МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

КАНОВЕЙ ВЛАДИМИР ГРИГОРЬЕВИЧ

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ДЕСКРИПТИВНО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ВЫРАЖАЮЩИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ПАРАДОКСАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

(01.01.06 - математическая логика)

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1976

Работа выполнена на кафедре математической логики механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель - профессор, доктор физико-математических наук В.А.Успенский.

Официальные оппоненты: профессор, доктор физико-математических наук А.В.Гладкий,

кандидат физико-математических наук В.Н.Гришин.

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт математики СО АН СССР.

Защита состоится "   "   года

в "   " часов в аудитории I408 на заседании специализированного Совета №2 по математике (Д I3/53) при Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова по адресу: Москва, II7234, МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан "   "   года.

Учёный секретарь специализированного Совета №2 по математике (доктор физико-математических наук В.В.Филиппов).

Введенная Н.Н.Лузиным проективная иерархия множеств является основным предметом изучения дескриптивной теории множеств (ДТМ). При построении такой иерархии обычно отправляются либо от бэровского пространства, естественно отождествляемого с совокупностью всех иррациональных точек на действительной прямой, или же от множества всех подмножеств натурального ряда, естественно отождествляемого с канторовым дисконтинуумом. В любом варианте элементы этого исходного множества удобно называть "действительными числами". В диссертации по причинам технического порядка выбран второй из указанных вариантов.

В современной системе терминов и обозначений проективная иерархия может быть изложена следующим образом. Пусть ω - натуральный ряд, $R=\mathcal{P}(\omega)$ - множество всех его подмножеств. Элементы R называем действительными числами (д.ч.). Пусть $\mathcal{R}$ - совокупность всех подмножеств пространств вида $\omega^m \times R^k$, где $m,k\in\omega$. Для $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{R}$ определяем $C\mathcal{X}$ как совокупность дополнений элементов $\mathcal{X}$ к соответствующим пространствам $\omega^m\times R^k$, а $P_0\mathcal{X}$ и $P_1\mathcal{X}$ как совокупности проекций элементов $\mathcal{X}$ вдоль осей типа ω и R соответственно. Операции C, P_0, P_1 переводят подмножества $\mathcal{R}$ в подмножества $\mathcal{R}$.

Для всякого $X\subseteq R$ определим $\Sigma^0_0(X)$ как совокупность всех подмножеств пространств вида $\omega^m\times R^k$, определяемых разрешимыми (т.е. рекурсивными [6]) относительно элементов X предикатами с m переменными по ω и k переменными по R. Очевидно, что если $X\subseteq Y$, то $\Sigma^0_0(X)\subseteq\Sigma^0_0(Y)$.

Далее, определяем индукцией по $n\in\omega$: $\Pi^0_n(X)=C\Sigma^0_n(X)$,

1-1422

$\Sigma^0_{n+1}(X)=P_0\Pi^0_n(X)$, $\Sigma^1_0(X)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Sigma^0_n(X)$, $\Pi^1_n(X)=C\Sigma^1_n(X)$, $\Sigma^1_{n+1}(X)=P_1\Pi^1_n(X)$, $\Sigma^1_\infty(X)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Sigma^1_n(X)$, $\Delta^1_n(X)=\Sigma^1_n(X)\cap\Pi^1_n(X)$. По построению при $X\subseteq Y$ выполняется $\Sigma^1_n(X)\subseteq\Sigma^1_n(Y)$. Классы $\Sigma^1_n(X)$, $\Pi^1_n(X)$, $\Delta^1_n(X)$, $\Sigma^1_\infty(X)$ называем классами проективного типа (к.п.т.). Всякий к.п.т. есть подмножество R.

