash A$.

4. Свойства таким образом определенного вынуждения полностью совпадают со свойствами вынуждения описанного в (I). Самое важное из свойств таково. Предположим, что все вышеприведенные рассуждения сделаны в некоторой счетной стандартной и транзитивной модели $\mathfrak{M}$. Назовем плотным на P всякое множество $X \subseteq P$ такое, что

i) $x \in X \;\&\; y \geq x \rightarrow y \in X$

ii) $\forall x \exists y \in X \; , y \geq x$

Пусть $\{p_n\}$ - возрастающая относительно порядка P последовательность элементов P , возможно, не принадлежащая $\mathfrak{M}$. Используя счетность $\mathfrak{M}$, можно построить такую $\{p_n\}$, что со всяким плотным на P множеством $X \in \mathfrak{M}$ $\{p_n\}$ будет пересекаться непустым образом. Обладающие этим свойством последовательности будем называть $\langle \Gamma, P, \Psi \rangle$ - полными. Заметим, что если $\{p_n\}$ - полная, то для всякого суждения A об S найдется такой номер n , что $p_n \Vdash A$ или $p_n \Vdash \sim A$.

В самом деле, множество $X = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ for } A$ или $p \text{ for } \neg A\}$ является плотным на $\mathbb{P}$ и принадлежит M. Пусть некоторая полная последовательность $\{p_n\}$ зафиксирована. Тогда для всякого $c \in S(\Gamma)$ определим множество $\bar{c}$ индукцией по α, $c \in S_\alpha$.

i) S_0 пусто, поэтому для $\alpha = 0$ определение $\bar{c}$ тривиально.

ii) Пусть для некоторого $\alpha > 0$ все $\bar{c}$, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$ уже определены, и пусть $c \in S_\alpha$, $c = \vec{x}\, A(x, c_1 \ldots c_n)$ $c_i \in S_\beta$, где $\alpha = \beta + 1$.

Тогда

$$\bar{c} = \{\bar{c}' \mid c' \in S_\beta \,\&\, \{\bar{d} \mid d \in S_\beta\} \vDash A(\bar{c}', \bar{c}_1 \ldots \bar{c}_n)\}$$

Пусть $c \in G_\alpha$. Тогда

$$\bar{c} = \{\bar{g} \mid g \in G_\beta,\ \beta < \alpha \,\&\, \exists n\ p_n \text{ for } ``g \in c''\}$$
$$\cup \{\bar{f} \mid f \in F_\beta,\ \beta < \alpha \,\&\, \exists n\ p_n \text{ for } ``f \in c''\}$$

Пусть $c \in \mathfrak{F}_\alpha$, $c = \underset{\sim}{x}$. Тогда $\bar{\underset{\sim}{x}} = x$

Символом $M(\bar{\Gamma})$ обозначается $\{\bar{c} \mid c \in S(\Gamma)\}$

Тогда имеет место свойство: для всякой полной последовательности $\{p_n\}$ $M(\bar{\Gamma})$ – модель ZF, причем если $A(x_1 \ldots x_n)$ – формула ZF, $c_1 \ldots c_n \in S(\Gamma)$ то $M(\bar{\Gamma}) \vDash A(c_1 \ldots c_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого n

$$p_n \text{ for } A(c_1 \ldots c_n)$$

Таково общее определение вынуждения и его основные свойства.

Более подробно свойства вынуждения рассматриваются в (I), где конценция вынуждения наиболее близка к принятой в настоящей работе (другие авторы используют несколько иные способы реализации метода вынуждения).

5. Назовем антицепью в P любое множество попарно противоречивых условий.

Лемма 5. Пусть всякая антицепь P счетна, и $\{p_n\}$ какая-то полная последовательность, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\Gamma)$ - соответствующая модель. Пусть $f\in\mathfrak{M}(\Gamma)$ и $\mathfrak{M}(\Gamma)\models$ "f - функция из ординала δ в ординал δ". Тогда найдется функция $g\in\mathfrak{M}$ такая, что для всякого $\lambda\in\delta$ $\mathfrak{M}(\Gamma)\models$ "$f(\lambda)\in g(\lambda)$" и кроме того $\mathfrak{M}\models$ "Все значения g - счетные множества".

Доказательство. Всякое множество $x\in\mathfrak{M}(\Gamma)$ имеет вид $\bar{c}$ для некоторого $c\in S(\Gamma)$

Пусть $f=\bar{c}$. Обозначим для всякого ординала $\lambda\in\delta$, $Q(\lambda,\theta)=\{p\in P\mid p\Vdash$ "c - функция из $\check{\delta}$ в $\check{\delta}$ и $c(\check{\lambda})=\check{\theta}$"$\}$.

Обозначим $g(\lambda)=\{\theta\mid Q(\lambda,\theta)\neq\emptyset\}$. Покажем, что $g(\lambda)$ не более чем счетно в $\mathfrak{M}$. В самом деле, предположим противное (все рассуждения проходят в $\mathfrak{M}$). Тогда выберем из всякого непустого $Q(\lambda,\theta)$ по одному условию. Полученное множество T несчетно по предположению.

Пусть $p_1\in Q(\lambda,\theta_1)$, $p_2\in Q(\lambda,\theta_2)$, $\theta_1\neq\theta_2$. Покажем, что p_1 и p_2 противоречивы.

В самом деле, иначе было бы $q \geq p_1$, $q \geq p_2$.
И $q \Vdash$ " c - функция из $\underset{\sim}{6}$ в $\underset{\sim}{\delta}$ и $c(\underset{\sim}{\lambda}) = \underset{\sim}{\theta_1}$
и $c(\underset{\sim}{\lambda}) = \underset{\sim}{\theta_2}$ " , чего, очевидно, быть не может.
Значит T - несчетная антицепь в P , что противоречит условию леммы.

Теперь нетрудно показать, что g искомая функция.

Доказательство аналогичного предложения содержится в (I) .

Следствие 6. В условиях предыдущей леммы кардиналы в $M(\bar{T})$ то же, что и в .

Доказательство. В самом деле, пусть $\aleph_1$ и $\aleph_2$ - кардиналы в M , $\aleph_1 < \aleph_2$. Покажем, что и в $M(\bar{T})$ $\aleph_1$ и $\aleph_2$ не равномощны. В самом деле, пусть f отображает $\aleph_1$ на $\aleph_2$, $f \in M(\bar{T})$.

Рассмотрим функцию $g \in M$ из предыдущей леммы. Рассмотрим множество $X = \bigcup_{\lambda \in \aleph_1} g(\lambda)$. Ясно, что $X \in M$ и $M \models$ " мощность X равна $\aleph_1$ ", т.к. все $g(\lambda)$ счетны.

Значит, X не содержит $\aleph_2$. Но область значений f включена в X по выбору g .
Следствие доказано.

ГЛАВА I

БОРЕЛЕВСКИЕ ЧИСЛА.

§ I. Общая теория и некоторые факты.

I. Рассмотрим параметрическое пространство $S(a)$ следующего стандартного типа: $G = G_{\omega_0} = \{a\}$, где a - один - единственный символ. Пусть также P - некоторое семейство кодов борелевских множеств действительных чисел. (Все построение происходит в некоторой фиксированной счетной стандартной транзитивной модели $\mathfrak{M}$).

Упорядочим P так: $p_1 \leq p_2$, если $B_{p_2} \subseteq B_{p_1}$ (т.е. обратно включению). Для всякого $p \in P$ возьмем такое множество Ψ_p элементарных условий: $A \in \Psi_p$ тогда и только тогда, когда A есть суждение "$\underset{n}{\underset{\sim}{n}} \in a$", причем для всякого x из B_p выполняется $n \in x$.

Мы получим вынуждающую пару $\langle P, \Psi \rangle$. Пусть $\{p_n\}$ - некоторая полная последовательность условий из P. Положим, согласно 0.4, $\bar{a} = \{n \mid \exists k, p_k \Vdash \text{"}\underset{n}{\underset{\sim}{n}} \in a\text{"}\}$. Числа a, полученные таким способом, назовем P - числами, а получаемые модели $\mathfrak{M}(\bar{a})$ P - моделями.

Нас будут особо интересовать три типа множеств P: P_1 - семейство кодов борелевских множеств положительной меры, P_2 - семейство кодов борелевских множеств не первой категории и P_3 - семейство кодов несчетных множеств. Под кодировкой борелевских множеств действительными числами понимается, например, принятая в (3). Если обозначить множество с кодом p символом B_p,

то предикат $B(x) \equiv x \in B_p$ будет Δ'_1, а предикат $B(p,x) \equiv$ ~~,~~ если p - код, то $x \in B_p$ " - тоже Δ'_1. Сам же предикат " p - код" - является Σ'_1 - предикатом.

Условимся, если p_1 и p_2 - коды, то символом $p_1 \wedge p_2$ обозначать код $B_{p_1} \cap B_{p_2}$. Аналогично $p_1 \vee p_2$.

Согласно принятой в (3) терминологии, P_1 - числа и модели называются случайными числами и моделями, P_2 - числа и модели - соответственно генерическими, а P_3 - саксовскими.

В (3) доказано, что генерические числа - это в точности те, которые не принадлежат никакому борелевскому множеству первой категории с кодом из $\mathfrak{M}$ (в терминологии (3)).

Аналогично, случайные числа - те, которые не принадлежат никакому борелевскому множеству меры 0 с кодом из $\mathfrak{M}$.

Саксовские же числа не допускают компактного описания такого рода.

В этой главе я буду касаться только генерических и случайных моделей и более сложных моделей, близких к ним по свойствам.

2. Ясно, что если p_1 и p_2 - случайные условия, то они противоречивы тогда и только тогда, когда $p_1 \wedge p_2$ - меры 0 (т.е. почти дизъюнктны), так как иначе $q = p_1 \wedge p_2$ было бы кодом борелевского множества положительной меры, и, очевидно, $q \geq p_1$, $q \geq p_2$.

Значит, любое множество попарно противоречивых условий из P_1 не более, чем счетно.

Аналогичный вывод можно сделать и о множестве P_2.

Учитывая теперь ⓪,5, находим, что в генерической и случайной моделях не происходит склейки кардиналов. В третьей

главе будет доказано несколько иным способом некоторое обобщение теоремы о несклейке кардиналов и в саксовской модели.

Дальше нас будет интересовать только случай достаточно простых моделей $\mathfrak{M}$. Предположим, что в $\mathfrak{M}$ верна аксиома конструктивности.

Я приведу без доказательства некоторые факты, касающиеся генерических и случайных моделей. Одни из них были доказаны в моей работе " Некоторые свойства генерических, случайных и саксивских чисел" (4), другие в работе (5).

i) Существует такой Δ^1_1 - предикат $A(x,y,z)$ и такой Π^1_1 - предикат $Ord(z)$, что при всяком z, $Ord(z)$, множестве пар $\langle x,y\rangle$ таких, что $A(x,y,z)$, будет функцией из R_x в R_y. Кроме того, если $\bar{a}$ - генерическое или случайное или любое другое, сохраняющее кардиналы число, то для всякого действительного числа $b \in \mathfrak{M}(\bar{a})$ найдется такое $z \in \mathfrak{M}$, $Ord(z)$, что $\mathfrak{M}(\bar{a}) \models A(\bar{a}, b, z)$

Это свойство позволяет описывать числа $\mathfrak{M}(\bar{a})$ через a и числа $\mathfrak{M}$ достаточно удобным способом. Замечания по поводу факта i) содержатся в главе II.

ii) В случайной модели нет генерических чисел. а в генерической - случайных.

iii) Пусть $\bar{a}$ - генерическое (случайное) число, $b \in \mathfrak{M}(\bar{a})$ действительное число. Тогда $\mathfrak{M}(b)$ - конструктивная или генерическая (соответственно случайная) модель, однако, число b не обязательно генерическое (случайное).

iv) В генерической и случайной моделях множество конструктивных действительных чисел не содержит совершенного ядра, а множество неконструктивных чисел содержит такое ядро.

v) В генерической (случайной) модели множество конструктивных чисел имеет меру 0 (является множеством первой категории), но не обладает свойством Бэра (соответственно неизмеримо).

Назовем действительное число генерически (случайно) порожденным, если оно встречается в некоторой генерической (случайной) модели.

vi) Пусть p,q - случайные (генерические) условия, причем $p \triangle q$ - меры 0 (первой категории). Тогда для всякого суждения A об S $p \Vdash A \equiv q \Vdash A$

vii) Для всякого суждения A об $S(\alpha)$, если не верно, что $0 \Vdash \sim A$ (0 - код множества всех чисел), то существует такое случайное (генерическое) условие q, что $q \Vdash A$ и для всякого p такого, что $p \Vdash A$, выполняется $p-q$ меры 0 (первой категории). Такое условие обозначим символом $0(A)$ - " ноль для A ", т.е. минимальное для A.

Это значит, что для любого " не всегда ложного " суждения найдется в некотором смысле минимальное вынуждающее его условие.

Факты vi) и vii) доказаны в (3) .

2. Некоторые свойства, связанные с генерическими и случайными числами.

I. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ функций из ω_0 в ω_0 (т.е. последовательностей натуральных чисел). Если f, $g \in \mathcal{F}$, будем считать $f \leq g$, если для всякого n $f(n) \leq g(n)$

Назовем $X \subseteq \mathcal{F}$ конфинальным в $\mathcal{F}$, если для всякой $f \in \mathcal{F}$ найдется $g \in X$, $g \geq f$.

Лемма I. Нет счетного конфинального множества $X \subseteq \mathcal{F}$

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $X = \{f_n\}$ - конфинально в $\mathcal{F}$.

Положим $f(n) = f_n(n)+1$. Тогда ни для какого k не верно $f \le f_k$ (т.к. $f(k) > f_k(k)$). Лемма доказана.

Таким образом, нет счетных конфинальных множеств $X \subseteq \mathcal{F}$. Значит, если верно равенство $2^{\omega_0} = \omega_1$, то вопрос о мощности конфинальных множеств решается однозначно.

Рассмотрим следующее предложение B : „Всякое конфинальное множество $X \subseteq \mathcal{F}$ имеет мощность континуума."

Докажем независимость и непротиворечивость предложения B . Для этого сперва найдем удобные достаточные условия для B и $\sim B$.

Теорема 2. Если в модели $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ всякое число является случайно-порожденным, то семейство $X \subseteq \mathcal{F}$ конструктивных функций является конфинальным.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{N}$. Учитывая, что существует рекурсивное отображение $\mathcal{F}$ на 2^{ω_0}, найдется такое случайное $\bar{a} \in \mathfrak{N}$, что $f \in \mathfrak{M}(\bar{a})$.

Тогда f имеет вид $\bar{c}$ для некоторого $c \in S(a)$ наполненного учитывая наличие наполнения a .
Предположим противное, т.е. пусть $\mathfrak{M}(\bar{a}) \vdash$ " нет такой конструктивной g , что $f \le g$ ". Но тогда некоторое случайное условие p таково, что $p \Vdash$ " c - функция из ω_0 в ω_0 и нет конструктивной функции g из ω_0 в ω_0 такой, что $c \le g$ ".

Пусть A_n обозначает суждение " $c(\underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{n}$ ". Рассмотрим $p_n = O(A_n) \wedge p$. Легко видеть, что $p - \bigvee_n p_n$ - меры 0. Значит,

$$\mu(B_{\bigvee_n p_n}) = \mu(B_p) = m > 0$$

Выберем такое большое число $g(0)$, что $\mu(B_{\bigvee_{n<g(0)} p_n}) \geq \frac{m}{2} + \frac{m}{3}$. Положим $p(1) = \bigvee_{n<g(0)} p_n$. Ясно, что $p(1) \Vdash$ „$c(\underset{\sim}{0}) \leq g(\underset{\sim}{0})$" и $\mu(B_{p(1)}) = \bigvee_{n<g(0)} p_n$.

Положим теперь $A_n =$ „$c(\underset{\sim}{1}) = \underset{\sim}{n}$", $p_n = p(1) \wedge O(A_n)$. Опять $p(1) - \bigvee_n p_n$ - меры 0, и можно выбрать $g(1) \in \omega_0$ так, что если обозначить $p(2) = \bigvee_{n<g(1)} p_n$, то $\mu(B_{p_2}) \geq \frac{m}{2} + \frac{m}{4}$.

Если провести операцию в модели $\mathfrak{M}$ бесконечное число раз, получим функцию $g \in \mathfrak{M}$ и последовательность $\{p(n)\}$, $p(1) \leq p(2) \leq \ldots$, причем для всякого n $\mu(B_{p(n)}) > \frac{m}{2}$ и, что самое важное, для всякого n $p(n) \Vdash$ „$c(\underset{\sim}{n}) \leq g(\underset{\sim}{n})$"

Положим $q = \bigwedge_n p_n$. Тогда $q \in P_1$, (более того, $\mu(B_q) \geq \frac{m}{2}$). И $q \Vdash$ " для всякого n $c(n) \leq g(n)$ & g - конструктивна ". Но это противоречит $q \geq p$ и предположению противного. Теорема доказана.

Таким образом, если построить модель с отрицанием континуум-гипотезы и где все числа будут случайно порождены,

то независимость предложения B будет доказана. Такая модель строится в конце этой главы.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$ - какая-то счетная стандартная и транзитивная модель ZF (не обязательно конструктивная), $\bar{a}$ - генерическое относительно $\mathfrak{M}$ число.

Тогда множество X функций из $\mathfrak{M}$ не образует конфинального подмножества в множестве $\mathcal{F}$ функций из $\mathfrak{M}(\bar{a})$,

Доказательство. Я привожу пример такой функции $f \in \mathcal{F}$, что для всякой $g \in X$ не будет выполняться $f \leq g$.

Пусть $f_{\bar{a}} \in \mathfrak{M}(\bar{a})$ - определена так:

$f_{\bar{a}}(n) = \bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n$, где $\bar{a}_i$ - i-й по величине элемент $\bar{a}$.

Пусть также $g \in \mathfrak{M}$ такова, что $\mathfrak{M}(\bar{a}) \models$ "$f \leq g$"

Тогда некоторое генерическое условие p таково, что

$p \Vdash$ "$f_a \leq \underset{\sim}{g}$" (поскольку $g \in \mathfrak{M}$, то $\underset{\sim}{g}$ - элемент параметрического пространства $S(a)$).

Поскольку B_p - множество не первой категории, нетрудно найти такую пару конечных подмножеств $u, v \subseteq \omega_0$, что $u \cap v = \varnothing$, $u \cup v = \{i \mid i < N\}$ для некоторого N, и такое условие q, что $B_q = \{x \mid u \subseteq x \subseteq u \cup v\}$ и $B_q - B_p$ - первой категории.

Учитывая I,1.3 v_i), получаем отсюда:

$q \Vdash$ "$f_a \leq g$"

Пусть n - количество элементов U и пусть $g(n)=k$. Выберем условие q_1 так, чтобы $B_{q_1} = \{x \mid U \subseteq x \& V \cap x = \emptyset \& [N, k] \cap x = \emptyset\}$.

Ясно, что $q_1 \geq q$. Также ясно, что

$$q_1 \Vdash \text{“} a_{\check{n}+1} - a_{\check{n}} \geq \check{k}+1 \text{”}$$

Значит, $q_1 \Vdash \text{“} f_a(\check{n}) > \check{g}(\check{n}) \text{”}$, что противоречит $q_1 \geq q$

и $q \Vdash \text{“} f_a \leq \check{g} \text{”}$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ - счетная стандартная транзитивная модель, причем $\mathfrak{N}$ " для всякого множества X действительных чисел мощности λ существует генерическое относительно $\mathfrak{M}(X)$ число ".

Тогда в $\mathfrak{N}$ нет конфинального подмножества $Y \subseteq \mathcal{T}$ мощности λ .

Доказательство. Пусть такое множество $Y \in \mathfrak{N}$ существует. Рассмотрим $\mathfrak{M}(Y)$. По условию, существует генерическое относительно $\mathfrak{M}(Y)$ число $\bar{a} \in \mathfrak{N}$. Но по предыдущей теореме $f_{\bar{a}}$ не ограничивается сверху никакой функцией из $\mathfrak{M}(Y)$, что противоречит конфинальности Y .
Теорема доказана.

Теорема 5. Если условие предыдущей теоремы выполняется для всех $\lambda < 2^{\omega_0}$, то выполняется предложение B и предложение A .

Доказательство. Если B не верно, и для какого-то кардинала $\lambda < 2^{\omega_0}$ есть конфинальное подмножество $\mathcal{F}$ мощности λ, то сразу получаем противоречие с предыдущей теоремой. Таким образом B доказано.

Докажем A.

Лемма 5.I. Если $\bar{a}$ - генерическое относительно $\mathfrak{N}$ число, то $\bar{a}$ и $\omega_0 - \bar{a}$ не содержит бесконечных подмножеств из $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{N}$ бесконечно и $\mathfrak{N}(\bar{a}) \models$ "$x \subseteq \bar{a}$". Тогда некоторое генерическое p вынуждает "$\underset{\sim}{x} \subseteq a$". Как и при доказательстве теоремы 3, выбираем конечные $U, V \subseteq \omega_0$, $U \cup V = P$ и $q \in P_2$ так, что

$B_q = \{x \mid U \subseteq x \subseteq V \wedge x = P\}$ и $q \Vdash$ "$\underset{\sim}{x} \subseteq a$". Пусть $N = \sup\limits_{n \in U \cup V} n$.

Поскольку $\mathfrak{N} \models$ "x бесконечно", можно найти число $n > N$, $n \in x$. Образуем теперь условие $q_1 \geq q$ так, чтобы $B_{q_1} = \{x \mid U \subseteq x \subseteq V \wedge x = P \wedge n \notin x$

Тогда $q_1 \Vdash$ "$\underset{\sim}{n} \notin a$" и в то же время $q_1 \geq q$, $q_1 \Vdash$ "$\underset{\sim}{n} \in \underset{\sim}{x}$" и $q_1 \Vdash$ "$\underset{\sim}{x} \subseteq a$". Получилось противоречие. Рассмотрение случая $\omega_0 - \bar{a}$ происходит аналогично.
Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Пусть $X \in \mathfrak{N}$ - мощности $\lambda < 2^{\omega_0}$ образует базу для ультрафильтра.

Рассмотрим $\mathfrak{M}(\chi)$ и генерическое относительно $\mathfrak{M}(\chi)$ число $\bar{a} \in \mathfrak{N}$. По предположению, $\bar{a}$ или $\omega_0 - \bar{a}$ должно содержать в качестве подмножества какое-то $x \in \chi$. Но элементы χ не могут быть конечными (т.к. тогда порожденный ультрафильтр в силу конечной аддитивности будет совпадать с $P(\omega_0)$) Значит, это χ бесконечно, что противоречит лемме 5.I. Теорема доказана.

Таким образом, теорема 2 дает достаточные условия для $\sim B$ (т.к. семейство конструктивных функций при $2^{\omega_0} > \omega_1$, и соблюдении условия теоремы 2 является конфинальным, имея мощность ω_1).

А теорема 5 дает достаточное условие для $A \& B$.

Приступим теперь к построению моделей, где реализуются условия теорем 2 и 5.

§ 3. Построение моделей.

I. Начнем с построения модели для $A \& B \& \sim КГ$ Её конструкция несколько более проста и известна в литературе.

Образуем вспомогательную алгебру условий $\hat{P}_2$ так;

Вынуждающим условием будет всякое конечное множество суждений вида "$n \in a$" и "$k \notin a$", $n, k \in \omega_0$, причем ни для какого n оба "$n \in a$" и "$n \notin a$" не входят в p одновременно.

Положим $p \in q$, если $p \subseteq q$ как множество, Пусть A - элементарное суждение об $S(a)$.

Положим $p \Vdash A$, если $A \in p$. Это определение повторяет имеющееся в (I). Пусть теперь $\{P_n\}$ - некоторая полная последовательность условий $\hat{P}_2$, а $\bar{a}$ - соответствующее число. Назовем его $\hat{P}_2$ - числом.

Тогда в (3) доказано, что понятия P_2 и $\widetilde{P}_2$ - чисел совпадают, т.е. $\widetilde{P}_2$ - числа являются генерическими.

Рассмотрим теперь более сложное параметрическое пространство $S(W_\lambda)$, определяемое через G так:

$G_{\omega_0} = \{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$

$G_{\omega_0+1} = \{\{\beta, a_\alpha\} \mid \alpha, \beta < \lambda\} \cup \{\{\gamma\} \mid \gamma < \lambda\}$

$G_{\omega_0+2} = \{<\beta, a_\alpha> \mid \alpha, \beta < \lambda\}$

$G_{\omega_0+3} = \{W_\lambda\}$

Алгебра вынуждающих условий $\widetilde{P}_2^\lambda$ будет произведением λ экземпляров $\widetilde{P}_2$, т.е. элементами $\widetilde{P}_2^\lambda$ будут конечные множества p суждений "$n \in a_\alpha$", "$n \notin a_\alpha$", с вышеуказанным требованием непротиворечивости.

Помимо записанных и очевидных суждений всякое p будет вынуждать "$<\alpha, a_\alpha> \in W_\lambda$".

Пусть $\{p_n\}$ - полная последовательность условий из $\widetilde{P}_2^\lambda$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\Gamma)$ - соответствующая модель. Будем обозначать её $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$. Модели $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$ будем называть $\widetilde{P}_2^\lambda$ - моделями. Обозначим для $\alpha < \lambda$ $\overline{W}_\alpha = \{<\beta, \overline{a}_\beta> \mid \beta < \alpha\}$

Лемма 2. Пусть $x \in \mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$, $x \subseteq \omega_1$. Тогда $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2}) \models$ "Найдется $\alpha < \omega_2$ такое, что $x \in \mathfrak{M}(\overline{W}_\alpha)$".

Доказательство. Отметим сперва тот факт, что кардиналы в $\mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$ совпадают, т.к. в (1) показано, что алгебра $\widetilde{P}_2^{\omega_2}$ удовлетворяет условию счетности антицепей.

Итак, пусть $\gamma \in \omega_1$, $x \in \mathfrak{M}(\bar{W}_{\omega_2})$. Тогда для некоторого ординала β

$\mathfrak{M}(\bar{W}_{\omega_2}) \models$ „$\mathcal{F}_\beta(\bar{W}_{\omega_2}) = x$", где $\mathcal{F}_\alpha(y)$ – функция, аналогичная функции Геделя $\mathcal{F}_\alpha$, описанной в (I); с той лишь разницей, что $\mathcal{F}_0(y) = y$ (а не $\emptyset$), см. (4).

Рассмотрим также произвольное транзитивное множество $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}(\bar{W}_{\omega_2})$ такое, что $\omega_0 \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U}$, $\beta \in \mathcal{U}$, $\bar{W}_{\omega_2} \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{U} \models$ „$\mathcal{F}_\beta(\bar{W}_{\omega_2}) = x$".

Методом Сколема-Левенгейма нетрудно построить элементарную подмодель $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ такую, что мощность $\mathcal{U}_1$ равна ω_1 и для всякого ординала δ если $\delta \in \mathcal{U}_1$ и $\varepsilon \in \delta$, то $\varepsilon \in \mathcal{U}_1$ (на каждом шагу построения Сколема-Левенгейма будем замыкать вниз множество ординалов, уже имеющихся).

Пусть $\psi : \mathcal{U}_1 \longmapsto \mathcal{T}$ – изоморфизм $\mathcal{U}$ на транзитивное множество $\mathcal{T}$. Ясно, что $\psi(u) = u$, $\psi(x) = x$, $\psi(\beta) = \beta'$, где $\beta \in \omega_2$, $\psi(\bar{W}_{\omega_2}) = \bar{W}_\alpha$ где $\alpha \in \omega_2$ (поскольку множество ординалов $\mathcal{U}_1$ замкнуто вниз).

Но $\mathcal{U}_1 \models$ „$\mathcal{F}_\beta(\bar{W}_{\omega_2}) = x$". Значит, $\mathcal{T} \models$ „$\mathcal{F}_{\beta'}(\bar{W}_\alpha) = x$", то есть учитывая абсолютность $\mathcal{T}$ и получаем $\mathcal{F}_{\beta'}(W_\alpha) = x$.

Лемма доказана.

Лемма 3. $\mathfrak{M}(\bar{W}_{\omega_2}) \models$ "$\bar{\alpha}_\alpha$ – генерическое над $\mathfrak{M}(\bar{W}_\alpha)$ число" (для всех $\alpha \in \omega_2$).

В несколько иной формулировке (используя термин генерических фильтров) лемме следует из общей леммы (4) о произведении алгебр вынуждающих условий.

Подробное доказательство опускается.

Теорема 4. $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$ является моделью, в которой выполнено условие теоремы I.2.5.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$ - множество действительных чисел мощности ω_1 в $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$. Тогда по лемме 2 для некоторого $\alpha < \omega_2$ $X \in \mathfrak{M}(\overline{W}_\alpha)$, а по лемме 3 для этого же α будет $\overline{\alpha}_\alpha$ - генерическое над $\mathfrak{M}(\overline{W}_\alpha)$

Но, учитывая $\mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}(\overline{W}_\alpha)$ и замечание I.I.I. о необходимом и достаточном условии генеричности, находим, что $\overline{\alpha}_\alpha$ - генерическое над $\mathfrak{M}(X)$ число.
Теорема доказана.

Таким образом совместимость $A \& B \& 2^{\omega_0} > \omega_1$ доказана.

5. Построим теперь модель для условия теоремы I.2.2.

Пусть $S(W_\lambda)$- параметрическое пространство из I.3.I.

В качестве множества вынуждающих условий P_1^λ возьмем такое множество.

Пусть $R^\lambda = \prod R_\alpha$ - тихоновское произведение пространств с обычной мерой. Если x - элемент R^λ - символом x_α $(\alpha < \lambda)$ будем обозначать α - ю компоненту x.

Пусть $\eta = \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ - последовательность

элементов λ . Положим $R(\xi) = \prod_{n\in\omega_0} R_{\alpha_n}$, $R(\bar{\xi}) = \prod_{\alpha\neq\alpha_n} R_\alpha$

Ясно, что $R^\lambda = R(\xi)\times R(\bar{\xi})$

Пусть X - борелевское подмножество положительной меры m в $R(\xi)$. Образуем в R^λ множество $X\times R(\bar{\xi})$, которое, очевидно, будет той же меры m .

Такие множества R^λ вида $X\times R(\bar{\xi})$, где X - положительной меры подмножество $R(\xi)$ и образуют алгебру P_1^λ .

Заметим, что элементы P_1^λ можно эффективно кодировать последовательностями длины λ так, что сохраняются основные свойства кодировки, доказанные в (3) , об абсолютности" $\xi\in P_p$ ", о мере B_p и т.д.

Ввиду громоздкости конкретный способ кодировки опускается.

Как и ранее, определим $p\le q$, если $B_q\subseteq B_p$ и p for "$n\in\alpha_\kappa$", если для всякой последовательности x длины λ , принадлежащей B_p , будет выполняться "$n\in x_\alpha$" .

Будем, как ранее, считать элементами P_1^λ не сами множества B_p , а их коды p .

Если $\alpha<\lambda$, обозначим $\Pi_\alpha B_p$ - проекцию B_p на R_α . Ясно, что $\Pi_\alpha B_p$ - аналитическое множество в R_α .

Также очевидно, что $\mu(\Pi_\alpha B_p)\ge\mu(B_p)$ (естественно, мера первого множества берется как мера на R_α , а мера второго как мера на R^λ .

Отметим, что если B_p и B_q - подмножества R^λ имеющие вид $X\times R(\xi)$, то их пересечение - тоже множество такого вида. Значит, если $B_r = B_p\cap B_q$ имеет положительную меру в R^λ, то $r = p\wedge q$ - условие из P_1^λ .

Отсюда легко доказать, что P_1^λ удовлетворяет счетности антицепей.

Совершенно аналогично (3) можно показать, что $x \in R^\lambda$ получается из полной последовательности условий P_1^λ, т.е. имеет вид $\overline{W}_\lambda$, тогда и только тогда, когда ни для какого $p \in P_1^\lambda, p \in \mathfrak{M}$, B_p меры 0 в $\mathfrak{M}$, не выполняется $x \in B_p$.

Лемма 6. Если λ - счетный в $\mathfrak{M}$ ординал, $\{p_n\}$ - полная последовательность условий из P_1^λ, $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$ - соответствующая модель, то все действительные числа $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$ являются случайно порожденными.

Доказательство. Поскольку $R^\lambda = (2^{\omega_0})^\lambda = 2^{\omega_0 \wedge \lambda}$, то в $\mathfrak{M}$ между R^λ и R можно установить сохраняющий меру гомеоморфизм Ψ, продолжающийся до гомоморфизма $\widetilde{\Psi}$ в $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$. Ясно, что $\widetilde{\Psi}$ переводит множества положительной меры с кодом из $\mathfrak{M}$ опять в множестве с кодом из $\mathfrak{M}$ (и той же меры). Поэтому $\bar{\alpha} = \widetilde{\Psi}(\overline{W}_\lambda)$ не будет принадлежать никакому борелевскому множеству с кодом из $\mathfrak{M}$ меры 0.

Значит, $\bar{\alpha}$ - случайное относительно $\mathfrak{M}$. Но очевидно, что $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda) = \mathfrak{M}(\bar{\alpha})$. То есть, $\mathfrak{M}(\overline{W}_\lambda)$ - случайная модель, что и требовалось доказать.

Лемма 7. Если $\lambda = \omega_2$ и $x \subseteq \omega_0$, $x \in \mathfrak{M}(W_\lambda)$, то для некоторого ординала $\alpha < \omega_2$ будет выполняться $x \in \mathfrak{M}(W_\alpha)$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2 и опускается.

Отметим теперь, что если $\alpha < \omega_2$, то между R^α и R^{ω_1} можно установить гомоморфизм $\Psi \in \mathfrak{M}$, сохраняющий меру, с кодом из $\mathfrak{M}$.

Отсюда, аналогично лемме 6, нетрудно доказать, что всякое $P_1^{\omega_2}$ - порожденное число является $P_1^{\omega_1}$ - порожденным.

Лемма 8. Если $\lambda = \omega_1$ и $x \subseteq \omega_0$, $x \in \mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_1})$, то для некоторого счетного α $x \in \mathfrak{M}(\overline{W}_\alpha)$.

Эта лемма также доказывается аналогично лемме 2 с заменой ω_1 на ω_0.

Собирая вместе последние леммы, получаем теорему.

Теорема 9. В модели $\mathfrak{M}(W_{\omega_2})$ все действительные числа являются P_1 - порожденными.

Учитывая теперь, что в $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2})$ кардиналы те же, что и в $\mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{M}(\overline{W}_{\omega_2}) \models$ "$2^{\omega_0} = \omega_2$", получаем искомую модель для I.2.2.

Итак, доказана совместимость $\sim B$. $P_1^{\omega_2}$ - модели и $P_2^{\omega_2}$ - модели обладают еще рядом интересных свойств, которые вместе с доказательствами будут сообщены в других работах автора. В частности, в $P_1^{\omega_2}$ - моделях все Δ^1_2 - множества измеримы, в $P_2^{\omega_2}$ моделях все они имеют свойства Бэра.

Г Л А В А II

В этой главе доказывается ряд теорем о структуре замкнутых множеств.

§ I. Саксовская модель и ультрафильтры.

I. Для кратности, пусть P - множество всех подмножеств натурального ряда ω_0. Введем на P порядок: $x \leq y$, если $x \subseteq y$. Этот порядок превращает P в булеву алгебру.

Ультрафильтром, как всегда, будем считать подмножество $\Phi \subset P$ такое, что

i) $x \in \Phi \;\&\; y > x \to y \in \Phi$

ii) $x \in \Phi \;\&\; y \in \Phi \to x \cap y \in \Phi$

iii) $[x \in \Phi \;\&\; (\omega_0 - x) \notin \Phi] \vee [x \notin \Phi \;\&\; (\omega_0 - x) \in \Phi]$

Счётную систему $\zeta = \{x_n\}$ элементов P будем называть базовой, если среди x_n нет конечных множеств и ζ - цепь в P (т.е. любые два элемента ζ сравнимы порядком P)

Пусть $\mathfrak{F}$ - множество всех ультрафильтров. Снабдим его такой топологией:

Если ζ - базовая система, положим $\mathfrak{F}_\zeta = \{\Phi \mid \zeta \subseteq \Phi\}$ Множества $\mathfrak{F}_\zeta$ будут образовывать базу топологии.

В предположении аксиомы выбора нетрудно доказать непустоту всех $\mathfrak{F}_\zeta$.