Для краткости пишем Σ^1_n, $\underline{\Sigma}^1_n$, $\Sigma^1_n(x_1,\ldots,x_m)$ вместо $\Sigma^1_n(\varnothing)$, $\Sigma^1_n(R)$, $\Sigma^1_n(\{x_1,\ldots,x_m\})$ соответственно и аналогично для Π, Δ, а также для нижнего индекса ∞. Тогда классы $\underline{\Sigma}^1_n$, $\underline{\Pi}^1_n$, $\underline{\Delta}^1_n$ совпадают для подмножеств пространств вида R^k при $n\geqslant 1$ со стандартными классами A_n, CA_n, B_n проективной иерархии по Н.Н.Лузину ([I] , стр.586; действительно, операция счётного суммирования сводится к проектированию P_0, а всякое открытое подмножество $\omega^m\times R^k$, очевидно, входит в $\underline{\Sigma}^0_0$).

II.

Типичная задача ДТМ имеет вид: "Выполняется ли свойство Λ для класса K при условии, что справедлива гипотеза H ", где K - к.п.т., Λ - какое-либо дескриптивное свойство типа "все множества данного класса измеримы по Лебегу", "все д.ч. данного класса конструктивны", "для данного класса выполняется принцип униформизации" и т.п., а в качестве гипотезы принимаются, например, такие утверждения как аксиома конструктивности, аксиома выбора, континуум-гипотеза и т.п.

Как и предсказывал Н.Н.Лузин ([I] , стр. 268, 308), традиционными методами ДТМ не удаётся решать нетривиальные задачи такого вида без привлечения достаточно сильных гипотез H для уровней иерархии начиная с третьего, а иногда и второго (т.е.для $\underline{\Sigma}^1_n$, $\underline{\Pi}^1_n$, $\underline{\Delta}^1_n$ при $n\geqslant 3$ или иногда $n\geqslant 2$). Основные же теоремы о первых уровнях таковы: все подмножества R класса $\underline{\Delta}^1_1$ суть в точности все борелевские подмножества R (М.Я.Суслин), все подмножества R класса $\underline{\Sigma}^1_1$ измеримы по Лебегу, обладают свойством Бэра и будучи несчётными, содержат совершенное подмножество (Н.Н.Лузин, М.Я.Суслин, П.С.Александров), имеют место принципы редукции и униформизации для $\underline{\Pi}^1_1$ и $\underline{\Sigma}^1_2$ (Н.Н.Лузин, П.С.Новиков), все д.ч. из Σ^1_2 конструктивны по Гёделю (Дж.Шёнфильд). Доказательства - в [I] , [30] .

Никаких подобных утверждений (кроме самых тривиальных, выражающих "существенность иерархии": $\underline{\Sigma}^1_n\cup\underline{\Pi}^1_n\subsetneqq\underline{\Delta}^1_{n+1}$, $\underline{\Sigma}^1_n-\underline{\Pi}^1_n\neq\varnothing$, $\underline{\Pi}^1_n-\underline{\Sigma}^1_n\neq\varnothing$) не доказано для более высоких уровней, т.е. больших n (природу этого обстоятельства Н.Н.Лузин исследует в [I] , стр. 460, 46I и др.).

В современной литературе по ДТМ можно выделить два направления. Первое из них связано с использованием достаточно сильных гипотез H недескриптивной природы - аксиомы конструктивности ([2] , [3] , [28]), аксиомы Мартина ([25]), аксиомы определимой детерминированности, аксиом больших кардиналов. Например, аксиома конструктивности влечёт неизмеримость по Лебегу некоторого $X\subseteq R$ класса Σ^1_2 (К.Гёдель, П.С.Новиков), в то время как аксиома Мартина и аксиома существования измеримого кардинала гарантируют измеримость всех $X\subseteq R$ класса $\underline{\Sigma}^1_2$ (Р.Соловай, Д.Мартин). Аксиома конструктивности позволяет также "проективизировать" (т.е. включить в проективную иерархию) некоторые известные конструкции ДТМ, опиравшиеся на абстрактную аксиому выбора (например, она позволяет сделать проективным пример измеримого по Лебегу и обладающего свойством Бэра множества, не являющегося дескриптивно измеримым, построенный А.В.Гладким в [16]).