Назовем $X \subseteq \mathfrak{F}$ нигде не плотным, если, как обычно,

$\forall \zeta \; \exists \eta \; [\zeta \subseteq \eta \;\&\; \mathfrak{F}_\eta \cap X = \emptyset]$

Лемма 2. В предположении аксиомы выбора и континуум-гипотезы $\mathfrak{F}$ не представимо как объединение ω_1 , нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha$, все X_α нигде не плотны. Занумеруем все элементы P каким-либо образом счетными ординалами ($P = \{x_\alpha \mid \alpha\in\omega_1\}$).

Индукцией по $\alpha<\omega_1$, построим семейство базовых систем $\{\mathfrak{z}_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$, обладающее такими свойствами.

I.* $\alpha<\beta \to \mathfrak{z}_\alpha \subseteq \mathfrak{z}_\beta$

2.* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{z}_{\alpha+1}} \cap X_\alpha = \varnothing$

3.* Для некоторого $x\in\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ или $x_\alpha \geqslant x$ или $(\omega_0 - x_\alpha) \geqslant x$

Построение системы будет таким

I) $\mathfrak{z}_0 = \varnothing$

2) Для предельных ординалов λ $\mathfrak{z}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{z}_\alpha$

Легко видеть, что если свойство I* (а только оно касается предельных ординалов) верно для всех $\alpha,\beta<\lambda$,то оно выполняется и для λ . Кроме того, ясно, что $\mathfrak{z}_\lambda$ будет базовой системой,если все $\mathfrak{z}_\beta$, $\beta<\lambda$, таковы.

3) Пусть $\lambda=\beta+1$ и $\mathfrak{z}_\beta$ - построена. $\mathfrak{z}_\lambda$ - будет строиться в два этапа, согласно свойствам 2* и 3*.

а) Рассмотрим $\mathfrak{F}_{\mathfrak{z}_\beta}$. По условию леммы X_β нигде не плотно, и есть $\eta \geqslant \mathfrak{z}_\beta$ такая, что $\mathfrak{F}_\eta \cap X_\beta = \varnothing$. Пусть $\eta = \{y_i\}$.

б) Обозначим для краткости $\alpha = \aleph_\beta$, $\beta = \omega_0 - \aleph_\beta$, Докажем, что все $y_i \cap \alpha$ бесконечны, или же все $y_i \cap \beta$ бесконечны.

В самом деле, пусть $y_i \cap \alpha$ - конечно и $y_j \cap \beta$ - конечно. Поскольку y_i и y_j сравнимы (из определения базовой системы), то, положив $y = y_i \cap y_j$, получим $y \in \eta$ и $y \cap \alpha$ - конечно, как и $y \cap \beta$

Значит, $y \cap (\alpha \cup \beta) = y \cap \omega_0 = y$ - конечно, чего быть не может.

Таким образом, для определенности считаем, что все $y_i \cap \alpha$ бесконечны.

Положим $\mathfrak{z}_{\beta+1} = \mathfrak{z}_\lambda = \eta \cap \{ y_i \cap \alpha \mid i \in \omega_0 \}$

Легко видеть, что $\mathfrak{z}_\lambda$ вновь будет базовой системой, причем условия 2^* и 3^* будут соблюдаться.

Систему $\{\mathfrak{z}_\alpha\}$, удовлетворяющую $1^*, 2^*, 3^*$, можно считать построенной.

Покажем, что $\bigcap_{\alpha \in \omega_1} \mathfrak{z}_\alpha$ непусто.

В самом деле, рассмотрим множество

$$\Phi = \{ x \mid \exists \alpha \; \exists y \in \mathfrak{z}_\alpha , x \geq y \}$$

Покажем, что Φ - ультрафильтр.

Заметим, что в силу 3^* для всякого $x \in P$ или x или $\omega_0 - x$ входят в Φ . Покажем, что оба вхождения невозможны. В самом деле, иначе из определения Φ нашлось бы такое α и $y_1, y_2 \in \mathfrak{z}_\alpha$, что $x \geq y_1$, $\omega_0 - x \geq y_2$ Но $\mathfrak{z}_\alpha$ - базовая система, и y_1 , y_2 - сравнимы. Пусть, например $y_1 \leq y_2$. Тогда $x \geq y_1$ и $(\omega_0 - x) \geq y_2 \geq y_1$, чего быть не может. Пусть теперь $x \notin \Phi$, $y \geq x$, т.е. $\exists \alpha$, $\exists z \in \mathfrak{z}_\alpha$; такие, что $x \geq z$. Если же $y \notin \Phi$,

то $\omega_0 - y \in \Phi$; и приходим к противоречию, как и выше.

Если $x \in \Phi$, $y \in \Phi$, $z_1 \in \zeta_\alpha$, $z_2 \in \zeta_\alpha$, $x \geq z_1$; $y \geqslant z_2$, полагаем $z = z_1 \cap z_2$ (тогда $z \in \zeta_\alpha$). Но теперь $x \cap y \geqslant z$, $x \cap y \in \Phi$,

Значит, Φ - ультрафильтр.

Из построения же Φ легко видеть, что $\forall \alpha$, $\zeta_\alpha \subseteq \Phi$, т.е. $\Phi \in \bigcap_\alpha \mathfrak{F}_{\zeta_\alpha}$. Но для всякого α $\mathfrak{F}_{\zeta_{\alpha+1}} \cap \chi_\alpha = \emptyset$

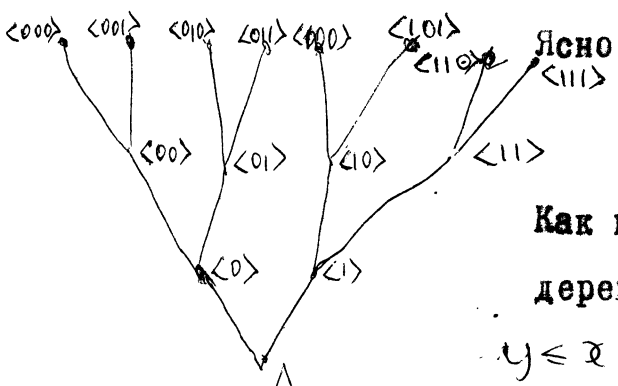
Значит, $(\bigcap_\alpha \mathfrak{F}_{\zeta_\alpha}) \cap (\bigcup_\alpha \chi_\alpha) = \emptyset$, $\emptyset \notin \bigcup_\alpha \chi_\alpha$

Лемма доказана.

Легко видеть, что сама лемма и её доказательство аналогичны теорема о том, что полное метрическое пространство не является суммой счетного числа нигде не плотных множеств.

3. Пусть $\mathcal{E}$ - множество конечных последовательностей нулей и единиц. Упорядочим $\mathcal{E}$ так: $e' \leq e$, если для некоторого e'' , $e = e' * e''$.

Пусть Λ - пустая последовательность - наименьший элемент $\mathcal{E}$. Для всякого $e \in \mathcal{E}$ определим $h(e)$ - длина e - равным числу элементов e . Ясно, что $h(\Lambda) = 0$.



Как всегда, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ будем называть деревом, если $\forall x \forall y \, [x \in \mathcal{D} \, \& \, y \leq x \to y \in \mathcal{D}]$. Дерево $\mathcal{D}$ назовем деревом ранга h , если

i) $\forall x \, [x \in \mathcal{D} \to h(x) \leq h$

ii) $\forall x \, [x \in \mathcal{D} \to \exists y \, [y \in \mathcal{D} \, \& \, h(y) = h \, \& \, y \geq x]\}$

Дерево $\mathcal{D}$ назовем совершенным деревом, если

$$\forall x\,[x\in\mathcal{D}\to\exists y\exists z\,[y\in\mathcal{D}\,\&\,z\in\mathcal{D}\,\&\,y>x\,\&\,z>x\,\&$$

y и z несравнимы порядком $\&]]$.

Грубо говоря, $\mathcal{D}$ совершенно, если всякая ветвь $\mathcal{D}$ бесконечна и имеет бесконечное число точек ветвления.

Пусть $\mathcal{D}$ - дерево. Символом $\mathcal{D}_h$ будем обозначать $\{x\in\mathcal{D}\mid h(x)\le h\}$.

Пусть u, v - подмножества ω_0, $u\cap v=\emptyset$, $\omega_0-(u\cup v)$ - бесконечно. Символом $\mathcal{D}^{<u,v>}$ обозначим

$$\{x\in\mathcal{D}\mid [x_u=1\to n\notin v]\,\&\,[x_n=0\to n\notin u]\}$$

Лемма 3.I. Пусть $\mathcal{D}$ - совершенное дерево, ω - бесконечное подмножество ω_0, причем $\omega_0-\omega$ - тоже бесконечно.

Тогда найдутся $u\subseteq\omega$, $v\subseteq\omega_0$, $u\cap v=\emptyset$, $(u\cup v)\cap\omega_0$ - бесконечно, а также совершенное дерево T, такие, что $T^{<u,v>}=T$.

Доказательство. Индукцией по n я буду строить деревья $T^{(n)}$ ранга $h(n)$, причем возрастающая функция $h(n)$ также будет строиться по индукции. Система деревьев $T^{(n)}$ будет иметь такие свойства:

i) $T^{(n)}$ - поддерево $\mathcal{D}$

ii) $T^{(n)}$ - поддерево $T^{(n+1)}$

iii) Если $x\in T^{(n)}$, $h(x)=h(n)$, то $\exists y$, $\exists z$ $[y\in T^{(n+1)}$, $z\in T^{(n+1)}$, $y\ne z$, $y>x$, $z>x$,

$h(y) = h(z) = h(u+1)\ ]$

iδ) Найдется $k(u) \in \omega$, $h(u) < k(u) < h(u+1)$, такое, что $\forall x \in T^{(u+1)}\ [x_{k(u)} = 0]$ или $\forall x \in T^{(u+1)}\ [x_{k(u)} = 1]$

Легко видеть, что такая система $T^{(u)}$ дает доказательство леммы. В самом деле, пусть $T = \cup T^{(u)}$. Тогда свойства i), ii), iii) обеспечивают совершенство T. Пусть

$$U = \{k(u) \mid \forall x \in T^{(u+1)}\ [x_{k(u)} = 1]\}$$

$V = \{k(u) \mid \forall x \in T^{(u+1)}\ [x_{k(u)} = 0]\}$. Тогда из свойства

iδ) $T^{<u,v>} = T$. Остальные свойства T, U, V очевидны.

Пусть $T^0 = \Lambda$, $h(0) = 0$

Пусть $T^{(n)}$ построено, $h(n) = k$. Пусть $y^1, \ldots y^m$ все вершины $T^{(n)}$ высоты k. Для всякого $i \leq m$ положим

$u_i = \{k \mid k \in \omega\ \&\ k > h\ \&\ \forall x \in \mathfrak{D}\ [x \geq y^i \to x_k = 1]\}$

$V_i = \{k \mid k \in \omega\ \&\ k > h\ \&\ \forall x \in \mathfrak{D}\ [x > y^i \to x_k = 0]\}$

Возможны, вообще говоря, два случая.

<u>Первый случай</u>. Для какого то i $u_i \cup v_i$ бесконечно, Возьмем $u = u_i$; $V = V_i$ и

$T = \{x \in \mathfrak{D} \mid x \geq y^i \vee x < y^i\}$

Легко видеть, что T - совершенное дерево и $T = T^{<u,v>}$ В самом деле, пусть $y \in T$, $y_k = 1$. Покажем, что тогда $k \notin V$.

Действительно, из определения $V=V_i$, если $k\in V$, то $\forall x\in\mathfrak{D}\ [x\geq y^i \to x_k=0]$. Значит $\forall x\in T\ [x_k=0]$, что противоречит $y\in T$ и $y_k=1$.

Аналогично рассматривается импликация $x_n=0\to x\notin u$

Также ясно, что $u\cup V\subseteq\omega$.

Таким образом, случай разобран.

Второй случай. Все $u_i\cup V_i$ конечны. Тогда найдется столь большое $K>h$, что $K\notin u_i\cup V_i$ ни для какого $i\leq m$

Положим $T'=\{x\in\mathfrak{D}\mid h(x)\leq k \ \&\ \exists i\leq m\ [x\geq y^i\vee x<y^i]\ \&\ x_k=0\}$

Из выбора K следует, что $\forall i\leq m\ \exists x\ [x\in T'\ \&\ h(x)=K\ \&\ x>y^i]$

Положим $h(n)=K$. Пусть $z^1, z^2, \dots, z^n$ - нумерация вершин T' высоты K . Используя совершенность $\mathfrak{D}$, можно выбрать M пар несравнимых элементов a^i , b^i , $i\leq M$, $a^i>z^i$, $b^i>z^i$. Пусть $\mathfrak{L}=\sup\limits_{i\leq M}\{h(a^i),h(b^i)\}$

Положим $h(n+1)=\mathfrak{L}$ и

$T^{(n+1)}=\{x\in\mathfrak{D}\mid h(x)\leq\mathfrak{L}\ \&\ \exists y\in T'\ [x\geq y\vee x<y]\}$

Легко видеть, что система $T^{(n)}$, $h(n)$ и $k(n)$ - искомая.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается более сложная лемма.

Лемма 3.2. Пусть $\omega_1\supseteq\omega_2\supseteq\dots\supseteq\omega_n\supseteq\dots$ бесконечные подмножества натурального ряда, $\mathfrak{D}$ - совершенное дерево. Тогда существуют $u\subseteq\omega_0$, $V\subseteq\omega_0$, $u\cap V=\emptyset$, $u\cup V$ - бесконечно и для всякого n $(u\cup V)-\omega_n$ - конечно.

Найдется также совершенное дерево $T \subseteq \mathcal{D}$ такое, что $T^{\langle u,v\rangle} = T$

Доказательство отличается лишь тем, что на шагу n нужно рассматривать не ω , как раньше, а ω_n .

Ясно, что лемма 3.I - частный случай 3.2.

Пусть теперь $\mathcal{D}$ - дерево, Φ - ультрафильтр. Назовем $\mathcal{D}$ несоответствующим Φ , если для всякой пары u, v и $u \cap v = \emptyset$, и такого совершенного $T \subseteq \mathcal{D}$, что $T^{\langle u,v\rangle} = T$, не может быть ни $u \in \Phi$, ни $v \in \Phi$.

Обозначим $\mathfrak{F}_{\mathcal{D}} = \{\Phi \mid \mathcal{D}$ несоответствует $\Phi\}$.

Лемма 3.3. $\mathfrak{F}_{\mathcal{D}}$ нигде не плотно в $\mathfrak{F}$ для всякого совершенного дерева $\mathcal{D}$.

Доказательство. Возьмем какую-нибудь базовую систему ξ . Не ограничивая общности, считаем $\xi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots\}$ причем $\omega_1 \supseteq \omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \omega_n \supseteq \ldots$

Применяя 3.2, находим пару u, v и $T \subseteq \mathcal{D}$, такие, что $u \cap v = \emptyset$, $u \cup v$ бесконечно, $T^{\langle u,v\rangle} = T$, и для всякого n $(u \cup v) - \omega_n$ - конечно.

Пусть бесконечно u . Рассмотрим новую систему $\eta = \xi \cup \{\omega_i \cap u \mid i \in \omega_0\}$. Ясно, что η - базовая система и $\mathfrak{F}_\eta \subseteq \mathfrak{F}_\xi$. Пусть $\Phi \in \mathfrak{F}_\eta$.

Докажем, что $\mathcal{D}$ соответствует Φ . В самом деле, возьмем наше u , входящее в Φ (т.к. меньшие, чем u , входят в Φ и наше v , а также наше дерево T . Имеем: $T = T^{\langle u,v\rangle}$ - совершенное поддерево T , $u \in \Phi$,

Аналогично рассматривается случай бесконечного v . Только тогда новая система имеет вид $\eta = \xi \cup \{\omega_i \cap v \mid i \in \omega_0\}$ Лемма доказана.

Соединим вместе леммы 2 и 3,3, находим:

Лемма 3.4. Существует такой ультрафильтр Φ, что для него всякое совершенное дерево $\mathcal{D}$ является соответствующим.

В дальнейшем рассмотрении будем считать, что Φ^* - этот ультрафильтр.

Пусть теперь R - множество всех действительных чисел, X - совершенное подмножество R (то есть X замкнуто и не имеет изолированных точек). Тогда X взаимно однозначно определяется некоторым совершенным деревом $\mathcal{D}$: $X = X_{\mathcal{D}}$.

$\mathcal{D}_X$ определяется так:

$$\mathcal{D}_X = \{e \mid \exists x \in X \ \forall n \ [(e_n = 0 \to n \notin x) \ \& \ (e_n = 1 \to n \in x)]\}$$

А $X_{\mathcal{D}}$ определяется следующим образом:

$$X_{\mathcal{D}} = \{x \mid \exists e^1, e^2, \dots e^n, \dots \in \mathcal{D} \ [e^i < e^{i+1} \ \& \ \forall i \forall j (e^i_j = 0 \to n \notin x) \ \& \ \forall i \forall j (e^i_j = 1 \to n \in x)]\}$$

Ясно, что совершенное дерево определяет совершенное множество, причем, если $\mathcal{D}^{\langle u, v \rangle} = \mathcal{D}$, то $X_{\mathcal{D}} \subseteq \{x \mid u \subseteq x \ \& \ v \cap X = \varnothing\}$, и наоборот.

Лемма 3.5. Пусть $A \subset R$ - несчетное аналитическое подмножество R. Тогда найдется такое совершенное подмножество $X \subseteq A$ и пара подмножеств $u, v \subseteq \omega_0$, $u \cap v = \varnothing$, $X \subseteq \{x \mid u \subseteq x \ \& \ v \cap x = \varnothing\}$ и либо u, либо v входят в Φ^*.

Доказательство. Как известно из дескриптивной теории множеств, всякое несчетное аналитическое множество содержит совершенное подмножество. Пусть $Y \subseteq A$ - совершенное. Пусть $Y = Y_{\mathcal{D}}$.

По выбору Φ^*, $\mathcal{D}$ является соответствующим Φ^*, то есть существуют $u, v \subseteq \omega_0$, $u \cap v = \varnothing$, причем u или v элемент Φ^* и совершенное $T \subseteq \mathcal{D}$ такое, что $T = T^{\langle u, v \rangle}$.