Второе направление ДТМ связано с методом вынуждения Коэн ([4]) и состоит в установлении непротиворечивости отдельных предложений ДТМ относительно тех или иных аксиом теории множеств. Доказана непротиворечивость относительно $\mathbb{ZF}$ (аксиоматическая теория множеств Цермело - Френкеля без аксиомы выбора) отрицаний континуум-гипотезы и различных форм аксиомы выбора ([4] , [21] , [31]), наличия д.ч. с минимальной степенью конструктивности ([22]), аксиомы Мартина ([25]), наличия неконструктивного д.ч. в классе Δ^1_3 ([19], [20] , [32]), различных предложений о структуре степеней конструктивности д.ч. ([7] , [10] , [22] , [29]); доказана непротиворечивость относительно $\mathbb{ZFC}\mathbb{J}$ ($\mathbb{ZF}$ + аксиома выбора + "существует строго недостижимый кардинал") утверждения об измеримости по Лебегу всех проективных подмножеств дисконтинуума $\mathbb{R}$ и наличия у каждого несчётного проективного $X \subseteq \mathbb{R}$ совершенного подмножества ([23]).

Предлагаемая диссертация связана именно с этим вторым направлением.

III.

Содержание диссертации состоит в основном в следующем.

(а). <u>О проективных полных упорядочениях</u>. Поиск проективного полного упорядочения (п.п.у.) множества континуальной

мощности долгое время был одной из центральных задач ДТМ ([I] , стр.565 и др.). Классическими методами ещё в начале XX века удалось доказать отсутствие п.п.у. континуума в классах Σ^1_1 и Π^1_1 (действительно, стандартный пример Витали позволил бы получить из такого п.п.у. неизмеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$ класса Σ^1_1). Далее, отсутствие всякого (в том числе и проективного) полного упорядочения $\mathbb{R}$ совместимо с $\mathbb{ZF}$ ([4] , [21]). С другой стороны, К.Гёдель вывел из аксиомы конструктивности наличие п.п.у. континуального множества в классе Δ^1_2 ([3]); таким образом, утверждение о существовании п.п.у. $\mathbb{R}$ (в дальнейшем это утверждение будем обозначать через PWOR) совместимо с $\mathbb{ZFC}$ ($\mathbb{ZF}$ + аксиома выбора). Однако пример Гёделя, как и все ему родственные, подразумевал выполнение континуум-гипотезы CH (т.е. равенства $2^\omega = \omega_1$), поэтому в [29] поставлен вопрос (Р 3214) о совместимости PWOR с $\mathbb{ZFC} + \sim\mathsf{CH}$. Мы решаем эту задачу, доказывая теоремы:

Теорема I (теорема IIIД6(а) диссертации). Утверждение PWOR совместимо с теорией $\mathbb{ZFC} + \sim\mathsf{CH}$.

Теорема 2 (теорема IIIД6(в) диссертации). Если $\mathfrak{M}$ - счётная стандартная транзитивная модель $\mathbb{ZF} + (\exists \mu \subseteq \omega_1)[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mu)]$ и θ - регулярный несчётный кардинал в $\mathfrak{M}$, то найдётся такая счётная стандартная транзитивная модель $\mathfrak{N}$ теории $\mathbb{ZFC}$ +[существует п.п.у. $\mathbb{R}$ длины θ] , что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и совокупности кардиналов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ совпадают (здесь $\mathbb{V}$ - универсум, $\mathbb{L}(\mu)$- совокупность всех множеств, конструктивных относительно μ , т.е. минимальное расширение совокупности $\mathbb{L}$ всех конструктивных множеств с помощью μ).

Эти теоремы объявлены автором в [7] и доказаны в [10]. Утверждение, сходное с теоремой 2, независимо от автора объявлено без доказательства в [27].

Важным этапом в доказательстве теоремы 2 является:

Теорема 3 (теорема I Д5(в) диссертации). Если $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то найдётся $a \subseteq \omega$ такое, что $\mathfrak{M}(a)$ является счётной стандартной транзитивной моделью $\mathbb{ZF} + [\mathbb{V}=\mathbb{L}(a)]$, совокупности кардиналов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(a)$ совпадают и a является $\mathfrak{M}$-минимальным (т.е. $a \notin \mathfrak{M}$ и $(\forall b \in R \cap \mathfrak{M}(a))[b \in \mathfrak{M} \vee a \in \mathfrak{M}(b)]$; здесь $\mathfrak{M}(a)$ - минимальное расширение $\mathfrak{M}$ с помощью a).

Эта теорема является усилением одной из теорем [19] (там полагается $\mathfrak{M} \models \omega_1 = (\omega_1)^{\mathbb{L}}$ и не обеспечивается $\mathfrak{M}$-минимальность a) и переформулировкой теоремы I из 7 и основной теоремы [11].

(б). <u>О сравнительной силе различных формулировок аксиомы выбора</u>. Рассмотрим такую формулировку "счётной аксиомы выбора": $AC_\omega(K) \leftrightharpoons (\forall X \in K)\exists \mathcal{F}[X \subseteq \omega \times R \rightarrow \mathcal{F} \subseteq X \,\&\, \mathcal{F}$ есть функция $\&\, \mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \mathrm{dom}(X)]$, где K - какая-то совокупность элементов R (в частности, к.п.т.). Ясно, что если $K_1 \subseteq K_2$, то из $AC_\omega(K_2)$ следует $AC_\omega(K_1)$.

В $\mathbb{ZF}$ (без аксиомы выбора!) можно доказать $AC_\omega(\Sigma^1_2)$ (доказательство опирается на принцип униформизации для класса Σ^1_2, упомянутый выше в разделе II автореферата), но $AC_\omega(\Pi^1_2)$ невыводимо в $\mathbb{ZF}$ (это доказано в [21] и легко вытекает из нижеследующей теоремы 6). В диссертации доказывается теорема несколько иного вида:

Теорема 4 (теорема IIIЕ7(и) диссертации). Предложение $\sim AC_\omega(\Sigma^1_\infty)$ совместимо с теорией $\mathbb{ZF} + AC_\omega(\mathfrak{Def}_{\mathbb{L}})$, где $\mathfrak{Def}_{\mathbb{L}} = \{X \in R \mid X$ определимо формулой аксиоматической теории множеств с конструктивными константами$\}$.

В частности, в силу очевидного включения $\Sigma^1_\infty \subseteq \Sigma^1_\infty(R \cap \mathbb{L}) \subseteq \mathfrak{Def}_{\mathbb{L}}$ получаем: если теория $\mathbb{ZF}$ непротиворечива, то в $\mathbb{ZF} + AC_\omega(\Sigma^1_\infty)$ нельзя доказать $AC_\omega(\Sigma^1_\infty)$, т.е. в схеме AC_ω наличие параметров из R играет существенную роль.

Теорема 4 доказана автором в [10].

Эта теорема принадлежит обширной серии теорем ДТМ, которые можно назвать теоремами о непустоте разности двух классов элементов R (в частности, двух к.п.т.) по отношению к некоторому свойству, или "разностными" теоремами. Общая формулировка таких теорем: "Если теория $\mathbb{ZF}$ непротиворечива, то в $\mathbb{ZF}$ + (свойство Λ выполняется для класса K_1) не выводимо (свойство Λ выполняется для класса K_2)", где K_1 и K_2 являются некоторыми классами элементов R (в частности к.п.т.). Теоремы 5 - 7 также принадлежат этой серии.

(в). <u>Некоторые "разностные" теоремы</u>. Первая нетривиальная теорема о связи конструктивных и проективных характеристик д.ч. была получена в [30]: всякое д.ч. из Σ^1_2 конструктивно. Эта теорема легко обобщается: если $x_1, \ldots, x_n, x$ суть д.ч. и $x \in \Sigma^1_2(x_1, \ldots, x_n)$, то x конструктивно относительно $x_1, \ldots, x_n$ ([18]). Ясно, что Σ^1_2 можно заменить на Π^1_2 (т.к. $x \in \Sigma^1_2 \equiv \omega - x \in \Pi^1_2$ и т.д.). С другой стороны, в [19], [20], [32] доказана совместимость с $\mathbb{ZF}$ существования неконструктивного д.ч. a класса Δ^1_3 (в [20] оно обладает дополнительными свойствами: $\mathbb{V} = \mathbb{L}(a)$ и a является $\mathbb{L}$-минимальным, т.е. $a \notin \mathbb{L}$ и $(\forall b \in R \cap \mathbb{L}(a))[b \in \mathbb{L} \vee a \in \mathbb{L}(b)]$).