Обозначим $X = X_T$. Тогда $X \subseteq Y$, X - совершенное, $X \subseteq \{x \mid u \subseteq x \ \& \ v \cap x = \varnothing\}$ и либо u, либо v -

элемент Φ .

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$ - конструктивная модель, Φ^* - ультрафильтр, выбранный согласно 3,4, $\bar{a}$ - саксовское относительно $\mathfrak{M}$ число. Тогда $\mathfrak{M}(\bar{a}) \models$ „Φ^* порождает ультрафильтр на $P(\omega_0)$" .

Доказательство. Достаточно доказать, что в $\mathfrak{M}(\bar{a})$ всякое действительное число x или его дополнение $\omega_0 - x$ содержат как подмножество элемент из P .

В уже упоминавшейся мною работе " Некоторые свойства генерических, случайных и саксовских чисел" (4) доказано, что в $\mathfrak{M}(\bar{a})$ всякое неконструктивное число является саксовским. Поэтому не ограничивая общности можно считать $x = \bar{a}$.

Предположим противное, т.о. пусть $p \in P_3$, p - код несчетного борелевского множества, и $p \Vdash$ „ ни a , ни $\omega_0 - a$ не содержат элементов из Φ^*" .

Рассмотрим (в $\mathfrak{M}$) множество B_p . Поскольку всякое борелевское множество является аналитическим, то согласно 3.5 можно выбрать $u, v \subseteq \omega_0$, $u \cap v = \emptyset$, $u \cup v \in \Phi^*$, а также совершенное $X \subseteq B_p$ такие, что

$$X \subseteq \{x \mid u \subseteq x \& v \cap x = \emptyset\}$$

Пусть $q \in P_3$ - код X , $q \geq p$. Пусть для определенности $u \in \Phi^*$. Тогда $q \Vdash$ „$u \subseteq a$" , что противоречит выбору $\cap$.

Теорема доказана.

Легко можно заметить, что в $\mathfrak{M}(\bar{a})$ не всякое бесконечное подмножество ω_0 содержит бесконечное конструктивное подмножество.

В самом деле, пусть $\{r_n\}$ – какая-то эффективная нумерация рациональных чисел и образуем в $\mathfrak{M}(\bar{a})$ множестве $x = \{n \mid r_n$ – десятичное приближение $\bar{a}$ с недостатком $\frac{1}{n}\}$. Ясно, что наличие у x бесконечного конструктивного подмножества ведет к конструктивности $\bar{a}$.

Отсюда следует, что не все ультрафильтры в $\mathfrak{M}(\bar{a})$ порождаются способом, указанным в теореме 3.

§ 2

I. Пусть T^* – семейство конечных последовательностей элементов $\mathfrak{E}$, т.е. если $t \in T^*$, то $t = \langle e_0, e_1, \dots e_n \rangle$. Обозначим $t_i = e_i$, $\ell(t) = n$ – длина. Высотой t назовем последовательность высот $h(t) = \langle h(t_0), h(t_1), \dots, h(t_n), \dots \}$. Будем обозначать $h_n(t)$ вместо $h(t_n)$.

Упорядочим T^* так: $t' \leq t''$, если $\ell = \ell(t') \leq \ell(t'')$ и для всякого $i \leq \ell$ $t'_i \leq t''_i$ (в смысле порядка $\mathfrak{E}$).

Зафиксируем произвольную последовательность натуральных чисел $d(n)$ такую, что $d(n+1)$ равно либо 0, либо $d(n)+1$ и принимающую каждое свое значение, область которых совпадает с ω_0, бесконечное число раз.

Пользуясь этой функцией (или последовательностью) $d(n)$, мы определим некоторое подмножество $T \subseteq T^*$, конфинальное в T^* и имеющее индуцированный порядок без циклов.

Пусть h – какая-то высота, $h = \langle h_0, \dots h_n \rangle$. Определим новую высоту $(h)^k$ так:

Если $k \leq n$, то $(h)^k = \langle h_0, \dots h_{k+1}, \dots h_n \rangle$

Если $k > n$, то $(h)^k = \langle h_0, \dots h_n, 0, \dots 0, 1 \rangle$

(k-е место)

Определим с помощью функции $d(u)$ последовательность $h(u)$.

$h(0) = \langle 0 \rangle$

$h(u+1) = (h(u))^{d(u)}$

Определим множество $T \subseteq T^*$ так:

$T = \{t \in T^* \mid h(t) = h(u)$ для некоторого $u\}$.

Легко видеть, что $h(0) < h(1) < \ldots$ и что $\{h(u)\}$ образуют конфинальное множество в множестве всех высот с естественным (покомпонентным) порядком . Отсюда легко следуют требуемые свойства множества T .

Рассмотрим какое-то не более чем счетное множество ординалов $\xi = \{\alpha_i \mid i \in \omega_1\}$ (не обязательно $\alpha_i < \alpha_{i+1}$) и пространство $R(\xi) = \prod_{\alpha_i \in \xi} R_{\alpha_i}$ (гомеоморфное R). Всякий элемент $x \in R(\xi)$ представим в виде последовательности $\{x_i\}$ (подразумевается $x_i \in R_{\alpha_i}$). Если $x \in R(\xi)$ символом x^i условимся обозначать $\{x_j \mid \alpha_j < \alpha_i\}$, а пространство $\{x^i \mid x \in R(\xi)\}$ символом $R^i(\xi)$.

Легко видеть, что $\pi_i : R(\xi) \to R_{\alpha_i}$ и $\pi^i : R(\xi) \to R^i(\xi)$ проекции.

В дальнейшем, вплоть до § 4 для простоты будем считать, что если $\xi = \{\alpha_i\}$, то $\alpha_0 = \min_i \alpha_i$

Назовем множество $X \subseteq R(\xi)$ нормальным, если

I.* $\pi_0 X$ - совершенное множество

2.* Для всякого $i > 0$ и $x \in X$ $\pi_i [(\pi^i)^{-1}(x^i)]$ совершенное множество.

3.* Для всякого базового открыто-замкнутого множества G пространства $R(\xi)$ если $X \cap G \neq \emptyset$, то $X \cap G$ удовлетворяет I* и 2*.

Легко видеть, что тогда если $X \cap G \neq \emptyset$, то $X \cap G$ удовлетворяет и 3.

На протяжении всей этой главы все теоремы будут доказываться для случая строго счетного (т.е. бесконечного) множества $\mathfrak{Z}$, но все они верны и для конечных $\mathfrak{Z}$, только при этом аппарат доказательства несколько меняется по форме (в частности нужно брать другое множество T и т.д.), не меняясь никак по содержанию. Поэтому все доказанные в этой главе теоремы можно считать верными и для конечных $\mathfrak{Z}$.

Теорема 2. Пусть $\{X_t \mid t \in T\}$ - семейство замкнутых подмножеств $R(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{Z}$ - счетно, удовлетворяющее таким свойствам:

i) $t \geq t' \to X_{t'} \subseteq X_t$.

ii) Если $t = \langle e_0, \ldots e_k, \ldots e_u \rangle$, $t' = \langle e_0', \ldots e_k', \ldots e_u' \rangle$ $e_k \neq e_k'$ и для всякого $j \leq u$ такого, что $\alpha_j < \alpha_k$ выполняется $e_j' = e_j$, то $\overline{\pi}^k X_t = \overline{\pi}^k X_{t'}$, но $\overline{\pi}^e X_t \cap \overline{\pi}^e X_{t'} = \varnothing$, где α_e - следующий за α_k по величине ординал из $\mathfrak{Z}$.

iii) Определим длину множества $Y \subseteq R$ как наименьшую из длин отрезков, целиком содержащих Y. Тогда для всякого t и $i \leq l(t)$ длина $\overline{\pi}_i X_t \leq \frac{1}{2^m}$, где $m = \max\limits_j h_j(t)$.

Образуем множества $X_u = \bigcup\limits_{h(t)=h(u)} X_t$ и $X = \bigcap\limits_u X_u$.

Тогда X - нормальное замкнутое множество.

Доказательство. Замкнутость X очевидна. Проверим нормальность. Проверять будем все три пункта последовательно.

I.* Рассмотрим $\overline{\pi}_0 X$. Поскольку $X \neq \varnothing$, $\overline{\pi}_0 X \neq \varnothing$ также. Ввиду замкнутости всех X_u и того обстоятельства, что $X_{u+1} \subseteq X_u$ (как объединений конечного числа замкнутых), имеем $\overline{\pi}_0 X = \overline{\pi}_0 (\bigcap\limits_u X_u) \overset{=}{\subseteq} \bigcap\limits_u \overline{\pi}_0 X_u$

Пусть $\alpha(m_1), \ldots \alpha(m_k), \ldots$ максимальная бесконечная подпоследовательность $\alpha(n)$, состоящая только из нулей (такое найдется из свойств $\alpha(n)$). Рассмотрим семейство множеств $X_{m_1}, X_{m_2}, \ldots X_{m_k} \ldots$. Легко видеть, что

$$X = \bigcap_i X_{m_i}, \quad \pi_0 X = \bigcap_i \pi_0 X_{m_i}.$$

Посмотрим, как связаны между собой $\pi_0 X_{m_i}$ и $\pi_0 X_{m_{i+1}}$

Обозначим для всякого $e \in \mathcal{E}_0$ $X_e = \bigcup_{t \in W_e} X_t$, где $W_e = \{ t \mid t_0 = e \ \& \ h(t) = h(m_k)$ для некоторого $k \}$ (учитывая максимальность $\alpha(m_k)$) можно утверждать $k = h(e)$

Ясно, что X_e - замкнутые множества (как объединения замкнутых в конечном числе).

Докажем, что для всякого k $X_{m_k} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_{0,k}} X_e$, где $\mathcal{E}_{0,k} = \{ e \mid \exists t \in T, h(t) = h(m_k) \ \& \ t_0 = e \}$

(Легко усмотреть, что $\mathcal{E}_{0,k} = \{ e \mid h(e) = k \}$)

В самом деле, пусть $x \in X_{m_k}$. Тогда для некоторого t, $h(t) = h(m_k)$, будет $x \in X_t$. В силу выбора m_k, для этого t будет $h(t_0) = k$. Пусть $t_0 = e$. Тогда по определению X_e имеет место $x \in X_e$, $h(e) = k$, т.е. $x \in \bigcup_{h(e)=k} X_e$. Аналогично доказывается и обратное включение.

Докажем, что если $e \leq e'$, то $X_{e'} \subseteq X_e$

В самом деле, $X_{e'} = \bigcup_{\substack{t_0 = e' \\ h(t) = h(m_{h(e')})}} X_t$. Пусть $x \in X_e$, т.е. для некоторого t', $h(t') = h(m_{h(e')})$ будет $x \in X_{t'}$. Выберем теперь какое-нибудь t так, чтобы $t_0 = e$ и $h(t_0) = h(m_{h(e)})$ и $t \leq t'$. Ясно, что такое t найти можно. Поскольку $t \leq t'$, $x \in X_t$. Но $X_t \subseteq X_e$.

Значит, $x \in X_e$, что и требовалось.

Докажем также, что $\pi_0 X_{e*<0>} \cap \pi_0 X_{e*<1>} = \varnothing$

В самом деле, пусть $x \in \pi_0 X_{e*<0>} \cap \pi_0 X_{e*<1>}$

Тогда найдутся такие $t, t' \in T$, $h(t) = h(t') = h(m_{h(e)+1})$ $t = e*<0>$, $t' = e*<1>$, что $x \in \pi_0 X_t \cap \pi_0 X_{t'}$

Но по условию, система X_t такова, что если

$t = \langle e_0, e_1, \ldots e_n \rangle$, $t' = \langle e_0', e_1', \ldots e_n' \rangle$ и $e_0 \neq e_0'$

то $\pi_0 X_t \cap \pi_0 X_{t'} = \varnothing$ (свойство 2^*).

Итак, $\pi_0 X_{e*<0>} \cap \pi_0 X_{e*<1>} = \varnothing$

Оценим длину $\pi_0 X_e$ для произвольного $e \in \mathcal{E}$. Заметим предварительно, что если $t_0 = t_0' = e$, то $\pi_0 X_t = \pi_0 X_{t'}$ (свойство 2^*системы, также нужно учитывать, что α_0 - наименьший из всех ординалов).

Значит $\pi_0 X_e = \pi_0 X_t$, где t таково, что $t_0 = e$, Таким образом, $\pi_0 X_e$ имеет длину $\leq \frac{1}{2^{h(e)}}$.

Обозначим $Y_e = \pi_0 X_e$

Имеем систему множеств Y_e с такими свойствами:

$e \geq e' \rightarrow Y_e \subseteq Y_{e'}$; $Y_{e*<0>} \cap Y_{e*<1>} = \varnothing$; длина $Y_e \leq \frac{1}{2^{h(e)}}$.

Определим $Y_n = \bigcup_{h(e)=n} Y_e$. Нетрудно видеть, что

$Y_n = \bigcup_{h(e)=n} Y_e = \bigcup_{h(e)=n} \pi_0 X_e = \pi_0 \left(\bigcup_{h(e)=n} X_e \right) = \pi_0 X_{m_n}$. Но т.к. X_{m_n} образуют убывающую систему замкнутых множеств, то

$$Y = \bigcap_n Y_n = \pi_0 \left(\bigcap_n X_{m_n} \right) = \pi_0 X$$

То есть, нужно доказать, что Y - совершенное множество.

Пусть $y \in Y$. Покажем, что в сколь угодно малой окрестности точки y найдется еще точка из Y. Пусть N - любое большое число, и пусть e таково, что $h(e) = n+1$ и $y \in Y_e$ (такое e найдется).

Для определенности положим $e = \hat{e}^{\frown}\langle 0\rangle$.

Пусть $e' = \hat{e}^{\frown}\langle 1\rangle$. Тогда $Y_e \cap Y_{e'} = \varnothing$.

Но $Y_e \cup Y_{e'} \subseteq Y_{\hat{e}}$, а длина $Y_{\hat{e}} \leq \frac{1}{q}\nu$. Но так как $Y_e \cap Y_{e'}$ не пусто, то имеем в окрестности y радиуса $\frac{1}{q}\nu$ еще по крайней мере одну отличную от y ($Y_e \cap Y_{e'} = \varnothing$) точку Y .

Значит, Y - совершенное (непустота Y очевидна). Первый пункт проверен.

2. Пусть $u > v$, $x \in X$.

Пусть $\alpha_{m_0}, \alpha_{m_1}, \ldots \alpha_{m_k}, \ldots$ - подпоследовательность α_n , состоящая из всех α_m таких, что $\alpha_m < \alpha_u$. Пусть $\alpha_{e_0}, \alpha_{e_1}, \ldots \alpha_{e_k}, \ldots$ - подпоследовательность α_n , состоящая из всех $\alpha_e \geq \alpha_u$. Не ограничивая общности, считаем $e_0 = u$.

Пусть $\widetilde{T} = \{t \in T \mid h(t) = h(n) \ \& \ d(u) = e_k$ для некоторых n и $k\}$

Во избежание громоздких записей обозначим $\alpha_{m_i} = \beta_i$, $\alpha_{e_i} = \gamma_i$.

Обозначим $y = \pi^u x$, $y \in R^u(\beta)$. Пусть $\eta = \{\beta_i\}$, $\zeta = \{\gamma_i\}$. Тогда $y \in R(\eta) = R^u(\beta)$ и $R(\xi) = R(\eta) \times R(\zeta)$

Пусть $t \in \widetilde{T}$, $t = \langle e_0, \ldots e_u\rangle$. Обозначим

$$t^\eta = \{e_{m_k} \mid \alpha_{m_k} < \alpha_u\} \ ; \ t^\zeta = \{e_{m_k} \mid \alpha_{m_k} \geq \alpha_u\}$$

Для всякого $t \in \widetilde{T}$ образуем множество $X_t^\eta = \pi^u X_t$. Как показано выше, если $t^\eta = t'^\eta$, то $X_t^\eta = X_{t'}^\eta$.

Образуем следующие множества : $T_y = \{t \mid y \in X_t^\eta\}$ и $T_y^\zeta = \{t^\zeta \mid t \in T_y\}$.

Для всякого $t \in T_y^\zeta$ определим такое множество $Z_t \subseteq R(\zeta)$ $Z_{t^\zeta} = \{z \in R(\zeta) \mid \langle y, z\rangle \in X_t\}$. Грубо говоря, Z_{t^ζ} является

проекцией на $R(\zeta)$ пересечения X_t с "плоскостью" $\{x \mid \pi^u(x)=y\}$. Для корректности определения нужно доказать, что если $t^\zeta = t'^\zeta$, то $Z_{t^\zeta} = Z_{t'^\zeta}$. В самом деле, пусть $t^\zeta = t'^\zeta$, но $t^\eta \neq t'^\eta$ и $h(t)=h(t')$. Но тогда из свойства 2^*системы X_t легко найти, что $\pi^u X_t \cap \pi^u X_{t'} = \varnothing$ и оба элемента t и t' не могут одновременно входить в T_y. Значит, $t^\eta = t'^\eta$, $t=t'$, $X_t = X_{t'}$, $Z_{t^\zeta} = Z_{t'^\zeta}$. Корректность доказана.

Заметим теперь, что из свойств функции $d(u)$ легко следует $h(t^\zeta) = h(t'^\zeta) \longrightarrow h(t) = h(t')$, если $t, t' \in \widehat{T}$

Рассмотрим систему Z_t, $t \in T^\zeta_y$. Покажем, что она удовлетворяет свойствам, сформулированным в условии теоремы. В самом деле, первое свойство очевидно.

2. Докажем второе свойство.

Пусть $t = \langle e_0, e_1, \ldots e_n \rangle$, $t' = \langle e_0', e_1', \ldots e_n' \rangle$, $h(t) = h(t')$, t и t' - элементы $\widehat{T}$ и число $k \leq n$ таково, что $\alpha_k > \alpha_u$, $e_k \neq e'_k$ и если $i \leq n$, $\alpha_u \leq \alpha_i < \alpha_k$, то $e'_i = e_i$.

Как показано выше, можно считать, что $t^\eta = t'^\eta$ и поэтому вообще если $i \leq n$, $\alpha_i < \alpha_k$, то $e'_i = e_i$.

Пусть также α_ℓ - следующий за α_k ординал ζ, $\alpha_\ell \in \zeta$.

Из свойств X_t следует, что $\pi^k X_t = \pi^k X_{t'}$, но $\pi^\ell X_t \cap \pi^\ell X_{t'} = \varnothing$.

Обозначим $W^k_y = \{x \in R^k(\zeta) \mid \pi^u(x) = y\}$

Тогда $\pi^k X_t \cap W^k_y = \pi^k X_{t'} \cap W^k_y$, или же

$$\{z \mid \langle y, z \rangle \in \pi^k X_t \cap W^k_y\} = \{z \mid \langle y, z \rangle \in \pi^k X_{t'} \cap W^k_y\}$$

Но первое множество, очевидно, является $\pi^k Z_{t^\zeta}$, а второе $\pi^k Z_{t'^\zeta}$ (проекции берутся в $R(\zeta)$).

Аналогично доказывается и вторая часть свойства 2^* системы Z_t.

Рассмотрим свойство 3^*.

Пусть $t^3 \in T^3_y$. Но $m = \max h_i(t) \geq \max h_i(t^3) = m'$ и поэтому тем более для всех i, входящих в t^3, длина $\pi_i Z_{t^3}$ будет не больше $\frac{1}{2^m}$, т.е. не больше $\frac{1}{2^{m'}}$.

Таким образом, система Z_t удовлетворяет всем трем свойствам.

Образуем множества $Z_u = \bigcup_{h(t)=h(u)} Z_{t^3}$ и $Z = \bigcap_u Z_u$

Легко видеть, что $Z_u = \{z \mid \langle y, z\rangle \in X\}$ и $Z = \{z \mid \langle y, z\rangle \in X\}$. Но как показано при доказательстве первого свойства в определении нормальности, $_k Z$ - совершенное множество в R_{α_k}.

Имеем $Z = (\pi^k)^{-1}(y)$, $\pi_k[(\pi^k)^{-1}(\pi^k(k))]$ - совершенное.

Таким образом, второй пункт в определении нормальности доказан.

3. Рассмотрим третий пункт.

Не ограничивая общности можно считать, что $G = G_u = \{z \mid a < x_u < b\}$, $a, b \in R_{\alpha_u}$. Пусть N - столь большое число, что $\frac{1}{2^N} < |a - x_u|$, $\frac{1}{2^N} < |b - x_u|$

Рассмотрим теперь какое-нибудь $t \in T$, такое, что $h_u(t) \geq N$. Тогда по свойству 3^* системы X_t, длина $\pi_u X_t$ будет меньше $\frac{1}{2^N}$. Но $x_u \in \pi_u X_t$. Значит, $\pi_u X_t$ целиком входит в интервал (a, b). То есть $X_t \subseteq G$.

После этого легко доказать, что $X \cap X_t \subseteq G \cap X$ - нормальное множество.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь пространство $R(\xi)\times R$. Множество $\mathcal{F}\subseteq R(\xi)\times R$ будем называть функцией, если для всякого $x\in R(\xi)$ $\mathcal{F}_x=\{y\mid\langle x,y\rangle\in\mathcal{F}\}$ состоит не более чем из одного элемента, обозначаемого $\mathcal{F}_x$ (то есть $\mathcal{F}$ - график функции из подмножества $X\subseteq R(\xi)$ в R. Функцию $\mathcal{F}(x)$ будем называть аналитической (борелевской, замкнутой и т.д.) если множество $\mathcal{F}$ аналитическое (борелевское, замкнуто соответственно. и т.д.).

Следующая теорема имеет очень важное значение при доказательстве основной теоремы.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{N}\subseteq R(\xi)$ - нормальное замкнутое множество, $\mathcal{F}:\mathcal{N}\to R$ - аналитическая функция из $\mathcal{N}$ в R. Тогда найдется замкнутая функция $\widetilde{\mathcal{F}}\subseteq\mathcal{F}$ такая,что проекция на $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\pi_{\mathcal{N}}\widetilde{\mathcal{F}}$ - нормальное множество.

Доказательство. Вначале сделаем некоторые замечания относительно обозначений. Если $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{N}\times K$, где K - произвольное множество, символом $\pi\mathcal{Z}$ условимся обозначать $\{x\in\mathcal{N}\mid\exists y\in K,\langle x,y\rangle\in\mathcal{Z}\}$, символом $\Gamma_i\mathcal{N}$ - проекцию $\mathcal{N}$ на R_{α_i} как подмножества $R(\xi)$, $\pi^i\mathcal{N}$ - проекцию $\mathcal{N}$ на $R^i(\xi)$, $\pi_i\mathcal{Z}$ и $\pi^i\mathcal{Z}$ - соответственно проекции $\mathcal{Z}$ на R_{α_i} и $R^i_\xi(\xi)$ (или, если угодно, проекции $\pi\mathcal{Z}$ на эти подпространства).

Всякое аналитическое множество, как известно из дескриптивной теории, является проекцией некоторого множества $\mathcal{A}$ типа G_δ (то есть $\mathcal{A}=\bigcap_n V_n$, где всякое V_n открыто, $V_n=\bigcup_m \mathcal{U}_{m,n}$, все $\mathcal{U}_{m,n}$ открыто-замкнутые базовые множесьва).

Рассмотрим пространство $\mathcal{N}\times R\times\widetilde{R}$ и его подмножество $A=\bigcap_n\bigcup_m \mathcal{U}_{m,n}$ такое, что $\pi_{\mathcal{N}\times R}A=\mathcal{F}$, $\pi_{\mathcal{N}}A=\pi_{\mathcal{N}}\mathcal{F}$ - нормальное замкнутое множество.

Не ограничивая общности, можно считать, что для всякой пары m, n и $i\le n$ $\pi_i\mathcal{U}_{m,n}$ имеет длину $\le\frac{1}{2^n}$ (если это необходимо, можно измельчить $\mathcal{U}_{m,n}$ и заново перенумеровать), а также, что для всякого m найдется такое k что $\mathcal{U}_{m,n+1}\subseteq\mathcal{U}_{k,n}$.

Перед доказательством теоремы докажем ряд лемм.

Лемма 3.1. Пусть X и Y - два экземпляра множества действительных чисел R. Если $A\subseteq X\times Y$, $x\in X$, то символом A_x условимся обозначать $\{y\mid\langle x,y\rangle\in A\}$

Пусть $[a,b]$ - сегмент в Y, $\mathcal{F}\subseteq X\times Y$ - замкнуто. Тогда $\{x\mid\mathcal{F}_x\cap[a,b]\neq\emptyset\}$ - замкнуто.

Доказательство. Пусть $x_1,x_2,\dots x_n,\dots$ - последовательность точек из $\{x\mid\mathcal{F}_x\cap[a,b]\neq\emptyset\}$, сходящаяся к точке x. Достаточно показать, что $\mathcal{F}_x\cap[a,b]\neq\emptyset$.

Пусть $y_1,y_2,\dots y_n,\dots$ - последовательность элементов $[a,b]$ такая,что для всякого i $\langle x_i,y_i\rangle\in\mathcal{F}$ (по выбору x_i, такие y_i найдутся). Поскольку $[a,b]$- компакт, то некоторая точка $y\in[a,b]$ является предельной для $\{y_i\}$. Ясно, что $\langle x,y\rangle$ - предельная точка для $\{\langle x_i,y_i\rangle\}$. Значит $\langle x,y\rangle\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_x\cap[a,b]\neq\emptyset$
Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть A - замкнутое подмножество $X\times Y$, $\pi_X A=X$, все A_x - замкнутые совершенные множества. Пусть также $\mathcal{F}\subseteq A$ - множество, обладающее в точности теми

же. что и A , свойствами, являющееся нигде не плотным множеством в A . Тогда $\{x \mid \mathcal{F}_x$ не является нигде не плотным в $A_x Y$ - множество первой категории в X .

Доказательство. Предположим противное. Так как A и $\mathcal{F}$ замкнуты, то $\mathcal{F}_x$ не является нигде неплотным в A_x , если в $\mathcal{F}_x$ содержится целиком некоторый сегмент из A_x . Пусть $[a,b]$ - некоторый сегмент с концами из множества рациональных чисел (некоторого фиксированного счетного всюду плотного множества Q из Y). Обозначим $X_{[a,b]} = \{x \mid \mathcal{F}_x$ целиком содержит $A_x \cap [a,b]$ и $\mathcal{F}_x \cap [a,b]$ непусто .

Учитывая вышесказанное, легко видеть, что $\{x \mid \mathcal{F}_x$ не является нигде не плотным в $A_x Y = \bigcup_{a,b \in Q} X_{[a,b]}$. А так как понятие первой категории счетноаддитивно, то какое-то из $X_{[a,b]}$ является множеством не первой категории. Значит, $X_{[a,b]}$ всюду плотно на некотором интервале $[c,d] \subseteq X$.

Не ограничивая общности, будем считать $[a,b] = Y$, $[c,d] = X$, так как $[a,b]$ гомеоморфно Y , а $[c,d] - X$

Заметим, что $\mathcal{F}$ - всюду плотно в A . В самом деле, если бы нашлась окрестность $\mathcal{U} \subseteq A$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} = \emptyset$ то нашлось бы $x \in \Pi_x \mathcal{U} \cap X_y$. А так как для $x \in X_y$ $A_x = \mathcal{F}_x$ и $A_x \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. , то $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

Значит, $\mathcal{F}$ - всюду плотно в , то есть учитывая замкнутость, $\mathcal{F} = A$. Опять возвращаясь к $[a,b]$ и $[c,d]$, имеем $\mathcal{F} \cap \{[c,d] \times [a,b]\} = A \cap \{[c,d] \times [a,b]\}$

То есть, для некоторого открытого в A множества $\mathcal{U}$ $\mathcal{U} \cap A = \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$, что противоречит нигде неплотности множества $\mathcal{F}$ в A .

Лемма доказана.

Следствие 3.3. Пусть A - множество, о котором говорится в условии леммы 3.2, $F \subseteq A$ - множество первой категории в A. Тогда $\{x \mid F_x$ не первой категории в $A_x\}$ - множество первой категории $(B\ X\}$.

Доказательство. По условию $F = \bigcup F^n$, где F^n - нигде не плотны в A. Пусть C^n - замыкание F^n в A. Ясно, что C^n - также нигде не плотны в A.

Имеем $\{x \mid F_x$ - не первой категории в $A_x\} = \bigcup_n \{x \mid F^n_x$ не первой категории в $A_x\} \subseteq \bigcup_n \{x \mid C^n_x$ - не первой категории в $A_x\} = \bigcup_n K_n$

Но согласно 3.2, всякое K_n - множество первой категории. Значит и $\bigcup_n K_n$ - тоже таково.
Следствие доказано.

Следующая лемма особо важна при доказательстве теоремы 3. Условимся говорить, что $A \subseteq B$ полно в B, если $B - A$ первой категории в B.

Лемма 3.4.А. Пусть $N \subseteq R(\gamma)$ - нормальное замкнутое подмножество $R(\gamma)$, $M \subseteq N \times R \times \hat{R}$ - замкнутое множество, $\pi M = N$, $C \subseteq M$ - открыто - замкнуто в M, πC - открыто - замкнуто в N, $W \subseteq C$, $W = \bigcup G_i$, все G_i - открыто - замкнуты в M, и $\pi C - \pi W$ - первой категории в πC, m - натуральное число, α_{m+1} - следующий по величине за α_m ординал, причем $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m$

Тогда найдется такое число k **и такие открыто-замкнутые множества** $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq G_k$ **, что** $\pi^m \mathcal{U}_1 = \pi^m \mathcal{U}_2$

$\pi^{m+1}\mathcal{U}_1 \cap \pi^{m+1}\mathcal{U}_2 = \emptyset$, $j \le m \to \pi^j \mathcal{U}_{1,2}$ **- открыто-замкнуты в** $\pi^j W$.

Доказательство. Учитывая третий пункт определения нормальности, считаем $G = \mathcal{M}$. Обозначим $X = \pi^m \mathcal{N}$, $Y = R_{\alpha m}$ Тогда $Z = \pi^{m+1}\mathcal{N}$ - замкнутое подмножество $X \times Y$. Из 3.3 легко доказать, что $\pi^{m+1} W$ - полно в $Z = \pi^{m+1}\mathcal{N}$ (так как πW полно в $\mathcal{N}$ по условию).

Обозначим для всякого i $H_i = \pi^{m+1} G_i$, H_i - замкнуты в Z (как проекции замкнутых G_i). Назовем H_i "тощим" множеством, если H_i представимо в виде $H_i = \bigcup_{j \le m+1} \mathcal{L}_i^j$ где для всякого j $\pi^j \mathcal{L}_i^j$ - первой категории. Докажем, что для хотя бы одного i H_i не является "тощим". В самом деле, иначе было бы $\pi^{m+1} W = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{m+1}$ где $\pi^j \mathcal{L}_j$ - первой категории в $\pi^j \mathcal{N}$ для всякого $j \le m+1$. Для простоты рассмотрим случай $m = 1$. Пусть $\pi^2 W = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ $\pi^{1,2}\mathcal{L}_{1,2}$ - первой категории соответственно в $\pi^{1,2}\mathcal{N}$.

Но $\pi^2 W$ - полно в $\pi^2 \mathcal{N}$. Значит $K = \pi^2 W - \pi^2 \mathcal{L}_2$ также полно в $\pi^2 \mathcal{N}$. Но ясно, что $\pi^1 K \subseteq \pi^1 \mathcal{L}_1$ - то есть первой категории в $\pi^1 \mathcal{N}$. А это явно противоречит 3.3 (из 3.3 следует, что $\pi^1 K$ полно в $\pi^1 \mathcal{N}$).

Общий случай доказывается, например, по индукции, с использованием 3.3. Итак, некоторое H_i - не " тощее " . Пусть H_{i_0} - не " тощее " множество. Мы выберем сперва открыто-замкнутое в $\pi^{m+1}\mathcal{N}$ множество $H \subseteq H_{i_0}$ такое,

что $i \le m \to \pi^i H$ - открыто - замкнуто в $\pi^i \mathcal{N}$.

Опять рассмотрим только случай $m = 1$.

Итак, $H_{i_0} = \pi^? \mathcal{N}$ - не "тощее" замкнутое множество. Тогда H_{i_0} представимо в виде $H_{i_0} = \tilde{B} \cup (\bigcup_j B_j)$, где $\tilde{B}$ - первой категории в $\pi^? \mathcal{N}$, а все B_j - открыто - замкнуты в $\pi^? \mathcal{N}$. Обозначим $\pi^1(\bigcup_j B_j) = C$. Тогда по выбору H_{i_0} C - не первой категории в $\pi^1 \mathcal{N}$. Значит, для какого-то j_0 $\pi^1 B_{j_0}$ - не первой категории в $\pi^1 \mathcal{N}$, то есть $\pi^1 B_{j_0}$ содержит открыто - замкнутое множество S. Положим $H = B_{j_0} \cap (\pi^1)^{-1}(S)$. Тогда $H \subseteq H_{i_0}$ - открыто - замкнуто и $\pi^1 H = S$ также.

Общий случай опять разбирается аналогично, по индукции.

Итак, мы выбираем $H \subseteq H_{i_0}$ такое, что $i \le m \to \pi^i H$ открыто - замкнуто в $\pi^i \mathcal{N}$ (в частности $\pi^{m+1} H = H$ - открыто - замкнуто в $\pi^{m+1} \mathcal{N}$).

Положим $Z_1 = \{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in H$ и y не превосходит по величине срединны $H_x\}$, $Z_2 = H - Z_1$. Легко видеть, что $\pi^m Z_1 = \pi^m Z_2 = \pi^m H$ и $Z_{1,2}$ - аналитические в H множества. Значит, существуют два таких открытых $V_1 \subseteq H$ и $V_2 \subseteq H$, что $(V_i \triangle Z_i)$ - первой категории в H. Поскольку все $(Z_{1,2})_x$, $x \in \pi^m H$, не первой категории в H_x, то $V_{1,2}$ - не пусты, и более того $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $\pi^m V_{1,2}$ - полно в $\pi^m H$.

Пусть $V_i = \bigcup_j \mathcal{L}^i_j$, где $\mathcal{L}^i_j$ - открыто - замкнуты. Тогда $\pi^m V_i = \bigcup_j \pi^m \mathcal{L}^i_j = \bigcup_j \mathcal{F}^i_j$, где $\mathcal{F}^i_j$ - замкнутые множества, Учитывая полноту $\pi^m V_{1,2}$,

можно подобрать пару открытых полных в $\pi^m H$ множеств B_1, B_2 таких, что $B_{1,2} \subseteq \pi^m V_{1,2}$. Пусть $B = B_1 \cup B_2$, $B = \bigcup_i P_i$, где всякое P_i открыто – замкнуто в $\pi^m H$ и притом таково, что для некоторых j_1, j_2

$$P_i \subseteq \pi^m(\mathcal{L}^1_{j_1}) \cap \pi^m(\mathcal{L}^2_{j_2})$$

После этого методом, использованным при выборе H, подбираем число i_0 и $S \subseteq P_{i_0}$ такое, что $j \le m \to \pi^j S$ открыто-замкнуто в $\pi^j N$.

Пусть j_1 и j_2 – числа для P_i такие, что

$P_i \subseteq \pi^m(\mathcal{L}^1_{j_1}) \cap \pi^m(\mathcal{L}^2_{j_2})$. Положим $H_1 = \mathcal{L}^1_{j_1} \cap (\pi^m)^{-1}(S)$
$H_2 = \mathcal{L}^2_{j_2} \cap (\pi^m)^{-1}(S)$

Легко видеть, что $H_{1,2}$ – открыто-замкнуто в H,

$\pi^m H_1 = \pi^m H_2 = S$, то есть $j \le m \to \pi^j H_{1,2}$ открыто-замкнуто в $\pi^j N$. Также очевидно $H_1 \cap H_2 = \varnothing$

Для окончательного доказательства леммы положим

$$\mathcal{U}_1 = G_{i_0} \cap (\pi^{m+1})^{-1}(H_1), \quad \mathcal{U}_2 = G_{i_0} \cap (\pi^{m+1})^{-1}(H_2)$$

Искомые свойства $\mathcal{U}_{1,2}$ очевидны.

Аналогично можно доказать лемму 3.4 с тем же условием, что в 3.4.А и с дополнительным требованием в заключении: открыто-замкнуто в N.

Перед доказательством следующей леммы введем некоторые определения.

Обозначим $T_u = \{t \in T \mid h(t) = h(u)\}$. Если $t \in T(u-1)$ то пусть $t^{\frown}\langle 0\rangle$ и $t^{\frown}\langle 1\rangle$ – такие элементы $T(u)$, которые получаются приписыванием к нужной компоненте t соответственно 0 или 1. Пусть для всякого u, A_u – семейство подмножеств

$S \subseteq T_{n-1} \cup T_n$ таких, что $T_{n-1} \subseteq S$ и если $t \in T_{n-1}$, то $t^{\frown}\langle 0\rangle$ и $t^{\frown}\langle 1\rangle$ – одновременно принадлежат или не принадлежат S.

Семейство $B = \{C_t \mid t \in S\}$ подмножеств $\mathcal{M}$ назовем n – правильным, если все C_t – открыто-замкнуты в $\mathcal{M}$, $S \in A_n$, $C_t = C_{t^{\frown}\langle 0\rangle} \cup C_{t^{\frown}\langle 1\rangle}$ для всякого и система $\{\pi C_t \mid t \in S\}$ удовлетворяет условиям II.2.2 i)-ii).

Лемма 3.5. " об одинарном раздвоении ". Пусть $B = \{C_t \mid t \in S\}$ – семейство открыто-замкнутых подмножеств $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – множество из условия леммы 3.4, причем, $\hat{B} = \{\pi C_t \mid t \in S\}$ является n – правильным семейством, $\hat{t} \in S$, $h(\hat{t}) = h(n-1)$, $\hat{t}^{\frown}\langle 1\rangle \notin S$, $\hat{S}^0 = \hat{t}^{\frown}\langle 0\rangle$, $\hat{S}^1 = \hat{t}^{\frown}\langle 1\rangle$.

Пусть также $W \subseteq C_t$, $W = \bigcup_k G_k$, где все G_k открыто-замкнуты в $\mathcal{M}$ и πW – полно в $\pi C_{\hat{t}}$. Тогда существует n – правильное семейство множеств $\{C'_t \mid t \in S'\}$, где $S' = S \cup \{\hat{S}^0, \hat{S}^1\}$, такое, что $t \in S \to C'_t \subseteq C_t$ и открыто-замкнуто в C_t, причем найдется такое k, что $C'_{\hat{t}} \subseteq G_k$

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m < \alpha_{m+1}$. Пусть $\hat{t} = \langle e_0, \ldots e_k, \ldots e_m\rangle$, $\hat{S}^0 = \langle e_0, \ldots e_k * \langle 0\rangle, \ldots e_m\rangle$ $\hat{S}^1 = \langle e_0, \ldots e_k * \langle 1\rangle, \ldots e_m\rangle$.

Будем рассматривать лишь случай $k \leq m$. Если $k = m+1$ доказательство не меняется. Обеспечим сперва наличие k такого, что $C'_{\hat{t}} \subseteq G_k$. Применяя метод леммы 3.4.A легко найти такое число k и открыто-замкнутое $\mathcal{U} \subseteq G_k$,

такое, что $i \leq m \to \pi^i \mathcal{U}$ - открыто-замкнуто в $\pi^i C_{\hat{t}}$ и $\pi \mathcal{U}$ - открыто-замкнуто в $\mathcal{N}$.

Введем следующее обозначение. Если $t', t'' \in T$, пусть $\ell(t', t'')$ - наибольшее число ℓ такое, что $i < \ell \to t'_i = t''_i$

Пусть также для всякого $i \leq m$ $K_i = \pi^i \mathcal{U}$. Тогда K_i по выбору $\mathcal{U}$ открыто-замкнуто в $\pi^i C_{\hat{t}}$.

Пусть теперь $t \in S$, $t \neq \hat{t}$, $\ell(t, \hat{t}) = \ell$.

Положим $C'_t = C_t \cap (\pi^\ell)^{-1}(K_\ell)$. Заметим, что C'_t - открыто-замкнутое множество в $\mathcal{M}$. В самом деле, $\pi^\ell C_t = \pi^\ell C_{\hat{t}}$ а K_ℓ открыто-замкнуто в $\pi^k C_{\hat{t}}$. Положим, наконец $C'_{\hat{t}} = \mathcal{U}$. Легко видеть, что система $\{C'_t \mid t \in S\}$ будет искомой, причем $C'_t \subseteq C_t$ для $t \in S$.

Таким образом, не ограничивая общности будем предполагать, что $C_{\hat{t}} \subseteq C_k$ для некоторого .

Пусть ℓ - наибольшее из чисел $\ell(t, \hat{S}^0)$, где $t \in S$. Возможны два случая:

Случай I. $\ell > k$. Пусть $S^0 \in S$ таково, что $\ell(S^0, \hat{S}^0)$ - наибольшее возможное из всех $\ell(S, \hat{S}^0)$. Но тогда $i < \ell \to S^0_i = \hat{S}^0_i$. В частности $S^0_k = \hat{S}^0_k$

Значит $h(S^0) = h(\hat{S}^0) = h(u)$, то есть учитывая $S \in A_u$, $S^0 = t^\frown\langle 0 \rangle$, для некоторого $t \in S$, $h(t) = h(u-1)$

Обозначим $S' = t^\frown\langle 1 \rangle$. Очевидно $\ell(S', \hat{S}') = \ell(S^0, \hat{S}^0) > k$

Обозначим $K^0 = \pi^\ell C_{S^0}$, $K' = \pi^\ell C_{S'}$. Из свойств семейства $\mathcal{B}$ следует, что K^0, K' - открыто-замкнуты в $\pi^\ell \mathcal{M}_t$, так как $\pi^\ell C_{S^0} \cap \pi^\ell C_{S'} = \emptyset$, $\pi^\ell C_{S^0} \cup \pi^\ell C_{S'} = \pi^\ell C_t$ и все эти множества замкнуты, будучи

проекциями замкнутых.

Также легко видеть, что $i \le \ell \to t_i = \tilde{t}_i$, то есть $\pi^m C_t = \pi^m C_{\tilde{t}}$. Положим $C'_{\bar{s}^0} = C_t \cap (\pi^m)^{-1}(K^0)$, $C'_{\bar{s}^1} = C_t \cap (\pi^m)^{-1}(K^1)$, положим для $s' \in S$ $C'_{s'} = C_{s'}$.

Покажем, что система $\{C'_s \mid s \in S'\}$ - искомая. В самом деле, все C'_t очевидно открыто-замкнуты (как пересечения открыто-замкнутых множеств) и $C'_{\tilde{t}} = C_{\tilde{t}} \cap (\pi^m)^{-1}(\pi^m(C_t)) = C_{\tilde{t}} \cap (\pi^m)^{-1}(K^1 \cup K^0) = C'_{\bar{s}^0} \cup C'_{\bar{s}^1}$.

Нужно теперь показать, что $\mathcal{A} = \mathcal{L}\{\pi C'_t \mid t \in S\}$ удовлетворяет условиям П.2.2. i)-ii).

В самом деле, пусть $\bar{s}^0 \in S$, ℓ таково, что $i < \bar{\ell} \to \bar{s}^0_i = \tilde{s}^0_i$. Но тогда $\bar{\ell} < \ell$ (по выбору ℓ). После чего имеем $i < \ell \to \bar{s}^0_i = s^0_i$, то есть $\pi^{\bar{\ell}} C'_{\bar{s}^0} = \pi^{\bar{\ell}} C_{\bar{s}^0} = \pi^{\bar{\ell}} C_{s^0} = \pi^{\bar{\ell}} C'_{\tilde{s}^0}$.

Аналогично рассматриваются и другие пункты П.2.2. i)-ii). Первый случай разобран.

Случай 2. $\ell \le k$, но тогда $\ell = k$ так как можно взять, например, $s = \tilde{t}$. Применим лемму 3.4 к множеству $C_{\tilde{t}}$. Найдем такие множества $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq C_{\tilde{t}}$, что $i \le m \to \pi^i \mathcal{U} = K_i$, $\pi^i \mathcal{V} = \mathcal{L}_i$ - открыто-замкнуты в $\pi^i C_{\tilde{t}}$, а $\pi \mathcal{U}$, $\pi \mathcal{V}$ открыто-замкнуты в $\mathcal{N}$, $\pi^k \mathcal{U} = \pi^k \mathcal{V}$, и если α_u - следующий по величине за α_k ординал, то $\pi^u \mathcal{U} \cap \pi^u \mathcal{V} = \varnothing$.

Пусть $s \in S$, $s \ne \bar{s}^0, \bar{s}^1$ таково, что $\ell(s, \tilde{s}^0) = \ell$. Но тогда очевидно, что $\ell(s, \tilde{s}^1) = \ell(s, \tilde{t}) = \ell$ так как $\ell \le k$.

Положим $C'_\xi = C_\xi \cap (\pi^\ell)^{-1}(K_\ell)$

Отдельно положим $C'_{\hat{\xi}} = \mathcal{U} \cup V$, $C'_{\xi 0} = \mathcal{U}$, $C'_{\xi 1} = V$

Как и выше, доказывается, что $\{\pi C'_\xi \mid \xi \in S'\}$ является η - правильным семейством.

Лемма доказана.

Лемма 3.6. " О полном раздвоении".

Пусть $S = T_{n-1}$, $B = \{C_t \mid t \in S\}$ является семейством открыто-замкнутых подмножеств $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ - множество из условий леммы 3.4, причем $\hat{B} = \{\pi C_t \mid t \in S\}$ является η - правильным семейством.

Пусть также $W = \bigcup_k G_k$, $W \subseteq \bigcup_{t \in S} C_t$ всякое G_k открыто-замкнуто в $\mathcal{M}$, πW полно в $\pi\left(\bigcup_{t \in S} C_t\right)$. Тогда существует η - правильное семейство $\{C'_t \mid t \in T_{n-1} \cup T_n\}$ такое, что $C'_t \subseteq C_t$, открыто-замкнуто в $\mathcal{M}$ и для всякого $t \in T_n$ найдется k такое, что $C'_t \subseteq G_k$

Доказательство. Эта лемма получается применением нужного (конечного) числа раз леммы об одинарном раздвоении.

Вывод 3.6 из 3.5 несложен и опускается.

Приступим теперь к доказательству самой теоремы.

Определим сперва множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \times R \times \hat{R}$. Пусть G - максимальное открытое подмножество $\mathcal{N} \times R \times \hat{R}$ такое, что $\pi(G \cap A)$ - первой категории в πG (что эквивалентно тому обстоятельству, что $\pi(G \cap A)$ первой категории в $\mathcal{N}$). Такое множество G найдется из соображений счетной аддитивности первой категории.

Обозначим $\mathcal{M} = (\mathcal{N} \times R \times \widetilde{R}) - G$. Ясно, что $\mathcal{M}$ - замкнуто и $\widetilde{\mathcal{N}} = \pi \mathcal{M}$ - замкнутое (будучи проекцией замкнутого) полное множество в $\mathcal{N}$. Значит $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$, $\pi \mathcal{M} = \mathcal{N}$. Также ясно, что $\pi(\mathcal{M} \cap A)$ - полно в $\mathcal{N}$. Обозначим $B = \mathcal{M} \cap A$ Легко видеть, что $B = \bigcap_n \bigcup_m V_{m,n}$, где $V_{m,n} = \mathcal{U}_{m,n} \cap \mathcal{M}$ - открыто-замкнутое в $\mathcal{M}$ множество (напомню, что $A = \bigcap_n \bigcup_m \mathcal{U}_{m,n}$). Из выбора $\mathcal{U}_{m,n}$ ясно также, что для всякой пары m,n и $i \le n$ $\pi_i V_{m,n}$ имеет длину меньше $\frac{1}{2^n}$.

Заметим еще одну всякую деталь: если W - открыто-замкнуто в $\mathcal{M}$, то $\pi(W \cap B)$ полно в πW (так как иначе ранее построенное множество G не было бы максимальным).

Для доказательства теоремы построим систему открыто-замкнутых множеств $Y_t \subseteq \mathcal{M}$ таких, что если обозначить $X_t = \pi Y_t$ то

1) X_t удовлетворяет П.2.2 i) - ii)

2) Для всякого t, $h(t) = h(n)$ существует такое k , что $Y_t \subseteq V_{n,k}$.

Легко заметить, что из второго свойства немедленно следует П.2.2, iii) для X_t .

Покажем, что из такой системы Y_t сразу следует теорема.

Обозначим $Y_n = \bigcup_{h(t)=h(n)} Y_t$, $X_n = \bigcup_{h(t)=h(n)} X_t$, $Y = \bigcap Y_n$ $X = \bigcap X_n$. В силу замкнутости всех Y_t , $X_n = \pi Y_n$ и $X = \pi Y$. По Y - замкнуто, как пересечение замкнутых Y_n и X - нормально согласно П.2.2. Также отметим, что $Y \subseteq B \subseteq A$ по построению. Обозначим теперь $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{N} \times R} Y$ Ясно, что $\widetilde{\mathcal{F}}$ - искомая функция. Система же Y_t строится индукцией по n , где $h(t) = h(n)$, непосредственным применением леммы 3.6. о полном раздвоении.

Теорема П.2.3 доказана.

А теперь докажем еще одну важную теорему.

Обозначим буквой $\mathcal{N}(\zeta)$ семейство всех нормальных замкнутых подмножеств $R(\zeta)$. Если $\zeta \leq \eta$ и $\mathcal{N} \in \mathcal{N}(\zeta)$ будем писать $\mathcal{N} \upharpoonright \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \mathcal{N}[\eta] =$

$= \{x \in R(\eta) \mid \exists y \in \mathcal{N}\ \forall \alpha \in \zeta\ [x_\alpha = y_\alpha]\}$

Нетрудно показать, что $\mathcal{M} \in \mathcal{N}[\eta]$. Рассмотрим теперь пространство $R(\omega_2)$ и следующее семейство $\mathcal{N}$ его подмножеств. $\mathcal{M} \in \mathcal{N}$, если существует счетное множество $\zeta \leq \omega_2$ и $\mathcal{N} \in \mathcal{N}(\zeta)$ такое, что $\mathcal{M} = \mathcal{N}[\omega_2]$. Легко видеть, что элементы $\mathcal{N}$ - нормальные подмножества $R(\omega_2)$.

Упорядочим элементы $\mathcal{N}$ обратно включению.

Теорема 4. Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ семейство плотных конфинальных вверх подмножеств $\mathcal{N}$. Тогда найдется счетное множество $\zeta \leq \omega_2$ и семейство $\{\mathcal{N}_t \mid t \in T\} \subseteq \mathcal{N}(\zeta)$, удовлетворяющее условиям П.2.2. i) - iii) и такое, что если $h(t) = h(n)$, то $\mathcal{N}_t[\omega_2] \in X_n$.

Доказательство. Обозначим теперь буквой $\mathcal{A}_n$ семейство подмножеств $S \subseteq T_n$. Пусть $S \in \mathcal{A}_n$, ζ - счетное подмножество ω_2. В отличие от предыдущей теоремы, назовем $B = \{C_t \mid t \in S\}$ n - правильным, если все элементы B - замкнутые нормальные подмножества $R(\zeta)$ (а не $R(\zeta) \times R \times \widehat{R}$) и B удовлетворяет условиям П.2.2. i) - iii).

Лемма 4.1. Пусть $B=\{C_t \mid t\in S\}$, $\hat{t}\in S$, $h(t)=h(u)$, $C'\subseteq C_{\hat{t}}$ - нормальное замкнутое подмножество $R(\xi)$. Тогда существует u - правильное семейство $B'=\{C'_t \mid t\in S\}$ такое, что $C'_{\hat{t}}=C'$ и $C'_t\subseteq C_t$

Доказательство. В самом деле, пусть $t\in S$ и $\ell(t,\hat{t})=\ell$ Как и в предыдущей теореме, положим $C'_t=C_t\cap(\pi^\ell)^{-1}(\pi^\ell C')$

Легко видеть, что $\{C'_t \mid t\in S\}$ искомое семейство.

В самом деле, пусть $t\in S$, $\ell(t,t')=\ell$. Это значит, что $\pi^\ell C_t=\pi^\ell C_{\hat{t}}=K$ - нормальное замкнутое подмножество $R(\eta)$, где $\eta=\{\alpha\in\xi \mid \alpha<\alpha_\ell\}$.

Пусть $\pi^\ell C'=\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}$ - замкнутое нормальное подмножество K, и отсюда $C'_t=(\pi^\ell)^{-1}(\mathcal{L})$ - замкнутое нормальное подмножество $R(\xi)$.

Так же нетрудно показать, что $B'=\{C'_t \mid t\in S\}$ удовлетворяет П.2.2. i) - iii).

Лемма доказана.

Лемма 4.2. Пусть $S'=T_{u-1}$, $S''=T_u$, $S=S'\cup S''$, $B'=\{C_t \mid t\in S'\}$ - $(u-1)$ - правильное семейство подмножеств $R(\xi)$. Тогда существует такое u - правильное семейство $B''=\{C_t \mid t\in S''\}$, что $B=\{C_t \mid t\in S\}$ удовлетворяет П.2.2 i) - iii).

Доказательство. Лемма является следствием " леммы о полном раздвоении " Вывод её из 3.5. несложен и опускается.

Лемма 4.3. Пусть $S = T_n$, $B = \{C_t \mid t \in S\}$ является n - правильным семейством подмножеств $R(\xi)$, где $\xi = \{\alpha_i\} \subseteq \omega_2$, $\hat{t} \in S$ выделенный элемент S , X - плотное конфинальное вверх подмножество $\mathcal{N}$. Тогда существует счетное подмножество $\eta = \{\beta_i\} \subseteq \omega_2$ и n - правильное семейство $B' = \{C'_t \mid t \in S\}$ подмножеств $R(\eta)$ такие, что $\xi \subseteq \eta$, для всех i $i \subseteq n \to \alpha_i = \beta_i$, $C'_t = C_t[\eta]$ и найдется $C \subseteq C'_{\hat{t}}$, такое, что $C[\omega_2] \in X$

Доказательство. Пусть η - произвольное счетное подмножество ω_2 такое, что $\xi \subseteq \eta$ и найдется $C \subseteq R(\eta), C \subseteq C'_{\hat{t}}$ такое, что $C[\omega_2] \in X$ (такое найдется из соображений конфинальности X).

Легко можно занумеровать η так, чтобы выполнялось условие $i \subseteq n \to \alpha_i = \beta_i$. Тогда, учитывая $d(n) < n$, легко видеть, что $B' = \{C'_t \mid t \in S\}$, где $C'_t = C_t[\eta]$ является n - правильным.

Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Семейство $\{\mathcal{N}_t \mid t \in T\}$ будем строить по индукции.

Пусть построены счетные множества $\eta_n \subseteq \omega_2$ и семейства $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ подмножеств $R(\eta_n)$ такие, что $B_i = \{\mathcal{N}_t \mid t \in T_i\}$ и $\hat{B} = \{\mathcal{N}_t \mid t \in S_n\}$ где $S_n = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{n-1}$

семейство замкнутых нормальных множеств удовлетворяющее П.2.2. i) - iii).

Согласно лемме 4.2, строим $B'_n = \{\mathcal{N}_t \mid t \in T_n\}$

Имеем новую систему $\mathcal{B}' = \{\mathcal{N}_t \mid t \in S_{n+1}\}$

удовлетворяющую тем же условиям П.2.2 i) - iii).

Пусть $t_1, t_2, \ldots t_k$ - нумерация всех элементов T_n $(k = 2^n)$

Положим $\xi_0 = \gamma_n$, $\mathcal{D}_0 = B_n$, $\mathcal{N}_t^0 = \mathcal{N}_t$, и индукцией по $i \le k$ будем строить счетные множества ξ_i и системы множеств $\mathcal{D}_i = \{\mathcal{N}_t^i \mid t \in T_n\}$, где $\mathcal{N}_t^i \subseteq R(\xi_i)$ для всех t и i.

Пусть построены ξ_{j-1}, $\mathcal{D}_{j-1} = \{\mathcal{N}_t^{j-1} \mid t \in T_n\}$

Обозначим $\hat{t} = t_j$.

Применим лемму 4.3. Находим такое счетное подмножество $\xi_j \subseteq \omega_2$, что $\xi_{j-1} \subseteq \xi_j$, и n - правильное семейство $\mathcal{B}' = \{C_t \mid t \in T_n\}$ подмножеств $R(\xi_j)$, такое, что $C_t = \mathcal{N}_t^{j-1}[\xi_j]$, а также $C \subseteq R(\xi_j)$ такое, что $C[\omega_2] \in X_n$ и $C \subseteq C_{\hat{t}}$.

Применим еще и лемму 4.I. Найдем n - правильное семейство $\mathcal{D}_j = \{\mathcal{N}_t^j \mid t \in T_n\}$ такое, что $\mathcal{N}_t^j \subseteq C_t$ и $\mathcal{N}_{\hat{t}}^j = C$.

Полагаем теперь для $t \in T$ $\mathcal{N}_t = \mathcal{N}_t^k$. Рассмотрим систему $B_n = \{\mathcal{N}_t \mid t \in T_n\}$. Ясно, что эта система является n - правильной (так как совпадает с n - правильной системой $\mathcal{D}_k$). Кроме того, для всякого $i \le k$ $\mathcal{N}_t \subseteq \mathcal{N}_t^i$ то есть $\mathcal{N}_t[\omega_2] \in X_n$, так как X_n конфинально вверх.

Далее, по построению очевидно, что если положить $B = \{\mathcal{N}_t \mid t \in T\}$, то B будет удовлетворять

П.2.2.

i) - iii).

Теорема доказана.

§ 3. Замкнутые функции на нормальных множествах и ультрафильтры.

В этом параграфе доказывается основная теорема, ведущая к доказательству независимости предложения I.

Теорема I. Пусть $\mathcal{N} \subseteq R(\zeta)$ - нормальное замкнутое множество, $\mathcal{F} \subseteq R \times \mathcal{N}$ - замкнутая функция, $u_1 \supseteq u_2 \supseteq \ldots \supseteq u_n \supseteq \ldots$ последовательность подмножеств ω_0, причем $\bigcap_n u_n = \emptyset$. Тогда найдется такое бесконечное $\omega \subseteq \omega_0$, что $\omega - u_n$ конечно для всех n и такое замкнутое нормальное $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, что для

$$\forall k \forall x [x \in \mathcal{M} \& k \in \omega \to k \in \mathcal{F}(x)]$$

для

$$\forall k \forall x [x \in \mathcal{M} \& k \in \omega \to k \notin \mathcal{F}(x)]$$

Доказательство. Теорема будет доказана индукцией по порядковому типу $|\zeta|$ ординалов, входящих в множество ζ.

1. Пусть в ζ всего один ординал: $\zeta = \{\alpha\}$. Этот случай уже разобран в П.I. После тривиальной смены обозначений получаем как раз доказываемую теорему.

2. Пусть $|\zeta| = \lambda$ и для всех η, $|\eta| < \lambda$, теорема доказана. Докажем её для ζ. Для этого докажем вспомогательную лемму.

Сперва несколько замечаний.

Во избежание громоздкостей при доказательстве леммы удобнее пользоваться не множеством, а первоначальным более

широким множеством T^*. В связи с этим на протяжении доказательства леммы уже не будет предполагаться, что α_0 наименьший из ординалов γ_1, а условия II.2.2 i) - iii) расширяется дополнительным условием:

iv) Пусть $t=\langle e_0, e_1, \dots e_k, \dots e_n\rangle$, $t'=\langle e'_0, e'_1, \dots e'_k, \dots e_n'\rangle$ $h(t)=h(t')$, причем $k\le n$ и α_k - наименьший из $\alpha_0, \dots \alpha_n$. Тогда $\Pi^k C_t = \Pi^k C_{t'}$ но если $e_k \neq e'_k$, а α_ℓ - следующий за α_k ординал, то $\Pi^\ell C_t \cap \Pi^\ell C_{t'} = \varnothing$

Расширенную систему условий обозначим (*).

Докажем следующую лемму.

Лемма I.I. Пусть $t\in T^*$, $t=\langle e_0, e_1, \dots e_\ell\rangle$, $h(t)=h$, $S=\{t\in T^* \mid h(t)=h\}$. Пусть $\{C_t \mid t\in S\}$ - семейство нормальных замкнутых подмножеств $\mathcal{N}\subseteq R(\gamma)$, удовлетворяющее (*). Пусть также $U_1\supseteq U_2\supseteq \dots \supseteq U_n\supseteq \dots$ - система множеств из условия теоремы.

Тогда найдется такое $\omega\subseteq U_k$, из условия теоремы, что для всякого $n\in\omega$ существует такое семейство $\{\mathcal{D}_t \mid t\in S\}$ нормальных замкнутых подмножеств, удовлетворяющее (*), что $\mathcal{D}_t\subseteq C_t$ для всех t, и если обозначить $\mathcal{D}=\bigcup_t \mathcal{D}_t$, то либо $\forall x\in\mathcal{D}\,[n\in\mathcal{F}(x)]$, либо найдется такое $t\in S$ и ω из условия теоремы, что $\forall n\,\forall x\,[x\in\mathcal{D}_t \to n\notin\mathcal{F}(x)]$

Доказательство. Лемма будет доказана индукцией по $\ell=\ell(t)$

I. Пусть $\ell=0$, т.е. $t=\langle e\rangle$. Тогда система $\{C_t \mid t\in S\}$ обладает лишь одним свойством из (*) помимо длин), а именно, $\pi^\circ C_t = C = const$ для всех $t\in S$. Ясно, что C - подмножество $\pi^\circ \mathcal{N}$ (если α_0 - наименьший ординал, то это условие - фикция, т.к. $\pi^\circ \mathcal{N} = \omega$), замкнутое и нормальное.

Пусть теперь $t^1, \dots t^k$ - нумерация всех элементов S, $t^i = \langle e^i\rangle$. Определим на C функцию $G_i(x) \subseteq C \times R$. Положим $\ell \notin G_i(x)$, если

$$\exists y_1 \exists y_2 \,[y_{1,2}\in C_{t^i} \,\&\, \pi^\circ y_1 = \pi^\circ y_2 = x \,\&\, \ell\in \mathcal{F}(y_1) \,\&\, \ell\notin \mathcal{F}(y_2)]$$

Легко видеть, что $G_i(x)$ - аналитическая функция на C для всякого $i\le k$.

Используя k раз теорему П.2.3, сузим C до замкнутого нормального M такого, что сужение G_i на M - замкнутая для всякого $i\le k$ функция. Не ограничивая общности, будем считать $M=C$.

Воспользуемся теперь индуктивным предположением теоремы. Ясно, что $\{\alpha_i \mid \alpha_i<\alpha_0\}$ имеет порядковый тип строго меньше γ. Значит согласно индуктивному предположению для всякого i существует такое бесконечное ω_i со свойствами, указанными в условии теоремы и замкнутое нормальное $C_i\subseteq C$, что $\forall x \forall \ell\, [x\in C_i \,\&\, \ell\in\omega_i \to \ell\in G_i(x)]$ или $\forall x \forall \ell\, [x\in C_i \,\&\, \ell\in\omega_i \to \ell\notin G_i(x)]$

Возможны два случая.

Случай I. Существует $i\le k$ и C_i, ω_i такие, что $\forall x \forall \ell\, [x\in C_i \,\&\, \ell\in\omega_i \to \ell\in G_i(x)]$

Положим $\mathcal{M} = C_i$, $\widehat{\omega} = \omega_i$, $V_j = \omega \cap U_j$, Тогда система V_j очевидным образом такова, что $\bigcap V_j = \varnothing$ и все V_j бесконечны. Определим на $\mathcal{M}$ функцию $\widetilde{\mathcal{F}}(x) \in \mathcal{M} \times R$ так: $\ell \in \widetilde{\mathcal{F}}(x)$, если $\exists y \in C_{ti} [\pi^0 y = x \,\&\, k \in \mathcal{F}(y)]$ и $\ell \notin \widetilde{\mathcal{F}}(x)$, если $\exists y \in C_{ti} [\pi^0 y = x \,\&\, k \notin \mathcal{F}(y)]$

Согласно предположению , в этом определении нет противоречия. Опять, применяя индуктивное предположение теоремы, находим нормальное замкнутое $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, а также такое бесконечное $\omega \subseteq \widehat{\omega}$, $\omega - V_j$, конечно для всякого j , что или $\forall x \forall x [x \in \mathcal{D} \,\&\, k \in \omega \to k \in \widehat{\mathcal{F}}(x)]$

или $\forall x \forall k [x \in \mathcal{D} \,\&\, k \in \omega \to k \notin \widehat{\mathcal{F}}(x)]$

В силу симметрии рассмотрим лишь первый вариант. Учитывая определение C_i и $\widehat{\mathcal{F}}$ это означает, что,

$\forall y \forall k [y \in C_{ti} \,\&\, \pi^0 y \in \mathcal{D} \,\&\, k \in \omega \to k \in \mathcal{F}(y)]$

Теперь обозначая $\mathcal{D}_{ti} = C_{ti} \cap (\pi^0)^{-1}(\mathcal{D})$,и получаем искомое.

Случай I разобран.

Случай 2. Такого $i \le k$ нет. Тогда k раз сузив множество C , и k раз сузив выбранное на первом этапе множество ω_1 мы получим такое нормальное замкнутое $\mathcal{D} \subset C$ и такое бесконечное $\omega \subseteq \omega_C$, что все $\omega - U_i$ конечны и $\forall i \le k \forall \ell \forall x [\ell \in \omega \,\&\, x \in \mathcal{D} \to \ell \notin C_i(x)]$

Положим теперь $\widehat{C}_{ti} = C_{ti} \cap (\pi^0)^{-1}(\mathcal{D})$. Возьмем любое $n \in \omega \cap U_\ell$. Положим $\mathcal{D}_{ti} = C_{ti} \cap \{y \mid n \in \mathcal{F}(y)\}$ Учитывая замкнутость $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}_{ti}$ - открыто-замкнуто в $\widehat{C}_{ti}$ т.е. $\mathcal{D}_{ti}$ - нормально и замкнуто. А из свойств множества $\mathcal{D}$

и определения функций $\tilde{\sigma}_i$, $\pi^0 \mathcal{D}_t^i = \mathcal{D}$ для всякого $i \leq k$.

Оба случая разобраны, первый пункт индукции доказан.

2. Теперь проделаем индуктивный шаг. Пусть для всех t , $\ell(t) < \ell$, лемма доказана, $t = \langle e_0, e_1, \ldots e_\ell \rangle$ Не ограничивая общности, предполагаем $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell$. Определим для всякого e , $h(e) = h(e_0) = h$, множество $S_e = \{t \in S \mid t_0 = e\}$ и $S - \bigcup\limits_{h(e)=h} S_e$

Образуем также для всякого такого e T_e таким образом: если $t \in S_e$, $t = \langle e, e_1, \ldots e_\ell \rangle$, то в T_e войдет $\langle e_1, \ldots e_\ell \rangle$. Ясно, что все T_e равны между собой. Положим $\hat{S} = T_e$ для какого-нибудь e .

Если $t \in S$, $t = \langle e, t' \rangle$, где $t' \in \hat{S}$ переобозначим $C_t = C^e_{t'}$.

Рассмотрим для какого-то e систему $\{C^e_t \mid t \in \hat{S}\}$ Применяя индуктивное предположение, находим или семейство $\{\mathcal{D}^e_t \mid t \in \hat{S}\}$ нормальных замкнутых подмножеств $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}^e_t \subseteq C^e_t$, а также бесконечное множество ω , $\omega - u_n$ конечно для всех n , причем для какого то t

$$\forall k \, \forall x \, [x \in \mathcal{D}^e_t \;\&\; k \in \omega \rightarrow k \notin \mathcal{F}(x)]$$

Очевидно, этот случай ведет к доказательству леммы.

Или найдется бесконечное множество ω указанного выше вида, что для всякого $n \in \omega$ существует семейство замкнутых нормальных множеств $\{\mathcal{D}^e_t \mid t \in \hat{S}\}$, $\mathcal{D}^e_t \subseteq C^e_t$ и если обозначить $\mathcal{D}^e = \bigcup\limits_{t \in \hat{S}} \mathcal{D}^e_t$, то

$$\forall x \in \mathcal{D}^e \, [n \in \mathcal{F}(x)]$$

Последовательно применяя индуктивное предположение леммы

и обеспечивая равенство проекций на $\bar{\pi}^{\circ}\mathcal{N}$, мы либо сразу на каком-то шаге увидим первую альтернативу, либо получим такое множество ω указанного выше вида, что для всякого n из ω и всякого e найдется семейство $\{\mathcal{D}^e_t \mid t\in\hat{S}\}$ $\mathcal{D}^e_t \subseteq C^e_t$ и $\forall x\,[x\in\mathcal{D}^e_t \to n\in\mathcal{T}(x)]$

Заметим, что если всякое семейство $\{\mathcal{D}^e_t \mid t\in\hat{S}\}$ удовлетворяет $(*)$ и проекции на $\bar{\pi}^{\circ}\mathcal{N}$ всех множеств равны, то семейство $\{\mathcal{D}_{\langle e,t\rangle} \mid \langle e,t\rangle\in S\}$ также удовлетворяет $(*)$.

После этого индуктивный шаг и саму лемму можно считать доказанной.

Докажем теперь индуктивный шаг теоремы.

Теперь мы вновь будем работать только с множеством T.

Для доказательства построим или систему нормальных замкнутых подмножеств $\mathcal{N}, \{C_t \mid t\in T\}$, а также множество натуральных чисел k_n такие, что $k_n\in\omega_n$, а $\{C_t \mid t\in T\}$ удовлетворяет П.2.2, i) - iii), и для всякого u и t $h(t)=h(u)$ выполняется $\forall x\,[x\in C_t \to k_n\in\mathcal{T}(x)]$ или же мы найдем одно замкнутое нормальное $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$ и множество ω из условия теоремы такие, что

$$\forall n\,\forall x\,[x\in\mathcal{M}\ \&\ n\in\omega \to n\notin\mathcal{T}(x)]$$

Такое построение происходит очевидным образом, используя П.2.4,2 при раздвоении и I.I. при сужении и выбора.

Ясно, что оба варианта ведут к доказательству теоремы (второй - непосредственно, а первой - полагая $\omega=\{k_n\}$ и $\mathcal{M}=\bigcap_u \bigcup_{h(t)=h(u)} C_t$ и используя П.2.2. ☒

Таким образом теорема доказана.

Теперь совершенно аналогично сделанному в П.I., легко доказать следующую теорему.

Теорема 2. Существует такой ультрафильтр P на алгебре подмножеств ω_0, что для всякого не более, чем счетного множества ординалов ζ и всякого нормального $\mathcal{N} \subseteq R(\zeta)$, а также для всякой аналитической функции $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to R$ найдется такое нормальное замкнутое $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ и такое множество $\omega \in \Phi$, что либо $\forall x \forall k \{x \in \mathcal{M} \& k \in \omega \to k \in \mathcal{F}(x)\}$

либо $\forall x \forall k \{x \in \mathcal{M} \& k \in \omega \to k \notin \mathcal{F}(x)\}$

Доказательство. В самом деле, сперва, используя П.2.3. сужаем $\mathcal{N}$ до такого нормального замкнутого $\hat{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$, что сужение $\mathcal{F}$ на $\hat{\mathcal{N}}$ - замкнутая функция.

После этого пользуемся тем, что существует лишь ω_1 возможных порядковых типов $|\zeta|$ и для всякого такого типа лишь ω_1 нормальных замкнутых множеств (напомним, что все предполагается осуществляемым в модели с аксиомой конструктивности).

А затем полностью повторяем рассуждения П.I., доказывая теорему.

ГЛАВА III

НЕЗАВИСИМОСТЬ A

I. Рассмотрим пространство $R(\omega_2)$ и семейство $\mathcal{N}$ его подмножеств, определенное как в II.4.

Пусть $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$. Это значит, что найдется счетное $\xi \subseteq \omega_2$ и нормальное замкнутое $\mathcal{M} \subseteq R(\xi)$ такие, что $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\{\omega_2\})$

Нетрудно показать, что существует наименьшее ξ (в смысле включения) такого рода. Его мы будем обозначать $\xi(\mathcal{N})$. Число $\lambda = \sup \xi$ будем обозначать $\lambda(\mathcal{N})$.

Рассмотрим параметрическое пространство $S(W_{\omega_2})$ определенное как в I.3.I.

В качестве множества вынуждающих условий возьмем множество $N = \mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{N} \in N$. Положим $\mathcal{N} \Vdash$ "$\check{\alpha} \in \dot{x}_\alpha$" если $\forall x\,[x \in \mathcal{N} \to \alpha \in \bar{\Gamma}_\alpha x]$. Кроме того, для всяких α и $\mathcal{N}$ положим

$$\mathcal{N} \Vdash \text{"} \langle \check{\alpha}, \dot{x}_\alpha \rangle \in \dot{W} \text{"}$$

Все предыдущие построения предполагались производимыми в некоторой счетной стандартной транзитивной модели $\mathfrak{M}$. Также предполагается $\mathfrak{M} \models$ "$V = L$".

Пусть теперь $\{\mathcal{N}_n\}$ - полная последовательность условий из N, а $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\bar{w})$ - соответствующая модель.

Теорема 2. В $\mathfrak{N}$ те же кардиналы, что и в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Учитывая мощность N, достаточно доказать, что ω_1 и ω_2 сохраняют свой смысл.

Пусть $\lambda = \omega_1$, в модели $\mathfrak{M}$.

Предположим противное, т.е. пусть $f \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \models$ "f - биекция ω_0 на λ". Но тогда некоторое $\mathcal{N} \in N$ и $c \in S$ таковы, что $\mathcal{N} \Vdash$ "c - биекция $\underline{\omega_0}$ на $\underline{\lambda}$" (где для $x \in \mathfrak{M}$ пусть $\underline{x}$ - такой элемент S, что $\bar{\underline{x}} = x$ всегда; его существование доказано, например, в (I)).

Положим $X_n = \{\mathcal{M} \in N \mid \exists \alpha < \omega_1 \{\mathcal{N} \Vdash$ "$\langle n, \alpha \rangle \in c$"$\}\}$ для всякого n. Легко видеть, что X_n - плотны и конфинальны вверх на N. Применяем теорему П.4. Находим счетный ординал $\xi \leq \omega_2$ и семейство $\{\mathcal{N}_t \mid t \in T\}$, удовлетворяющее П.2.2 i) - iii) и такое, что если $h(t) = h(n)$, то $\mathcal{N}_t[\omega_2] \in X_n$.

Положим $\mathcal{N}_n = \bigcup_{h(t)=h(n)} \mathcal{N}_t$ и $\eta_n = \{\alpha \mid \exists t \{h(t) = h(n)$ & $\mathcal{N}_t[\omega_2] \Vdash$ "$\langle n, \alpha \rangle \in c$"$\}\}$

Ясно, что η_n - конечное множество и $\mathcal{N}_n[\omega_2] \Vdash$ "$c[\check{n}] \in \check{\eta}_n$" (учитывая $\mathcal{N} \Vdash$ "c - однозначно" и $\mathcal{N}_n \geq \mathcal{N}$)

Положим теперь $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{N}_n$, $\eta = \bigcup_n \eta_n$

Тогда из П.2 следует, что $\mathcal{M}[\omega_2]$ нормальное подмножество $\mathcal{N}$, а из определения η следует, что $\mathcal{M}[\omega_2] \Vdash$ "область значений $\underline{c}$ включена в $\underline{\eta}$". Но η - счетное множество. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $\lambda = \omega_2$ в модели $\mathfrak{M}$ и для некоторых $\mathcal{N} \in N$, $c \in S$, $\mathcal{N} \Vdash$ "c - биекция из $\underline{\omega_1}$ на $\underline{\lambda}$", Построим в модели $\mathfrak{M}$ строго возрастающую последовательность ординалов $\{\theta_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, $\theta_\alpha < \lambda$, обладающую тем свойством, что для всякого $\mathcal{M} \in N$, если $\lambda(\mathcal{M}) < \theta_\alpha$,

и если $\beta<\omega_1$ - счетный ординал, то существует $M' \geq M$, $\lambda(M') < \theta_{\alpha+1}$ и ординал $\gamma < \omega_2$, что

$M' \Vdash$ „ $\langle \beta, \gamma \rangle \in C$ "

Учитывая $M \in OK\Gamma$ и для $\theta < \omega_2$, $\{N \mid \lambda(N) < \theta\}$ имеет мощность ω_1 , такая последовательность существует. Пусть $\theta = \sup_\alpha \theta_\alpha$. Ясно, что $\theta < \omega_2$ и что конфинальность θ равна ω_1 . Последнее означает, что $\{N \mid \lambda(N) \leq \theta\} = \bigcup_\alpha \{N \mid \lambda(N) < \theta_\alpha\}$

Значит, если $\lambda(M) \leq \theta$, $\beta \in \omega_1$, то существует $M' \geq M$, $\lambda(M') \leq \theta$, и $\gamma \in \omega_2$ такие, что $M' \Vdash$ „ $\langle \beta, \gamma \rangle \in C$ "

Определим теперь для $N \in \mathcal{N}$ N_θ следующим образом:

$N_\theta = \{x \in R(\omega_2) \mid \exists y \in N \; [\pi_{R(\theta)} y = \pi_{R(\theta)} x]\}$

Легко видеть, что для $N \in \mathcal{N}$ N_θ также принадлежит $\mathcal{N}$, и $N \geq N_\theta$. Также очевиден такой факт: если $M, N \in \mathcal{N}$ и $M_\theta \subseteq N_\theta$, то $M_\theta \cap N \in \mathcal{N}$. Докажем теперь, что если N , β , γ таковы, что $N \geq N^0$, $\lambda(N) \leq \theta$ и $N \Vdash$ „ $\langle \beta, \gamma \rangle \in C$ " , то существует $M \in \mathcal{N}$ такое, что $M_\theta \geq N_\theta$ и $M_0 \Vdash$ „ $\langle \beta, \gamma \rangle \in C$ "

В самом деле, согласно выбора θ ,можно найти $M \geq N_\theta$ $\lambda(M) \leq \theta$ (т.е. $M_\theta = M$) и ординал γ' такой,что $M_\theta \Vdash$ „ $\langle \beta, \gamma' \rangle \in C$ "

Рассмотрим $N' = N \cap M_\theta$. Как указано выше $N' \in \mathcal{N}$, $N' \geq N$ и $N' \geq M_0$. Но так как все условия больше или равны N^0 , то из этого следует $\gamma = \gamma'$.

Пусть теперь для всякого $\beta\in\omega_1$, $B_\beta = \{\gamma\in\omega_2 \mid \exists \mathcal{M}\geq \mathcal{N}^0\ [\mathcal{M}\Vdash_{\mathbb{P}} \langle\beta,\gamma\rangle\in C'']\}$

Ясно, что $\bigcup\limits_{\beta\in\omega_1} B_\beta = \omega_2$, поэтому какое-то из B_β , скажем B_0 имеет мощность ω_2 . Пусть $B_0 = \{\gamma_\nu \mid \nu\in\omega_2\}$ Для всякого ν обозначим $\mathcal{M}(\nu)$ - какое-то условие такое, что $\mathcal{M}(\nu)\geq\mathcal{N}^0$ и $\mathcal{M}(\nu)\Vdash_{\mathbb{P}} \langle 0,\gamma_\nu\rangle\in C''$

Как показано выше, для всякого ν можно найти такое $\mathcal{M}'(\nu)\geq\mathcal{M}(\nu)_\theta$, $\lambda(\mathcal{M}'(\nu))\leq\theta$, что $\mathcal{M}'(\nu)\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\langle 0,\gamma_\nu\rangle\in C$ ". Имеем семейство $\{\mathcal{M}'(\nu)\mid\nu\in\omega_2\}$. Поскольку $\{\mathcal{M}\mid\lambda(\mathcal{M})\leq\theta\}$ имеет мощность ω_1 , то есть $\nu_1\neq\nu_2$ такие, что $\mathcal{M}'(\nu_1)=\mathcal{M}'(\nu_2)=\mathcal{M}'$

Но тогда $\mathcal{M}'\Vdash_{\mathbb{P}}\underbrace{\langle 0,\gamma_{\nu_1}\rangle}\in C''$ и $\mathcal{M}'\Vdash_{\mathbb{P}}\underbrace{\langle 0,\gamma_{\nu_2}\rangle}\in C''$ что противоречит $\mathcal{M}'\geq\mathcal{N}^0$, $\nu_1\neq\nu_2$ и тому факту, что $\mathcal{N}^0$ вынуждает однозначность C .

Полученное противоречие доказывает теорему.

А теперь придумаем удобный способ описания действительных чисел модели $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\bar{W})$ через числа x_α .

Заметим сперва, что для всякого $x\in\mathfrak{N}$, $x\subseteq\omega_0$ найдется такое счетное подмножество $\xi\subseteq\omega_2$, $\xi\in\mathfrak{M}$, что $x\in\mathfrak{M}(\bar{W}_\xi)$, где $\bar{W}_\xi = \{\langle\alpha,\bar{x}_\alpha\rangle\mid\alpha\in\xi\}$

Этот факт доказывается совершенно аналогично I.3.8.

Отсюда следует, что если $\mathcal{N}\in\mathbb{N}$, $c\in S$ и $\mathcal{N}\Vdash$ " $c\subseteq\omega_0$ ", то существует $\mathcal{M}\geq\mathcal{N}$ и счетное множество $\xi\subseteq\omega_2$ такие, что $\mathcal{M}\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $c\in\mathfrak{M}(W_\xi)$ "

Для всякого счетного $\xi\subseteq\omega_2$ заметим, что $R(\xi) = \prod\limits_{\alpha<\xi} R_\alpha$

гомеоморфно R , и поэтому существует гомеоморфизм f_ξ : $R(\xi) \to R$ (например $R(\xi) = \prod_{\alpha \in \xi} \bigcap_i \mathfrak{D}_{\alpha,i}$, где $\mathfrak{D}_{\alpha,i}$ - дискретное двоеточие, т.е. $R(\xi) = \prod_{\alpha,i} \mathfrak{D}_{\alpha,i} = \bigcap_j \mathfrak{D}_j$) (после перенумераций пар целых чисел целыми числами). Можно предполагать $f_\xi \in \mathfrak{M}$.

Перепишем формулировку теоремы I. I.2. i)

Теорема 3. (I. I.2 . i)) Пусть $\mathfrak{M}$ - модель $ZF+V=L$, $\alpha \leq \omega_0$, $\mathfrak{M}(\alpha)$ - модель и кардиналы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(\alpha)$ совпадают. Тогда существует такой Δ_1' - предикат $A(\alpha, b, z)$, что для всякого z , удовлетворяющего некоторому условию $Od(z)$ класса Π_1', выполняется $\forall x \exists! y \, A(x, y, z)$ и для всякого $b \in \mathfrak{M}(\alpha)$, $b \subseteq \omega_0$, найдется $z \in \mathfrak{M}$, $Od(z)$ и $\mathfrak{M}(\alpha) \models A(\alpha, b, z)$.

Доказательство её довольно громоздко и требует проведения сложной индукции, рассмотрения структуры геделевских операций и т.п. Похожее по идее доказательство родственного факта содержится в работах Аддисона о проективных множествах. Здесь эта теорема принимается без доказательства.

Отсюда следует, что для всякого $y \in \mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\bar{W})$, найдется такое счетное множество $\xi \subseteq \omega_2$, $\xi \in \mathfrak{M}$ и такое $z \in \mathfrak{M}$, $Od(z)$, что $\mathfrak{N} \models A(f_\xi(\bar{W}_\xi), y, z)$

В самом деле, как показано выше, найдется $z \subseteq \omega_2$, счетное $\xi \in \mathfrak{M}$ и такое, что $y \in \mathfrak{M}(\bar{W}_\xi)$. Но очевидно, что $\mathfrak{M}(\bar{W}_\xi) = \mathfrak{M}(f_\xi(\bar{W}_\xi))$, так как f_ξ определено в $\mathfrak{M}$. Применяя теорему 3, находим, что существует

$z \in m$, $Od(z)$, такое, что $m(f_\xi(\bar{w}_\xi)) \models A(f_\xi(\bar{w}_\xi), y, z)$. Но Δ'_1 - предикаты абсолютны. Поэтому и $\mathfrak{N} \models A(f_\xi(\bar{w}_\xi), y, z)$. Теперь учитывая связь истинности и вынуждения, имеем следующую теорему.

Теорема 4. Если $N \in \mathfrak{N}$, $c \in S$ и $N \Vdash$ „$c \subseteq \omega_0$" то существует $M > N$, счетное множество $\xi \subseteq \omega_2$ и действительное число z , $Od(z)$, такие, что

$M \Vdash A(\check{f}_\xi(w_\xi), c, \check{z})$.

Как и в (4) , эта теорема дает основной материал для описания действительных чисел, модели $\mathfrak{N}$. Заметим также, что можно, если это необходимо) расширить ξ так, что найдется $M' \subseteq R(\xi)$ такое, что $M = M'[\omega_2]$.

Как и борелевские подмножества R , для всякого счетного множества ординалов ξ борелевские подмножества $R(\xi)$ (и, в частности, замкнутые нормальные множества) можно закодировать действительными числами, т.е. для всякого борелевского $B \subseteq R(\xi)$ найдется такой Δ'_1 - предикат $P_B(v)$, возможно, с константами из m , что $y \in B \equiv P_B(f_\xi(y))$ В дальнейшем вместо $P_B(f_\xi(y))$ будем писать просто $B(y)$.

Докажем теперь, последнюю теорему, из которой будет вытекать независимость A .

Теорема 5. Пусть Φ^* - ультрафильтр, построенный в П.3.2 (в модели m , $m \models V = L$) , $\mathfrak{N} = m(\bar{w})$ - расширение m ,рассмотренное в начале этой главы. Тогда для всякого действительного числа $y \in \mathfrak{N}$ существует элемент $x \in \Phi^*$

Такой, что $x \subseteq y$ или $x \cap y = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда существует $\mathcal{N} \in N$ и $c \in S$ такие, что

$$\mathcal{N} \Vdash_{\mathbb{P}} c \subseteq \omega_0 \;\&\; \forall x\,[x \in \Phi^{\times} \to x \not\subseteq y \;\&\; x \cap y \neq \emptyset]$$

Учитывая теорему 4, можно найти такое $\mathcal{M} \geq \mathcal{N}$, а также счетное $\xi \subseteq \omega_2$, $\xi \in \mathcal{M}$ и $z \in \mathcal{M}$, $Cl(z)$ что $\mathcal{M} \Vdash A(\dot{f}_\xi(W_\xi), c, \check{z})$, причем можно считать, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}'[\omega_2]$, где $\mathcal{M}' \subseteq R(\xi)$

Рассмотрим пространство $R(\xi)$ и функцию $\mathcal{F} : \mathcal{M}' \to R$ определенную так, что если $\mathcal{F}(x) = y$, то $\mathcal{M} \models A(f_\xi(x), y, z)$. Учитывая свойства предиката A и отображения f_ξ, $\mathcal{F}$ будет в самом деле однозначной функцией, причем аналитической.

Применяя теперь теорему П.2.3., находим замкнутое нормальное $\mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{M}'$ такое, что сужение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{M}''$ - замкнутая функция. Теперь используя теорему П.3.2., находим замкнутое нормальное $\mathcal{M}''' \subseteq \mathcal{M}''$ и $u \in \Phi^{\vee}$ такие, что $\forall k\, \forall x\,[x \in \mathcal{M}''' \;\&\; k \in u \to k \in \mathcal{F}(x)]$

Для определенности берем именно этот вариант теоремы П.2.3.

Имеем: $\mathcal{M} \models \forall x\,[\mathcal{M}'''(x) \to u \subseteq \mathcal{F}(x)]$ $(*)$

Легко видеть, что $(*)$ - абсолютное предложение (так как оно класса Π'_1). Значит, и $\mathcal{N} \models \forall x\,[\mathcal{M}'''(x) \to u \subseteq \mathcal{F}(x)]$

Заметим теперь, что $\mathcal{M}'''[\omega_2] \Vdash \mathcal{M}'''(W_\xi)$

Доказательство этого факта несложно и не приводится. Аналогичный факт доказан в (4) .

Значит, $\mathcal{M}^{[\omega_2]} \Vdash$ "$\mu \leq \mathcal{F}(\omega_1)$" что в месте с $\mathcal{M}^{[\omega_2]} \geq \mathcal{M}$, $\mu \in \Phi^*$ и предложением относительно $\mathcal{M}$ дает противоречие, доказывающее теорему.

Таким образом, в модели $\mathfrak{N}$ $2^{\omega_0} = \omega_2$ и Φ^*, имея мощность $\omega_1 < 2^{\omega_0}$, порождает ультрафильтр, что доказывает, независимость A.

В конце работы хочется сделать несколько замечаний.

I. Можно предложить иной путь доказательства независимости A, а именно, построить стандартным путем расширение $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ так, что $\mathfrak{N} \models \neg KG$, а потом расширить $\mathfrak{N}$ множеством действительных чисел V так, что $\mathfrak{N}(V)$ - модель, $\mathfrak{N}(V) \models$ " мощность $V = \omega_1$, и V порождает ультрафильтр ". Мои попытки реализовать этот способ наталкиваясь на одну и ту же трудность, а именно, не удавалось доказать, что в $\mathfrak{N}(V)$ опять не верна КГ. Более того, в ряде случаев расширение $\mathfrak{N}$ даже одним саксовским числом приводит к склейке кардиналов (а именно склейке ω_1, и всех остальных до 2^{ω_0} включительно).

2. Тем не менее, указанный в предыдущем замечании путь можно применить к построению моделей с нарушением аксиомы выбора. В частности, можно построить модель $\mathfrak{F}$, в которой существует множество действительных чисел V, не содержащее счетных подмножеств и порождающее ультрафильтр на алгебре всех подмножеств ω_0.

3. Основной предмет исследования второй главы - нормальные множества - замечательным образом связаны с последовательным вынуждением (iterated forcing).

А именно, во многих случаях бесконечную цепь расширений методом вынуждения, если на каждом этапе проходит расширение борелевским числом, можно заменить расширением при помощи некоторого подсемейства семейства нормальных множеств $R(\mathfrak{z})$ для соответствующим образом выбранного $\mathfrak{z}$. При этом получаются неожиданные результаты. Так, если $\mathfrak{M} \models$ „$V = L$“ , $\mathfrak{M}(\bar{a})$ расширение $\mathfrak{M}$ генерическим числом, $\mathfrak{M}(\bar{a}, \bar{b})$ - расширение $\mathfrak{M}(\bar{a})$ саксовским, то $\bar{a} \in \mathfrak{M}(\bar{b})$.

Литература

1. Коэн П. Теория множеств и континуум гипотеза
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию
3. Solovay R. A Model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable
4. Канович В. Некоторые свойства борелевских, лебеговских и саксовских мно