В диссертации доказывается, что если теория $\mathbb{ZF}$ непротиворечива, то при $n \geq 2$ существование неконструктивного д.ч. в классе Σ^1_n не выводимо в $\mathbb{ZF}$ из существования такового в классе Δ^1_{n+1}. Более точно, доказывается теорема:

Теорема 5 (часть теоремы IIГ3(з) диссертации). При всяком $n \geq 2$ предложение $\mathfrak{A}^1_n \leftrightharpoons (\exists x \in R)[\mathbb{V} = \mathbb{L}(x) \,\&\, x$ является $\mathbb{L}$-минимальным (в частности, неконструктивным) $\&\, \{x\} \in \Pi^1_n$ (откуда очевидно $x \in \Delta^1_{n+1}$)$] \,\&\, (\forall y, z \in R)[y \in \mathbb{L} \,\&\, z \in \Sigma^1_n(y) \rightarrow z \in \mathbb{L} \,\&\, \mathbb{L} \models z \in \Sigma^1_n(y)]$ совместимо с $\mathbb{ZF}$, а при $n = 0$, $n = 1$ несовместимо.

Эта теорема объявлена автором в [8] и доказана в [9], [I2]. При $n = 2$ из неё легко следует основной результат работы [20].

Прежде, чем формулировать теоремы 6 и 7, введём определения. Пусть $x \in R$, $X, Y \subseteq R$, а K – некоторый класс проективного типа. Определяем $[x] = \{y \in R \mid \mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(y)\}$ (степень конструктивности или $\mathbb{L}$-степень действительного числа x). Если $(\exists Z \in K)[Z \subseteq R \,\&\, \sim[X \cap Z = \varnothing \equiv Y \cap Z = \varnothing]]$, то X и Y называем K-различимыми, в противном случае K-неразличимыми. Если X не является конечным, но не содержит подмножеств, равномощных натуральному ряду, то называем X Д-множеством. Отсутствие последних доказуемо в $\mathbb{ZFC}$ (но не в $\mathbb{ZF}$, как показано в [4]).

Из теоремы [30] об абсолютности легко следует, что если д.ч. x и y оба конструктивны или оба неконструктивны, то $[x]$ и $[y]$ являются $\Sigma^1_2(R \cap \mathbb{L})$-неразличимыми (в диссертации это доказывается в предположении $\mathbb{L}$-минимальности x и y). Далее, используя принцип униформизации для $\mathbf{\Sigma}^1_2$, можно доказать в $\mathbb{ZF}$ (без аксиомы выбора!), что всякое $X \subseteq R$ класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$ не Д-множество. Для более высоких классов утверждения

такого рода не имеют места в силу теорем:

Теорема 6 (часть теоремы IIГ3(з) диссертации). При всяком $n \geq 2$ предложение $\mathfrak{A}^2_n \leftrightharpoons [$ существует Д-множество класса Π^1_n, но не существует Д-множеств класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$ $]$ совместимо с $\mathbb{ZF}$, а при $n = 0, 1$ несовместимо.

Теорема 7 (часть теоремы IIГ3(з) диссертации). При всяком $n \geq 2$ предложение $\mathfrak{A}^3_n \leftrightharpoons (\exists a, b \in R)[a, b$ являются $\mathbb{L}$-минимальными $\&$ $[a]$, $[b]$ являются $\Sigma^1_n(R \cap \mathbb{L})$-неразличимыми, но Π^1_n-различимыми$]$ совместимо с $\mathbb{ZF}$, а при $n = 0, 1$ несовместимо.

Теоремы 6 и 7 объявлены автором в [8] и доказаны в [9].

В частности, при $n = 2$ из теоремы 6 следует, что существование Д-множеств в классе Π^1_2 совместимо с $\mathbb{ZF}$ (таким образом, в $\mathbb{ZF}$ нельзя доказать принцип униформизации для к.п.т., включающих Π^1_2).

IУ.

Основные методы доказательств таковы.

Теоремы I – 7 доказываются с помощью метода вынуждения Коэна ([4]). При этом множества вынуждающих условий (м.в.у выбираются среди семейств замкнутых подмножеств пространств вида R^k и ${}^{\xi}R = \{f \mid f$ есть функция из ξ в $R\}$ для особым образом подбираемых $k \in \omega$ и ξ (топология на ξ дискретна) Важную часть диссертации составляет исследование некоторых комбинаторных свойств выбранных м.в.у. и их влияния на структуру непрерывных функций (н.ф.), определённых на соответствующем пространстве со значениями в R. Для довольно широкого класса м.в.у. (в частности, для всех рассматриваемых в диссертации) эти комбинаторные свойства м.в.у. тесным образом связаны со свойствами д.ч. в соответствующих генерических или булевозначных ([5]) расширениях, причём в качестве "связующего звена" выступает "теорема о представлении", позволяющая достаточно адекватно представлять д.ч. рассматриваемого расширения с помощью н.ф. (из исходной модели). Вывод с помощью теоремы о представлении основных свойств д.ч. рассматриваемого расширения из свойств м.в.у. и н.ф. в исходной модели и доказательство самой этой теоремы (для трёх основных типов м.в.у.) проводится в §Г первой главы, §Б второй и §Г третей глав.

В качестве упомянутых комбинаторных свойств м.в.у. исследуются в частности некоторые простые требования, выполнение которых гарантирует определимость и минимальность в расширениях. Изложение этого материала (§Б и §В первой главы) соответствует [9] . С несколько иной целью исследуются свойства отношения $X /\!/ \mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)[\mathcal{G}(x)=\mathcal{G}(y) \to \mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(y)]$, где X - элемент м.в.у., а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ - н.ф. на соответствующем пространстве (§А, §Б, §В третей главы). Это исследование является частным случаем рассмотрений работы [10] .

При доказательстве теорем 5 - 7 принципиальное значение имеет метод построения "определимо-генерических" (в смысле внутренней генеричности) м.в.у., родственный методу доказательства теоремы Сколема — Левенгейма. Он позволяет строить такие м.в.у., любые два различных элемента которых содержат грубо говоря, "одинаковую $\Sigma^1_n(R \cap L)$ -информацию, но разную Π^1_n -информацию о расширении". Изложение этого метода (§В и §Г второй главы) следует [9] и представляет собой усовершенствование изложения, принятого в [12] .

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.А.УСПЕНСКОМУ за помощь и постоянное внимание к диссертации.

Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математической логики МГУ и на Третей Всесоюзной конференции по математической логике (Новосибирск, 1974). Они изложены в работах [7] - [11] .

Литература.

1. Н.Н.Лузин. Собрание сочинений, т.2, М., Изд. АН СССР, 1958.
2. П.С.Новиков. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, т.38, стр. 279 - 316.
3. К.Гёдель. Совместимость обобщённой континуум-гипотезы и аксиомы выбора с аксиомами теории множеств (пер. А.А.Маркова), УМН, т.3, вып.I (1948), стр. 96 - 149 .
4. П.Коэн. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., "Мир", 1969.
5. Т.Йех. Теория множеств и метод форсинга. М.,"Мир",1973.
6. Х.Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., "Мир", 1972.
7. В.Г.Кановей. Определимость с помощью степеней конструктивности. "Третья Всесоюзная конференция по математической логике", Новосибирск, изд.СОАНСССР, 1974, стр. 92 - 94.
8. В.Г.Кановей. О независимости некоторых предложений дескриптивной теории множеств и арифметики второго порядка. ДАН СССР, т.223, №3 (1975), стр. 552 - 554 .
9. В.Г.Кановей. Три теоремы о непустоте классов в аксиома-

тической теории множеств (в печати).

IO. В.Г.Кановей. Определимость с помощью степеней конструктивности. "Исследования по теории множеств и неклассическим логикам", М., "Наука", I976, стр. 5 - 95 .

II. В.Г.Кановей. О мажорировании начальных сегментов степеней конструктивности. Математические Заметки, I7, №6 (I975), стр. 939 - 946 .

I2. В.Г.Кановей. Некоторые вопросы определимости в арифметике третьего порядка и обобщение теоремы Енсена о минимальном Δ^1_3 -числе. Деп. в ВИНИТИ, № 839-75 (I975), стр. I - 48 .

I3. В.Г.Кановей. О степенях конструктивности и дескриптивных свойствах множества конструктивных действительных чисел в исходной модели и в её расширениях. ДАН СССР. т.2I6, № 4 (I974), стр. 728 - 729 .

I4. В.Г.Кановей. Построение моделей с заданной структурой степеней конструктивности действительных чисел. Деп. в ВИНИТИ, № 325 - 74 (I974), стр. I - 42 .

I5. В.Г.Кановей. О гипотезе сингулярных кардиналов. Математические Заметки, т.I3, № 5 (I973), стр. 7I7 - 725 .

I6. А.В.Гладкий. О взаимоотношениях между дескриптивной измеримостью, абсолютной измеримостью и свойством Бэра. Мат.Сборник, т.4I, вып.I (I957), стр. 3 - 6.

I7. В.А.Любецкий. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчётного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа СА. ДАН СССР, т.I95, №3 (I970), стр. 548 - 550 .

18. K. Devlin. Aspects of constructibi lity. Lectures Notes in Math. N354, Springer Verlag, Berlin, 1 973.

19. R.B. Jensen, R.M. Solovay. Some ap plications of almost disjoined sets. Math. Logic and Found. of Set Teory ,North-Holl., Amst., 1970, p.84-103.

20. R.B. Jensen. Definable set of mini mal deggree. Ibid. p.122-128.

21. A.Levy. Definability in axiomatic set theory II , ibid. p.129-145.

22. G.E. Sacks. Forcing with perfect closed sets. Proc. Simposia Pure Math., 13,N 1 /1971/, p.33 1-357.

23. R.M. Solovay. A model of set theor y in which every set of real is Lebesgue measurable. Ann. of M ath., 92, N1 /1970/,p. 1-56.

24. A. Levy, R.M. Solovay. Measurable cardinals and the continuum hypothesis. Israel J. Math., 5 /1967/, p.234-248.

25. D.A. Martin, R.M. Solovay. Interna l Cohen extensions. Ann. of Math. Logic, 2, N2 /1970/, p. 143-178,

26. S.G. Simpson. Choice schemata in s econd order arithmetic. Notices Amer. Math. Soc., 147 /1973/, A-499.

27. L. Harrington. Long projective wel lorderings, Ibid., 151 /1974/, A-23.

28. J.W. Addison. Some consequenses of the axiom of constructibility. Fundamenta Math., 46 /1950/, p. 337-357.

29. A.R.D. Mathias. A survey of resent results in set theory. Stanford University, 1968.

30. J.R. Shoenfield. The problem of pr edicaty vity. Essays on the Found. of Math., Jerusalem Acad emy Press, Jerusalem, 1961, p. 132-139.

31. A Levy. Definability in axiomatic set theory I . Logic, Methodol. and Phil. of Science, 1965, p. 127-151.

32. R.B. Jensen, H. Johnsbraten. A new construction of a non-constructible Δ^1_3 subset of ω . Fun d. Math., 81, N4, /1974/ p. 279-290.

Подп. к печати 24/III-76г. Л-58920 Ф. 60×90/16
Физ. п. л. 0,75 Уч.-изд. л. 0,5 Заказ 1422
Тираж 200 экз.

Изд-во Московского университета, Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры