М Г У П С - М И И Т
Инженерно-Экономический Факультет
Кафедра математики ИЭФ

Формулы, задачи и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей.

Дистанционный интерактивный обучающий комплекс для студентов ИЭФ

проф. В. Г. Кановей

28 ноября 2015 г.

Целью настоящего обучающего комплекса является выработка у студентов ИЭФ МИИТ умения решать задачи вводного курса теории вероятностей. Обучающий комплекс состоит из трех частей.

1. Обучающая часть, содержащая основные формулы раздела «теория вероятностей», а также примеры на использование этих формул.
2. Таблицы.
3. 32 варианта индивидуальных заданий для студентов, из которых
   - вариант 0 с ответами дается как образец оформления работы;
   - варианты 1 – 31 предназначены для самостоятельной работы студентов. Каждый вариант содержит 5 отдельных (и не повторяющихся между вариантами) задач, для которых просчитаны ответы, а также просчитаны наиболее существенные промежуточные результаты вычислений;
   - дополнительно для преподавателя дается сводка всех ответов по каждому варианту.

Эти части сведены в три файла формата pdf, а именно:

1) файл для преподавателя **stat-full.pdf**, содержащий части 1, 2, 3 с ответами по всем вариантам;
2) файл для студентов **stat-stud.pdf**, содержащий части 1 и 2 и часть 3 со всеми вариантами, но без ответов (кроме варианта 0, который приведен с ответами);
3) краткий файл для преподавателя **stat-svodka.pdf**, содержащий часть 3 с ответами ко всем вариантам – его при необходимости можно распечатать для использования при проверке решенных заданий в аудитории традиционного типа вне доступа к компьютеру.

Особенностями настоящего обучающего комплекса является применение ориентированных на пользователя (студента) современных компьютерных технологий, таких, как:

- технологии **power point** / **beamer**, обеспечивающие современный стиль презентации как в варианте самостоятельной работы студента на компьютере, так и в варианте аудиторного занятия с проектором;
- технологии **hyperref** для облегчения просмотра пособия;

- интерактивные технологии заполняемых форм **JavaScript** дляи самостоятельной проверки студентами на компьютере результатов своих вычислений;
- технологии **forms data format** для отправки окончательных или промежуточных результатов выполнения задания на проверку, на адрес email по указанию преподавателя.

Дополнительным эффектом обучающего комплекса является отработка навыков работы с заполняемыми формами для проверки результатов, в частности, практика приведения математических данных (формулы, числа) к форме, принятой в языках программирования.

Самостоятельная работа с пособием и выполнение варианта предполагают доступ студента к современному компьютеру, содержащему стандартный инженерный калькулятор (или иную вычислительную программу) и программу Adobe Reader для чтения файлов формата pdf и заполнения форм для проверки результатов (имеется в бесплатном доступе для загрузки и установки).

Содержание курса

1 Комбинаторика
2 Вероятность события
3 Алгебра событий
4 Условная вероятность и независимые события
5 Формула полной вероятности и формула Байеса
6 Повторные испытания
7 Теоремы Муавра – Лапласа
8 Дискретные случайные величины
9 Биномиальный закон распределения
10 Закон распределения Пуассона
11 Закон больших чисел, неравенство Чебышева
12 Системы двух дискретных случайных величин
13 Условное распределение и корреляция дискретных случайных величин
14 Непрерывные случайные величины
15 Равномерное распределение
16 Нормальное распределение
17 Показательное распределение
18 Системы 2х непрерывных случайных величин
19 Выделение составляющих случайных величин и корреляция
20 Равномерное распределение на прямоугольнике

Приложения: таблицы

30 Таблица 1: функция φ
32 Таблица 2: функция Φ
34 Таблица 12: распределение Пуассона

21 Указания для студентов

Индивидуальные задания

22 Вариант 0
23 Вариант 1

24 Вариант 2

25 Вариант 3

26 Вариант 4

27 Вариант 5

28 Вариант 6

29 Вариант 7

30 Вариант 8

31 Вариант 9

32 Вариант 10

33 Вариант 11

34 Вариант 12

35 Вариант 13

36 Вариант 14

37 Вариант 15

38 Вариант 16

39 Вариант 17

40 Вариант 18

41 Вариант 19

42 Вариант 20

43 Вариант 21

44 Вариант 22

45 Вариант 23

46 Вариант 24

47 Вариант 25

48 Вариант 26

49 Вариант 27

50 Вариант 28

51 Вариант 29

52 Вариант 30

53 Вариант 31

Введение в теорию вероятностей

возврат огл

Правило 1 (факториал)

$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n \text{ множителей}}$ (факториал), в частности,

$$1! = 1\,, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2\,, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\,, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,,$$

и так далее. Отдельно $0! = 1$.

Значение $n!$ равно числу *перестановок* n предметов.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, и имеется всего 6 перестановок трех предметов:

1 2 3   1 3 2   2 1 3

2 3 1   3 1 2   3 2 1

Правило 2 (сочетания)

Пусть $0 \le m \le n$. Тогда

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$$

В числителе дроби стоит m множителей от n вниз, а в знаменателе дроби стоит m множителей от 1 вверх.

Значение C_n^m равно числу числу сочетаний из n предметов по m.

Правило 3 (размещения)

Пусть $0 \le m \le n$. Тогда

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1)$$

В произведении стоит m множителей от n вниз.

Значение A_n^m равно числу числу размещений из n предметов по m.

Правило 4 (вероятность)

Если все исходы равновероятны, то

$$\mathbb{P}(A) = \frac{N(A)}{N} \quad - \text{ это вероятность события } A$$

где N – число всех исходов, а $N(A)$ – число исходов, которые благоприятны для события A.

Правило 5 (достоверные и невозможные события)

Событие A ***достоверно***, если его вероятность равна 1: $\mathbb{P}(A) = 1$.
Событие A ***невозможно***, если его вероятность равна 0: $\mathbb{P}(A) = 0$.

Правило 6 (противоположное событие)

Вероятность противоположного события

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

дополняет вероятность исходного события до единицы.
Достоверные и невозможные события взаимно противоположны.

Правило 7 (вероятность суммы событий)

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cdot B).$$

Правило 8 (сумма несовместных событий)

События A, B ***несовместны***, если событие $A \cdot B$ невозможно, то есть $\mathbb{P}(A \cdot B) = 0$. В противном случае, события ***совместны***.
Если события A, B несовместны, то

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$\mathbb{P}(A_1 + \cdots + A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

Правило 9 (условная вероятность)

Если все исходы равновероятны, то

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cdot B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{N(A \cdot B)}{N(A)} \quad - \text{ условная вероятность } B \text{ при условии } A$$

где $N(A)$ – число исходов, которые благоприятны для события A, а $N(A \cdot B)$ – число исходов, которые благоприятны для события $A \cdot B$.

Правило 10 (вероятность произведения событий)

Вероятность произведения

$$\mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B).$$

двух событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго при условии, что первое событие уже наступило.

Правило 11 (независимые события)

События A, B *независимы*, когда

$$\mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)\,, \text{ или, что равносильно, } \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

Вероятность произведения **независимых** событий равна произведению их вероятностей, а условная вероятность равна безусловной.

Правило 12 (вероятность появления хотя бы одного события)

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (\mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\overline{A_n}))$$

– вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Правило 13 (формула полной вероятности)

Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют ***полную группу***, то есть

1) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ – достоверное событие, и
2) события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны,

то
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \cdots + \mathbb{P}_{H_n}(A) \cdot \mathbb{P}(H_n),$$
то есть полная вероятность события равна сумме условных вероятностей, помноженных на вероятности гипотез.

Правило 14 (формула Байеса)

В тех же условиях,
$$\mathbb{P}_A(H_k) = \frac{\mathbb{P}_{H_k}(A) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Правило 15 (формула Бернулли)

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)\cdot(k+1)}{k!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где n — число независимых испытаний,
p — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,
$P_n(k)$ — вероятность ровно k успехов в серии из n независимых испытаний.

Правило 16 (локальная формула Лапласа)

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)\,,}$$

где n — число независимых испытаний,
p — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,
$P_n(k)$ — вероятность ровно k успехов в серии из n независимых испытаний,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\,,$$

φ — особая табулированная функция (таблица стр. 30).

Правило 17 (интегральная формула Лапласа)

$$\boldsymbol{P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),}$$

где n — число независимых испытаний,
p — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,
$P_n(k_1, k_2)$ — вероятность того, что число k успехов в серии из n независимых испытаний удовлетворяет неравенству $k_1 \le k \le k_2$,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\,,$$

Φ — особая табулированная функция (таблица стр. 32).

Равенства локальной и интегральной формул Лапласа — приближенные, и они тем более точны, чем больше число испытаний n.

возврат огл

Дискретные случайные величины

возврат огл

Правило 18 (ряд распределения дискретной СВ)

Дискретной случайной величиной (СВ) называется величина, принимающая числовые значения с определенными вероятностями.

значение x случайной величины X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
вероятность p этого значения	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

Условия: 1) $p_k \geq 0$, 2) $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

Правило 19 (математическое ожидание дискретной СВ)

$$\mathbb{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$ дискретной СВ равно сумме всех ее значений, помноженных на соответствующий вероятности.

Правило 20 (дисперсия и среднее квадратичное отклонение)

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}((X - \mathbb{M}(X)^2)) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 - \textbf{дисперсия}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} - \textbf{среднее квадратичное отклонение}$$

Дисперсия любой СВ равна математическому ожиданию ее квадрата минус квадрат ее математического ожидания. Среднее квадратичное отклонение равно квадратному корню из дисперсии.

Правило 21 (дисперсия дискретной СВ)

$$\mathbb{D}(X) = \underbrace{x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \ldots + x_n^2 p_n}_{\mathbb{M}(X^2)} - (\mathbb{M}(X))^2.$$

Правило 22 (биномиальный закон распределения)

Биномиальный закон распределения задается рядом

значение $\boldsymbol{x}$ случайной величины $\boldsymbol{X}$	**0**	**1**	**2**	**...**	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
вероятность $\boldsymbol{p}$ этого значения	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	**...**	$\boldsymbol{P_{n-1}}$	$\boldsymbol{P_n}$

где $P_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,
n — число независимых испытаний,
p — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи,
а случайная величина X равна числу успехов в серии из n испытаний.

Правило 23 (математическое ожидание и дисперсия биномиальной СВ)

$$\mathbb{M}(X) = np \quad \text{и} \quad \mathbb{D}(X) = npq\,.$$

Правило 24 (закон распределения Пуассона)

Закон распределения Пуассона с параметром λ задается бесконечным рядом

значение $\boldsymbol{x}$ случайной величины $\boldsymbol{X}$	**0**	**1**	**2**	**...**	$\boldsymbol{k}$	**...**
вероятность $\boldsymbol{p}$ этого значения	$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	**...**	$\boldsymbol{P_k}$	**...**

где $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.
Для приложений, следует брать $\lambda = np$, где
n – число независимых испытаний,
p – вероятность успеха в одном испытании,
а случайная величина X равна числу успехов в серии из n испытаний.
Применяется только в случае, когда $\lambda = np < 10$ и n велико.

Правило 25 (математическое ожидание и дисперсия СВ Пуассона)

$$\mathbb{M}(X) = \lambda \quad \text{и} \quad \mathbb{D}(X) = \lambda\,.$$

Правило 26 (закон больших чисел)

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем значение $1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}$:

$$\mathbb{P}(|\boldsymbol{X} - \mathbb{M}(\boldsymbol{X})| < \boldsymbol{\varepsilon}) \geq \mathbf{1} - \frac{\mathbb{D}(\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{\varepsilon}^2}.$$

Это соотношение называется неравенством Чебышева.

Правило 27 (таблица распределения системы дискретных СВ)

Две СВ, объединенные в систему, принимают определенные значения (т. е. пары значений) с определенными вероятностями.

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2n}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mn}

$$p_{ik} = \mathbb{P}(X = x_i\,,\ Y = y_k)$$

Условия: 1) $p_{ik} \geq 0\,,$ 2) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1\,.$

Правило 28 (выделение составляющих СВ из системы)

Ряды распределения для самих СВ X и Y вычисляются так.

значение x случайной величины X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
вероятность p этого значения	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_m

$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \ldots + p_{in}$ – сумма по строке i таблицы 27.

значение y случайной величины Y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n
вероятность q этого значения	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_n

$q_k = p_{1k} + p_{2k} + p_{3k} + \ldots + p_{mk}$ – сумма по столбцу k таблицы 27.

Математические ожидания $\mathbb{M}(X)$, $\mathbb{M}(Y)$, дисперсии $\mathbb{D}(X)$, $\mathbb{D}(Y)$, средние квадратичные отклонения $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ случайных величин X, Y можно найти по формулам правил 19, 21, 20.

§ 13. Условное распределение и корреляция дискретных случайных величин возврат огл

Правило 29 (условное распределение СВ в системе)

Если система двух дискретных СВ задана таблицей распределения по правилу 27, то ряды условных распределений для СВ $X/Y = y_k$ и $Y/X = x_i$ вычисляются так.

значение x случайной величины $X/Y = y_k$	x_1	x_2	x_3	...	x_m
вероятность p этого значения	p_1	p_2	p_3	...	p_m

$$p_i = \frac{p_{ik}}{p_{1k}+p_{2k}+p_{3k}+\ldots+p_{mk}}$$

В знаменателе стоит сумма по столбцу k таблицы правила 27.

Правило 30 (корреляция: общая формула)

Коэффициент корреляции СВ X и Y вычисляется по формуле

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}.$$

Правило 31 (корреляция дискретных СВ)

Если система двух дискретных СВ задана таблицей распределения по правилу 27, то коэффициент корреляции СВ X и Y вычисляется по формуле правила 30, в которой:

– математические ожидания $\mathbb{M}(X)$, $\mathbb{M}(Y)$ и дисперсии $\mathbb{D}(X)$, $\mathbb{D}(Y)$ случайных величин X, Y вычисляются по правилам 19 и 21 на основе рядов распределения по правилу 28,

– величина $\mathbb{M}(X \cdot Y)$ вычисляется по формуле

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_i \cdot y_k \cdot p_{ik}$$

на основе таблицы правила 27.

возврат огл

Непрерывные случайные величины

возврат огл

Правило 32 (распределение и плотность непрерывной СВ)

Непрерывная СВ X характеризуется:

– функцией распределения $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$,

– функцией плотности $f(x) = F'(x)$ – тогда $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Свойства: 1) $f(x) \geq 0$, 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Правило 33 (вероятность попадания в заданный интервал)

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Правило 34 (непрерывная СВ на отрезке)

Непрерывная СВ X концентрируется на отрезке $a \leq x \leq b$, если $f(x) = 0$ при $x < a$ и при $x > b$, и

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Правило 35 (математическое ожидание и дисперсия)

$$\mathbb{M}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad \mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbb{M}(X))^2.$$

Если СВ X концентрируется на отрезке $a \leq x \leq b$, то

$$\mathbb{M}(X) = \int_a^b xf(x)dx, \qquad \mathbb{D}(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (\mathbb{M}(X))^2.$$

В обоих случаях $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)}$.

Правило 36 (равномерное распределение)

Равномерное распределение СВ X на отрезке $a \leq x \leq b$ характеризуется:

плотностью $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$

функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$

Математическое ожидание $\mathbb{M}(X) = \frac{a+b}{2}$,
дисперсия $\mathbb{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

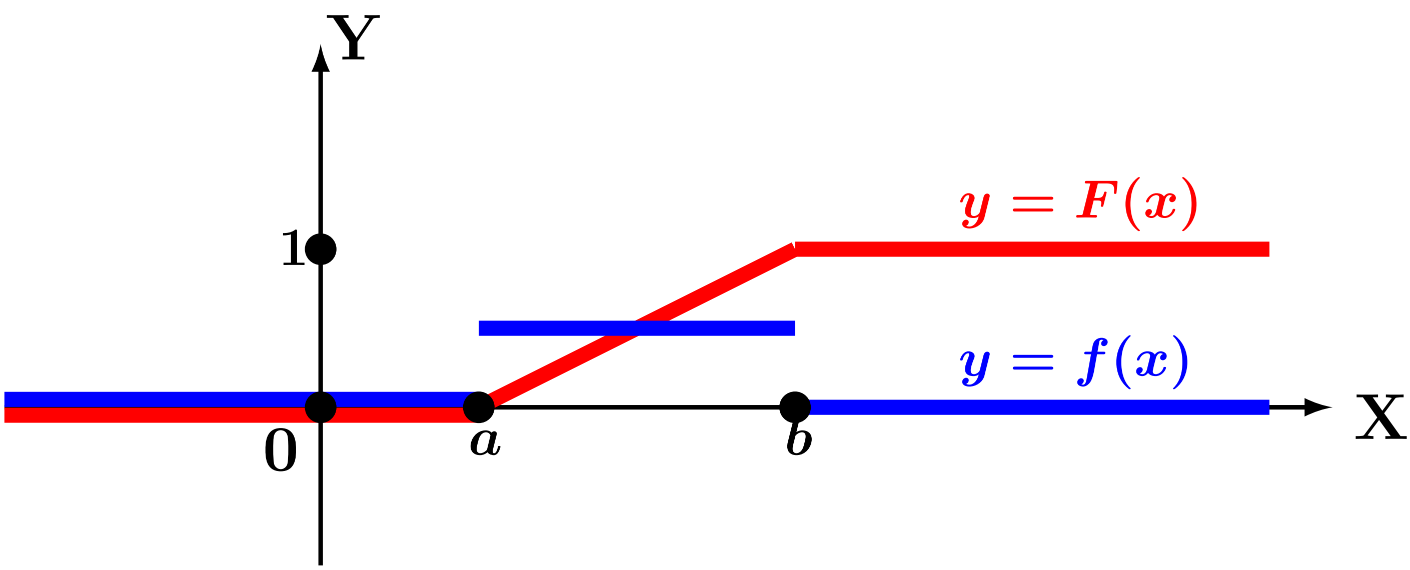

Рис.: Равномерное распределение.

Правило 37 (нормальное распределение)

Нормальное распределение СВ X с параметрами a, σ характеризуется:

плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

функцией распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Математическое ожидание $\mathbb{M}(X) = a$, дисперсия $\mathbb{D}(X) = \sigma^2$.

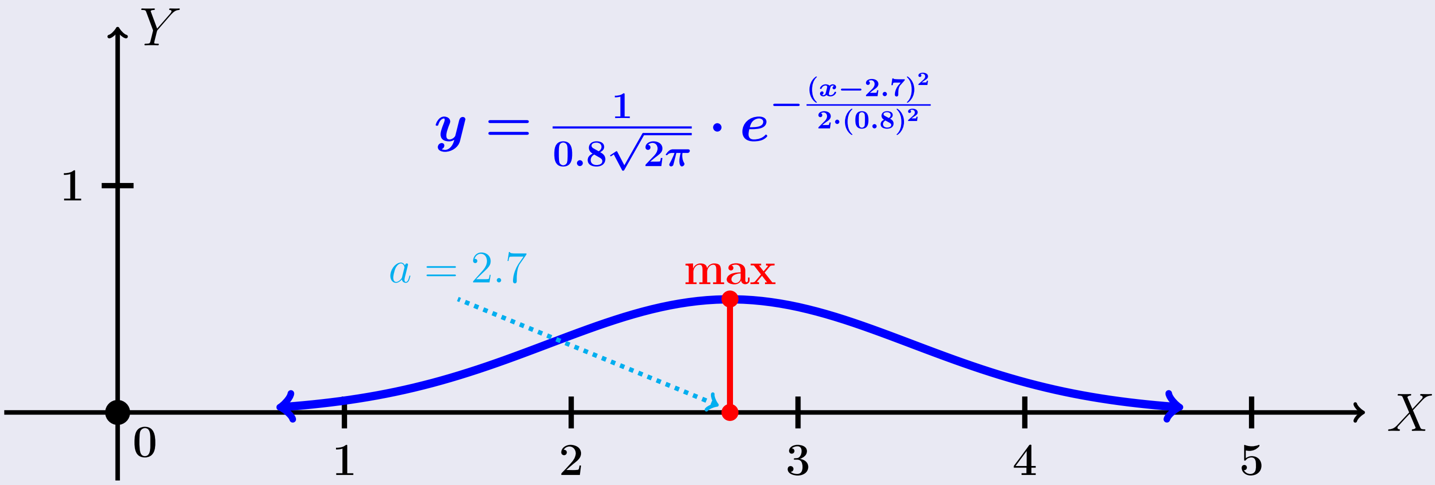

Рис.: Плотность нормального распределения, $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$.

Правило 38 (Вероятность попадания в интервал)

$$\mathbb{P}(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где Φ – табулированная функция Лапласа (таблица стр. 32).

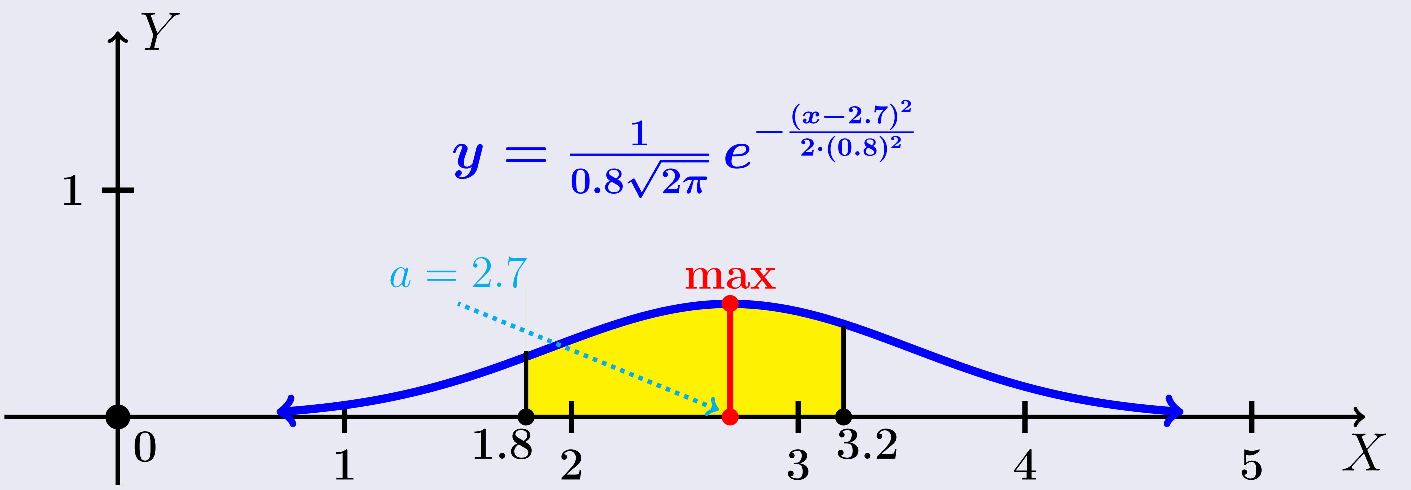

Рис.: $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$. $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2)$ есть площадь залитая желтым.

Правило 39 (показательное распределение)

Показательное распределение СВ X с параметром λ характеризуется:

плотностью $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}$

функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Математическое ожидание $\mathbb{M}(X) = \frac{1}{\lambda}$,

дисперсия $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$,

вероятность попадания в интервал $\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$.

Правило 40 (распределение и плотность)

Система 2х непрерывных СВ X, Y характеризуется:

– двумерной функцией плотности $f(x, y)$,

– двумерной функцией распределения

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Свойства: 1) $f(x, y) \geq 0$, 2) $\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Правило 41 (вероятность попадания в прямоугольник)

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

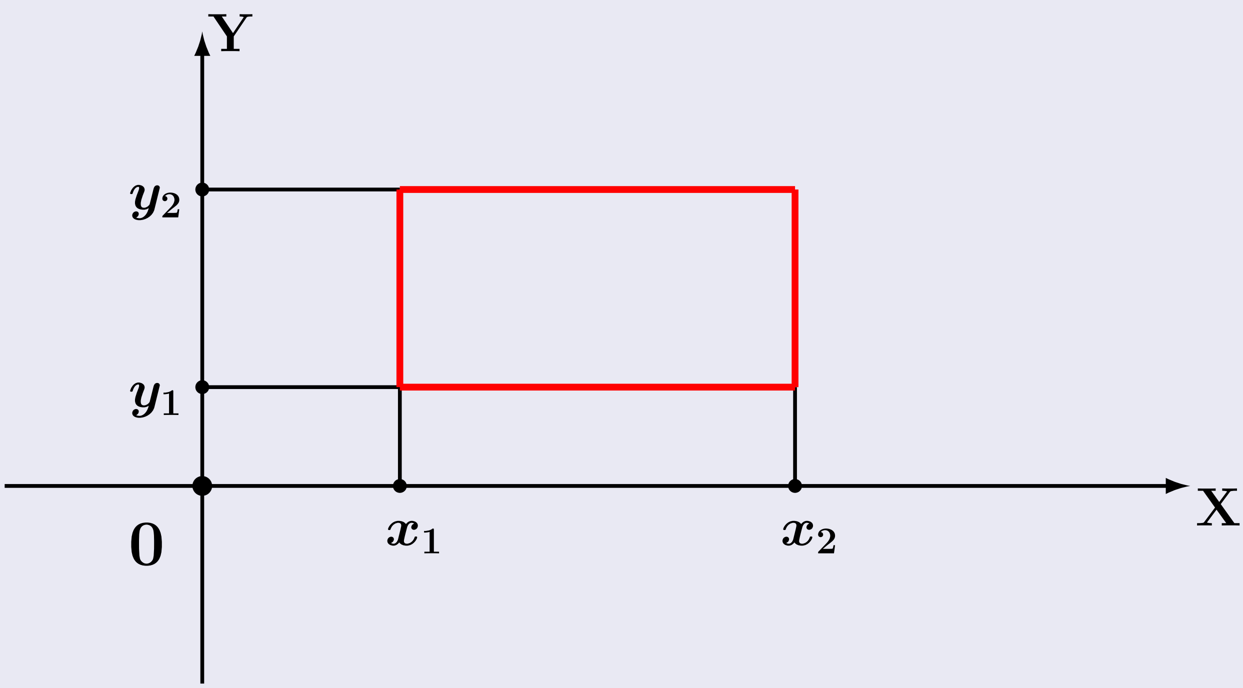

Рис.: Прямоугольник $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq x \leq y_2$.

Правило 42 (выделение составляющих СВ из системы)

Если система двух непрерывных СВ задана двумерной функцией плотности $f(x, y)$ по правилу 40, то функции плотности для составляющих СВ X и Y вычисляются так:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\,, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\,. \tag{1}$$

Математические ожидания $\mathbb{M}(X)$, $\mathbb{M}(Y)$, дисперсии $\mathbb{D}(X)$, $\mathbb{D}(Y)$, средние квадратичные отклонения $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ СВ X, Y можно найти по формулам правил 35, 20.

Правило 43 (корреляция непрерывных СВ)

Если система двух непрерывных СВ задана двумерной функцией плотности по правилу 40, то коэффициент корреляции СВ X и Y вычисляется по формуле правила 30, в которой:

– математические ожидания $\mathbb{M}(X)$, $\mathbb{M}(Y)$ и дисперсии $\mathbb{D}(X)$, $\mathbb{D}(Y)$ случайных величин X, Y вычисляются по правилу 35 на основе функций плотности f_1 и f_2 по формулам правила 42,

– величина $\mathbb{M}(X \cdot Y)$ вычисляется по формуле

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy \tag{2}$$

на основе функции плотности $f(x, y)$ правила 40.

Правило 44 (система 2х непрерывных СВ на прямоугольнике)

Система 2х непрерывных СВ X, Y концентрируется на прямоугольнике $a_1 \le X \le a_2$, $b_1 \le Y \le b_2$ (см. чертеж правила 45), если $f(x,y) = 0$ вне этого прямоугольника, и

$$\int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\, dx\, dy = 1. \tag{3}$$

В этом случае пределы интегрирования в формулах правил 42(1) и 43(2) соответственно изменяются до $\int_{b_1}^{b_2}$ и $\int_{a_1}^{a_2}$.

Правило 45 (равномерное распределение на прямоугольнике)

Равномерное распределение на прямоугольнике $a_1 \le X \le a_2$, $b_1 \le Y \le b_2$ (см. чертеж) характеризуется следующей функцией распределения: если $f(x,y) = 0$ вне этого прямоугольника, и

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ находится в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ находится вне прямоугольника.} \end{cases}$$

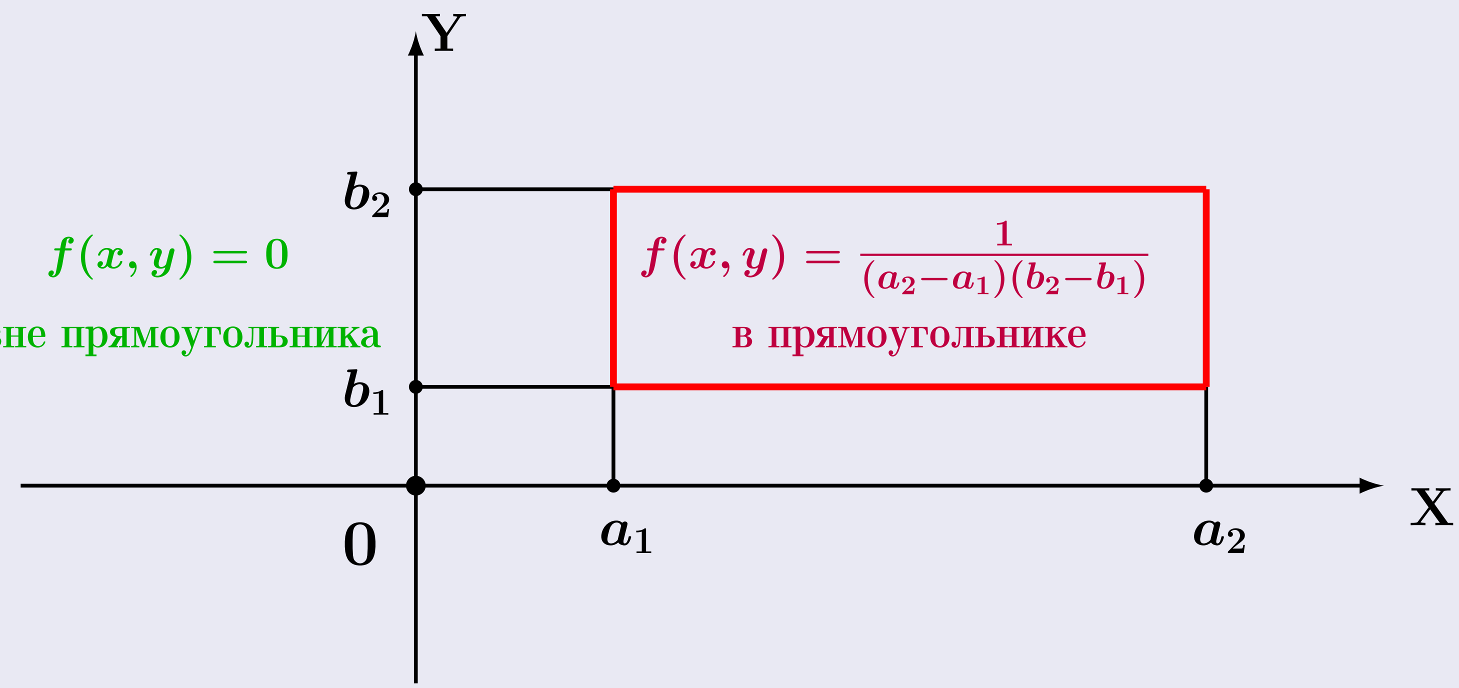

Рис.: Равномерное распределение на прямоугольнике.

Таблица 1: функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

Продолжение след. стр.

Таблица 1: продолжение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2: **функция** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

таблица 2: продолжение

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Внимание!!

В следующей таблице a использовано вместо λ

Значения $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ **(распределение Пуассона)**

m	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	
0	0,9018	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5458	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

§ 21. Указания для студентов

1. Студент должен использовать современный компьютер с программами Acrobat или Reader для чтения файлов PDF.
2. Студент должен иметь калькулятор для инженерных рассчетов, либо как программу в компьютере либо как отдельное устройство. Если имеется доступ к интернету, то вычисления можно производить прямо в окошке поиска Google.
3. Проработать теоретический материал лекций по конспектам.
4. Разобрать вариант 0, дающий правильное оформление решения. При этом ознакомиться и освоить интерактивный метод проверки результатов.
5. Найти свой вариант.
6. Решить свой вариант.
7. Результаты оформляются, беря за образец вариант 0.
8. Те результаты, для которых имеется возможность интерактивной проверки, должны быть проверены.
9. **Каждый лист своего варианта с результатами проверки следует распечатать так, чтобы были видны отметки ВЕРНО или НЕВЕРНО, после чего заполнить пустые места по результатам решения.**
10. Дополнительно для сдачи работы, студент должен иметь при себе промежуточные вычисления по произвольной форме.
11. Вычисления производятся как минимум с 3 знаками после десятичной точки. Окончательные результаты для нецелых чисел представляются с двумя знаками.
12. Результаты для интерактивной проверки нецелых чисел представляются с двумя знаками после десятичной точки.

возврат огл

Вариант 0

возврат огл

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{10}^{4}\,,\ C_{10}^{4}\,.$

Решение

$5! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{10}^{4} = \underbrace{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 7}_{4\ \text{множителей}} = \boxed{5040}\,.$

$C_{10}^{4} = \frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 7}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 4} = \boxed{210}\,.$

Выборочная проверка вариант 0 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{10}^{4} =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $C_{10}^{4} =$ введи 210 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$.
Всего извлекается 5 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 3003.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^{3} \cdot C_4^2 = 165 \cdot 6 = 990.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{990}{3003} = 0.330.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.330$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_4^3}{3003} = \frac{55 \cdot 4}{3003} = 0.073$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_4^4}{3003} = \frac{11 \cdot 1}{3003} = 0.004$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.407$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.330 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.073 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.004 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.407 Клик

Задача 3

В тире имеется 45 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.05 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{45} = 0.222\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{35}{45} = 0.778\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.222 + 0.05 * 0.778 = 0.041\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.222}{0.041} = 0.054\,.$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.041 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.054 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = 0.267\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_9^2}{C_{17}^4} = 0.424\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_7^1}{C_{15}^2} = 0.533\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{10}^2}{C_{17}^4} = 0.397\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{15}^2} = 0.200\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{11}^2}{C_{17}^4} = 0.347\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.424\cdot 0.267 + 0.397\cdot 0.533 + 0.347\cdot 0.200 = 0.394\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397\cdot 0.533}{0.394} = 0.537\,.$

Выборочная проверка вариант 0 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.394 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.537 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.35. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3425 *и* 3604.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.35$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.65$,
$k_1 = 3425$, $k_2 = 3604$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3425 - 3500}{\sqrt{2275.0}} = \frac{-75}{47.697} = -1.572\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3604 - 3500}{\sqrt{2275.0}} = 2.180\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3425, 3604) = \Phi(2.180) - \Phi(-1.572) = \Phi(2.180) + \Phi(1.572)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.180) = 0.4854 \quad \text{и} \quad \Phi(1.572) = 0.4418\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3425, 3604) = 0.4854 + 0.4418 = 0.9272$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.572 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.180 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9272 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0006. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0006 = 6.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0006$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{6.0^4 \cdot e^{-6.0}}{4!} = \frac{1296.00 \cdot 0.002479}{24} = 0.133866$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.133866 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.390$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 365 *и* 415 *(вероятность* P_1*)*

2) между 353 *и* 427 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.390 = 390$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.390 * (1 - 0.390) = 237.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 390 - 365 = 415 - 390 = 25$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 390| < 25) \geq 1 - \frac{237.9}{25^2} = 0.619.$$

2. Берем $\varepsilon = 390 - 353 = 427 - 390 = 37$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 390| < 37) \geq 1 - \frac{237.9}{37^2} = 0.826.$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.619 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.826 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	5	7	9	11	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.073 + 3 * 0.221 + 5 * 0.231 + 7 * 0.345 + 9 * 0.116 + 11 * 0.014 =$$

$$= 5.504 \, .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.504)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.073 + 3^2 * 0.221 + 5^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 9^2 * 0.116 + 11^2 * 0.014 =$$

$$= 35.832 \, .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 35.832 - 5.504^2 = 5.538 \, ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.353 \, .$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.504 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.538 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{1}{1.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{1.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

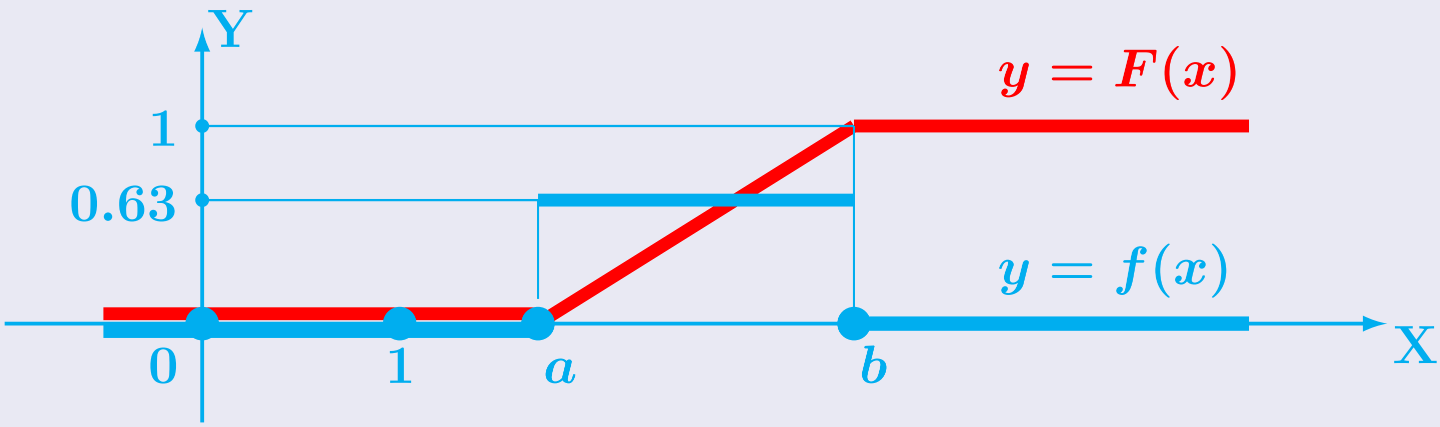

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.7}{2} = 2.50$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.7)^2}{12} = 0.213$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.462$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.9) = \frac{3.0-1.7}{1.6} - \frac{1.9-1.7}{1.6} = 0.813 - 0.125 = 0.688$

Выборочная проверка вариант 0 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.213 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) =$ введи 0.688 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.8 \leq X \leq 3.2)$ *попадания в интервал* $1.8 \leq x \leq 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.8-2.7}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{0.8} = 0.63$,

$$\mathbb{P}(1.8 \leq X \leq 3.2) = \int_{1.8}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.63) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.63) = 0.2357 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.8 \leq X \leq 3.2) = 0.2357 + 0.3708 = 0.6065$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.63 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6065 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.14**	**0.16**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 19 * 0.60 = 15.800$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 265.000 - (15.800)^2 = 15.360$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14+3*0.16+5*0.30+7*0.40 = 4.920$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 28.680 - (4.920)^2 = 4.474$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.800 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 15.360 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 4.920 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.474 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=11}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 11 * 0.333 + 19 * 0.667 = 16.336$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 11^2 * 0.333 + 19^2 * 0.667 - (16.336)^2 = 14.215$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	1	3	5	7
11	0.04	0.06	0.10	0.20
19	0.10	0.10	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	7
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1*0.100+3*0.150+5*0.250+7*0.500 = 5.300$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2*0.100+3^2*0.150+5^2*0.250+7^2*0.500-(5.300)^2 = 4.110$.

Выборочная проверка вариант 0 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	16.336	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	14.215	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	5.300	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	4.110	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.800$, $\mathbb{M}(Y) = 4.920$, $\mathbb{D}(X) = 15.360$, $\mathbb{D}(Y) = 4.474$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &=\\
&= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 5 * 0.10 + 11 * 7 * 0.20 &+\\
&+ 19 * 1 * 0.10 + 19 * 3 * 0.10 + 19 * 5 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 &=\\
&= 76.520 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{76.520 - 15.800 * 4.920}{\sqrt{15.360 * 4.474}} = -0.147 .$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 76.520 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.147 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x,y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C(0.1\, x + 0.9\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.0} (0.1\, x + 0.9\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.050 + 0.900 \cdot y - 0.002 - 0.180 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.048 + 0.720 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.048\, y + \frac{0.720}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C\big(0.048\, y + 0.3600\, y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.048 \cdot 0.6 + 0.3600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.048 \cdot 0.2 + 0.3600 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.1584 - 0.0240\big) = 0.1344\, C\,.$$

Значит, $0.1344 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.1344} = 7.440$,

$$f(x,y) = 7.440 * (0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{0.744}_{A}\, x + \underbrace{6.696}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.744\, x + 6.696\, y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	7.440	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	0.744	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	6.696	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.744\,x + 6.696\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (0.744 \cdot x + 6.696 \cdot y)\, dy = \Big(0.744 \cdot x \cdot y + 6.696 \cdot \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 0.744 \cdot x \cdot 0.6 + 6.696 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.744 \cdot x \cdot 0.2 - 6.696 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.298} \cdot x + \boxed{1.071}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (0.744 \cdot x + 6.696 \cdot y)\, dx = \Big(0.744 \cdot \frac{x^2}{2} + 6.696 \cdot x \cdot y\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 0.744 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 6.696 \cdot 1.0 \cdot y - 0.744 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 6.696 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{5.357} \cdot y + \boxed{0.357}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.298}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.071}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{5.357}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.357}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(0.298\,x + 1.071\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(0.298\,x^2 + 1.071\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.298\,\tfrac{x^3}{3} + 1.071\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.635 - 0.022 = 0.613,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(5.357\,y + 0.357\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(5.357\,y^2 + 0.357\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(5.357\,\tfrac{y^3}{3} + 0.357\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.021 = 0.429,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.298\,x + 1.071\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(0.298\,x^3 + 1.071\,x^2\big)\,dx - 0.376 = \big(0.298\,\tfrac{x^4}{4} + 1.071\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.376 =$$

$$= 0.432 - 0.003 - 0.376 = 0.053,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(5.357\,y + 0.357\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(5.357\,y^3 + 0.357\,y^2\big)\,dy - 0.184 = \big(5.357\,\tfrac{x^4}{4} + 0.357\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.184 =$$

$$= 0.199 - 0.003 - 0.184 = 0.012.$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.298	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	1.071	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	5.357	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.357	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.613	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.429	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.053	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.012	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \leq x \leq 1.0$, $0.2 \leq y \leq 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.744\,x + 6.696\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.613, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.429, \quad \mathbb{D}(X) = 0.053, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.012$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(0.744\,x + 6.696\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} \big(0.744\,x^2 y + 6.696\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \Big(0.744\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.696\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \Big(0.744\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.696\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.246\,y + 3.214\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.246 \cdot \frac{y^2}{2} + 3.214 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.276 - 0.013 = 0.263\,.$$

Поэтому

$$r(X, Y) = \frac{0.263 - 0.613{\cdot}0.429}{\sqrt{0.053{\cdot}0.012}} = 0.001\,.$$

Выборочная проверка вариант 0 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.263 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.001 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{10}^{4} = 5040\,.$ $C_{10}^{4} = 210\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.330\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.407\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.041\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.054\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.394\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.537\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.572\,.$ $x_2 = 2.180\,.$ $P = 0.9272\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.133866\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.619\,.$ $P_2 = 0.826\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.504\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.538\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.213\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.0) = 0.688\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.63\,.$ $\mathbb{P}(1.8 \leq X \leq 3.2) = 0.6065\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.800\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 4.920\,.$ $\mathbb{D}(X) = 15.360\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.474\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.336\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.300\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 14.215\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 4.110\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 76.520\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.147\,.$

Задача 15. $C = 7.440\,,$ $f(x,y) = 0.744 \cdot x + 6.696\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.298 \cdot x + 1.071\,,$ $f_2(y) = 5.357 \cdot y + 0.357\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.613\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.429\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.053\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.012\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.263\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.001\,.$

возврат огл

Вариант 1

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_9^5, C_9^5.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_9^5 = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{15120}$.

$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{126}$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_9^5 =$ введи 15120 Клик

формат abcd, $C_9^5 =$ введи 126 Клик

Задача 2

В ящике 10 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров – ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{6} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 10}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 5005.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 120 \cdot 10 = 1200.$$

(извлекаем 3 шара из 10 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1200}{5005} = 0.240.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.240$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{5005} = \frac{45 \cdot 5}{5005} = 0.045,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{5005} = \frac{10 \cdot 1}{5005} = 0.002,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.287$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.240 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.045 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.002 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.287 Клик

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 9 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{9}{56} = 0.161\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{47}{56} = 0.839\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.161 + 0.06 * 0.839 = 0.052\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.161}{0.052} = 0.031\,.$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.052 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.031 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = 0.267; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^4} = 0.381;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_7^1}{C_{15}^2} = 0.533; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{13}^2}{C_{20}^4} = 0.338;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{15}^2} = 0.200; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{14}^2}{C_{20}^4} = 0.282;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.381\cdot 0.267 + 0.338\cdot 0.533 + 0.282\cdot 0.200 = 0.338.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.338\cdot 0.533}{0.338} = 0.533$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.338 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.533 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.360 *. Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X *, равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.360$, $q = 1 - p = 0.640$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.1073 = 0.107$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.3600 * 0.1677 = 0.302$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1296 * 0.2621 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0467 * 0.4096 = 0.191$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0168 * 0.6400 = 0.054$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0060 * 1.000 = 0.006$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.107**	**0.302**	**0.340**	**0.191**	**0.054**	**0.006**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 2 * 0.340 + 3 * 0.191 + 4 * 0.054 + 5 * 0.006 = 1.801 .$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.360 = \mathbf{1.800}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.801)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 4 * 0.340 + 9 * 0.191 + 16 * 0.054 + 25 * 0.006 = 4.395.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 4.395 - (1.801)^2 = 1.151$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.360 * 0.640 = \mathbf{1.152}$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.801 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.151 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.36 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3510 *и* 3695 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.36$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.64$,
$k_1 = 3510$, $k_2 = 3695$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3510 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = \frac{-90}{48.000} = -1.875,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3695 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = 1.979.$$

Поэтому $P_{10000}(3510, 3695) = \Phi(1.979) - \Phi(-1.875) = \Phi(1.979) + \Phi(1.875)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(1.979) = 0.4761 \quad \text{и} \quad \Phi(1.875) = 0.4699.$$

Окончательно, $P_{10000}(3510, 3695) = 0.4761 + 0.4699 = 0.9460$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.875 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 1.979 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9460 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 375 *и* 425 *(вероятность* P_1*)*

2) между 361 *и* 439 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 375 = 425 - 400 = 25$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 25) \geq 1 - \frac{240.0}{25^2} = 0.616.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 361 = 439 - 400 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 39) \geq 1 - \frac{240.0}{39^2} = 0.842.$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.616 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.842 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	5	7	10	12	$\sum$
вероятность p_i	0.104	0.275	0.245	0.287	0.081	0.008	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.104 + 3 * 0.275 + 5 * 0.245 + 7 * 0.287 + 10 * 0.081 + 12 * 0.008 =$$

$$= 5.069 \, .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.069)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.104 + 3^2 * 0.275 + 5^2 * 0.245 + 7^2 * 0.287 + 10^2 * 0.081 + 12^2 * 0.008 =$$

$$= 32.019 \, .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 32.019 - 5.069^2 = 6.324 \, ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.515 \, .$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.069 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.324 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

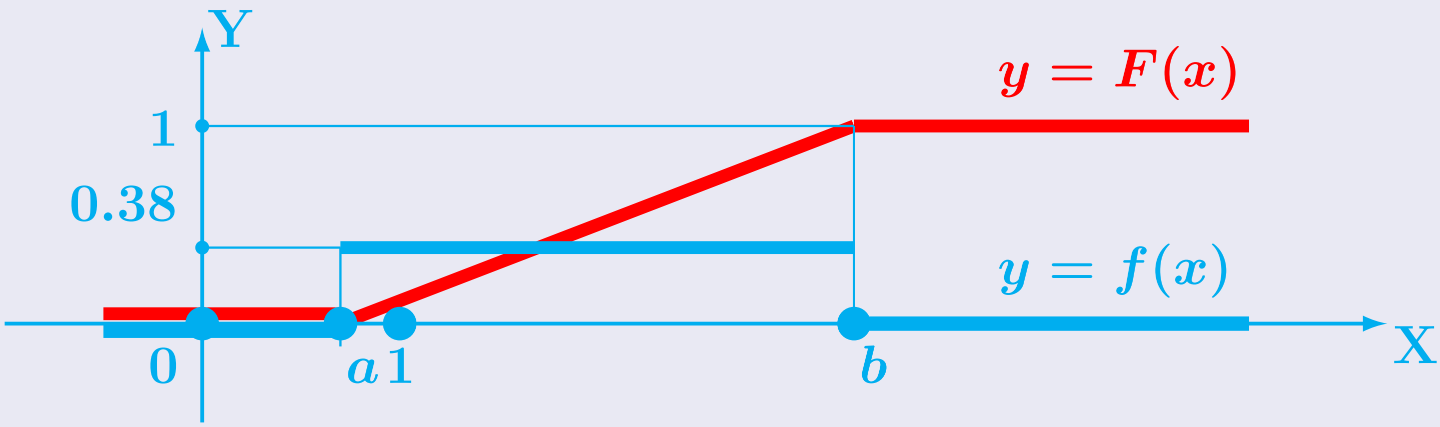

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.7}{2} = 2.00$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.2) = \frac{3.0-0.7}{2.6} - \frac{1.2-0.7}{2.6} = 0.885 - 0.192 = 0.693$

Выборочная проверка вариант 1 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) =$ введи 0.693 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.1 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.1-2.7}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{1.3} = 0.38$,

$$\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = \int_{1.1}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.38) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.38) = 0.1480 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = 0.1480 + 0.3907 = 0.5387$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.38 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5387 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $\boldsymbol{X\downarrow}$ **и** $\boldsymbol{Y\rightarrow}$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**12**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	$\boldsymbol{q_3}$	$\boldsymbol{q_4}$

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**12**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	**0.16**	**0.14**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 19 * 0.60 = 16.200$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 274.200 - (16.200)^2 = 11.760$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16 + 3*0.14 + 5*0.30 + 7*0.40 = 5.040$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 29.000 - (5.040)^2 = 3.598$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.040 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.598 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.333 + 19 * 0.667 = 16.669$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 19^2 * 0.667 - (16.669)^2 = 10.883$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2*0.150+3*0.100+5*0.250+7*0.500 = 5.350$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2*0.150+3^2*0.100+5^2*0.250+7^2*0.500-(5.350)^2 = 3.628$.

Выборочная проверка вариант 1 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 16.669 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 10.883 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.350 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 3.628 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.040$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 3.598$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\
&= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 5 * 0.10 + 12 * 7 * 0.20 && + \\
&+ 19 * 2 * 0.10 + 19 * 3 * 0.10 + 19 * 5 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 && = \\
&= 80.780 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{80.780 - 16.200 * 5.040}{\sqrt{11.760 * 3.598}} = -0.133 .$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 80.780 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.133 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C(0.1\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.1\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.050 + 1.400 \cdot y - 0.008 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.042 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.042\,y + \frac{0.840}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C \big(0.042\,y + 0.4200\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.042 \cdot 0.6 + 0.4200 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.042 \cdot 0.2 + 0.4200 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.1764 - 0.0252\big) = 0.1512\, C\,.$$

Значит, $0.1512 \cdot C = 1\,,\quad C = \frac{1}{0.1512} = 6.614\,,$

$$f(x, y) = 6.614 * (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{0.661}_{A}\, x + \underbrace{9.259}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.661\,x + 9.259\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	6.614	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	0.661	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	9.259	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.661\,x + 9.259\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (0.661 \cdot x + 9.259 \cdot y)\,dy = \Big(0.661 \cdot x \cdot y + 9.259 \cdot \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 0.661 \cdot x \cdot 0.6 + 9.259 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.661 \cdot x \cdot 0.2 - 9.259 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.264} \cdot x + \boxed{1.481},$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (0.661 \cdot x + 9.259 \cdot y)\,dx = \Big(0.661 \cdot \frac{x^2}{2} + 9.259 \cdot x \cdot y\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 0.661 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 9.259 \cdot 1.0 \cdot y - 0.661 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 9.259 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{5.555} \cdot y + \boxed{0.278}.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.264}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.481}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{5.555}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.278}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(0.264\,x + 1.481\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(0.264\,x^2 + 1.481\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.264\,\tfrac{x^3}{3} + 1.481\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.829 - 0.124 = 0.705,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(5.555\,y + 0.278\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(5.555\,y^2 + 0.278\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(5.555\,\tfrac{y^3}{3} + 0.278\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.020 = 0.430,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.264\,x + 1.481\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(0.264\,x^3 + 1.481\,x^2\big)\,dx - 0.497 = \big(0.264\,\tfrac{x^4}{4} + 1.481\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.497 =$$

$$= 0.560 - 0.033 - 0.497 = 0.030,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(5.555\,y + 0.278\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(5.555\,y^3 + 0.278\,y^2\big)\,dy - 0.185 = \big(5.555\,\tfrac{x^4}{4} + 0.278\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.185 =$$

$$= 0.200 - 0.003 - 0.185 = 0.012.$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи 0.264 Клик

формат 1.23, $B_1 =$ введи 1.481 Клик

формат 1.23, $A_2 =$ введи 5.555 Клик

формат 1.23, $B_2 =$ введи 0.278 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 0.705 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 0.430 Клик

формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.030 Клик

формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 0.012 Клик

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.661\,x + 9.259\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.705, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.430, \quad \mathbb{D}(X) = 0.030, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.012$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} x \cdot y \cdot (0.661\,x + 9.259\,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} (0.661\,x^2 y + 9.259\,y^2 x)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \left(0.661\,\frac{x^3}{3}\,y + 9.259\,y^2\,\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \left(0.661\,\frac{x^3}{3}\,y + 9.259\,y^2\,\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.6} (0.206\,y + 3.889\,y^2)\,dy =$$

$$= \left(0.206 \cdot \frac{y^2}{2} + 3.889 \cdot \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.317 - 0.014 = 0.303\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.303 - 0.705 \cdot 0.430}{\sqrt{0.030 \cdot 0.012}} = -0.008\,.$$

Выборочная проверка вариант 1 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.303 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.008 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_9^5 = 15120\,.$ $C_9^5 = 126\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.240\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.287\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.052\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.031\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.338\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.533\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.801\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.151\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.875\,.$ $x_2 = 1.979\,.$ $P = 0.9460\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.616\,.$ $P_2 = 0.842\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.069\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.324\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.0) = 0.693\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.38\,.$ $\mathbb{P}(1.1 \leq X \leq 3.2) = 0.5387\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.040\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.598\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.669\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.350\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 10.883\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.628\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 80.780\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.133\,.$

Задача 15. $C = 6.614\,,$ $f(x, y) = 0.661 \cdot x + 9.259\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.264 \cdot x + 1.481\,,$ $f_2(y) = 5.555 \cdot y + 0.278\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.705\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.430\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.030\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.012\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.303\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.008\,.$

возврат огл

Вариант 2

возврат огл

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{12}^{5}\,,\ C_{12}^{5}\,.$

Решение

$5! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{12}^{5} = \underbrace{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 8}_{5\text{ множителей}} = \boxed{95040}\,.$

$C_{12}^{5} = \frac{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{792}\,.$

Выборочная проверка вариант 2 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{12}^{5} =$ введи 95040 Клик

формат abcd, $C_{12}^{5} =$ введи 792 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{6} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 18564.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 286 \cdot 10 = 2860.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{2860}{18564} = 0.154.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.154$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{18564} = \frac{78 \cdot 5}{18564} = 0.021,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{18564} = \frac{13 \cdot 1}{18564} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.176$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.154 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.001 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.176 Клик

Задача 3

В тире имеется 55 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1. *Найти вероятность осечки.*
2. *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{55} = 0.218\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{43}{55} = 0.782\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.218 + 0.06 * 0.782 = 0.049\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.218}{0.049} = 0.044\,.$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.049 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.044 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{16}^2} = 0.233; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_8^1}{C_{16}^2} = 0.533; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{12}^2}{C_{19}^4} = 0.358;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{16}^2} = 0.233; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{13}^2}{C_{19}^4} = 0.302;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.397 \cdot 0.233 + 0.358 \cdot 0.533 + 0.302 \cdot 0.233 = 0.354.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.358 \cdot 0.533}{0.354} = 0.539$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.354 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.539 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.40. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3925 *и* 4125.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.40$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.60$,
$k_1 = 3925$, $k_2 = 4125$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3925 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = \frac{-75}{48.990} = -1.531\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4125 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = 2.552\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3925, 4125) = \Phi(2.552) - \Phi(-1.531) = \Phi(2.552) + \Phi(1.531)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.552) = 0.4945 \quad \text{и} \quad \Phi(1.531) = 0.4370\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3925, 4125) = 0.4945 + 0.4370 = 0.9315$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.531 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.552 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9315 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.420$*. По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 393 *и* 447 *(вероятность* P_1*)*

2) между 382 *и* 458 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.420 = 420$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.420 * (1 - 0.420) = 243.6.$$

1. Берем $\varepsilon = 420 - 393 = 447 - 420 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 420| < 27) \geq 1 - \frac{243.6}{27^2} = 0.666.$$

2. Берем $\varepsilon = 420 - 382 = 458 - 420 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 420| < 38) \geq 1 - \frac{243.6}{38^2} = 0.831.$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.666 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.831 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	5	8	9	11	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$ *,*
дисперсию $\mathbb{D}(X)$ *,*
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ *.*

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.025 + 3 * 0.106 + 5 * 0.175 + 8 * 0.449 + 9 * 0.207 + 11 * 0.038 =$$

$$= \boxed{7.091}\ .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.091)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.025 + 3^2 * 0.106 + 5^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 9^2 * 0.207 + 11^2 * 0.038 =$$

$$= \boxed{55.455}\ .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 55.455 - 7.091^2 = \boxed{5.173}\ ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.274\,.$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.091 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.173 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

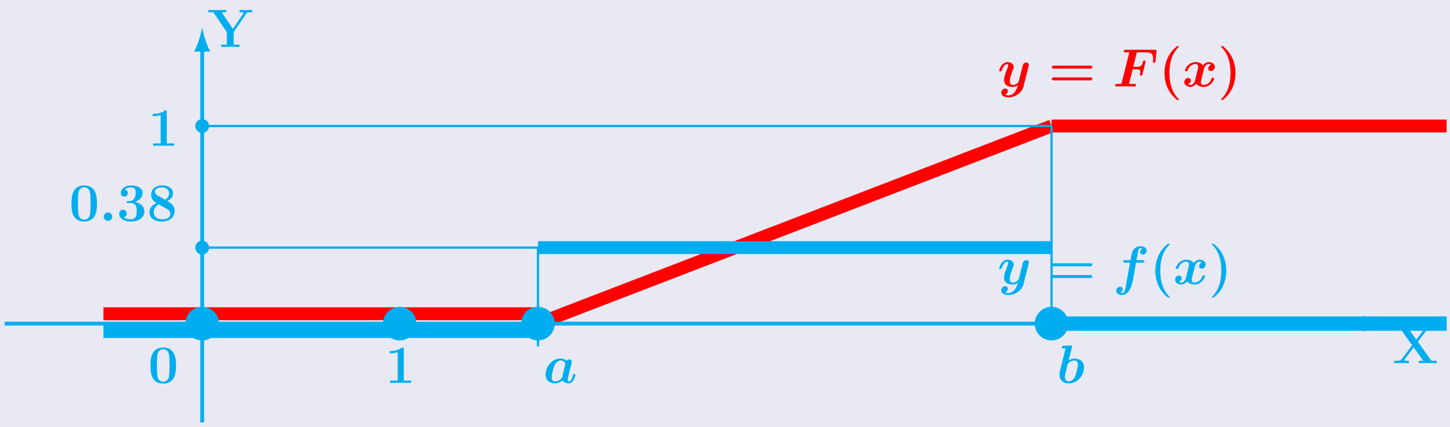

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.7}{2} = 3.00$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.9) = \frac{3.7-1.7}{2.6} - \frac{1.9-1.7}{2.6} = 0.769 - 0.077 = 0.692$

Выборочная проверка вариант 2 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) =$ введи 0.692 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $1.5 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.5-2.7}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.3} = 0.92$,

$$\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = \int_{1.5}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.92) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.92) = 0.3238 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = 0.3238 + 0.3238 = 0.6476$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.92 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6476 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	1	4	5	7
12	0.04	0.06	0.05	0.25
19	0.10	0.10	0.20	0.20

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	12	19
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	12	19
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	0.14	0.16	0.25	0.45

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 19 * 0.60 = 16.200$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 274.200 - (16.200)^2 = 11.760$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14 + 4*0.16 + 5*0.25 + 7*0.45 = 5.180$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 31.000 - (5.180)^2 = 4.168$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.180 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.168 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.200 + 19 * 0.800 = 17.600$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.200 + 19^2 * 0.800 - (17.600)^2 = 7.840$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	5	7
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 5 * 0.125 + 7 * 0.625 = 5.700$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 5^2 * 0.125 + 7^2 * 0.625 - (5.700)^2 = 3.760$.

Выборочная проверка вариант 2 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	17.600	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	7.840	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.700	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	3.760	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.180$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 4.168$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\
&= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 5 * 0.05 + 12 * 7 * 0.25 && + \\
&+ 19 * 1 * 0.10 + 19 * 4 * 0.10 + 19 * 5 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 && = \\
&= 82.460 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{82.460 - 16.200 * 5.180}{\sqrt{11.760 * 4.168}} = -0.208 .$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 82.460 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.208 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1 .$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C(0.1\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (0.1\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.072 + 1.680 \cdot y - 0.002 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.070 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.070\, y + \frac{1.400}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.2}^{0.6} = C \big(0.070\, y + 0.7000\, y^2 \big) \Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.070 \cdot 0.6 + 0.7000 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.070 \cdot 0.2 + 0.7000 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.2940 - 0.0420\big) = 0.2520\, C .$$

Значит, $0.2520 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2520} = 3.968$,

$$f(x, y) = 3.968 * (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{0.397}_{A}\, x + \underbrace{5.556}_{B}\, y .$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.397\, x + 5.556\, y , & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0 , & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 15

формат 1.23,	$C =$ введи	3.968	Клик	
формат 1.23,	$A =$ введи	0.397	Клик	
формат 1.23,	$B =$ введи	5.556	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.397\,x + 5.556\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (0.397 \cdot x + 5.556 \cdot y)\, dy = \left(0.397 \cdot x \cdot y + 5.556 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 0.397 \cdot x \cdot 0.6 + 5.556 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.397 \cdot x \cdot 0.2 - 5.556 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.159} \cdot x + \boxed{0.889}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (0.397 \cdot x + 5.556 \cdot y)\, dx = \left(0.397 \cdot \frac{x^2}{2} + 5.556 \cdot x \cdot y\right)\Bigg|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 0.397 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 5.556 \cdot 1.2 \cdot y - 0.397 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 5.556 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{5.556} \cdot y + \boxed{0.278}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.159}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.889}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{5.556}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.278}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.159\,x + 0.889\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.159\,x^2 + 0.889\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.159\,\frac{x^3}{3} + 0.889\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.732 - 0.018 = 0.714,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(5.556\,y + 0.278\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(5.556\,y^2 + 0.278\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(5.556\,\frac{y^3}{3} + 0.278\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.020 = 0.430,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.159\,x + 0.889\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.159\,x^3 + 0.889\,x^2\big)\,dx - 0.510 = \big(0.159\,\frac{x^4}{4} + 0.889\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.510 =$$

$$= 0.594 - 0.002 - 0.510 = 0.082,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(5.556\,y + 0.278\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(5.556\,y^3 + 0.278\,y^2\big)\,dy - 0.185 = \big(5.556\,\frac{x^4}{4} + 0.278\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.185 =$$

$$= 0.200 - 0.003 - 0.185 = 0.012.$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.159	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.889	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	5.556	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.278	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.714	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.430	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.082	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.012	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \leq x \leq 1.2$, $0.2 \leq y \leq 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.397\,x + 5.556\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.714, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.430, \quad \mathbb{D}(X) = 0.082, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.012$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X\cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.2}^{1.2} x\cdot y\cdot\big(0.397\,x + 5.556\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.2}^{1.2}\big(0.397\,x^2y + 5.556\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6}\big(0.397\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 5.556\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\big(0.397\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 5.556\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.6}\big(0.228\,y + 3.889\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.228\cdot\tfrac{y^2}{2} + 3.889\cdot\tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.321 - 0.015 = 0.306\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.306 - 0.714\cdot 0.430}{\sqrt{0.082\cdot 0.012}} = -0.033\,.$$

Выборочная проверка вариант 2 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 0.306 Клик

формат 1.234, $r(X\cdot Y) =$ введи -0.033 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{12}^{5} = 95040\,.$ $C_{12}^{5} = 792\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.154\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.176\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.049\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.044\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.354\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.539\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.531\,.$ $x_2 = 2.552\,.$ $P = 0.9315\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.666\,.$ $P_2 = 0.831\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.091\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.173\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) = 0.692\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.92\,.$ $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = 0.6476\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.180\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.168\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 17.600\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.700\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 7.840\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.760\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 82.460\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.208\,.$

Задача 15. $C = 3.968\,,$ $f(x,y) = 0.397 \cdot x + 5.556\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.159 \cdot x + 0.889\,,$ $f_2(y) = 5.556 \cdot y + 0.278\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.714\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.430\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.082\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.012\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.306\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.033\,.$

Вариант 3

Задача 1

Найти $6!\,,\ A_{11}^{6}\,,\ C_{11}^{6}\,.$

Решение

$6! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}\ .$

$A_{11}^{6} = \underbrace{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 6}_{6\ \text{множителей}} = \boxed{332640}\,.$

$C_{11}^{6} = \frac{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 6}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{462}\,.$

Выборочная проверка вариант 3 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{11}^{6} =$ введи 332640 Клик

формат abcd, $C_{11}^{6} =$ введи 462 Клик

Задача 2

В ящике 12 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекается 7 шаров. Найти вероятность того, что

1. *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*
2. *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{7} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 31824.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 220 \cdot 15 = 3300.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3300}{31824} = 0.104.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.104$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{31824} = \frac{66 \cdot 6}{31824} = 0.012,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{31824} = \frac{12 \cdot 1}{31824} = 0.000,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.116$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.104 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.012 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.116 Клик

Задача 3

В тире имеется 66 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.08 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{66} = 0.167\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{55}{66} = 0.833\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.167 + 0.08 * 0.833 = 0.068\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.167}{0.068} = 0.025\,.$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.068 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.025 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{16}^2} = 0.233\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_8^1}{C_{16}^2} = 0.533\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{15}^2}{C_{22}^4} = 0.301\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{16}^2} = 0.233\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{16}^2}{C_{22}^4} = 0.246\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.348 \cdot 0.233 + 0.301 \cdot 0.533 + 0.246 \cdot 0.233 = 0.299\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.301 \cdot 0.533}{0.299} = 0.537$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.299 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.537 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \dots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.42. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4110 *и* 4316.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.42$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4110$, $k_2 = 4316$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4110 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-90}{49.356} = -1.823,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4316 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = 2.350.$$

Поэтому $P_{10000}(4110, 4316) = \Phi(2.350) - \Phi(-1.823) = \Phi(2.350) + \Phi(1.823)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.350) = 0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(1.823) = 0.4656.$$

Окончательно, $P_{10000}(4110, 4316) = 0.4904 + 0.4656 = 0.9560$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.823 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.350 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9560 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 403 *и* 457 *(вероятность* P_1*)*

2) между 390 *и* 470 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 403 = 457 - 430 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 27) \geq 1 - \frac{245.1}{27^2} = 0.664.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 390 = 470 - 430 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 40) \geq 1 - \frac{245.1}{40^2} = 0.847.$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.664 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.847 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	5	8	10	12	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.047 + 3 * 0.164 + 5 * 0.207 + 8 * 0.401 + 10 * 0.158 + 12 * 0.023 =$$

$$= 6.638 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.638)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.047 + 3^2 * 0.164 + 5^2 * 0.207 + 8^2 * 0.401 + 10^2 * 0.158 + 12^2 * 0.023 =$$

$$= 51.474 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 51.474 - 6.638^2 = 7.411 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.722 .$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.638 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 7.411 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 4.3$.
Определить плотность $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0.7 \\ \frac{1}{3.6} & \text{при} \quad 0.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{3.6} & \text{при} \quad 0.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases},$$

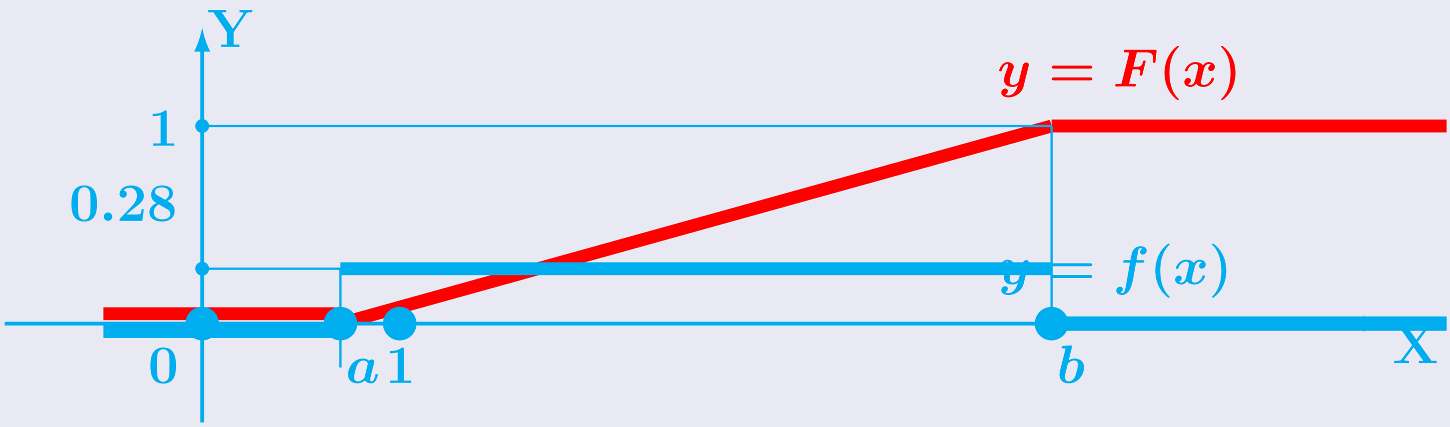

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.7}{2} = 2.50$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.7)^2}{12} = 1.080$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.039$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.2) = \frac{3.7-0.7}{3.6} - \frac{1.2-0.7}{3.6} = 0.833 - 0.139 = 0.694$

Выборочная проверка вариант 3 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.080 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) =$ введи 0.694 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9)$ *попадания в интервал* $0.8 \leq x \leq 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.8^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}\,dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{0.8-2.7}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.8} = 0.67$,

$$\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = \int_{0.8}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.67) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.67) = 0.2486 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = 0.2486 + 0.3554 = 0.6040$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.67 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6040 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $\boldsymbol{X}\downarrow$ **и** $\boldsymbol{Y}\rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**13**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	$\boldsymbol{q_3}$	$\boldsymbol{q_4}$

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**13**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	**0.16**	**0.14**	**0.25**	**0.45**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 19 * 0.60 = 16.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 284.200 - (16.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16 + 4*0.14 + 5*0.25 + 7*0.45 = 5.280$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 31.180 - (5.280)^2 = 3.302$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.280 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.302 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ ***и*** $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=13}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 13 * 0.200 + 19 * 0.800 = \boxed{17.800}\,,$

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 13^2 * 0.200 + 19^2 * 0.800 - (17.800)^2 = \boxed{5.760}\,,$

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2 * 0.150 + 4 * 0.100 + 5 * 0.125 + 7 * 0.625 = 5.700$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2 * 0.150 + 4^2 * 0.100 + 5^2 * 0.125 + 7^2 * 0.625 - (5.700)^2 = 3.460$.

Выборочная проверка вариант 3 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 17.800 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 5.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 5.700 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 3.460 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12*. Определить коэффициент корреляции* X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.280$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 3.302$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\ &= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 5 * 0.05 + 13 * 7 * 0.25 && + \\ &+ 19 * 2 * 0.10 + 19 * 4 * 0.10 + 19 * 5 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 && = \\ &= 86.640 \,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{86.640 - 16.600 * 5.280}{\sqrt{8.640 * 3.302}} = -0.189.$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 86.640 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.189 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \leq x \leq 1.2$, $0.2 \leq y \leq 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C(0.1\, x + 1.9\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (0.1\, x + 1.9\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\Big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\Big(0.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\Big) - \Big(0.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\Big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.072 + 2.280 \cdot y - 0.008 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.064 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.064\, y + \frac{1.520}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C\big(0.064\, y + 0.7600\, y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.064 \cdot 0.6 + 0.7600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.064 \cdot 0.2 + 0.7600 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.3120 - 0.0432\big) = 0.2688\, C\,.$$

Значит, $0.2688 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2688} = 3.720$,

$$f(x, y) = 3.720 * (0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{0.372}_{A}\, x + \underbrace{7.068}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.372\, x + 7.068\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 15

формат 1.23, $C =$	введи	3.720	Клик	
формат 1.23, $A =$	введи	0.372	Клик	
формат 1.23, $B =$	введи	7.068	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \leq x \leq 1.2$, $0.2 \leq y \leq 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.372\, x + 7.068\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \leq x \leq 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (0.372 \cdot x + 7.068 \cdot y)\, dy = \left(0.372 \cdot x \cdot y + 7.068 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 0.372 \cdot x \cdot 0.6 + 7.068 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.372 \cdot x \cdot 0.2 - 7.068 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.149} \cdot x + \boxed{1.131}\,,$$

и если $0.2 \leq y \leq 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (0.372 \cdot x + 7.068 \cdot y)\, dx = \left(0.372 \cdot \frac{x^2}{2} + 7.068 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 0.372 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 7.068 \cdot 1.2 \cdot y - 0.372 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 7.068 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{5.654} \cdot y + \boxed{0.238}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.149}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.131}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{5.654}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.238}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \leq y \leq 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.149\,x + 1.131\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.149\,x^2 + 1.131\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.149\,\tfrac{x^3}{3} + 1.131\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.094 = \boxed{0.806},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(5.654\,y + 0.238\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(5.654\,y^2 + 0.238\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(5.654\,\tfrac{y^3}{3} + 0.238\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.020 = \boxed{0.430},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.149\,x + 1.131\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.149\,x^3 + 1.131\,x^2\big)\,dx - 0.650 = \big(0.149\,\tfrac{x^4}{4} + 1.131\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.650 =$$

$$= 0.729 - 0.025 - 0.650 = \boxed{0.054},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(5.654\,y + 0.238\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(5.654\,y^3 + 0.238\,y^2\big)\,dy - 0.185 = \big(5.654\,\tfrac{x^4}{4} + 0.238\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.185 =$$

$$= 0.200 - 0.003 - 0.185 = \boxed{0.012}.$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.149	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	1.131	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	5.654	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.238	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.806	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.430	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.054	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.012	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.372\,x + 7.068\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.806, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.430, \quad \mathbb{D}(X) = 0.054, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.012$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(0.372\,x + 7.068\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} \big(0.372\,x^2y + 7.068\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.372\,\frac{x^3}{3}\,y + 7.068\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(0.372\,\frac{x^3}{3}\,y + 7.068\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.206\,y + 4.524\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.206 \cdot \frac{y^2}{2} + 4.524 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.363 - 0.016 = 0.347\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.347 - 0.806 \cdot 0.430}{\sqrt{0.054 \cdot 0.012}} = 0.016\,.$$

Выборочная проверка вариант 3 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.347 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.016 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{11}^{6} = 332640\,.$ $C_{11}^{6} = 462\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.104\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.116\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.068\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.025\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.299\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.537\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.823\,.$ $x_2 = 2.350\,.$ $P = 0.9560\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.664\,.$ $P_2 = 0.847\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.638\,.$ $\mathbb{D}(X) = 7.411\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.080\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.7) = 0.694\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.67\,.$ $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = 0.6040\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.280\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.302\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 17.800\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.700\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 5.760\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 3.460\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 86.640\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.189\,.$

Задача 15. $C = 3.720\,,$ $f(x, y) = 0.372 \cdot x + 7.068\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.149 \cdot x + 1.131\,,$ $f_2(y) = 5.654 \cdot y + 0.238\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.806\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.430\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.054\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.012\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.347\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.016\,.$

возврат огл

Вариант 4

возврат огл

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{10}^{4}\,,\ C_{10}^{4}\,.$

Решение

$5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{10}^{4} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}_{4\text{ множителей}} = \boxed{5040}\,.$

$C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{210}\,.$

Выборочная проверка вариант 4 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{10}^{4} =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $C_{10}^{4} =$ введи 210 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 3003.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^{3} \cdot C_{4}^{2} = 165 \cdot 6 = 990.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{990}{3003} = 0.330.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.330$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^{2} \cdot C_{4}^{3}}{3003} = \frac{55 \cdot 4}{3003} = 0.073$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^{1} \cdot C_{4}^{4}}{3003} = \frac{11 \cdot 1}{3003} = 0.004$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.407$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.330	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.073	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.004	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.407	Клик	

Задача 3

В тире имеется 45 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.05 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{45} = 0.222\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{35}{45} = 0.778\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.222 + 0.05 * 0.778 = 0.041\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.222}{0.041} = 0.054\,.$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.041 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.054 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара − белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара − черные,

A : среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{17}^2} = 0.331\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_9^2}{C_{17}^4} = 0.424\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_7^1}{C_{17}^2} = 0.515\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{10}^2}{C_{17}^4} = 0.397\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{17}^2} = 0.154\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{11}^2}{C_{17}^4} = 0.347\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.424\cdot 0.331 + 0.397\cdot 0.515 + 0.347\cdot 0.154 = 0.398\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397\cdot 0.515}{0.398} = 0.514$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.398 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.514 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.35 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3425 *и* 3604 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.35$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.65$,
$k_1 = 3425$, $k_2 = 3604$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3425 - 3500}{\sqrt{2275.0}} = \frac{-75}{47.697} = -1.572 \ ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3604 - 3500}{\sqrt{2275.0}} = 2.180 \ .$$

Поэтому $P_{10000}(3425, 3604) = \Phi(2.180) - \Phi(-1.572) = \Phi(2.180) + \Phi(1.572)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.180) = 0.4854 \quad \text{и} \quad \Phi(1.572) = 0.4418 \ .$$

Окончательно, $P_{10000}(3425, 3604) = 0.4854 + 0.4418 = 0.9272$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи	-1.572	Клик	
формат 1.23, $x_2 =$ введи	2.180	Клик	
формат 1.23, $P =$ введи	0.9272	Клик	

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0006 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0006 = 6.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0006$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{6.0^4 \cdot e^{-6.0}}{4!} = \frac{1296.00 \cdot 0.002479}{24} = 0.133866$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.133866 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.390$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 365 *и* 415 *(вероятность* P_1*)*

2) между 353 *и* 427 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.390 = 390$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.390 * (1 - 0.390) = 237.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 390 - 365 = 415 - 390 = 25$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 390| < 25) \geq 1 - \frac{237.9}{25^2} = 0.619.$$

2. Берем $\varepsilon = 390 - 353 = 427 - 390 = 37$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 390| < 37) \geq 1 - \frac{237.9}{37^2} = 0.826.$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.619 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.826 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	6	7	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$*,*
дисперсию $\mathbb{D}(X)$*,*
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$*.*

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.073 + 3 * 0.221 + 6 * 0.231 + 7 * 0.345 + 9 * 0.116 + 12 * 0.014 =$$

$$= 5.749 \, .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.749)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.073 + 3^2 * 0.221 + 6^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 9^2 * 0.116 + 12^2 * 0.014 =$$

$$= 38.695 \, .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 38.695 - 5.749^2 = 5.644 \, ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.376 \, .$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.749 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.644 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \leq x \leq 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.0)$ *попадания в интервал* $1.9 \leq x \leq 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{1}{1.6} & \text{при} \quad 1.7 \leq x \leq 3.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{1.6} & \text{при} \quad 1.7 \leq x \leq 3.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases},$$

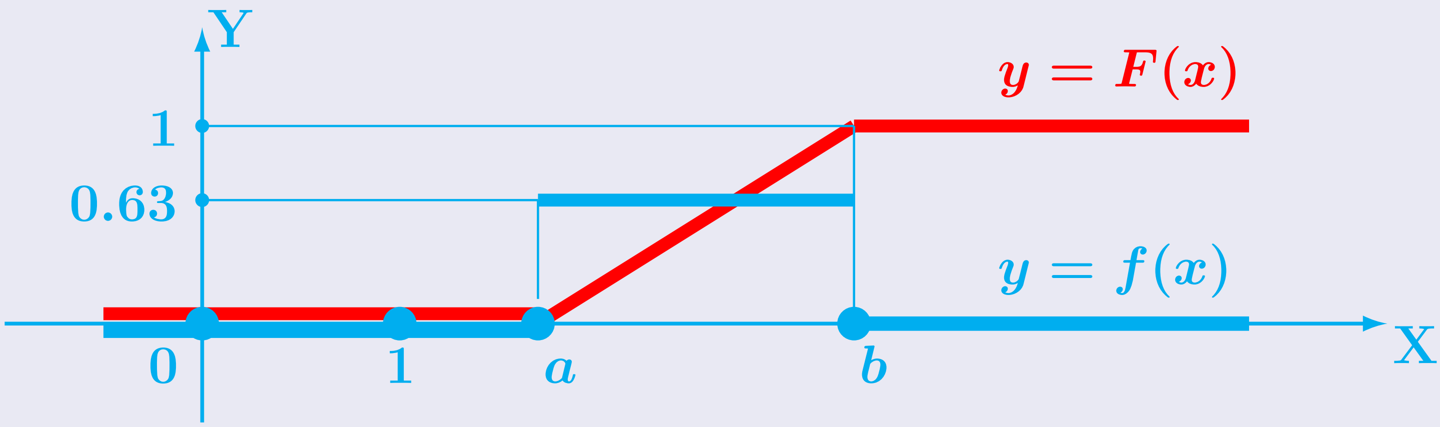

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.7}{2} = 2.50$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.7)^2}{12} = 0.213$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.462$,

$\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.0) = F(3.0) - F(1.9) = \frac{3.0-1.7}{1.6} - \frac{1.9-1.7}{1.6} = 0.813 - 0.125 = 0.688$

Выборочная проверка вариант 4 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.213 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.0) =$ введи 0.688 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.8 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,

плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.8-2.7}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{0.8} = 0.63$,

$$\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = \int_{1.8}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.63) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.63) = 0.2357 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = 0.2357 + 0.3708 = 0.6065$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.63 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6065 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $\boldsymbol{X}\downarrow$ **и** $\boldsymbol{Y}\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**11**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**1**	**3**	**6**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	$\boldsymbol{q_3}$	$\boldsymbol{q_4}$

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение $\boldsymbol{x_i}$ **случайной величины** $\boldsymbol{X}$	**11**	**19**
вероятность $\boldsymbol{p_i}$ **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение $\boldsymbol{y_j}$ **случайной величины** $\boldsymbol{Y}$	**1**	**3**	**6**	**7**
вероятность $\boldsymbol{q_j}$ **этого значения**	**0.18**	**0.12**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 19 * 0.60 = 15.800$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 265.000 - (15.800)^2 = 15.360$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18+3*0.12+6*0.30+7*0.40 = 5.140$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 31.660 - (5.140)^2 = 5.240$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.800 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 15.360 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.140 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.240 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ и $Y|_{X=11}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 11 * 0.333 + 19 * 0.667 = 16.336$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 11^2 * 0.333 + 19^2 * 0.667 - (16.336)^2 = 14.215$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	3	6	7
11	0.04	0.06	0.10	0.20
19	0.14	0.06	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	6	7
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1 * 0.100 + 3 * 0.150 + 6 * 0.250 + 7 * 0.500 = 5.550$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 3^2 * 0.150 + 6^2 * 0.250 + 7^2 * 0.500 - (5.550)^2 = 4.148$.

Выборочная проверка вариант 4 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 16.336 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 14.215 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 5.550 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 4.148 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X и Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y)-\mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.800$, $\mathbb{M}(Y) = 5.140$, $\mathbb{D}(X) = 15.360$, $\mathbb{D}(Y) = 5.240$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} &= \\
&= 11*1*0.04+11*3*0.06+11*6*0.10+11*7*0.20 &+ \\
&+ 19*1*0.14+19*3*0.06+19*6*0.20+19*7*0.20 &= \\
&= 79.900\,.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{79.900-15.800*5.140}{\sqrt{15.360*5.240}} = -0.146\,.$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 79.900 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.146 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C(0.1\, x + 0.9\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.0} (0.1\, x + 0.9\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.050 + 0.900 \cdot y - 0.002 - 0.180 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.048 + 0.720 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.048\, y + \frac{0.720}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.4}^{0.6} = C \big(0.048\, y + 0.3600\, y^2 \big) \Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.048 \cdot 0.6 + 0.3600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.048 \cdot 0.4 + 0.3600 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.1584 - 0.0768 \big) = 0.0816\, C\,.$$

Значит, $0.0816 \cdot C = 1\,,\quad C = \frac{1}{0.0816} = 12.255$,

$$f(x, y) = 12.255 * (0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{1.225}_{A}\, x + \underbrace{11.029}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.225\, x + 11.029\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	12.255	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.225	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	11.029	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.225\,x + 11.029\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (1.225 \cdot x + 11.029 \cdot y)\,dy = \left(1.225 \cdot x \cdot y + 11.029 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 1.225 \cdot x \cdot 0.6 + 11.029 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 1.225 \cdot x \cdot 0.4 - 11.029 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.245} \cdot x + \boxed{1.103}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (1.225 \cdot x + 11.029 \cdot y)\,dx = \left(1.225 \cdot \frac{x^2}{2} + 11.029 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 1.225 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 11.029 \cdot 1.0 \cdot y - 1.225 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 11.029 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{8.823} \cdot y + \boxed{0.588}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.245}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.103}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{8.823}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.588}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(0.245\,x + 1.103\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(0.245\,x^2 + 1.103\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.245\,\tfrac{x^3}{3} + 1.103\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.633 - 0.023 = 0.610,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(8.823\,y + 0.588\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(8.823\,y^2 + 0.588\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(8.823\,\tfrac{y^3}{3} + 0.588\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.741 - 0.235 = 0.506,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.245\,x + 1.103\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(0.245\,x^3 + 1.103\,x^2\big)\,dx - 0.372 = \big(0.245\,\tfrac{x^4}{4} + 1.103\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.372 =$$

$$= 0.429 - 0.003 - 0.372 = 0.054,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(8.823\,y + 0.588\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(8.823\,y^3 + 0.588\,y^2\big)\,dy - 0.256 = \big(8.823\,\tfrac{x^4}{4} + 0.588\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.256 =$$

$$= 0.328 - 0.069 - 0.256 = 0.003.$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.245	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	1.103	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	8.823	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.588	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.610	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.506	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.054	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.225\,x + 11.029\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.610, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.506, \quad \mathbb{D}(X) = 0.054, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(1.225\,x + 11.029\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} \big(1.225\,x^2 y + 11.029\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \Big(1.225\,\frac{x^3}{3}\,y + 11.029\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \Big(1.225\,\frac{x^3}{3}\,y + 11.029\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.405\,y + 5.294\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.405 \cdot \frac{y^2}{2} + 5.294 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.454 - 0.145 = 0.309\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.309 - 0.610 \cdot 0.506}{\sqrt{0.054 \cdot 0.003}} = 0.027.$$

Выборочная проверка вариант 4 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.309 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.027 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{10}^{4} = 5040\,.$ $C_{10}^{4} = 210\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.330\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.407\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.041\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.054\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.398\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.514\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.572\,.$ $x_2 = 2.180\,.$ $P = 0.9272\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.133866\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.619\,.$ $P_2 = 0.826\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.749\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.644\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.213\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.0) = 0.688\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.63\,.$ $\mathbb{P}(1.8 \leq X \leq 3.2) = 0.6065\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.800\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.140\,.$ $\mathbb{D}(X) = 15.360\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.240\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.336\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.550\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 14.215\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 4.148\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 79.900\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.146\,.$

Задача 15. $C = 12.255\,,$ $f(x, y) = 1.225 \cdot x + 11.029\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.245 \cdot x + 1.103\,,$ $f_2(y) = 8.823 \cdot y + 0.588\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.610\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.506\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.054\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.309\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.027\,.$

возврат огл

Вариант 5

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_9^5, C_9^5.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_9^5 = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{15120}$.

$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{126}$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_9^5 =$ введи 15120 Клик

формат abcd, $C_9^5 =$ введи 126 Клик

Задача 2

В ящике 10 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$.
Всего извлекается 6 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{6} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 10}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 5005.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 120 \cdot 10 = 1200.$$

(извлекаем 3 шара из 10 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1200}{5005} = 0.240.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.240$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{5005} = \frac{45 \cdot 5}{5005} = 0.045,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{5005} = \frac{10 \cdot 1}{5005} = 0.002,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.287$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.240	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.045	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.002	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.287	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 9 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.06 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1. *Найти вероятность осечки.*
2. *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{9}{56} = 0.161\,,\quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{47}{56} = 0.839\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,,\quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.161 + 0.06 * 0.839 = 0.052\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A)*\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01*0.161}{0.052} = 0.031\,.$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.052 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.031 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{17}^2} = 0.331\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^4} = 0.381\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_7^1}{C_{17}^2} = 0.515\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{13}^2}{C_{20}^4} = 0.338\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{17}^2} = 0.154\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{14}^2}{C_{20}^4} = 0.282\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.381 \cdot 0.331 + 0.338 \cdot 0.515 + 0.282 \cdot 0.154 = 0.344\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.338 \cdot 0.515}{0.344} = 0.506\,.$

Выборочная проверка вариант 5 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.344 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.506 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.360. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.360$, $q = 1 - p = 0.640$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.1073 = 0.107$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.3600 * 0.1677 = 0.302$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1296 * 0.2621 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0467 * 0.4096 = 0.191$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0168 * 0.6400 = 0.054$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0060 * 1.000 = 0.006$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.107**	**0.302**	**0.340**	**0.191**	**0.054**	**0.006**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 2 * 0.340 + 3 * 0.191 + 4 * 0.054 + 5 * 0.006 = 1.801.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.360 = \mathbf{1.800}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.801)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 4 * 0.340 + 9 * 0.191 + 16 * 0.054 + 25 * 0.006 = 4.395.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 4.395 - (1.801)^2 = 1.151$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.360 * 0.640 = \mathbf{1.152}$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.801 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.151 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.36 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3510 *и* 3695 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.36$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.64$,
$k_1 = 3510$, $k_2 = 3695$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3510 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = \frac{-90}{48.000} = -1.875,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3695 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = 1.979.$$

Поэтому $P_{10000}(3510, 3695) = \Phi(1.979) - \Phi(-1.875) = \Phi(1.979) + \Phi(1.875)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(1.979) = 0.4761 \quad \text{и} \quad \Phi(1.875) = 0.4699.$$

Окончательно, $P_{10000}(3510, 3695) = 0.4761 + 0.4699 = 0.9460$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.875 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 1.979 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9460 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 375 *и* 425 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 361 *и* 439 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 375 = 425 - 400 = 25$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 25) \geq 1 - \frac{240.0}{25^2} = 0.616.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 361 = 439 - 400 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 39) \geq 1 - \frac{240.0}{39^2} = 0.842.$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.616 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.842 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	6	7	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.104	0.275	0.245	0.287	0.081	0.008	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.104 + 3 * 0.275 + 6 * 0.245 + 7 * 0.287 + 10 * 0.081 + 13 * 0.008 =$$

$$= 5.322 \,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.322)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.104 + 3^2 * 0.275 + 6^2 * 0.245 + 7^2 * 0.287 + 10^2 * 0.081 + 13^2 * 0.008 =$$

$$= 34.914 \,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 34.914 - 5.322^2 = 6.590 \,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.567 \,.$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.322 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.590 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

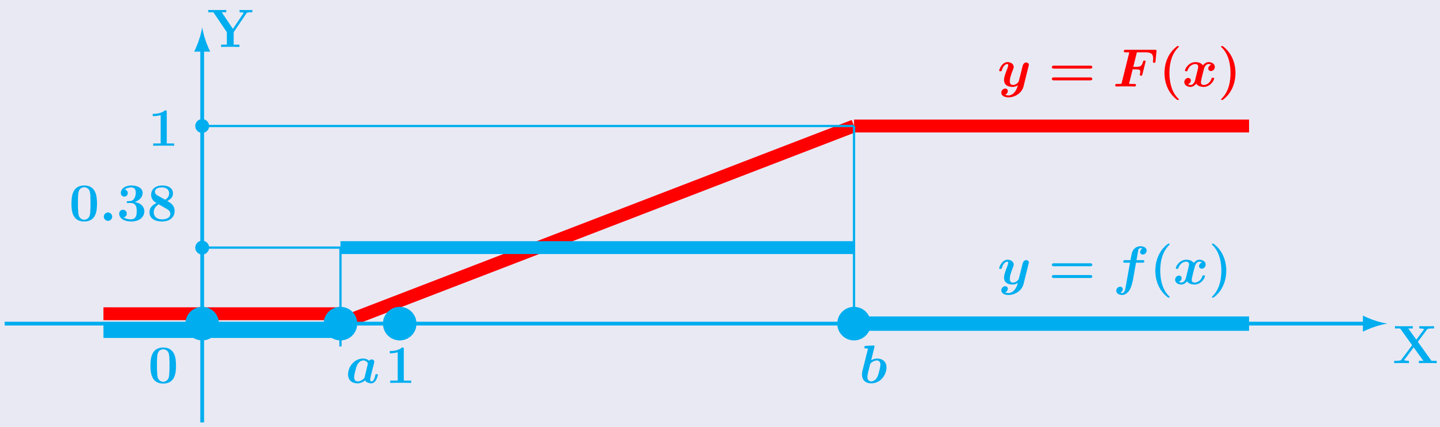

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.7}{2} = 2.00$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.2) = \frac{3.0-0.7}{2.6} - \frac{1.2-0.7}{2.6} = 0.885 - 0.192 = 0.693$

Выборочная проверка вариант 5 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) =$ введи 0.693 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.1 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.1-2.7}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{1.3} = 0.38$,

$$\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = \int_{1.1}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.38) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.38) = 0.1480 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = 0.1480 + 0.3907 = 0.5387$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.38 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5387 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.20**	**0.10**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 19 * 0.60 = \boxed{16.200}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 274.200 - (16.200)^2 = \boxed{11.760}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 3*0.10 + 6*0.30 + 7*0.40 = \boxed{5.300}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 32.100 - (5.300)^2 = \boxed{4.010}$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.300 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.010 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.333 + 19 * 0.667 = 16.669$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 19^2 * 0.667 - (16.669)^2 = 10.883$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	3	6	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
19	0.14	0.06	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	7
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2*0.150+3*0.100+6*0.250+7*0.500 = 5.600$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2*0.150+3^2*0.100+6^2*0.250+7^2*0.500-(5.600)^2 = 3.640$.

Выборочная проверка вариант 5 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	16.669	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	10.883	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.600	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	3.640	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
19	0.14	0.06	0.20	0.20

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.300$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 4.010$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\
&= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 6 * 0.10 + 12 * 7 * 0.20 && + \\
&+ 19 * 2 * 0.14 + 19 * 3 * 0.06 + 19 * 6 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 && = \\
&= 85.020 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{85.020 - 16.200 * 5.300}{\sqrt{11.760 * 4.010}} = -0.122 .$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 85.020 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.122 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C(0.1\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.1\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \left(\left(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\right) \Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \right) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \left(\left(0.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\right) - \left(0.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\right) \right) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.050 + 1.400 \cdot y - 0.008 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.042 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C\left(0.042\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2\right)\Big|_{0.4}^{0.6} = C\left(0.042\, y + 0.4200\, y^2\right)\Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\left(0.042 \cdot 0.6 + 0.4200 \cdot 0.6^2\right) - \left(0.042 \cdot 0.4 + 0.4200 \cdot 0.4^2\right)\Big) =$$

$$= C\big(0.1764 - 0.0840\big) = 0.0924\, C\,.$$

Значит, $0.0924 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.0924} = \boxed{10.823}\,,$

$$f(x, y) = 10.823 * (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.082}_{A}\, x + \underbrace{15.152}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.082\, x + 15.152\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи 10.823 Клик

формат 1.23, $A =$ введи 1.082 Клик

формат 1.23, $B =$ введи 15.152 Клик

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.082\,x + 15.152\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (1.082 \cdot x + 15.152 \cdot y)\,dy = \left(1.082 \cdot x \cdot y + 15.152 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 1.082 \cdot x \cdot 0.6 + 15.152 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 1.082 \cdot x \cdot 0.4 - 15.152 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.216} \cdot x + \boxed{1.515}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (1.082 \cdot x + 15.152 \cdot y)\,dx = \left(1.082 \cdot \frac{x^2}{2} + 15.152 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 1.082 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 15.152 \cdot 1.0 \cdot y - 1.082 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 15.152 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{9.091} \cdot y + \boxed{0.454}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.216}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.515}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{9.091}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.454}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(0.216\,x + 1.515\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(0.216\,x^2 + 1.515\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.216\,\tfrac{x^3}{3} + 1.515\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.830 - 0.126 = 0.704,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(9.091\,y + 0.454\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(9.091\,y^2 + 0.454\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(9.091\,\tfrac{y^3}{3} + 0.454\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.736 - 0.230 = 0.506,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.216\,x + 1.515\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(0.216\,x^3 + 1.515\,x^2\big)\,dx - 0.496 = \big(0.216\,\tfrac{x^4}{4} + 1.515\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.496 =$$

$$= 0.559 - 0.034 - 0.496 = 0.029,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(9.091\,y + 0.454\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(9.091\,y^3 + 0.454\,y^2\big)\,dy - 0.256 = \big(9.091\,\tfrac{x^4}{4} + 0.454\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.256 =$$

$$= 0.327 - 0.068 - 0.256 = 0.003.$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.216	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	1.515	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	9.091	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.454	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.704	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.506	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.029	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.082\,x + 15.152\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.704, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.506, \quad \mathbb{D}(X) = 0.029, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(1.082\,x + 15.152\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} \big(1.082\,x^2 y + 15.152\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(1.082\,\frac{x^3}{3}\,y + 15.152\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(1.082\,\frac{x^3}{3}\,y + 15.152\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.338\,y + 6.364\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.338 \cdot \frac{y^2}{2} + 6.364 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.519 - 0.163 = 0.356\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.356 - 0.704 \cdot 0.506}{\sqrt{0.029 \cdot 0.003}} = -0.024\,.$$

Выборочная проверка вариант 5 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи	0.356	Клик	
формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи	-0.024	Клик	

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_9^5 = 15120\,.$ $C_9^5 = 126\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.240\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.287\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.052\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.031\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.344\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.506\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.801\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.151\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.875\,.$ $x_2 = 1.979\,.$ $P = 0.9460\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.616\,.$ $P_2 = 0.842\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.322\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.590\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.0) = 0.693\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.38\,.$ $\mathbb{P}(1.1 \leq X \leq 3.2) = 0.5387\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.300\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.010\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.669\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.600\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 10.883\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.640\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 85.020\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.122\,.$

Задача 15. $C = 10.823\,,$ $f(x, y) = 1.082 \cdot x + 15.152\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.216 \cdot x + 1.515\,,$ $f_2(y) = 9.091 \cdot y + 0.454\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.704\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.506\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.029\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.356\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.024\,.$

возврат огл

Вариант 6

возврат огл

Задача 1

Найти $5!$, A_{12}^{5}, C_{12}^{5}.

Решение

$5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}$.

$A_{12}^{5} = \underbrace{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 8}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{95040}$.

$C_{12}^{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{792}$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{12}^{5} =$ введи 95040 Клик

формат abcd, $C_{12}^{5} =$ введи 792 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{6} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 18564.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 286 \cdot 10 = 2860.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{2860}{18564} = 0.154.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.154$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{18564} = \frac{78 \cdot 5}{18564} = 0.021,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{18564} = \frac{13 \cdot 1}{18564} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.176$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.154 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.001 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.176 Клик

Задача 3

В тире имеется 55 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{55} = 0.218\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{43}{55} = 0.782\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.218 + 0.06 * 0.782 = 0.049\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.218}{0.049} = 0.044\,.$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.049 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.044 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A : среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2} = 0.294\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_8^1}{C_{18}^2} = 0.523\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{12}^2}{C_{19}^4} = 0.358\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{18}^2} = 0.183\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{13}^2}{C_{19}^4} = 0.302\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.397\cdot 0.294 + 0.358\cdot 0.523 + 0.302\cdot 0.183 = 0.359\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.358\cdot 0.523}{0.359} = 0.522$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.359 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.522 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480 . *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X , *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.40 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3925 *и* 4125 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.40$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.60$,
$k_1 = 3925$, $k_2 = 4125$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3925 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = \frac{-75}{48.990} = -1.531 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4125 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = 2.552 .$$

Поэтому $P_{10000}(3925, 4125) = \Phi(2.552) - \Phi(-1.531) = \Phi(2.552) + \Phi(1.531)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.552) = 0.4945 \quad \text{и} \quad \Phi(1.531) = 0.4370 .$$

Окончательно, $P_{10000}(3925, 4125) = 0.4945 + 0.4370 = 0.9315$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.531 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.552 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9315 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.420$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 393 *и* 447 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 382 *и* 458 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.420 = 420$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.420 * (1 - 0.420) = 243.6.$$

1. Берем $\varepsilon = 420 - 393 = 447 - 420 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 420| < 27) \geq 1 - \frac{243.6}{27^2} = 0.666.$$

2. Берем $\varepsilon = 420 - 382 = 458 - 420 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 420| < 38) \geq 1 - \frac{243.6}{38^2} = 0.831.$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.666 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.831 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	6	8	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.025 + 3 * 0.106 + 6 * 0.175 + 8 * 0.449 + 9 * 0.207 + 12 * 0.038 =$$

$$= 7.304 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.304)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.025 + 3^2 * 0.106 + 6^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 9^2 * 0.207 + 12^2 * 0.038 =$$

$$= 58.254 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 58.254 - 7.304^2 = 4.906 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.215 .$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.304 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 4.906 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

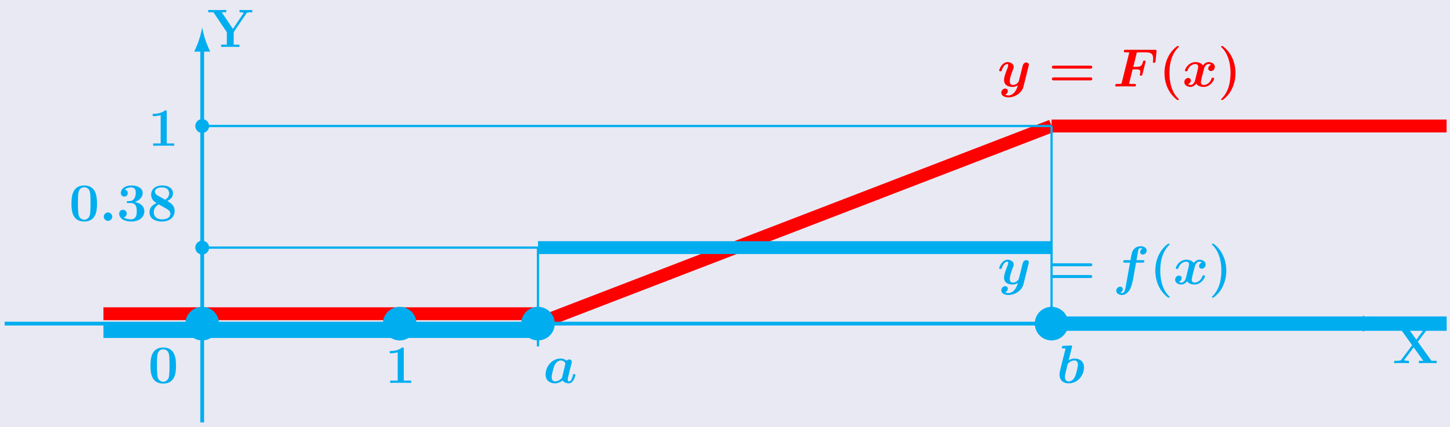

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.7}{2} = 3.00$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.9) = \frac{3.7-1.7}{2.6} - \frac{1.9-1.7}{2.6} = 0.769 - 0.077 = 0.692$

Выборочная проверка вариант 6 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) =$ введи 0.692 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $1.5 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.5-2.7}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.7}{1.3} = 0.92$,

$$\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = \int_{1.5}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.92) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.92) = 0.3238 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = 0.3238 + 0.3238 = 0.6476$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи	-0.92	Клик	
формат 1.23, $x_2 =$ введи	0.92	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи	0.6476	Клик	

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18, \qquad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \qquad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.18**	**0.12**	**0.25**	**0.45**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 19 * 0.60 = 16.200$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 274.200 - (16.200)^2 = 11.760$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18+4*0.12+6*0.25+7*0.45 = 5.310$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 33.150 - (5.310)^2 = 4.954$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.310 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.954 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,,\quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.200 + 19 * 0.800 = 17.600$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.200 + 19^2 * 0.800 - (17.600)^2 = 7.840$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	6	7
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y\|_{X=12=x_1}$	1	4	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y\|_{X=12=x_1}$	1	4	6	7
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1*0.100 + 4*0.150 + 6*0.125 + 7*0.625 = 5.825$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2*0.100 + 4^2*0.150 + 6^2*0.125 + 7^2*0.625 - (5.825)^2 = 3.694$.

Выборочная проверка вариант 6 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	17.600	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	7.840	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.825	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	3.694	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.310$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 4.954$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &= \\ &= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 6 * 0.05 + 12 * 7 * 0.25 &+ \\ &+ 19 * 1 * 0.14 + 19 * 4 * 0.06 + 19 * 6 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 &= \\ &= 84.580 \,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{84.580 - 16.200 * 5.310}{\sqrt{11.760 * 4.954}} = -0.189 \,.$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 84.580 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.189 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C(0.1\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (0.1\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.072 + 1.680 \cdot y - 0.002 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.070 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.070\, y + \frac{1.400}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.4}^{0.6} = C \big(0.070\, y + 0.7000\, y^2 \big) \Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.070 \cdot 0.6 + 0.7000 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.070 \cdot 0.4 + 0.7000 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.2940 - 0.1400 \big) = 0.1540\, C\,.$$

Значит, $0.1540 \cdot C = 1\,,\quad C = \frac{1}{0.1540} = 6.494\,,$

$$f(x, y) = 6.494 * (0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{0.649}_{A}\, x + \underbrace{9.091}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.649\, x + 9.091\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	6.494	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	0.649	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	9.091	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2,\ 0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.649\,x + 9.091\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (0.649 \cdot x + 9.091 \cdot y)\,dy = \left(0.649 \cdot x \cdot y + 9.091 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 0.649 \cdot x \cdot 0.6 + 9.091 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.649 \cdot x \cdot 0.4 - 9.091 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.130} \cdot x + \boxed{0.909}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (0.649 \cdot x + 9.091 \cdot y)\,dx = \left(0.649 \cdot \frac{x^2}{2} + 9.091 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 0.649 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 9.091 \cdot 1.2 \cdot y - 0.649 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 9.091 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{9.091} \cdot y + \boxed{0.454}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.130}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.909}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{9.091}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.454}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X)=\int_{0.2}^{1.2} x\cdot\big(0.130\,x+0.909\big)\,dx=\int_{0.2}^{1.2}\big(0.130\,x^2+0.909\,x\big)\,dx=$$

$$=\Big(0.130\,\frac{x^3}{3}+0.909\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{0.2}^{1.2}=0.729-0.019=\boxed{0.710},$$

$$\mathbb{M}(Y)=\int_{0.4}^{0.6} y\cdot\big(9.091\,y+0.454\big)\,dy=\int_{0.4}^{0.6}\big(9.091\,y^2+0.454\,y\big)\,dy=$$

$$=\Big(9.091\,\frac{y^3}{3}+0.454\,\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6}=0.736-0.230=\boxed{0.506},$$

$$\mathbb{D}(X)=\int_{0.2}^{1.2} x^2\cdot\big(0.130\,x+0.909\big)\,dx-(\mathbb{M}(X))^2=$$

$$=\int_{0.2}^{1.2}\big(0.130\,x^3+0.909\,x^2\big)\,dx-0.504=\Big(0.130\,\frac{x^4}{4}+0.909\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{1.2}-0.504=$$

$$=0.591-0.002-0.504=\boxed{0.085},$$

$$\mathbb{D}(Y)=\int_{0.4}^{0.6} y^2\cdot\big(9.091\,y+0.454\big)\,dy-(\mathbb{M}(Y))^2=$$

$$=\int_{0.4}^{0.6}\big(9.091\,y^3+0.454\,y^2\big)\,dy-0.256=\Big(9.091\,\frac{x^4}{4}+0.454\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6}-0.256=$$

$$=0.327-0.068-0.256=\boxed{0.003}.$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.130	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.909	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	9.091	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.454	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.710	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.506	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.085	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.649\,x + 9.091\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.710, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.506, \quad \mathbb{D}(X) = 0.085, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(0.649\,x + 9.091\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} \big(0.649\,x^2 y + 9.091\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.649\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 9.091\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(0.649\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 9.091\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.372\,y + 6.364\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.372 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 6.364 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.525 - 0.166 = 0.359\,.$$

Поэтому

$$r(X, Y) = \frac{0.359 - 0.710 \cdot 0.506}{\sqrt{0.085 \cdot 0.003}} = -0.016\,.$$

Выборочная проверка вариант 6 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.359 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.016 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{12}^{5} = 95040\,.$ $C_{12}^{5} = 792\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.154\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.176\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.049\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.044\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.359\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.522\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.531\,.$ $x_2 = 2.552\,.$ $P = 0.9315\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.666\,.$ $P_2 = 0.831\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.304\,.$ $\mathbb{D}(X) = 4.906\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) = 0.692\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.92\,.$ $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = 0.6476\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.310\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.954\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 17.600\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.825\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 7.840\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.694\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 84.580\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.189\,.$

Задача 15. $C = 6.494\,,$ $f(x, y) = 0.649 \cdot x + 9.091\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.130 \cdot x + 0.909\,,$ $f_2(y) = 9.091 \cdot y + 0.454\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.710\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.506\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.085\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.359\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.016\,.$

Вариант 7

Задача 1

Найти $6!$, A_{11}^{6}, C_{11}^{6}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{11}^{6} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}_{6 \text{ множителей}} = \boxed{332640}$.

$C_{11}^{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{462}$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{11}^{6} =$ введи 332640 Клик

формат abcd, $C_{11}^{6} =$ введи 462 Клик

Задача 2

В ящике 12 *белых и* 6 *черных шаров. Наудачу извлекается* 7 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

$$\text{среди } 7 \text{ извлеченных шаров оказалось ровно } k \text{ белых,}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{7} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 31824.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 220 \cdot 15 = 3300.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3300}{31824} = 0.104.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.104$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{31824} = \frac{66 \cdot 6}{31824} = 0.012,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{31824} = \frac{12 \cdot 1}{31824} = 0.000,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.116$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.104	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.012	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.116	Клик	

Задача 3

В тире имеется 66 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.08 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{66} = 0.167\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{55}{66} = 0.833\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.167 + 0.08 * 0.833 = 0.068\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.167}{0.068} = 0.025\,.$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.068 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.025 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 6 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2} = 0.294\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_8^1}{C_{18}^2} = 0.523\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_7^2 \cdot C_{15}^2}{C_{22}^4} = 0.301\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{18}^2} = 0.183\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_{16}^2}{C_{22}^4} = 0.246\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.348 \cdot 0.294 + 0.301 \cdot 0.523 + 0.246 \cdot 0.183 = 0.305\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.301 \cdot 0.523}{0.305} = 0.516\,.$

Выборочная проверка вариант 7 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.305 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.516 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.42. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4110 *и* 4316.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.42$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4110$, $k_2 = 4316$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4110 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-90}{49.356} = -1.823\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4316 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = 2.350\,.$$

Поэтому $P_{10000}(4110, 4316) = \Phi(2.350) - \Phi(-1.823) = \Phi(2.350) + \Phi(1.823)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.350) = 0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(1.823) = 0.4656\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(4110, 4316) = 0.4904 + 0.4656 = 0.9560$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.823 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.350 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9560 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 403 *и* 457 *(вероятность* P_1*)*

2) между 390 *и* 470 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 403 = 457 - 430 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 27) \geq 1 - \frac{245.1}{27^2} = 0.664.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 390 = 470 - 430 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 40) \geq 1 - \frac{245.1}{40^2} = 0.847.$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.664 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.847 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	3	6	8	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.047 + 3 * 0.164 + 6 * 0.207 + 8 * 0.401 + 10 * 0.158 + 13 * 0.023 =$$

$$= \boxed{6.868}\,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.868)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.047 + 3^2 * 0.164 + 6^2 * 0.207 + 8^2 * 0.401 + 10^2 * 0.158 + 13^2 * 0.023 =$$

$$= \boxed{54.326}\,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 54.326 - 6.868^2 = \boxed{7.157}\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.675\,.$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.868 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 7.157 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \;\; x < 0.7 \\ \frac{1}{3.6} & \text{при} \;\; 0.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при} \;\; x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \;\; x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{3.6} & \text{при} \;\; 0.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при} \;\; x > 4.3 \end{cases},$$

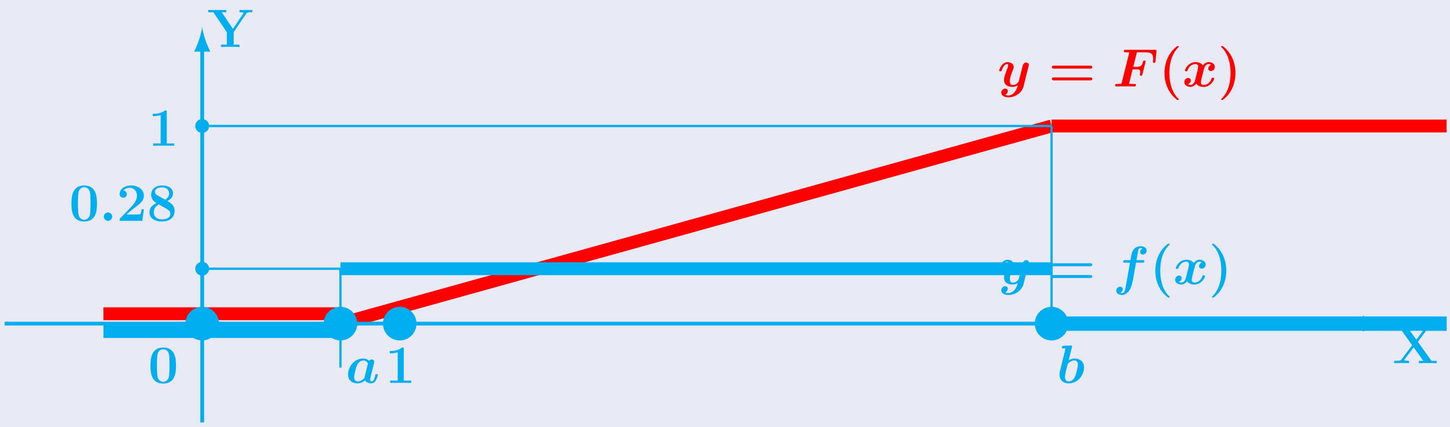

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.7}{2} = 2.50$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.7)^2}{12} = 1.080$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.039$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.2) = \frac{3.7-0.7}{3.6} - \frac{1.2-0.7}{3.6} = 0.833 - 0.139 = 0.694$

Выборочная проверка вариант 7 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.080 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) =$ введи 0.694 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $0.8 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.8^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{0.8-2.7}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.8} = 0.67$,

$$\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = \int_{0.8}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.67) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.67) = 0.2486 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = 0.2486 + 0.3554 = 0.6040$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.67 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6040 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**19**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.20**	**0.10**	**0.25**	**0.45**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 19 * 0.60 = \boxed{16.600}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 284.200 - (16.600)^2 = \boxed{8.640}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 4*0.10 + 6*0.25 + 7*0.45 = \boxed{5.450}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 33.450 - (5.450)^2 = \boxed{3.748}$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.450 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.748 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ и $Y|_{X=13}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**19**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**19**
вероятность p_i этого значения	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 13*0.200+19*0.800 = \boxed{17.800}\,,$

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 13^2*0.200+19^2*0.800-(17.800)^2 = \boxed{5.760}\,,$

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	4	6	7
13	0.06	0.04	0.05	0.25
19	0.14	0.06	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	6	7
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.125	0.625

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150+4*0.100+6*0.125+7*0.625 = 5.825$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150+4^2*0.100+6^2*0.125+7^2*0.625-(5.825)^2 = 3.394$.

Выборочная проверка вариант 7 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 17.800 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 5.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1})=$ введи 5.825 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1})=$ введи 3.394 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
19	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.450$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 3.748$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\
&= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 6 * 0.05 + 13 * 7 * 0.25 + \\
&+ 19 * 2 * 0.14 + 19 * 4 * 0.06 + 19 * 6 * 0.20 + 19 * 7 * 0.20 = \\
&= 89.570 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{89.570 - 16.600 * 5.450}{\sqrt{8.640 * 3.748}} = -0.158 .$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 89.570 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.158 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C(0.1\,x + 1.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (0.1\,x + 1.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.072 + 2.280 \cdot y - 0.008 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.064 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.064\,y + \frac{1.520}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = C\big(0.064\,y + 0.7600\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.064 \cdot 0.6 + 0.7600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.064 \cdot 0.4 + 0.7600 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.3120 - 0.1472\big) = 0.1648\,C\,.$$

Значит, $0.1648 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.1648} = 6.068$,

$$f(x, y) = 6.068 * (0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{0.607}_{A}\, x + \underbrace{11.529}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.607\,x + 11.529\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	6.068	Клик		
формат 1.23, $A =$ введи	0.607	Клик		
формат 1.23, $B =$ введи	11.529	Клик		

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ пропорционально $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. Определить плотности распределения для составляющих X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.607\,x + 11.529\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (0.607 \cdot x + 11.529 \cdot y)\,dy = \left(0.607 \cdot x \cdot y + 11.529 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 0.607 \cdot x \cdot 0.6 + 11.529 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 0.607 \cdot x \cdot 0.4 - 11.529 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.121} \cdot x + \boxed{1.153}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (0.607 \cdot x + 11.529 \cdot y)\,dx = \left(0.607 \cdot \frac{x^2}{2} + 11.529 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 0.607 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 11.529 \cdot 1.2 \cdot y - 0.607 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 11.529 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{9.223} \cdot y + \boxed{0.388}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.121}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.153}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{9.223}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.388}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.121\,x + 1.153\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.121\,x^2 + 1.153\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.121\,\frac{x^3}{3} + 1.153\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.095 = 0.805,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(9.223\,y + 0.388\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(9.223\,y^2 + 0.388\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(9.223\,\frac{y^3}{3} + 0.388\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.734 - 0.228 = 0.506,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.121\,x + 1.153\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.121\,x^3 + 1.153\,x^2\big)\,dx - 0.648 = \big(0.121\,\frac{x^4}{4} + 1.153\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.648 =$$

$$= 0.727 - 0.025 - 0.648 = 0.054,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(9.223\,y + 0.388\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(9.223\,y^3 + 0.388\,y^2\big)\,dy - 0.256 = \big(9.223\,\frac{x^4}{4} + 0.388\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.256 =$$

$$= 0.327 - 0.067 - 0.256 = 0.004.$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.121	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	1.153	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	9.223	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.388	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.805	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.506	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.054	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.004	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.607\,x + 11.529\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.805, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.506, \quad \mathbb{D}(X) = 0.054, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.004$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(0.607\,x + 11.529\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.4}^{1.2} \big(0.607\,x^2y + 11.529\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.607\,\frac{x^3}{3}\,y + 11.529\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(0.607\,\frac{x^3}{3}\,y + 11.529\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(0.337\,y + 7.379\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.337 \cdot \frac{y^2}{2} + 7.379 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.592 - 0.184 = 0.408\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.408 - 0.805{\cdot}0.506}{\sqrt{0.054{\cdot}0.004}} = 0.046\,.$$

Выборочная проверка вариант 7 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.408 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.046 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{11}^{6} = 332640\,.$ $C_{11}^{6} = 462\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.104\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.116\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.068\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.025\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.305\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.516\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.823\,.$ $x_2 = 2.350\,.$ $P = 0.9560\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.664\,.$ $P_2 = 0.847\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.868\,.$ $\mathbb{D}(X) = 7.157\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.080\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.7) = 0.694\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.67\,.$ $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = 0.6040\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.450\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.748\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 17.800\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.825\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 5.760\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 3.394\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 89.570\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.158\,.$

Задача 15. $C = 6.068\,,$ $f(x, y) = 0.607 \cdot x + 11.529\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.121 \cdot x + 1.153\,,$ $f_2(y) = 9.223 \cdot y + 0.388\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.805\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.506\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.054\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.004\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.408\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.046\,.$

возврат огл

Вариант 8

возврат огл

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{11}^{4}\,,\ C_{11}^{4}\,.$

Решение

$5! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{11}^{4} = \underbrace{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 8}_{4\ \text{множителей}} = \boxed{7920}\,.$

$C_{11}^{4} = \frac{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{330}\,.$

Выборочная проверка вариант 8 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{11}^{4} =$ введи 7920 Клик

формат abcd, $C_{11}^{4} =$ введи 330 Клик

Задача 2

В ящике 12 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^5 = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 4368.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^3 \cdot C_4^2 = 220 \cdot 6 = 1320.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1320}{4368} = 0.302.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.302$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_4^3}{4368} = \frac{66 \cdot 4}{4368} = 0.060$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_4^4}{4368} = \frac{12 \cdot 1}{4368} = 0.003$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.365$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.302 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.060 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.003 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.365 Клик

Задача 3

В тире имеется 45 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.05 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{45} = 0.244\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{34}{45} = 0.756\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.244 + 0.05 * 0.756 = 0.040\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.244}{0.040} = 0.061\,.$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.040 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.061 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 18.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = 0.206\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_9^2}{C_{19}^4} = 0.418\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_9^1}{C_{17}^2} = 0.529\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{10}^2}{C_{19}^4} = 0.418\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{17}^2} = 0.265\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) = \\ &= 0.418\cdot 0.206 + 0.418\cdot 0.529 + 0.397\cdot 0.265 = 0.412\,.\end{aligned}$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.418\cdot 0.529}{0.412} = 0.537$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.412 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.537 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440 *. Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X *, равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.36. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3525 *и* 3714.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$,
где $n=10000$ – число независимых испытаний,
$p=0.36$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q=1-p=0.64$,
$k_1=3525$, $k_2=3714$, и

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{3525-3600}{\sqrt{2304.0}}=\frac{-75}{48.000}=-1.563\,,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{3714-3600}{\sqrt{2304.0}}=2.375\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3525,3714)=\Phi(2.375)-\Phi(-1.563)=\Phi(2.375)+\Phi(1.563)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.375)=0.4913 \quad \text{и} \quad \Phi(1.563)=0.4406\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3525,3714)=0.4913+0.4406=0.9319$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 6

формат 1.23, $x_1=$ введи -1.563 Клик

формат 1.23, $x_2=$ введи 2.375 Клик

формат 1.23, $P=$ введи 0.9319 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 374 *и* 426 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 363 *и* 437 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 374 = 426 - 400 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 26) \geq 1 - \frac{240.0}{26^2} = 0.645.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 363 = 437 - 400 = 37$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 37) \geq 1 - \frac{240.0}{37^2} = 0.825.$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.645 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.825 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	5	7	9	11	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.047 + 4 * 0.164 + 5 * 0.207 + 7 * 0.401 + 9 * 0.158 + 11 * 0.023 =$$

$$= 6.220 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.220)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.047 + 4^2 * 0.164 + 5^2 * 0.207 + 7^2 * 0.401 + 9^2 * 0.158 + 11^2 * 0.023 =$$

$$= 43.076 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 43.076 - 6.220^2 = 4.388 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.095 .$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.220 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 4.388 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{1}{1.6} & \text{при} \quad 1.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{1.6} & \text{при} \quad 1.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases},$$

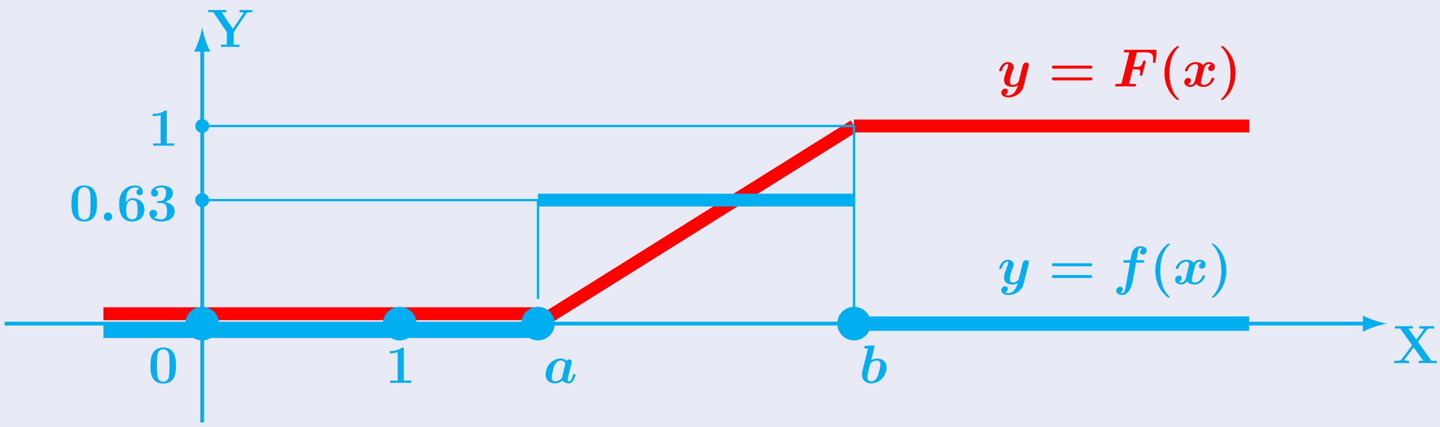

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.7}{2} = 2.50$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.7)^2}{12} = 0.213$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.462$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.9) = \frac{3.0-1.7}{1.6} - \frac{1.9-1.7}{1.6} = 0.813 - 0.125 = 0.688$

Выборочная проверка вариант 8 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.213 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) =$ введи 0.688 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.8 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.8-2.7}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{0.8} = 0.63$,

$$\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = \int_{1.8}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.63) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.63) = 0.2357 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = 0.2357 + 0.3708 = 0.6065$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.63 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6065 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	3	5	8
11	0.04	0.06	0.10	0.20
18	0.10	0.10	0.20	0.20

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	11	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	11	18
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	0.14	0.16	0.30	0.40

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.200$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 242.800 - (15.200)^2 = 11.760$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14+3*0.16+5*0.30+8*0.40 = 5.320$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 34.680 - (5.320)^2 = 6.378$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.320 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.378 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=11}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 11 * 0.333 + 18 * 0.667 = \boxed{15.669}$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 11^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (15.669)^2 = \boxed{10.883}$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	3	5	8
11	0.04	0.06	0.10	0.20
18	0.10	0.10	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1 * 0.100 + 3 * 0.150 + 5 * 0.250 + 8 * 0.500 = 5.800$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 3^2 * 0.150 + 5^2 * 0.250 + 8^2 * 0.500 - (5.800)^2 = 6.060$.

Выборочная проверка вариант 8 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 15.669 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 10.883 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 5.800 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 6.060 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.320$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 6.378$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &= \\
&= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 5 * 0.10 + 11 * 8 * 0.20 &+ \\
&+ 18 * 1 * 0.10 + 18 * 3 * 0.10 + 18 * 5 * 0.20 + 18 * 8 * 0.20 &= \\
&= 79.520 \; .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{79.520 - 15.200 * 5.320}{\sqrt{11.760 * 6.378}} = -0.155 \, .$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 79.520 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.155 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} C(0.6\,x + 0.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.2}^{1.0} (0.6\,x + 0.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.300 + 0.900 \cdot y - 0.012 - 0.180 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.288 + 0.720 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.288\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.288\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.288 \cdot 0.8 + 0.3600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.288 \cdot 0.2 + 0.3600 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.4608 - 0.0720\big) = 0.3888\,C\,.$$

Значит, $0.3888 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.3888} = 2.572$,

$$f(x,y) = 2.572 * (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{1.543}_{A}\, x + \underbrace{2.315}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.543\,x + 2.315\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.572	Клик		
формат 1.23, $A =$ введи	1.543	Клик		
формат 1.23, $B =$ введи	2.315	Клик		

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.543\,x + 2.315\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (1.543 \cdot x + 2.315 \cdot y)\,dy = \left(1.543 \cdot x \cdot y + 2.315 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 1.543 \cdot x \cdot 0.8 + 2.315 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.543 \cdot x \cdot 0.2 - 2.315 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.926} \cdot x + \boxed{0.695}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (1.543 \cdot x + 2.315 \cdot y)\,dx = \left(1.543 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.315 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 1.543 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 2.315 \cdot 1.0 \cdot y - 1.543 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 2.315 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{1.852} \cdot y + \boxed{0.741}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.926}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.695}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.852}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.741}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(0.926\, x + 0.695\big)\, dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(0.926\, x^2 + 0.695\, x\big)\, dx =$$

$$= \big(0.926\, \tfrac{x^3}{3} + 0.695\, \tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.656 - 0.016 = \boxed{0.640},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(1.852\, y + 0.741\big)\, dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.852\, y^2 + 0.741\, y\big)\, dy =$$

$$= \big(1.852\, \tfrac{y^3}{3} + 0.741\, \tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.553 - 0.020 = \boxed{0.533},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.926\, x + 0.695\big)\, dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(0.926\, x^3 + 0.695\, x^2\big)\, dx - 0.410 = \big(0.926\, \tfrac{x^4}{4} + 0.695\, \tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.410 =$$

$$= 0.463 - 0.002 - 0.410 = \boxed{0.051},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.852\, y + 0.741\big)\, dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.852\, y^3 + 0.741\, y^2\big)\, dy - 0.284 = \big(1.852\, \tfrac{x^4}{4} + 0.741\, \tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.284 =$$

$$= 0.316 - 0.003 - 0.284 = \boxed{0.029}.$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.926	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.695	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	1.852	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.741	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.640	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.533	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.051	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.029	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.543\,x + 2.315\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.640, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.533, \quad \mathbb{D}(X) = 0.051, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.029$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(1.543\,x + 2.315\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} \big(1.543\,x^2 y + 2.315\,y^2 x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.543\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.315\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.543\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.315\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.510\,y + 1.112\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.510 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.112 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.353 - 0.013 = 0.340\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.340 - 0.640 \cdot 0.533}{\sqrt{0.051 \cdot 0.029}} = -0.029\,.$$

Выборочная проверка вариант 8 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.340 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.029 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{11}^{4} = 7920\,.$ $C_{11}^{4} = 330\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.302\,.$ $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = 0.365\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.040\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.061\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.412\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.537\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.563\,.$ $x_2 = 2.375\,.$ $P = 0.9319\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.645\,.$ $P_2 = 0.825\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.220\,.$ $\mathbb{D}(X) = 4.388\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.213\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) = 0.688\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.63\,.$ $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = 0.6065\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.320\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.378\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 15.669\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.800\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 10.883\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 6.060\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 79.520\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.155\,.$

Задача 15. $C = 2.572\,,$ $f(x, y) = 1.543 \cdot x + 2.315\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.926 \cdot x + 0.695\,,$ $f_2(y) = 1.852 \cdot y + 0.741\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.640\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.533\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.051\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.029\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.340\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.029\,.$

возврат огл

Вариант 9

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{10}^{5}, C_{10}^{5}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{10}^{5} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{30240}$.

$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{252}$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{10}^{5} =$ введи 30240 Клик

формат abcd, $C_{10}^{5} =$ введи 252 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$.
Всего извлекается 6 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^{6} = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 8008.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 165 \cdot 10 = 1650.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1650}{8008} = 0.206 .$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.206$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{8008} = \frac{55 \cdot 5}{8008} = 0.034$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{8008} = \frac{11 \cdot 1}{8008} = 0.001$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.241$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.206	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.034	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.241	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01, *для устаревшей* 0.06. *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{56} = 0.179$, $\mathbb{P}(H_2) = \frac{46}{56} = 0.821$,

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01$, $\mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06$.

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.179 + 0.06 * 0.821 = 0.051 . \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.179}{0.051} = 0.035 .$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.051 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.035 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = 0.206\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{22}^4} = 0.406\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_9^1}{C_{17}^2} = 0.529\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{13}^2}{C_{22}^4} = 0.384\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{17}^2} = 0.265\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.406\cdot 0.206 + 0.384\cdot 0.529 + 0.348\cdot 0.265 = 0.379\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.384\cdot 0.529}{0.379} = 0.536$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.379 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.536 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195$.

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.38 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3710 *и* 3905 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.38$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.62$,
$k_1 = 3710$, $k_2 = 3905$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3710 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \frac{-90}{48.539} = -1.854\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3905 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = 2.163\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3710, 3905) = \Phi(2.163) - \Phi(-1.854) = \Phi(2.163) + \Phi(1.854)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.163) = 0.4846 \quad \text{и} \quad \Phi(1.854) = 0.4678\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3710, 3905) = 0.4846 + 0.4678 = 0.9524$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи	-1.854	Клик	
формат 1.23, $x_2 =$ введи	2.163	Клик	
формат 1.23, $P =$ введи	0.9524	Клик	

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 384 *и* 436 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 371 *и* 449 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 384 = 436 - 410 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 26) \geq 1 - \frac{241.9}{26^2} = 0.642.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 371 = 449 - 410 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 39) \geq 1 - \frac{241.9}{39^2} = 0.841.$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.642 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.841 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	5	7	10	12	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.073 + 4 * 0.221 + 5 * 0.231 + 7 * 0.345 + 10 * 0.116 + 12 * 0.014 =$$

$$= 5.855 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.855)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.073 + 4^2 * 0.221 + 5^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 10^2 * 0.116 + 12^2 * 0.014 =$$

$$= 39.905 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 39.905 - 5.855^2 = 5.624 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.371 .$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.855 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.624 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

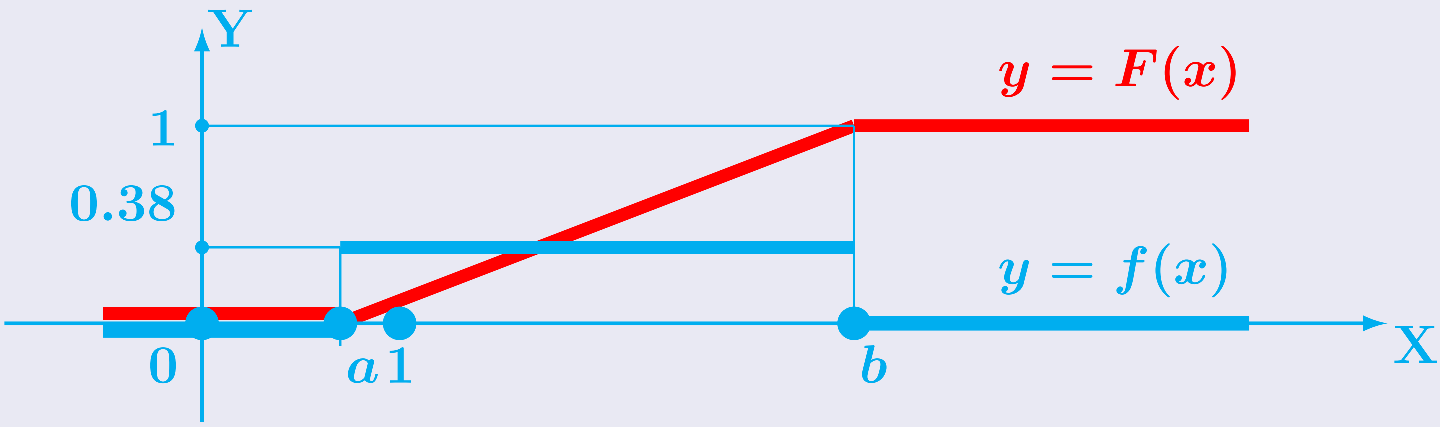

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.7}{2} = 2.00$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.2) = \frac{3.0-0.7}{2.6} - \frac{1.2-0.7}{2.6} = 0.885 - 0.192 = 0.693$

Выборочная проверка вариант 9 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) =$ введи 0.693 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.1 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.1-2.7}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{1.3} = 0.38$,

$$\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = \int_{1.1}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.38) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.38) = 0.1480 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = 0.1480 + 0.3907 = 0.5387$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.38 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5387 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.16**	**0.14**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16 + 3*0.14 + 5*0.30 + 8*0.40 = 5.440$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 35.000 - (5.440)^2 = 5.406$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.440 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.406 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=12}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.002$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.002)^2 = 7.996$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2 * 0.150 + 3 * 0.100 + 5 * 0.250 + 8 * 0.500 = 5.850$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2 * 0.150 + 3^2 * 0.100 + 5^2 * 0.250 + 8^2 * 0.500 - (5.850)^2 = 5.528$.

Выборочная проверка вариант 9 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 16.002 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 7.996 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.850 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.528 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.440$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 5.406$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} = \\
&= 12*2*0.06 + 12*3*0.04 + 12*5*0.10 + 12*8*0.20 + \\
&+ 18*2*0.10 + 18*3*0.10 + 18*5*0.20 + 18*8*0.20 = \\
&= 83.880 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{83.880 - 15.600*5.440}{\sqrt{8.640*5.406}} = -0.144 .$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 83.880 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.144 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.6\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.300 + 1.400 \cdot y - 0.048 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.252 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.252\,y + \frac{0.840}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.252\,y + 0.4200\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.252 \cdot 0.8 + 0.4200 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.252 \cdot 0.2 + 0.4200 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.4704 - 0.0672\big) = 0.4032\,C\,.$$

Значит, $0.4032 \cdot C = 1\,,\quad C = \frac{1}{0.4032} = 2.480\,,$

$$f(x, y) = 2.480 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.488}_{A}\,x + \underbrace{3.472}_{B}\,y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.488\,x + 3.472\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.480	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.488	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.472	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.488\,x + 3.472\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (1.488 \cdot x + 3.472 \cdot y)\, dy = \left(1.488 \cdot x \cdot y + 3.472 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 1.488 \cdot x \cdot 0.8 + 3.472 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.488 \cdot x \cdot 0.2 - 3.472 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.893} \cdot x + \boxed{1.042}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (1.488 \cdot x + 3.472 \cdot y)\, dx = \left(1.488 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.472 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 1.488 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 3.472 \cdot 1.0 \cdot y - 1.488 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 3.472 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.083} \cdot y + \boxed{0.625}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{0.893}_{A_1} \cdot x + \underbrace{1.042}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{2.083}_{A_2} \cdot y + \underbrace{0.625}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(0.893\,x + 1.042\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(0.893\,x^2 + 1.042\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.893\,\frac{x^3}{3} + 1.042\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.819 - 0.102 = 0.717,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(2.083\,y + 0.625\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(2.083\,y^2 + 0.625\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.083\,\frac{y^3}{3} + 0.625\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.555 - 0.018 = 0.537,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.893\,x + 1.042\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(0.893\,x^3 + 1.042\,x^2\big)\,dx - 0.514 = \big(0.893\,\frac{x^4}{4} + 1.042\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.514 =$$

$$= 0.571 - 0.028 - 0.514 = 0.029,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.083\,y + 0.625\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(2.083\,y^3 + 0.625\,y^2\big)\,dy - 0.288 = \big(2.083\,\frac{x^4}{4} + 0.625\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.288 =$$

$$= 0.320 - 0.002 - 0.288 = 0.030.$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.893	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	1.042	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	2.083	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.625	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.717	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.537	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.029	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.030	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.488\,x + 3.472\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.717, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.537, \quad \mathbb{D}(X) = 0.029, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.030$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(1.488\,x + 3.472\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} \big(1.488\,x^2 y + 3.472\,y^2 x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.488\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.472\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.488\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.472\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.464\,y + 1.458\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.464 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.458 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.397 - 0.013 = 0.384\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.384 - 0.717 \cdot 0.537}{\sqrt{0.029 \cdot 0.030}} = -0.035\,.$$

Выборочная проверка вариант 9 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.384 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.035 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{10}^{5} = 30240\,.$ $C_{10}^{5} = 252\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.206\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.241\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.051\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.035\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.379\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.536\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.854\,.$ $x_2 = 2.163\,.$ $P = 0.9524\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.642\,.$ $P_2 = 0.841\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.855\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.624\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.0) = 0.693\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.38\,.$ $\mathbb{P}(1.1 \leq X \leq 3.2) = 0.5387\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.440\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.406\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.002\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.850\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 7.996\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.528\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 83.880\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.144\,.$

Задача 15. $C = 2.480\,,$ $f(x, y) = 1.488 \cdot x + 3.472\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.893 \cdot x + 1.042\,,$ $f_2(y) = 2.083 \cdot y + 0.625\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.717\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.537\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.029\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.030\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.384\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.035\,.$

Вариант 10

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{13}^{5}\,,\ C_{13}^{5}\,.$

Решение

$5! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{13}^{5} = \underbrace{13\cdot 12\cdot \ldots \cdot 9}_{5\text{ множителей}} = \boxed{154440}\,.$

$C_{13}^{5} = \frac{13\cdot 12\cdot \ldots \cdot 9}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{1287}\,.$

Выборочная проверка вариант 10 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{13}^{5} =$ введи 154440 Клик

формат abcd, $C_{13}^{5} =$ введи 1287 Клик

Задача 2

В ящике 14 белых и 5 черных шаров. Наудачу извлекается 6 шаров. Найти вероятность того, что

1 *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*

2 *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{6} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 14}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 27132.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{14}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 364 \cdot 10 = 3640.$$

(извлекаем 3 шара из 14 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3640}{27132} = 0.134.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.134$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{14}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{27132} = \frac{91 \cdot 5}{27132} = 0.017,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{14}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{27132} = \frac{14 \cdot 1}{27132} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.152$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.134	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.017	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.152	Клик	

Задача 3

В тире имеется 55 *винтовок, из них* 13 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01, *для устаревшей* 0.06. *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{13}{55} = 0.236\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{42}{55} = 0.764\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.236 + 0.06 * 0.764 = 0.048\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.236}{0.048} = 0.049\,.$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.048 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.049 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{18}^2} = 0.183\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_{10}^1}{C_{18}^2} = 0.523\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{12}^2}{C_{21}^4} = 0.397\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2} = 0.294\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{13}^2}{C_{21}^4} = 0.365\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) = \\ &= 0.414\cdot 0.183 + 0.397\cdot 0.523 + 0.365\cdot 0.294 = 0.391\,.\end{aligned}$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397\cdot 0.523}{0.391} = 0.531$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.391 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.531 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.520. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.520$, $q = 1 - p = 0.480$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0255 = 0.026$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.5200 * 0.0531 = 0.138$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2704 * 0.1106 = 0.299$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1406 * 0.2304 = 0.324$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0731 * 0.4800 = 0.175$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0380 * 1.000 = 0.038$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.026**	**0.138**	**0.299**	**0.324**	**0.175**	**0.038**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 2 * 0.299 + 3 * 0.324 + 4 * 0.175 + 5 * 0.038 = 2.598.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.520 = \mathbf{2.600}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.598)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 4 * 0.299 + 9 * 0.324 + 16 * 0.175 + 25 * 0.038 = 8.000.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 8.000 - (2.598)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.520 * 0.480 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.598 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.42 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4125 *и* 4335 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.42$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4125$, $k_2 = 4335$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4125 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-75}{49.356} = -1.520 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4335 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = 2.735 .$$

Поэтому $P_{10000}(4125, 4335) = \Phi(2.735) - \Phi(-1.520) = \Phi(2.735) + \Phi(1.520)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.735) = 0.4969 \quad \text{и} \quad \Phi(1.520) = 0.4357 .$$

Окончательно, $P_{10000}(4125, 4335) = 0.4969 + 0.4357 = 0.9326$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.520 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.735 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9326 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 402 *и* 458 *(вероятность* P_1*)*

2) между 392 *и* 468 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 402 = 458 - 430 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 28) \geq 1 - \frac{245.1}{28^2} = 0.687.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 392 = 468 - 430 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 38) \geq 1 - \frac{245.1}{38^2} = 0.830.$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.687 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.830 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	5	8	9	11	$\sum$
вероятность p_i	0.013	0.069	0.150	0.474	0.244	0.050	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.013 + 4 * 0.069 + 5 * 0.150 + 8 * 0.474 + 9 * 0.244 + 11 * 0.050 =$$

$$= 7.577 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.577)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.013 + 4^2 * 0.069 + 5^2 * 0.150 + 8^2 * 0.474 + 9^2 * 0.244 + 11^2 * 0.050 =$$

$$= 61.017 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 61.017 - 7.577^2 = 3.606 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.899 .$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.577 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.606 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{2.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

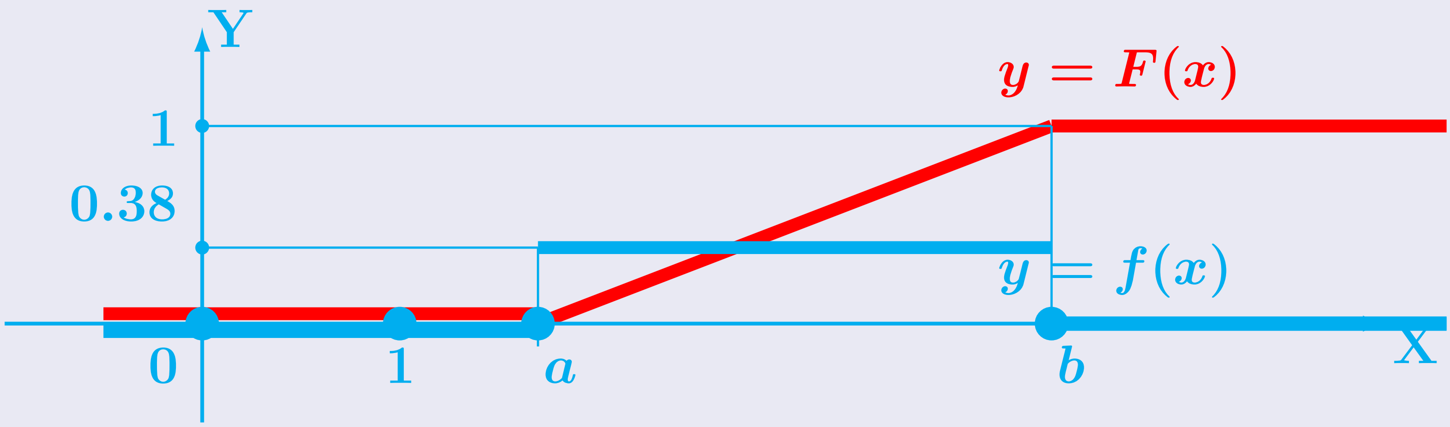

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.7}{2} = 3.00$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.9) = \frac{3.7-1.7}{2.6} - \frac{1.9-1.7}{2.6} = 0.769 - 0.077 = 0.692$

Выборочная проверка вариант 10 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.7) =$ введи 0.692 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9)$ *попадания в интервал* $1.5 \leq x \leq 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.5-2.7}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.3} = 0.92$,

$$\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = \int_{1.5}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.92) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.92) = 0.3238 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = 0.3238 + 0.3238 = 0.6476$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.92 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6476 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.14**	**0.16**	**0.25**	**0.45**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{15.600}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = \boxed{8.640}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14 + 4*0.16 + 5*0.25 + 8*0.45 = \boxed{5.630}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 37.750 - (5.630)^2 = \boxed{6.053}$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.630 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.053 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**p_1**	**p_2**

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.200 + 18 * 0.800 = \boxed{16.800}$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.200 + 18^2 * 0.800 - (16.800)^2 = \boxed{5.760}$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	5	8
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	8
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 5 * 0.125 + 8 * 0.625 = 6.325$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 5^2 * 0.125 + 8^2 * 0.625 - (6.325)^2 = 5.619$.

Выборочная проверка вариант 10 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3})=$ введи	16.800	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3})=$ введи	5.760	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1})=$ введи	6.325	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1})=$ введи	5.619	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.630$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 6.053$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X\cdot Y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} &= \\
&= 12*1*0.04 + 12*4*0.06 + 12*5*0.05 + 12*8*0.25 &+ \\
&+ 18*1*0.10 + 18*4*0.10 + 18*5*0.20 + 18*8*0.20 &= \\
&= 86.160\ .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{86.160 - 15.600*5.630}{\sqrt{8.640*6.053}} = -0.231.$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 86.160 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.231 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (0.6\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.432 + 1.680 \cdot y - 0.012 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.420 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.420\,y + \frac{1.400}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.420\,y + 0.7000\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.420 \cdot 0.8 + 0.7000 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.420 \cdot 0.2 + 0.7000 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.7840 - 0.1120\big) = 0.6720\, C\,.$$

Значит, $0.6720 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.6720} = 1.488\,,$

$$f(x, y) = 1.488 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{0.893}_{A}\, x + \underbrace{2.083}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.893\,x + 2.083\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.488	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	0.893	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.083	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.893\,x + 2.083\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (0.893 \cdot x + 2.083 \cdot y)\,dy = \Big(0.893 \cdot x \cdot y + 2.083 \cdot \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 0.893 \cdot x \cdot 0.8 + 2.083 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 0.893 \cdot x \cdot 0.2 - 2.083 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.536} \cdot x + \boxed{0.625}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (0.893 \cdot x + 2.083 \cdot y)\,dx = \Big(0.893 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.083 \cdot x \cdot y\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 0.893 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.083 \cdot 1.2 \cdot y - 0.893 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 2.083 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{2.083} \cdot y + \boxed{0.625}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.536}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.625}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.083}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.625}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.536\,x + 0.625\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.536\,x^2 + 0.625\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.536\,\tfrac{x^3}{3} + 0.625\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.759 - 0.014 = \boxed{0.745},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(2.083\,y + 0.625\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(2.083\,y^2 + 0.625\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.083\,\tfrac{y^3}{3} + 0.625\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.555 - 0.018 = \boxed{0.537},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.536\,x + 0.625\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.536\,x^3 + 0.625\,x^2\big)\,dx - 0.555 = \big(0.536\,\tfrac{x^4}{4} + 0.625\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.555 =$$

$$= 0.638 - 0.002 - 0.555 = \boxed{0.081},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.083\,y + 0.625\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(2.083\,y^3 + 0.625\,y^2\big)\,dy - 0.288 = \big(2.083\,\tfrac{x^4}{4} + 0.625\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.288 =$$

$$= 0.320 - 0.002 - 0.288 = \boxed{0.030}.$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.536	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.625	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.083	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.625	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.745	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.537	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.081	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.030	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.893\,x + 2.083\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.745, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.537, \quad \mathbb{D}(X) = 0.081, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.030$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(0.893\,x + 2.083\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} \big(0.893\,x^2 y + 2.083\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.893\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.083\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(0.893\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.083\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.512\,y + 1.458\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.512 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.458 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.413 - 0.014 = 0.399\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.399 - 0.745 \cdot 0.537}{\sqrt{0.081 \cdot 0.030}} = -0.022\,.$$

Выборочная проверка вариант 10 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.399 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.022 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{13}^{5} = 154440\,.$ $C_{13}^{5} = 1287\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.134\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.152\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.048\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.049\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.391\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.531\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.598\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.520\,.$ $x_2 = 2.735\,.$ $P = 0.9326\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.687\,.$ $P_2 = 0.830\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.577\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.606\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) = 0.692\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.92\,.$ $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = 0.6476\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.630\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.053\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.800\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.325\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 5.760\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.619\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 86.160\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.231\,.$

Задача 15. $C = 1.488\,,$ $f(x, y) = 0.893 \cdot x + 2.083\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.536 \cdot x + 0.625\,,$ $f_2(y) = 2.083 \cdot y + 0.625\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.745\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.537\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.081\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.030\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.399\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.022\,.$

возврат огл

Вариант 11

возврат огл

Задача 1

Найти $6!\,,\ A^{6}_{12}\,,\ C^{6}_{12}\,.$

Решение

$6! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6 = \boxed{720}\ .$

$A^{6}_{12} = \underbrace{12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 7}_{6\ \text{множителей}} = \boxed{665280}\,.$

$C^{6}_{12} = \frac{12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 7}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6} = \boxed{924}\,.$

Выборочная проверка вариант 11 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A^{6}_{12} =$ введи 665280 Клик

формат abcd, $C^{6}_{12} =$ введи 924 Клик

Задача 2

В ящике 13 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекается 7 шаров. Найти вероятность того, что

1 *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*

2 *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{7} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 50388.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 286 \cdot 15 = 4290.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{4290}{50388} = 0.085.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.085$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{50388} = \frac{78 \cdot 6}{50388} = 0.009 \,,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{50388} = \frac{13 \cdot 1}{50388} = 0.000 \,,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.094$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.085	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.009	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.094	Клик	

Задача 3

В тире имеется 66 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.08 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{66} = 0.182$, $\mathbb{P}(H_2) = \frac{54}{66} = 0.818$,

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01$, $\mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08$.

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = 0.01 * 0.182 + 0.08 * 0.818 = 0.067 .$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.182}{0.067} = 0.027 .$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.067 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.027 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 8 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{18}^2} = 0.183\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_8^1 \cdot C_{10}^1}{C_{18}^2} = 0.523\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{15}^2}{C_{24}^4} = 0.356\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2} = 0.294\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{16}^2}{C_{24}^4} = 0.316\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.385 \cdot 0.183 + 0.356 \cdot 0.523 + 0.316 \cdot 0.294 = 0.350\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.356 \cdot 0.523}{0.350} = 0.532$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.350 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.532 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.44. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4310 *и* 4526.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.44$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4310$, $k_2 = 4526$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4310 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-90}{49.639} = \boxed{-1.813},$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4526 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \boxed{2.538}.$$

Поэтому $P_{10000}(4310, 4526) = \Phi(2.538) - \Phi(-1.813) = \Phi(2.538) + \Phi(1.813)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.538) = 0.4945 \quad \text{и} \quad \Phi(1.813) = 0.4649.$$

Окончательно, $P_{10000}(4310, 4526) = 0.4945 + 0.4649 = \boxed{0.9594}$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.813 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.538 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9594 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 412 *и* 468 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 400 *и* 480 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 412 = 468 - 440 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 28) \geq 1 - \frac{246.4}{28^2} = 0.686.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 400 = 480 - 440 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 40) \geq 1 - \frac{246.4}{40^2} = 0.846.$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.686 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.846 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	5	8	10	12	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.025 + 4 * 0.106 + 5 * 0.175 + 8 * 0.449 + 10 * 0.207 + 12 * 0.038 =$$

$$= 7.442 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.442)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.025 + 4^2 * 0.106 + 5^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 10^2 * 0.207 + 12^2 * 0.038 =$$

$$= 61.004 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 61.004 - 7.442^2 = 5.621 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.371 .$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.442 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.621 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0.7 \\ \frac{1}{3.6} & \text{при} \quad 0.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{3.6} & \text{при} \quad 0.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases},$$

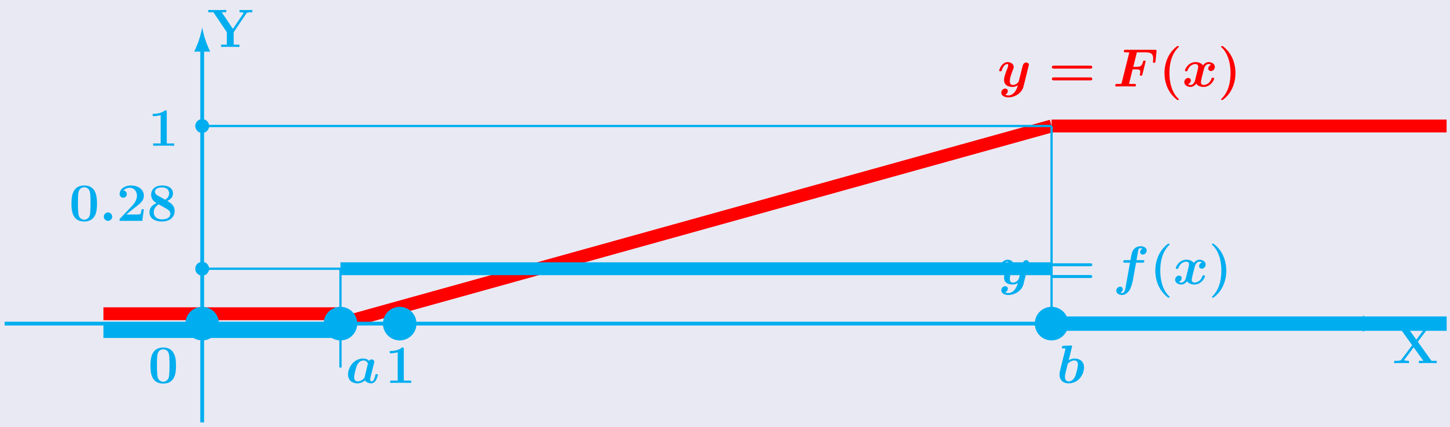

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.7}{2} = 2.50$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.7)^2}{12} = 1.080$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.039$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.2) = \frac{3.7-0.7}{3.6} - \frac{1.2-0.7}{3.6} = 0.833 - 0.139 = 0.694$

Выборочная проверка вариант 11 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.080 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) =$ введи 0.694 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $0.8 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.8^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{0.8-2.7}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.8} = 0.67$,

$$\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = \int_{0.8}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.67) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.67) = 0.2486 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = 0.2486 + 0.3554 = 0.6040$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.67 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6040 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.20 + 0.20 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	**0.16**	**0.14**	**0.25**	**0.45**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{16.000}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 262.000 - (16.000)^2 = \boxed{6.000}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16 + 4*0.14 + 5*0.25 + 8*0.45 = \boxed{5.730}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 37.930 - (5.730)^2 = \boxed{5.097}$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.730 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.097 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\to$	**2**	**4**	**5**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=13}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}} \text{ — в знаменателе сумма по столбцу } 3 \text{ табл. задачи } 12.$$

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 13 * 0.200 + 18 * 0.800 = 17.000$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 13^2 * 0.200 + 18^2 * 0.800 - (17.000)^2 = 4.000$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	4	5	8
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	8
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2 * 0.150 + 4 * 0.100 + 5 * 0.125 + 8 * 0.625 = 6.325$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2 * 0.150 + 4^2 * 0.100 + 5^2 * 0.125 + 8^2 * 0.625 - (6.325)^2 = 5.319$.

Выборочная проверка вариант 11 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	17.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	4.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=13=x_1}) =$ введи	6.325	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=13=x_1}) =$ введи	5.319	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X и Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.730$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 5.097$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\
&= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 5 * 0.05 + 13 * 8 * 0.25 && + \\
&+ 18 * 2 * 0.10 + 18 * 4 * 0.10 + 18 * 5 * 0.20 + 18 * 8 * 0.20 && = \\
&= 90.490\,.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{90.490 - 16.000 * 5.730}{\sqrt{6.000 * 5.097}} = -0.215\,.$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 90.490 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.215 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C(0.6\, x + 1.9\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (0.6\, x + 1.9\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\Big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\Big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\Big) - \Big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\Big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.432 + 2.280 \cdot y - 0.048 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.384 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.384\, y + \frac{1.520}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.384\, y + 0.7600\, y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.384 \cdot 0.8 + 0.7600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.384 \cdot 0.2 + 0.7600 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.7936 - 0.1072\big) = 0.6864\, C\,.$$

Значит, $0.6864 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.6864} = 1.457\,,$

$$f(x, y) = 1.457 * (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{0.874}_{A}\, x + \underbrace{2.768}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.874\, x + 2.768\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.457	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	0.874	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.768	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.874\,x + 2.768\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (0.874 \cdot x + 2.768 \cdot y)\,dy = \left(0.874 \cdot x \cdot y + 2.768 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 0.874 \cdot x \cdot 0.8 + 2.768 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 0.874 \cdot x \cdot 0.2 - 2.768 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.524} \cdot x + \boxed{0.830}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (0.874 \cdot x + 2.768 \cdot y)\,dx = \left(0.874 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.768 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 0.874 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.768 \cdot 1.2 \cdot y - 0.874 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 2.768 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.214} \cdot y + \boxed{0.559}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{0.524}_{A_1} \cdot x + \underbrace{0.830}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{2.214}_{A_2} \cdot y + \underbrace{0.559}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.524\,x + 0.830\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.524\,x^2 + 0.830\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.524\,\tfrac{x^3}{3} + 0.830\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.899 - 0.078 = \boxed{0.821},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(2.214\,y + 0.559\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(2.214\,y^2 + 0.559\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.214\,\tfrac{y^3}{3} + 0.559\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.557 - 0.017 = \boxed{0.540},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.524\,x + 0.830\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.524\,x^3 + 0.830\,x^2\big)\,dx - 0.674 = \big(0.524\,\tfrac{x^4}{4} + 0.830\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.674 =$$

$$= 0.750 - 0.021 - 0.674 = \boxed{0.055},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.214\,y + 0.559\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(2.214\,y^3 + 0.559\,y^2\big)\,dy - 0.292 = \big(2.214\,\tfrac{x^4}{4} + 0.559\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.292 =$$

$$= 0.322 - 0.002 - 0.292 = \boxed{0.028}.$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.524	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.830	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.214	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.559	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.821	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.540	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.055	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.028	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.874\,x + 2.768\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.821, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.540, \quad \mathbb{D}(X) = 0.055, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.028$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(0.874\,x + 2.768\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} \big(0.874\,x^2y + 2.768\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.874\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.768\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(0.874\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.768\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.484\,y + 1.772\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.484 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.772 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.457 - 0.014 = 0.443\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.443 - 0.821{\cdot}0.540}{\sqrt{0.055{\cdot}0.028}} = -0.009\,.$$

Выборочная проверка вариант 11 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.443 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.009 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{12}^{6} = 665280\,.$ $C_{12}^{6} = 924\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.085\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.094\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.067\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.027\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.350\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.532\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.813\,.$ $x_2 = 2.538\,.$ $P = 0.9594\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.686\,.$ $P_2 = 0.846\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.442\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.621\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.080\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.7) = 0.694\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.67\,.$ $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = 0.6040\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.730\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.097\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 17.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 6.325\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 4.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.319\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 90.490\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.215\,.$

Задача 15. $C = 1.457\,,$ $f(x, y) = 0.874 \cdot x + 2.768\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.524 \cdot x + 0.830\,,$ $f_2(y) = 2.214 \cdot y + 0.559\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.821\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.540\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.055\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.028\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.443\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.009\,.$

возврат огл

Вариант 12

возврат огл

Задача 1

Найти $5!\,,\ A_{11}^{4}\,,\ C_{11}^{4}\,.$

Решение

$5! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}\ .$

$A_{11}^{4} = \underbrace{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 8}_{4\text{ множителей}} = \boxed{7920}\,.$

$C_{11}^{4} = \frac{11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{330}\,.$

Выборочная проверка вариант 12 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{11}^{4} =$ введи 7920 Клик

формат abcd, $C_{11}^{4} =$ введи 330 Клик

Задача 2

В ящике 12 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^{5} = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 4368.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^{3} \cdot C_{4}^{2} = 220 \cdot 6 = 1320.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1320}{4368} = 0.302.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.302$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{4}^{3}}{4368} = \frac{66 \cdot 4}{4368} = 0.060$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^{1} \cdot C_{4}^{4}}{4368} = \frac{12 \cdot 1}{4368} = 0.003$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.365$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.302 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.060 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.003 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.365 Клик

Задача 3

В тире имеется 45 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01, *для устаревшей* 0.05. *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{45} = 0.244\,,\quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{34}{45} = 0.756\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,,\quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.244 + 0.05 * 0.756 = 0.040\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.244}{0.040} = 0.061\,.$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.040 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.061 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{19}^2} = 0.263; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_9^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_9^1}{C_{19}^2} = 0.526; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{10}^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = 0.211; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.418 \cdot 0.263 + 0.418 \cdot 0.526 + 0.397 \cdot 0.211 = 0.414.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.418 \cdot 0.526}{0.414} = 0.531$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.414 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.531 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n =$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \dots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084$.

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.36 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3525 *и* 3714 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.36$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.64$,
$k_1 = 3525$, $k_2 = 3714$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3525 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = \frac{-75}{48.000} = -1.563 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3714 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = 2.375 .$$

Поэтому $P_{10000}(3525, 3714) = \Phi(2.375) - \Phi(-1.563) = \Phi(2.375) + \Phi(1.563)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.375) = 0.4913 \quad \text{и} \quad \Phi(1.563) = 0.4406 .$$

Окончательно, $P_{10000}(3525, 3714) = 0.4913 + 0.4406 = 0.9319$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.563 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.375 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9319 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 374 *и* 426 *(вероятность* P_1*)*

2) между 363 *и* 437 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 374 = 426 - 400 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 26) \geq 1 - \frac{240.0}{26^2} = 0.645.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 363 = 437 - 400 = 37$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 37) \geq 1 - \frac{240.0}{37^2} = 0.825.$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.645 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.825 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	6	7	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.047 + 4 * 0.164 + 6 * 0.207 + 7 * 0.401 + 9 * 0.158 + 12 * 0.023 =$$

$$= 6.450 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.450)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.047 + 4^2 * 0.164 + 6^2 * 0.207 + 7^2 * 0.401 + 9^2 * 0.158 + 12^2 * 0.023 =$$

$$= 45.882 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 45.882 - 6.450^2 = 4.280 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.069 .$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.450 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 4.280 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{1}{1.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{1.6} & \text{при } 1.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

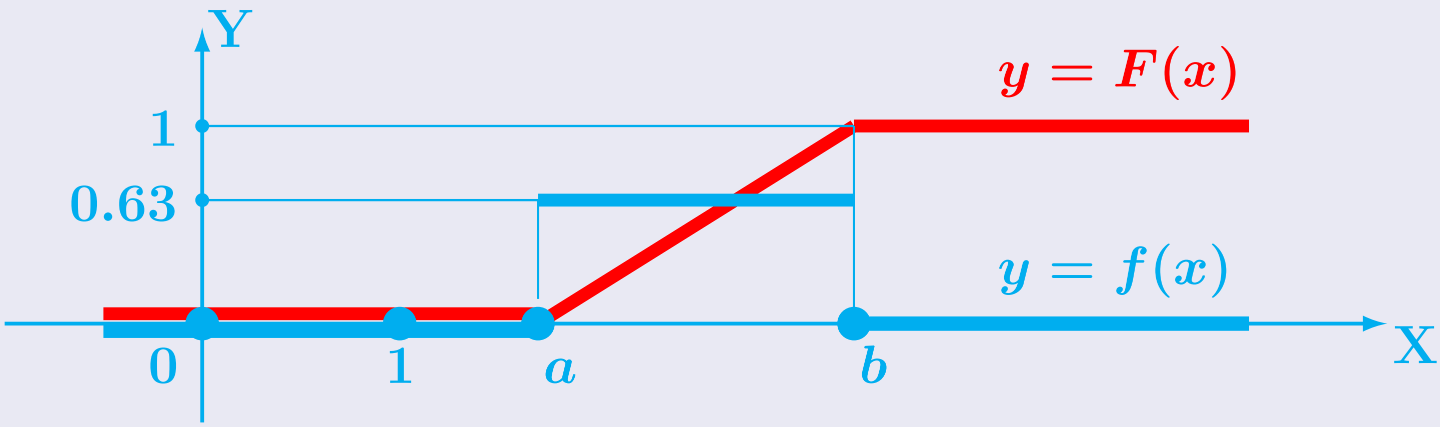

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.7}{2} = 2.50$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.7)^2}{12} = 0.213$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.462$,

$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.9) = \frac{3.0-1.7}{1.6} - \frac{1.9-1.7}{1.6} = 0.813 - 0.125 = 0.688$

Выборочная проверка вариант 12 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.213 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) =$ введи 0.688 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.8 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*0.8^2}} = \dfrac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.8-2.7}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \dfrac{3.2-2.7}{0.8} = 0.63$,

$$\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = \int_{1.8}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.63) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.63) = 0.2357 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = 0.2357 + 0.3708 = 0.6065$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.63 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6065 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.18**	**0.12**	**0.30**	**0.40**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{15.200}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 242.800 - (15.200)^2 = \boxed{11.760}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18+3*0.12+6*0.30+8*0.40 = \boxed{5.540}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 37.660 - (5.540)^2 = \boxed{6.968}$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.540 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.968 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=11}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 11 * 0.333 + 18 * 0.667 = 15.669$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 11^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (15.669)^2 = 10.883$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	3	6	8
11	0.04	0.06	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.20	0.20

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	6	8
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1 * 0.100 + 3 * 0.150 + 6 * 0.250 + 8 * 0.500 = 6.050$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 3^2 * 0.150 + 6^2 * 0.250 + 8^2 * 0.500 - (6.050)^2 = 5.848$.

Выборочная проверка вариант 12 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 15.669 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 10.883 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1})=$ введи 6.050 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1})=$ введи 5.848 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.540$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 6.968$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} \quad = \\
&= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 6 * 0.10 + 11 * 8 * 0.20 \; + \\
&+ \; 18 * 1 * 0.14 + 18 * 3 * 0.06 + 18 * 6 * 0.20 + 18 * 8 * 0.20 \; = \\
&= 82.780 \, .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{82.780 - 15.200 * 5.540}{\sqrt{11.760 * 6.968}} = -0.158 .$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 82.780 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.158 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C(0.6\,x + 0.9\,y)\, dx\, dy = C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\int_{0.2}^{1.0}(0.6\,x + 0.9\,y)\, dx\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0}\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big)\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}(0.300 + 0.900 \cdot y - 0.012 - 0.180 \cdot y)dy = C\int_{0.4}^{0.8}(0.288 + 0.720 \cdot y)dy =$$

$$= C\Big(0.288\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.288\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.288 \cdot 0.8 + 0.3600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.288 \cdot 0.4 + 0.3600 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.4608 - 0.1728\big) = 0.2880\,C\,.$$

Значит, $0.2880 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2880} = 3.472$,

$$f(x, y) = 3.472 * (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{2.083}_{A}\,x + \underbrace{3.125}_{B}\,y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.083\,x + 3.125\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	3.472	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.083	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.125	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.083\,x + 3.125\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (2.083 \cdot x + 3.125 \cdot y)\,dy = \left(2.083 \cdot x \cdot y + 3.125 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 2.083 \cdot x \cdot 0.8 + 3.125 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 2.083 \cdot x \cdot 0.4 - 3.125 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.833} \cdot x + \boxed{0.750}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (2.083 \cdot x + 3.125 \cdot y)\,dx = \left(2.083 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.125 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 2.083 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 3.125 \cdot 1.0 \cdot y - 2.083 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 3.125 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{2.500} \cdot y + \boxed{1.000}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{0.833}_{A_1} \cdot x + \underbrace{0.750}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{2.500}_{A_2} \cdot y + \underbrace{1.000}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(0.833\,x + 0.750\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(0.833\,x^2 + 0.750\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.833\,\tfrac{x^3}{3} + 0.750\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.653 - 0.017 = \boxed{0.636},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.500\,y + 1.000\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.500\,y^2 + 1.000\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.500\,\tfrac{y^3}{3} + 1.000\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.747 - 0.133 = \boxed{0.614},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.833\,x + 0.750\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(0.833\,x^3 + 0.750\,x^2\big)\,dx - 0.404 = \big(0.833\,\tfrac{x^4}{4} + 0.750\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.404 =$$

$$= 0.458 - 0.002 - 0.404 = \boxed{0.052},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.500\,y + 1.000\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.500\,y^3 + 1.000\,y^2\big)\,dy - 0.377 = \big(2.500\,\tfrac{x^4}{4} + 1.000\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.377 =$$

$$= 0.427 - 0.037 - 0.377 = \boxed{0.013}.$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.833	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.750	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.500	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.636	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.614	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.052	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.083\,x + 3.125\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.636, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.614, \quad \mathbb{D}(X) = 0.052, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(2.083\,x + 3.125\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.0} \big(2.083\,x^2 y + 3.125\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.083\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.125\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.083\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.125\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(0.688\,y + 1.500\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.688 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.500 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.476 - 0.087 = 0.389\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.389 - 0.636{\cdot}0.614}{\sqrt{0.052{\cdot}0.013}} = -0.058\,.$$

Выборочная проверка вариант 12 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.389 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.058 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{11}^{4} = 7920\,.$ $C_{11}^{4} = 330\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.302\,.$ $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = 0.365\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.040\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.061\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.414\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.531\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.563\,.$ $x_2 = 2.375\,.$ $P = 0.9319\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.645\,.$ $P_2 = 0.825\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.450\,.$ $\mathbb{D}(X) = 4.280\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.213\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.0) = 0.688\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.63\,.$ $\mathbb{P}(1.8 \le X \le 3.2) = 0.6065\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.540\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.968\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 15.669\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 6.050\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 10.883\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.848\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 82.780\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.158\,.$

Задача 15. $C = 3.472\,,$ $f(x, y) = 2.083 \cdot x + 3.125\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.833 \cdot x + 0.750\,,$ $f_2(y) = 2.500 \cdot y + 1.000\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.636\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.614\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.052\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.389\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.058\,.$

возврат огл

Вариант 13

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{10}^{5}, C_{10}^{5}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{10}^{5} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{30240}$.

$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{252}$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{10}^{5} =$ введи 30240 Клик

формат abcd, $C_{10}^{5} =$ введи 252 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^6 = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 8008.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^3 \cdot C_5^3 = 165 \cdot 10 = 1650.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1650}{8008} = 0.206.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.206$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_5^4}{8008} = \frac{55 \cdot 5}{8008} = 0.034,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_5^5}{8008} = \frac{11 \cdot 1}{8008} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.241$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.206	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.034	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.241	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.06 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{56} = 0.179\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{46}{56} = 0.821\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.179 + 0.06 * 0.821 = 0.051\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.179}{0.051} = 0.035\,.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.051 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.035 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: *10 белых шаров и 9 черных;*

2-й ящик: *8 белых шаров и 12 черных.*

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{19}^2} = 0.263\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{22}^4} = 0.406\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_9^1}{C_{19}^2} = 0.526\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{13}^2}{C_{22}^4} = 0.384\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = 0.211\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.406\cdot 0.263 + 0.384\cdot 0.526 + 0.348\cdot 0.211 = 0.382\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.384\cdot 0.526}{0.382} = 0.529\,.$

Выборочная проверка вариант 13 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.382 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.529 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.38 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3710 *и* 3905 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.38$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.62$,
$k_1 = 3710$, $k_2 = 3905$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3710 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \frac{-90}{48.539} = -1.854,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3905 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = 2.163.$$

Поэтому $P_{10000}(3710, 3905) = \Phi(2.163) - \Phi(-1.854) = \Phi(2.163) + \Phi(1.854)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.163) = 0.4846 \quad \text{и} \quad \Phi(1.854) = 0.4678.$$

Окончательно, $P_{10000}(3710, 3905) = 0.4846 + 0.4678 = 0.9524$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.854 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.163 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9524 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 384 *и* 436 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 371 *и* 449 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 384 = 436 - 410 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 26) \geq 1 - \frac{241.9}{26^2} = 0.642.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 371 = 449 - 410 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 39) \geq 1 - \frac{241.9}{39^2} = 0.841.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.642 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.841 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	6	7	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.073 + 4 * 0.221 + 6 * 0.231 + 7 * 0.345 + 10 * 0.116 + 13 * 0.014 =$$

$$= \boxed{6.100}\,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.100)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.073 + 4^2 * 0.221 + 6^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 10^2 * 0.116 + 13^2 * 0.014 =$$

$$= \boxed{42.796}\,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 42.796 - 6.100^2 = \boxed{5.586}\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.363\,.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.100 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.586 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.7 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{2.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

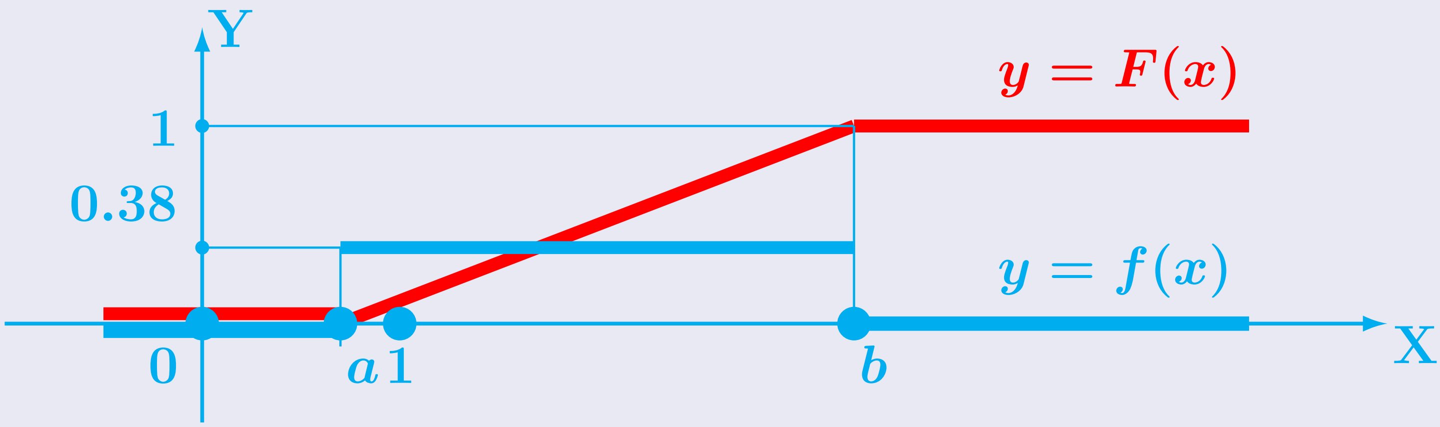

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.7}{2} = 2.00$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.2) = \frac{3.0-0.7}{2.6} - \frac{1.2-0.7}{2.6} = 0.885 - 0.192 = 0.693$

Выборочная проверка вариант 13 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.0) =$ введи 0.693 Клик

Задача 11

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. Определить плотность $f(x)$, функцию распределения $F(x)$, и построить график функции $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, дисперсию $\mathbb{D}(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2)$ попадания в интервал $1.1 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.1-2.7}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.7}{1.3} = 0.38$,

$$\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = \int_{1.1}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.38) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.38) = 0.1480 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.1 \le X \le 3.2) = 0.1480 + 0.3907 = 0.5387$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.38 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5387 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	8
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.20	0.20

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	12	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} \text{ — сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	2	3	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} \text{ — сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.20 = 0.30, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.20 = 0.40$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	12	18
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	2	3	6	8
вероятность q_j этого значения	0.20	0.10	0.30	0.40

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2 * 0.20 + 3 * 0.10 + 6 * 0.30 + 8 * 0.40 = 5.700$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 38.100 - (5.700)^2 = 5.610$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.700 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.610 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.20} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.10+0.20} = 0.667$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.002$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.002)^2 = 7.996$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	**2**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2*0.150+3*0.100+6*0.250+8*0.500 = 6.100$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2*0.150+3^2*0.100+6^2*0.250+8^2*0.500-(6.100)^2 = 5.290$.

Выборочная проверка вариант 13 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 16.002 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 7.996 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 6.100 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.290 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	8
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.20	0.20

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.700$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 5.610$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 6 * 0.10 + 12 * 8 * 0.20 + \\ &+ 18 * 2 * 0.14 + 18 * 3 * 0.06 + 18 * 6 * 0.20 + 18 * 8 * 0.20 = \\ &= 87.960\,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{87.960 - 15.600 * 5.700}{\sqrt{8.640 * 5.610}} = -0.138.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 87.960 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.138 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C(0.6\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.6\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} (0.300 + 1.400 \cdot y - 0.048 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.8} (0.252 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.252\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.252\, y + 0.4200\, y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.252 \cdot 0.8 + 0.4200 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.252 \cdot 0.4 + 0.4200 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.4704 - 0.1680\big) = 0.3024\, C\,.$$

Значит, $0.3024 \cdot C = 1$, $\quad C = \frac{1}{0.3024} = \boxed{3.307}$,

$$f(x, y) = 3.307 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.984}_{A}\, x + \underbrace{4.630}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.984\, x + 4.630\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	3.307	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.984	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	4.630	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.984\,x + 4.630\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (1.984 \cdot x + 4.630 \cdot y)\,dy = \left(1.984 \cdot x \cdot y + 4.630 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 1.984 \cdot x \cdot 0.8 + 4.630 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.984 \cdot x \cdot 0.4 - 4.630 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.794} \cdot x + \boxed{1.111}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (1.984 \cdot x + 4.630 \cdot y)\,dx = \left(1.984 \cdot \frac{x^2}{2} + 4.630 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 1.984 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 4.630 \cdot 1.0 \cdot y - 1.984 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 4.630 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.778} \cdot y + \boxed{0.833}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.794}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.111}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.778}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.833}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(0.794\,x + 1.111\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(0.794\,x^2 + 1.111\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.794\,\tfrac{x^3}{3} + 1.111\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.820 - 0.106 = 0.714,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.778\,y + 0.833\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.778\,y^2 + 0.833\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.778\,\tfrac{y^3}{3} + 0.833\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.741 - 0.126 = 0.615,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.794\,x + 1.111\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(0.794\,x^3 + 1.111\,x^2\big)\,dx - 0.510 = \big(0.794\,\tfrac{x^4}{4} + 1.111\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.510 =$$

$$= 0.569 - 0.029 - 0.510 = 0.030,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.778\,y + 0.833\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.778\,y^3 + 0.833\,y^2\big)\,dy - 0.378 = \big(2.778\,\tfrac{x^4}{4} + 0.833\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.378 =$$

$$= 0.427 - 0.036 - 0.378 = 0.013.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.794	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	1.111	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	2.778	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.833	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.714	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.615	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.030	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.984\,x + 4.630\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.714, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.615, \quad \mathbb{D}(X) = 0.030, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X\cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.0} x\cdot y\cdot\big(1.984\,x + 4.630\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.0}\big(1.984\,x^2 y + 4.630\,y^2 x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8}\Big(1.984\,\frac{x^3}{3}\,y + 4.630\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\Big(1.984\,\frac{x^3}{3}\,y + 4.630\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.8}\big(0.619\,y + 1.945\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.619\cdot\frac{y^2}{2} + 1.945\cdot\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.530 - 0.091 = 0.439\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.439 - 0.714\cdot 0.615}{\sqrt{0.030\cdot 0.013}} = -0.006\,.$$

Выборочная проверка вариант 13 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 0.439 Клик

формат 1.234, $r(X\cdot Y) =$ введи -0.006 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{10}^{5} = 30240\,.$ $C_{10}^{5} = 252\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.206\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.241\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.051\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.035\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.382\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.529\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.854\,.$ $x_2 = 2.163\,.$ $P = 0.9524\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.642\,.$ $P_2 = 0.841\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.100\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.586\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.0) = 0.693\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.38\,.$ $\mathbb{P}(1.1 \leq X \leq 3.2) = 0.5387\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.700\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.610\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.002\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.100\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 7.996\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.290\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 87.960\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.138\,.$

Задача 15. $C = 3.307\,,$ $f(x, y) = 1.984 \cdot x + 4.630\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.794 \cdot x + 1.111\,,$ $f_2(y) = 2.778 \cdot y + 0.833\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.714\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.615\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.030\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.439\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.006\,.$

возврат огл

Вариант 14

возврат огл

Задача 1

Найти $5!$, A_{13}^5, C_{13}^5.

Решение

$5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = \boxed{120}$.

$A_{13}^5 = \underbrace{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{154440}$.

$C_{13}^5 = \frac{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{1287}$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 1

формат abcd, $5! =$ введи 120 Клик

формат abcd, $A_{13}^5 =$ введи 154440 Клик

формат abcd, $C_{13}^5 =$ введи 1287 Клик

Задача 2

В ящике 14 белых и 5 черных шаров. Наудачу извлекается 6 шаров. Найти вероятность того, что

1 *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*

2 *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{6} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 14}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 27132.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{14}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 364 \cdot 10 = 3640.$$

(извлекаем 3 шара из 14 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3640}{27132} = 0.134.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.134$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{14}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{27132} = \frac{91 \cdot 5}{27132} = 0.017,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{14}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{27132} = \frac{14 \cdot 1}{27132} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.152$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи | 0.134 | Клик |

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи | 0.017 | Клик |

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи | 0.001 | Клик |

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи | 0.152 | Клик |

Задача 3

В тире имеется 55 *винтовок, из них* 13 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.06 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{13}{55} = 0.236\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{42}{55} = 0.764\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.236 + 0.06 * 0.764 = 0.048\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.236}{0.048} = 0.049\,.$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.048 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.049 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

$H_1:$ оба перемещенных шара $-$ белые,
$H_2:$ из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
$H_3:$ оба перемещенных шара $-$ черные,

$A:$ среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = 0.237; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{20}^2} = 0.526; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{12}^2}{C_{21}^4} = 0.397;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = 0.237; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{13}^2}{C_{21}^4} = 0.365;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.414 \cdot 0.237 + 0.397 \cdot 0.526 + 0.365 \cdot 0.237 = 0.393.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397 \cdot 0.526}{0.393} = 0.531$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.393 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.531 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.520. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.520$, $q = 1 - p = 0.480$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0255 = 0.026$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.5200 * 0.0531 = 0.138$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2704 * 0.1106 = 0.299$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1406 * 0.2304 = 0.324$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0731 * 0.4800 = 0.175$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0380 * 1.000 = 0.038$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.026**	**0.138**	**0.299**	**0.324**	**0.175**	**0.038**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 2 * 0.299 + 3 * 0.324 + 4 * 0.175 + 5 * 0.038 = 2.598.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.520 = \mathbf{2.600}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.598)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 4 * 0.299 + 9 * 0.324 + 16 * 0.175 + 25 * 0.038 = 8.000.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 8.000 - (2.598)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.520 * 0.480 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.598 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.42 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4125 *и* 4335 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.42$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4125$, $k_2 = 4335$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4125 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-75}{49.356} = -1.520,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4335 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = 2.735.$$

Поэтому $P_{10000}(4125, 4335) = \Phi(2.735) - \Phi(-1.520) = \Phi(2.735) + \Phi(1.520)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.735) = 0.4969 \quad \text{и} \quad \Phi(1.520) = 0.4357.$$

Окончательно, $P_{10000}(4125, 4335) = 0.4969 + 0.4357 = 0.9326$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.520 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.735 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9326 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 402 *и* 458 *(вероятность* P_1*)*

2) между 392 *и* 468 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 402 = 458 - 430 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 28) \geq 1 - \frac{245.1}{28^2} = 0.687.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 392 = 468 - 430 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 38) \geq 1 - \frac{245.1}{38^2} = 0.830.$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.687 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.830 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	6	8	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.013	0.069	0.150	0.474	0.244	0.050	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.013 + 4 * 0.069 + 6 * 0.150 + 8 * 0.474 + 9 * 0.244 + 12 * 0.050 =$$

$$= 7.777 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.777)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.013 + 4^2 * 0.069 + 6^2 * 0.150 + 8^2 * 0.474 + 9^2 * 0.244 + 12^2 * 0.050 =$$

$$= 63.817 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 63.817 - 7.777^2 = 3.335 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.826 .$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.777 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.335 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.7 \leq x \leq 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7)$ *попадания в интервал* $1.9 \leq x \leq 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{1}{2.6} & \text{при} \quad 1.7 \leq x \leq 4.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.7 \\ \frac{x-1.7}{2.6} & \text{при} \quad 1.7 \leq x \leq 4.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases},$$

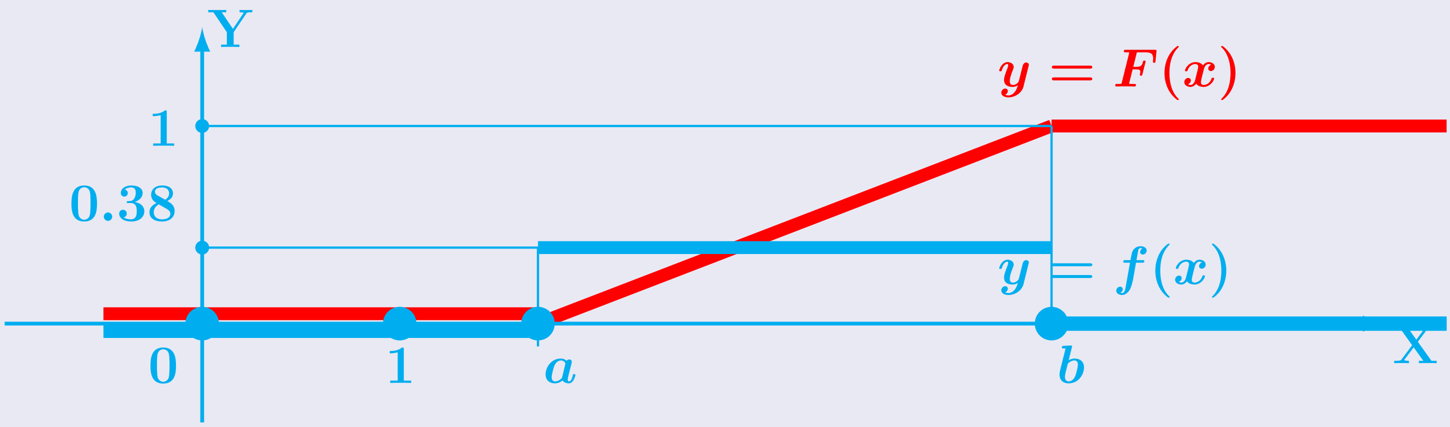

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.7}{2} = 3.00$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.7)^2}{12} = 0.563$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.750$,

$\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) = F(3.7) - F(1.9) = \frac{3.7-1.7}{2.6} - \frac{1.9-1.7}{2.6} = 0.769 - 0.077 = 0.692$

Выборочная проверка вариант 14 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.00 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.563 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) =$ введи 0.692 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $1.5 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.5-2.7}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.3} = 0.92$,

$$\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = \int_{1.5}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.92) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.92) = 0.3238 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.5 \le X \le 3.9) = 0.3238 + 0.3238 = 0.6476$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.92 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6476 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\to$	1	4	6	8
12	0.04	0.06	0.05	0.25
18	0.14	0.06	0.20	0.20

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	12	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4}$ – сумма по строке i таблицы.

значение y_j случайной величины Y	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = p_{1k} + p_{2k}$ – сумма по столбцу k таблицы.

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	12	18
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	0.18	0.12	0.25	0.45

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{15.600}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = \boxed{8.640}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18 + 4*0.12 + 6*0.25 + 8*0.45 = \boxed{5.760}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 39.900 - (5.760)^2 = \boxed{6.722}$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.722 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ ***и*** $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.200 + 18 * 0.800 = \boxed{16.800}$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.200 + 18^2 * 0.800 - (16.800)^2 = \boxed{5.760}$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	6	8
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1*0.100+4*0.150+6*0.125+8*0.625 = 6.450$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2*0.100+4^2*0.150+6^2*0.125+8^2*0.625-(6.450)^2 = 5.398$.

Выборочная проверка вариант 14 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи	16.800	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи	5.760	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи	6.450	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.398	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.760$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 6.722$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &= \\ &= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 6 * 0.05 + 12 * 8 * 0.25 &+ \\ &+ 18 * 1 * 0.14 + 18 * 4 * 0.06 + 18 * 6 * 0.20 + 18 * 8 * 0.20 &= \\ &= 88.200 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{88.200 - 15.600 * 5.760}{\sqrt{8.640 * 6.722}} = -0.217 .$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 88.200 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.217 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x,y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.2} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\int_{0.2}^{1.2}(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2}\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big)\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}(0.432 + 1.680 \cdot y - 0.012 - 0.280 \cdot y)dy = C\int_{0.4}^{0.8}(0.420 + 1.400 \cdot y)dy =$$

$$= C\Big(0.420\,y + \frac{1.400}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.420\,y + 0.7000\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.420 \cdot 0.8 + 0.7000 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.420 \cdot 0.4 + 0.7000 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.7840 - 0.2800\big) = 0.5040\,C\,.$$

Значит, $0.5040 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.5040} = 1.984$,

$$f(x,y) = 1.984 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.190}_{A}\,x + \underbrace{2.778}_{B}\,y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.190\,x + 2.778\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.984	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.190	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.778	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.190\,x + 2.778\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (1.190 \cdot x + 2.778 \cdot y)\,dy = \left(1.190 \cdot x \cdot y + 2.778 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 1.190 \cdot x \cdot 0.8 + 2.778 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.190 \cdot x \cdot 0.4 - 2.778 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.476} \cdot x + \boxed{0.667}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (1.190 \cdot x + 2.778 \cdot y)\,dx = \left(1.190 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.778 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 1.190 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.778 \cdot 1.2 \cdot y - 1.190 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 2.778 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{2.778} \cdot y + \boxed{0.833}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.476}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.667}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.778}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.833}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.476\,x + 0.667\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.476\,x^2 + 0.667\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.476\,\tfrac{x^3}{3} + 0.667\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.754 - 0.015 = \boxed{0.739},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.778\,y + 0.833\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.778\,y^2 + 0.833\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.778\,\tfrac{y^3}{3} + 0.833\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.741 - 0.126 = \boxed{0.615},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.476\,x + 0.667\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.476\,x^3 + 0.667\,x^2\big)\,dx - 0.546 = \big(0.476\,\tfrac{x^4}{4} + 0.667\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.546 =$$

$$= 0.631 - 0.002 - 0.546 = \boxed{0.083},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.778\,y + 0.833\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.778\,y^3 + 0.833\,y^2\big)\,dy - 0.378 = \big(2.778\,\tfrac{x^4}{4} + 0.833\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.378 =$$

$$= 0.427 - 0.036 - 0.378 = \boxed{0.013}.$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.476	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.667	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.778	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.833	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.739	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.615	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.083	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.190\,x + 2.778\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.739, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.615, \quad \mathbb{D}(X) = 0.083, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.190\,x + 2.778\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} \big(1.190\,x^2 y + 2.778\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(1.190\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.778\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(1.190\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.778\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(0.682\,y + 1.944\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.682 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.944 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.550 - 0.096 = 0.454\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.454 - 0.739 \cdot 0.615}{\sqrt{0.083 \cdot 0.013}} = -0.015\,.$$

Выборочная проверка вариант 14 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.454 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.015 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $5! = 120\,.$ $A_{13}^{5} = 154440\,.$ $C_{13}^{5} = 1287\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.134\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.152\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.048\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.049\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.393\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.531\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.598\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.520\,.$ $x_2 = 2.735\,.$ $P = 0.9326\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.687\,.$ $P_2 = 0.830\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.777\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.335\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.00\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.563\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.7) = 0.692\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.92\,.$ $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 3.9) = 0.6476\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.760\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.722\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.800\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.450\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 5.760\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.398\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 88.200\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.217\,.$

Задача 15. $C = 1.984\,,$ $f(x, y) = 1.190 \cdot x + 2.778\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.476 \cdot x + 0.667\,,$ $f_2(y) = 2.778 \cdot y + 0.833\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.739\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.615\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.083\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.454\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.015\,.$

Вариант 15

Задача 1

Найти $6!$, A_{12}^{6}, C_{12}^{6}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{12}^{6} = \underbrace{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7}_{6 \text{ множителей}} = \boxed{665280}$.

$C_{12}^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{924}$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{12}^{6} =$ введи 665280 Клик

формат abcd, $C_{12}^{6} =$ введи 924 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 6 *черных шаров. Наудачу извлекается* 7 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{7} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 50388.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 286 \cdot 15 = 4290.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{4290}{50388} = 0.085.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.085$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{50388} = \frac{78 \cdot 6}{50388} = 0.009,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{50388} = \frac{13 \cdot 1}{50388} = 0.000,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.094$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.085 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.009 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.094 Клик

Задача 3

В тире имеется 66 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.08 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{66} = 0.182\,,\quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{54}{66} = 0.818\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,,\quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.182 + 0.08 * 0.818 = 0.067\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.182}{0.067} = 0.027\,.$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.067 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.027 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 10 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = 0.237\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{20}^2} = 0.526\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{15}^2}{C_{24}^4} = 0.356\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = 0.237\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{16}^2}{C_{24}^4} = 0.316\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.385\cdot 0.237 + 0.356\cdot 0.526 + 0.316\cdot 0.237 = 0.353\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.356\cdot 0.526}{0.353} = 0.530$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.353 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.530 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.44 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4310 *и* 4526 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.44$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4310$, $k_2 = 4526$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4310-4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-90}{49.639} = -1.813 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4526-4400}{\sqrt{2464.0}} = 2.538 .$$

Поэтому $P_{10000}(4310, 4526) = \Phi(2.538) - \Phi(-1.813) = \Phi(2.538) + \Phi(1.813)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.538) = 0.4945 \quad \text{и} \quad \Phi(1.813) = 0.4649 .$$

Окончательно, $P_{10000}(4310, 4526) = 0.4945 + 0.4649 = 0.9594$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.813 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.538 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9594 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 412 *и* 468 *(вероятность* P_1*)*

2) между 400 *и* 480 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 412 = 468 - 440 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 28) \geq 1 - \frac{246.4}{28^2} = 0.686.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 400 = 480 - 440 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 40) \geq 1 - \frac{246.4}{40^2} = 0.846.$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.686 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.846 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	1	4	6	8	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \dots + x_n * p_n =$$

$$= 1 * 0.025 + 4 * 0.106 + 6 * 0.175 + 8 * 0.449 + 10 * 0.207 + 13 * 0.038 =$$

$$= 7.655 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.655)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \dots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 1^2 * 0.025 + 4^2 * 0.106 + 6^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 10^2 * 0.207 + 13^2 * 0.038 =$$

$$= 63.879 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 63.879 - 7.655^2 = 5.280 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.298 .$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.655 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.280 Клик

Задача 10

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $0.7 \le x \le 4.3$. Определить плотность $f(x)$, функцию распределения $F(x)$, и построить графики этих функций.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, дисперсию $\mathbb{D}(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7)$ попадания в интервал $1.2 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.7$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{1}{3.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.7 \\ \frac{x-0.7}{3.6} & \text{при } 0.7 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

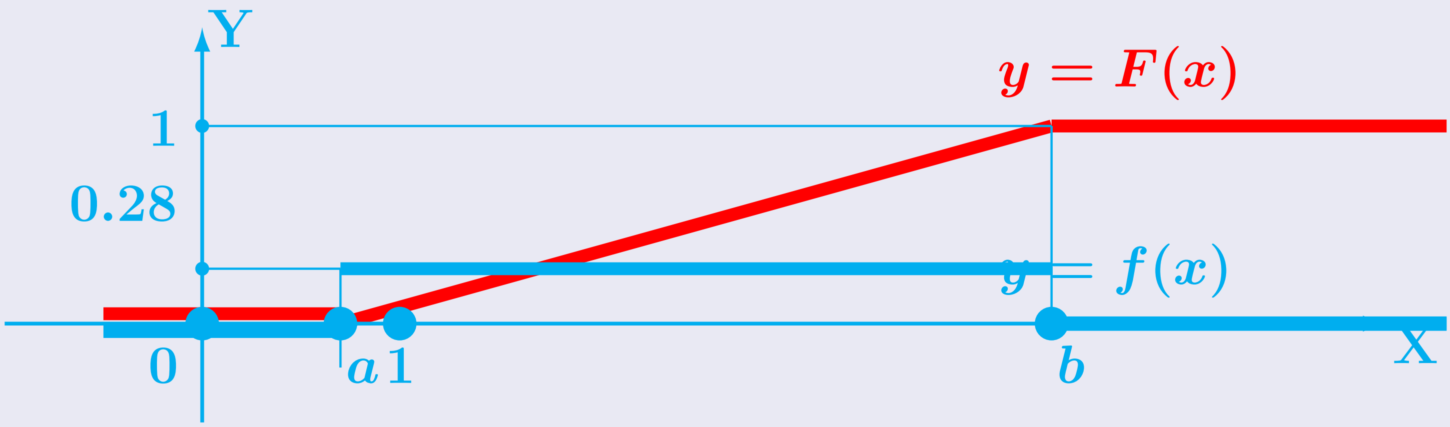

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.7}{2} = 2.50$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.7)^2}{12} = 1.080$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.039$,

$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.2) = \frac{3.7-0.7}{3.6} - \frac{1.2-0.7}{3.6} = 0.833 - 0.139 = 0.694$

Выборочная проверка вариант 15 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.080 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.7) =$ введи 0.694 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.7$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $0.8 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{2*1.8^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.7)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.7$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{0.8-2.7}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \frac{3.9-2.7}{1.8} = 0.67$,

$$\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = \int_{0.8}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.67) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.67) = 0.2486 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.8 \le X \le 3.9) = 0.2486 + 0.3554 = 0.6040$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.67 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6040 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	4	6	8
13	0.06	0.04	0.05	0.25
18	0.14	0.06	0.20	0.20

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	13	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	2	4	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.20 + 0.20 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.20 = 0.25, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	13	18
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	2	4	6	8
вероятность q_j этого значения	0.20	0.10	0.25	0.45

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{16.000}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 262.000 - (16.000)^2 = \boxed{6.000}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 4*0.10 + 6*0.25 + 8*0.45 = \boxed{5.900}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 40.200 - (5.900)^2 = \boxed{5.390}$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.900 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.390 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ ***и*** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12*. Определить ряды распределения для случайных величин* $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=13}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.20} = 0.200\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.20}{0.05+0.20} = 0.800$$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.200**	**0.800**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 13 * 0.200 + 18 * 0.800 = \boxed{17.000}$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 13^2 * 0.200 + 18^2 * 0.800 - (17.000)^2 = \boxed{4.000}$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y\|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y\|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150+4*0.100+6*0.125+8*0.625 = 6.450$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150+4^2*0.100+6^2*0.125+8^2*0.625-(6.450)^2 = 5.098$.

Выборочная проверка вариант 15 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 17.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 4.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 6.450 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 5.098 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	4	6	8
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.20**	**0.20**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.900$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 5.390$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} &= \\
&= 13*2*0.06 + 13*4*0.04 + 13*6*0.05 + 13*8*0.25 &+ \\
&+ 18*2*0.14 + 18*4*0.06 + 18*6*0.20 + 18*8*0.20 &= \\
&= 93.300\,.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{93.300 - 16.000*5.900}{\sqrt{6.000*5.390}} = -0.193\,.$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 93.300 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.193 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} C(0.6\,x + 1.9\,y)\, dx\, dy = C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\int_{0.4}^{1.2}(0.6\,x + 1.9\,y)\, dx\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2}\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big)\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}(0.432 + 2.280 \cdot y - 0.048 - 0.760 \cdot y)dy = C\int_{0.4}^{0.8}(0.384 + 1.520 \cdot y)dy =$$

$$= C\Big(0.384\,y + \frac{1.520}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.384\,y + 0.7600\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.384 \cdot 0.8 + 0.7600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.384 \cdot 0.4 + 0.7600 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.7936 - 0.2752\big) = 0.5184\,C\,.$$

Значит, $0.5184 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.5184} = 1.929$,

$$f(x, y) = 1.929 * (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{1.157}_{A}\,x + \underbrace{3.665}_{B}\,y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.157\,x + 3.665\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.929	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.157	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.665	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.157\,x + 3.665\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (1.157 \cdot x + 3.665 \cdot y)\,dy = \left(1.157 \cdot x \cdot y + 3.665 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 1.157 \cdot x \cdot 0.8 + 3.665 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.157 \cdot x \cdot 0.4 - 3.665 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.463} \cdot x + \boxed{0.880}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (1.157 \cdot x + 3.665 \cdot y)\,dx = \left(1.157 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.665 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 1.157 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 3.665 \cdot 1.2 \cdot y - 1.157 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 3.665 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.932} \cdot y + \boxed{0.740}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.463}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.880}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.932}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.740}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.463\,x + 0.880\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.463\,x^2 + 0.880\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.463\,\frac{x^3}{3} + 0.880\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.080 = 0.820,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.932\,y + 0.740\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.932\,y^2 + 0.740\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.932\,\frac{y^3}{3} + 0.740\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.737 - 0.122 = 0.615,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.463\,x + 0.880\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.463\,x^3 + 0.880\,x^2\big)\,dx - 0.672 = \big(0.463\,\frac{x^4}{4} + 0.880\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.672 =$$

$$= 0.747 - 0.022 - 0.672 = 0.053,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.932\,y + 0.740\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.932\,y^3 + 0.740\,y^2\big)\,dy - 0.378 = \big(2.932\,\frac{x^4}{4} + 0.740\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.378 =$$

$$= 0.427 - 0.035 - 0.378 = 0.014.$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.463	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.880	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.932	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.740	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.820	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.615	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.053	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.014	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.157\,x + 3.665\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.820, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.615, \quad \mathbb{D}(X) = 0.053, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.014$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.157\,x + 3.665\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} \big(1.157\,x^2y + 3.665\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8}\Big(1.157\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.665\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\Big(1.157\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.665\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.8}\big(0.641\,y + 2.346\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.641 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 2.346 \cdot \tfrac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.606 - 0.101 = 0.505\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.505 - 0.820{\cdot}0.615}{\sqrt{0.053{\cdot}0.014}} = 0.026\,.$$

Выборочная проверка вариант 15 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.505 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.026 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{12}^{6} = 665280\,.$ $C_{12}^{6} = 924\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.085\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.094\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.067\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.027\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.353\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.530\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.813\,.$ $x_2 = 2.538\,.$ $P = 0.9594\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.686\,.$ $P_2 = 0.846\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.655\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.280\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.50\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.080\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.7) = 0.694\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.67\,.$ $\mathbb{P}(0.8 \leq X \leq 3.9) = 0.6040\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.900\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.390\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 17.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 6.450\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 4.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.098\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 93.300\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.193\,.$

Задача 15. $C = 1.929\,,$ $f(x, y) = 1.157 \cdot x + 3.665\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.463 \cdot x + 0.880\,,$ $f_2(y) = 2.932 \cdot y + 0.740\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.820\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.615\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.053\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.014\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.505\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.026\,.$

возврат огл

Вариант 16

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{10}^{4}, C_{10}^{4}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{10}^{4} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}_{4 \text{ множителей}} = \boxed{5040}$.

$C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{210}$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{10}^{4} =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $C_{10}^{4} =$ введи 210 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^5 = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 3003.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^3 \cdot C_4^2 = 165 \cdot 6 = 990.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{990}{3003} = 0.330.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.330$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_4^3}{3003} = \frac{55 \cdot 4}{3003} = 0.073\ ,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_4^4}{3003} = \frac{11 \cdot 1}{3003} = 0.004\ ,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.407$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.330	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.073	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.004	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.407	Клик	

Задача 3

В тире имеется 46 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.05 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{46} = 0.217\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{36}{46} = 0.783\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.217 + 0.05 * 0.783 = 0.041\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.217}{0.041} = 0.053\,.$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.041 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.053 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A : среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{18}^2} = 0.359; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_9^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_7^1}{C_{18}^2} = 0.503; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{10}^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{18}^2} = 0.137; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.418 \cdot 0.359 + 0.418 \cdot 0.503 + 0.397 \cdot 0.137 = 0.415.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.418 \cdot 0.503}{0.415} = 0.507$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.415 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.507 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.36 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3510 *и* 3704 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.36$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.64$,
$k_1 = 3510$, $k_2 = 3704$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3510 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = \frac{-90}{48.000} = -1.875\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3704 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = 2.167\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3510, 3704) = \Phi(2.167) - \Phi(-1.875) = \Phi(2.167) + \Phi(1.875)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.167) = 0.4846 \quad \text{и} \quad \Phi(1.875) = 0.4699\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3510, 3704) = 0.4846 + 0.4699 = 0.9545$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.875 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.167 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9545 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 374 *и* 426 *(вероятность* P_1*)*

2) между 362 *и* 438 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 374 = 426 - 400 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 26) \geq 1 - \frac{240.0}{26^2} = 0.645.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 362 = 438 - 400 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 38) \geq 1 - \frac{240.0}{38^2} = 0.834.$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.645 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.834 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	5	7	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$ *,*
дисперсию $\mathbb{D}(X)$ *,*
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ *.*

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.073 + 3 * 0.221 + 5 * 0.231 + 7 * 0.345 + 9 * 0.116 + 12 * 0.014 =$$

$$= \boxed{5.591}\ .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.591)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.073 + 3^2 * 0.221 + 5^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 9^2 * 0.116 + 12^2 * 0.014 =$$

$$= \boxed{36.373}\ .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 36.373 - 5.591^2 = \boxed{5.114}\ ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.261\ .$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.591 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.114 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{1}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases},$$

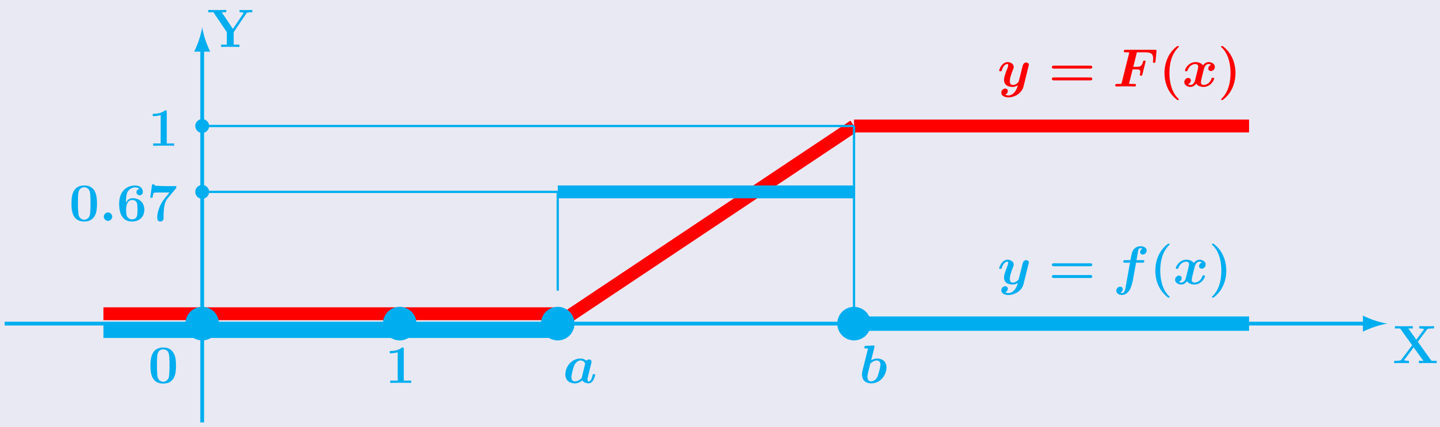

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.8}{2} = 2.55$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.8)^2}{12} = 0.188$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.434$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(2.0) = \frac{3.0-1.8}{1.5} - \frac{2.0-1.8}{1.5} = 0.800 - 0.133 = 0.667$

Выборочная проверка вариант 16 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.188 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) =$ введи 0.667 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2)$ *попадания в интервал* $1.9 \leq x \leq 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*0.8^2}} = \dfrac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.9-2.8}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \dfrac{3.2-2.8}{0.8} = 0.50$,

$$\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = \int_{1.9}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.50) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.50) = 0.1915 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.1915 + 0.3708 = 0.5623$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5623 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$

$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.14**	**0.16**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.200$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 242.800 - (15.200)^2 = 11.760$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1 * 0.14 + 3 * 0.16 + 5 * 0.20 + 7 * 0.50 = 5.120$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 31.080 - (5.120)^2 = 4.866$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.120 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.866 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ ***и*** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить ряды распределения для случайных величин* $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=11}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$, $\quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 11 * 0.500 + 18 * 0.500 = 14.500$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 11^2 * 0.500 + 18^2 * 0.500 - (14.500)^2 = 12.250$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	1	3	5	7
11	0.04	0.06	0.10	0.20
18	0.10	0.10	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	7
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1*0.100+3*0.150+5*0.250+7*0.500 = 5.300$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2*0.100+3^2*0.150+5^2*0.250+7^2*0.500-(5.300)^2 = 4.110$.

Выборочная проверка вариант 16 задача 13

формат 1.23,	$\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	14.500	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	12.250	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	5.300	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{D}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	4.110	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.120$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 4.866$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 5 * 0.10 + 11 * 7 * 0.20 + \\ &+ 18 * 1 * 0.10 + 18 * 3 * 0.10 + 18 * 5 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 = \\ &= 77.320 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{77.320 - 15.200 * 5.120}{\sqrt{11.760 * 4.866}} = -0.067 .$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 77.320 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.067 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C(0.6\,x + 0.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.0} (0.6\,x + 0.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.300 + 0.900 \cdot y - 0.012 - 0.180 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.288 + 0.720 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.288\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C\big(0.288\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.288 \cdot 0.6 + 0.3600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.288 \cdot 0.2 + 0.3600 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.3024 - 0.0720\big) = 0.2304\,C\,.$$

Значит, $0.2304 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2304} = 4.340$,

$$f(x, y) = 4.340 * (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{2.604}_{A}\,x + \underbrace{3.906}_{B}\,y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.604\,x + 3.906\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	4.340	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.604	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.906	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.604\, x + 3.906\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (2.604 \cdot x + 3.906 \cdot y)\, dy = \left(2.604 \cdot x \cdot y + 3.906 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 2.604 \cdot x \cdot 0.6 + 3.906 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 2.604 \cdot x \cdot 0.2 - 3.906 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{1.042} \cdot x + \boxed{0.625}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (2.604 \cdot x + 3.906 \cdot y)\, dx = \left(2.604 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.906 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 2.604 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 3.906 \cdot 1.0 \cdot y - 2.604 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 3.906 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{3.125} \cdot y + \boxed{1.250}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.042}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.625}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{3.125}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.250}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x\cdot\big(1.042\,x + 0.625\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0}\big(1.042\,x^2 + 0.625\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(1.042\,\tfrac{x^3}{3} + 0.625\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.660 - 0.015 = \boxed{0.645},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y\cdot\big(3.125\,y + 1.250\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6}\big(3.125\,y^2 + 1.250\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(3.125\,\tfrac{y^3}{3} + 1.250\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.033 = \boxed{0.417},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2\cdot\big(1.042\,x + 0.625\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0}\big(1.042\,x^3 + 0.625\,x^2\big)\,dx - 0.416 = \big(1.042\,\tfrac{x^4}{4} + 0.625\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.416 =$$

$$= 0.469 - 0.002 - 0.416 = \boxed{0.051},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2\cdot\big(3.125\,y + 1.250\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\big(3.125\,y^3 + 1.250\,y^2\big)\,dy - 0.174 = \big(3.125\,\tfrac{x^4}{4} + 1.250\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.174 =$$

$$= 0.191 - 0.005 - 0.174 = \boxed{0.012}.$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	1.042	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.625	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	3.125	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.250	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.645	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.417	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.051	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.012	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.604\,x + 3.906\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.645, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.417, \quad \mathbb{D}(X) = 0.051, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.012$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(2.604\,x + 3.906\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.2}^{1.0} \big(2.604\,x^2 y + 3.906\,y^2 x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(2.604\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.906\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(2.604\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.906\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.861\,y + 1.875\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.861 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.875 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.290 - 0.022 = 0.268\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.268 - 0.645 \cdot 0.417}{\sqrt{0.051 \cdot 0.012}} = -0.039\,.$$

Выборочная проверка вариант 16 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.268 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.039 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{10}^{4} = 5040\,.$ $C_{10}^{4} = 210\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.330\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.407\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.041\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.053\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.415\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.507\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.875\,.$ $x_2 = 2.167\,.$ $P = 0.9545\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.645\,.$ $P_2 = 0.834\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.591\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.114\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.188\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.0) = 0.667\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.50\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.5623\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.120\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.866\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 14.500\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.300\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12.250\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 4.110\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 77.320\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.067\,.$

Задача 15. $C = 4.340\,,$ $f(x, y) = 2.604 \cdot x + 3.906\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.042 \cdot x + 0.625\,,$ $f_2(y) = 3.125 \cdot y + 1.250\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.645\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.417\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.051\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.012\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.268\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.039\,.$

возврат огл

Вариант 17

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_9^5, C_9^5.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_9^5 = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{15120}$.

$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{126}$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_9^5 =$ введи 15120 Клик

формат abcd, $C_9^5 =$ введи 126 Клик

Задача 2

В ящике 10 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{6} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 10}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 5005.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 120 \cdot 10 = 1200.$$

(извлекаем 3 шара из 10 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1200}{5005} = 0.240.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.240$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{5005} = \frac{45 \cdot 5}{5005} = 0.045,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{5005} = \frac{10 \cdot 1}{5005} = 0.002,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.287$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.240	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.045	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.002	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.287	Клик	

Задача 3

В тире имеется 57 *винтовок, из них* 9 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{9}{57} = 0.158\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{48}{57} = 0.842\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.158 + 0.06 * 0.842 = 0.052\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.158}{0.052} = 0.030\,.$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.052 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.030 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{18}^2} = 0.359; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{22}^4} = 0.406;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_7^1}{C_{18}^2} = 0.503; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{13}^2}{C_{22}^4} = 0.384;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{18}^2} = 0.137; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.406 \cdot 0.359 + 0.384 \cdot 0.503 + 0.348 \cdot 0.137 = 0.387.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.384 \cdot 0.503}{0.387} = 0.499$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.387 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.499 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.360. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.360$, $q = 1 - p = 0.640$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.1073 = 0.107$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.3600 * 0.1677 = 0.302$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1296 * 0.2621 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0467 * 0.4096 = 0.191$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0168 * 0.6400 = 0.054$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0060 * 1.000 = 0.006$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.107**	**0.302**	**0.340**	**0.191**	**0.054**	**0.006**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n =$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 2 * 0.340 + 3 * 0.191 + 4 * 0.054 + 5 * 0.006 = 1.801.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.360 = \mathbf{1.800}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.801)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n =$$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 4 * 0.340 + 9 * 0.191 + 16 * 0.054 + 25 * 0.006 = 4.395.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 4.395 - (1.801)^2 = 1.151$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.360 * 0.640 = \mathbf{1.152}$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.801 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.151 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.38 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3695 *и* 3895 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.38$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.62$,
$k_1 = 3695$, $k_2 = 3895$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3695 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \frac{-105}{48.539} = -2.163 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3895 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = 1.957 .$$

Поэтому $P_{10000}(3695, 3895) = \Phi(1.957) - \Phi(-2.163) = \Phi(1.957) + \Phi(2.163)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(1.957) = 0.4750 \quad \text{и} \quad \Phi(2.163) = 0.4846 .$$

Окончательно, $P_{10000}(3695, 3895) = 0.4750 + 0.4846 = 0.9596$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.163 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 1.957 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9596 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733\,.$

Выборочная проверка вариант 17 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 384 *и* 436 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 370 *и* 450 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 384 = 436 - 410 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 26) \geq 1 - \frac{241.9}{26^2} = 0.642.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 370 = 450 - 410 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 40) \geq 1 - \frac{241.9}{40^2} = 0.849.$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.642 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.849 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	5	7	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.104	0.275	0.245	0.287	0.081	0.008	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.104 + 3 * 0.275 + 5 * 0.245 + 7 * 0.287 + 10 * 0.081 + 13 * 0.008 =$$

$$= 5.181 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.181)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.104 + 3^2 * 0.275 + 5^2 * 0.245 + 7^2 * 0.287 + 10^2 * 0.081 + 13^2 * 0.008 =$$

$$= 32.531 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 32.531 - 5.181^2 = 5.688 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.385 .$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.181 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.688 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

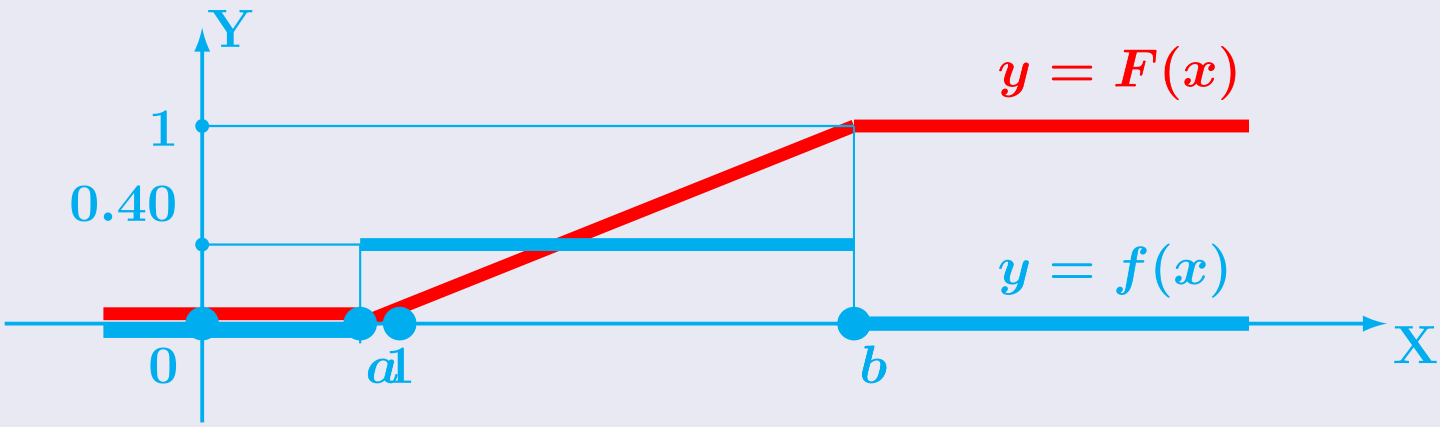

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.8}{2} = 2.05$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.3) = \frac{3.0-0.8}{2.5} - \frac{1.3-0.8}{2.5} = 0.880 - 0.200 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 17 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.2-2.8}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{1.3} = 0.31$,

$$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = \int_{1.2}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.31) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.31) = 0.1217 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = 0.1217 + 0.3907 = 0.5124$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.31 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5124 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**3**	**5**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.16**	**0.14**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16+3*0.14+5*0.20+7*0.50 = 5.240$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 31.400 - (5.240)^2 = 3.942$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.240 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.942 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	3	5	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.10	0.10	0.10	0.30

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	12	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$, $p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	12	18
вероятность p_i этого значения	0.500	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.500 + 18 * 0.500 = 15.000$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.500 + 18^2 * 0.500 - (15.000)^2 = 9.000$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	3	5	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.10	0.10	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	5	7
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2*0.150+3*0.100+5*0.250+7*0.500 = 5.350$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2*0.150+3^2*0.100+5^2*0.250+7^2*0.500-(5.350)^2 = 3.628$.

Выборочная проверка вариант 17 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	15.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	9.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.350	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	3.628	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X и Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.240$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 3.942$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\ &= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 5 * 0.10 + 12 * 7 * 0.20 && + \\ &+ 18 * 2 * 0.10 + 18 * 3 * 0.10 + 18 * 5 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 && = \\ &= 81.480\,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{81.480 - 15.600 * 5.240}{\sqrt{8.640 * 3.942}} = -0.045\,.$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 81.480 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.045 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.6\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.300 + 1.400 \cdot y - 0.048 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.252 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.252\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.2}^{0.6} = C \big(0.252\, y + 0.4200\, y^2\big) \Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.252 \cdot 0.6 + 0.4200 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.252 \cdot 0.2 + 0.4200 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.3024 - 0.0672\big) = 0.2352\, C\,.$$

Значит, $0.2352 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2352} = 4.252$,

$$f(x,y) = 4.252 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{2.551}_{A}\, x + \underbrace{5.952}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.551\, x + 5.952\, y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	4.252	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.551	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	5.952	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.551\,x + 5.952\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (2.551 \cdot x + 5.952 \cdot y)\,dy = \left(2.551 \cdot x \cdot y + 5.952 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 2.551 \cdot x \cdot 0.6 + 5.952 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 2.551 \cdot x \cdot 0.2 - 5.952 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{1.020} \cdot x + \boxed{0.952}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (2.551 \cdot x + 5.952 \cdot y)\,dx = \left(2.551 \cdot \frac{x^2}{2} + 5.952 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 2.551 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 5.952 \cdot 1.0 \cdot y - 2.551 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 5.952 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{3.571} \cdot y + \boxed{1.071}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.020}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.952}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{3.571}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.071}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(1.020\,x + 0.952\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(1.020\,x^2 + 0.952\,x\big)\,dx =$$

$$= \Big(1.020\,\frac{x^3}{3} + 0.952\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.816 - 0.098 = 0.718,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(3.571\,y + 1.071\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(3.571\,y^2 + 1.071\,y\big)\,dy =$$

$$= \Big(3.571\,\frac{y^3}{3} + 1.071\,\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.031 = 0.419,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(1.020\,x + 0.952\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(1.020\,x^3 + 0.952\,x^2\big)\,dx - 0.516 = \Big(1.020\,\frac{x^4}{4} + 0.952\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.516 =$$

$$= 0.572 - 0.027 - 0.516 = 0.029,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(3.571\,y + 1.071\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(3.571\,y^3 + 1.071\,y^2\big)\,dy - 0.176 = \Big(3.571\,\frac{x^4}{4} + 1.071\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.176 =$$

$$= 0.193 - 0.004 - 0.176 = 0.013.$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	1.020	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.952	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	3.571	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	1.071	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.718	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.419	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.029	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y распределена на прямоугольнике $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.6$ пропорционально $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. Определить корреляцию.

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.551\,x + 5.952\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.718, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.419, \quad \mathbb{D}(X) = 0.029, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X\cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.4}^{1.0} x\cdot y\cdot\big(2.551\,x + 5.952\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\int_{0.4}^{1.0}\big(2.551\,x^2y + 5.952\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6}\big(2.551\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 5.952\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6}\big(2.551\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 5.952\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.6}\big(0.796\,y + 2.500\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.796\cdot\tfrac{y^2}{2} + 2.500\cdot\tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.323 - 0.023 = 0.300\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.300 - 0.718\cdot 0.419}{\sqrt{0.029\cdot 0.013}} = -0.043\,.$$

Выборочная проверка вариант 17 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 0.300 Клик

формат 1.234, $r(X\cdot Y) =$ введи -0.043 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_9^5 = 15120\,.$ $C_9^5 = 126\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.240\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.287\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.052\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.030\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.387\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.499\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.801\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.151\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.163\,.$ $x_2 = 1.957\,.$ $P = 0.9596\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.642\,.$ $P_2 = 0.849\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.181\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.688\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.0) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.31\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.2) = 0.5124\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.240\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.942\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.350\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 9.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.628\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 81.480\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.045\,.$

Задача 15. $C = 4.252\,,$ $f(x, y) = 2.551 \cdot x + 5.952\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.020 \cdot x + 0.952\,,$ $f_2(y) = 3.571 \cdot y + 1.071\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.718\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.419\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.029\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.300\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.043\,.$

возврат огл

Вариант 18

возврат огл

Задача 1

Найти $6!\,,\ A_{12}^{5}\,,\ C_{12}^{5}\,.$

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}\ .$

$A_{12}^{5} = \underbrace{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 8}_{5\ \text{множителей}} = \boxed{95040}\,.$

$C_{12}^{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{792}\,.$

Выборочная проверка вариант 18 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{12}^{5} =$ введи 95040 Клик

формат abcd, $C_{12}^{5} =$ введи 792 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^6 = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 18564.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^3 \cdot C_5^3 = 286 \cdot 10 = 2860.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{2860}{18564} = 0.154.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.154$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^2 \cdot C_5^4}{18564} = \frac{78 \cdot 5}{18564} = 0.021,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_5^5}{18564} = \frac{13 \cdot 1}{18564} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.176$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.154 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.001 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.176 Клик

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{56} = 0.214\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{44}{56} = 0.786\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.214 + 0.06 * 0.786 = 0.049\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.214}{0.049} = 0.044\,.$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.049 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.044 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{19}^2} = 0.322; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_8^1}{C_{19}^2} = 0.515; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{12}^2}{C_{21}^4} = 0.397;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{19}^2} = 0.164; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{13}^2}{C_{21}^4} = 0.365;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) = $$
$$= 0.414 \cdot 0.322 + 0.397 \cdot 0.515 + 0.365 \cdot 0.164 = 0.398 .$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397 \cdot 0.515}{0.398} = 0.514$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.398 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.514 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.42. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4110 *и* 4325.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.42$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4110$, $k_2 = 4325$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4110 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-90}{49.356} = -1.823\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4325 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = 2.533\,.$$

Поэтому $P_{10000}(4110, 4325) = \Phi(2.533) - \Phi(-1.823) = \Phi(2.533) + \Phi(1.823)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.533) = 0.4941 \quad \text{и} \quad \Phi(1.823) = 0.4656\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(4110, 4325) = 0.4941 + 0.4656 = 0.9597$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.823 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.533 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9597 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$*. По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 402 *и* 458 *(вероятность* P_1*)*

2) между 391 *и* 469 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 402 = 458 - 430 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 28) \geq 1 - \frac{245.1}{28^2} = 0.687.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 391 = 469 - 430 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 39) \geq 1 - \frac{245.1}{39^2} = 0.839.$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.687 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.839 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	5	8	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.025 + 3 * 0.106 + 5 * 0.175 + 8 * 0.449 + 9 * 0.207 + 12 * 0.038 =$$

$$= 7.154 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.154)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.025 + 3^2 * 0.106 + 5^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 9^2 * 0.207 + 12^2 * 0.038 =$$

$$= 56.404 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 56.404 - 7.154^2 = 5.224 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.286 .$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.154 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.224 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{2.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 4.3 \end{cases},$$

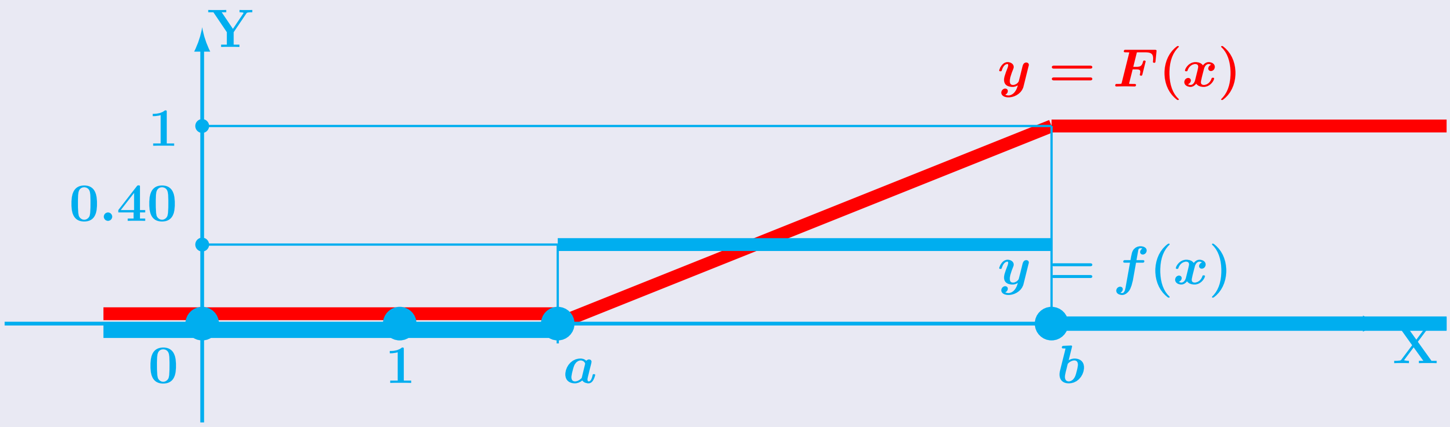

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.8}{2} = 3.05$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(2.0) = \frac{3.7-1.8}{2.5} - \frac{2.0-1.8}{2.5} = 0.760 - 0.080 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 18 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. Определить плотность $f(x)$, функцию распределения $F(x)$, и построить график функции $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, дисперсию $\mathbb{D}(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9)$ попадания в интервал $1.6 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,

плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.6-2.8}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \frac{3.9-2.8}{1.3} = 0.85$,

$$\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = \int_{1.6}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.85) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.85) = 0.3023 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = 0.3023 + 0.3238 = 0.6261$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.85 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6261 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.14**	**0.16**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14 + 4*0.16 + 5*0.15 + 7*0.55 = 5.380$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 33.400 - (5.380)^2 = 4.456$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.380 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.456 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.002$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.002)^2 = 7.996$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	5	7
12	0.04	0.06	0.05	0.25
18	0.10	0.10	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ – в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	7
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.125	0.625

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 5 * 0.125 + 7 * 0.625 = 5.700$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 5^2 * 0.125 + 7^2 * 0.625 - (5.700)^2 = 3.760$.

Выборочная проверка вариант 18 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	16.002	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	7.996	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.700	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	3.760	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.380$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 4.456$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\ &= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 5 * 0.05 + 12 * 7 * 0.25 && + \\ &+ 18 * 1 * 0.10 + 18 * 4 * 0.10 + 18 * 5 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 && = \\ &= 83.160 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{83.160 - 15.600 * 5.380}{\sqrt{8.640 * 4.456}} = -0.124 .$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 83.160 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.124 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (0.6\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.432 + 1.680 \cdot y - 0.012 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.420 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.420\,y + \frac{1.400}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C\big(0.420\,y + 0.7000\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.420 \cdot 0.6 + 0.7000 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.420 \cdot 0.2 + 0.7000 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.5040 - 0.1120\big) = 0.3920\, C\,.$$

Значит, $0.3920 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.3920} = 2.551$,

$$f(x,y) = 2.551 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.531}_{A}\, x + \underbrace{3.571}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.531\,x + 3.571\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.551	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.531	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.571	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.531\,x + 3.571\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (1.531 \cdot x + 3.571 \cdot y)\,dy = \left(1.531 \cdot x \cdot y + 3.571 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 1.531 \cdot x \cdot 0.6 + 3.571 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 1.531 \cdot x \cdot 0.2 - 3.571 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.612} \cdot x + \boxed{0.571}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (1.531 \cdot x + 3.571 \cdot y)\,dx = \left(1.531 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.571 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 1.531 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 3.571 \cdot 1.2 \cdot y - 1.531 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 3.571 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{3.571} \cdot y + \boxed{1.072}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.612}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.571}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{3.571}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.072}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.612\,x + 0.571\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.612\,x^2 + 0.571\,x\big)\,dx =$$

$$= \Big(0.612\,\frac{x^3}{3} + 0.571\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.764 - 0.013 = 0.751,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(3.571\,y + 1.072\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(3.571\,y^2 + 1.072\,y\big)\,dy =$$

$$= \Big(3.571\,\frac{y^3}{3} + 1.072\,\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.031 = 0.419,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.612\,x + 0.571\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.612\,x^3 + 0.571\,x^2\big)\,dx - 0.564 = \Big(0.612\,\frac{x^4}{4} + 0.571\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.564 =$$

$$= 0.646 - 0.002 - 0.564 = 0.080,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(3.571\,y + 1.072\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(3.571\,y^3 + 1.072\,y^2\big)\,dy - 0.176 = \Big(3.571\,\frac{x^4}{4} + 1.072\,\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.176 =$$

$$= 0.193 - 0.004 - 0.176 = 0.013.$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.612	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.571	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	3.571	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	1.072	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.751	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.419	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.080	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.531\,x + 3.571\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.751, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.419, \quad \mathbb{D}(X) = 0.080, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.531\,x + 3.571\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} \big(1.531\,x^2 y + 3.571\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(1.531\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.571\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(1.531\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 3.571\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.878\,y + 2.500\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.878 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 2.500 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.338 - 0.024 = 0.314\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.314 - 0.751 \cdot 0.419}{\sqrt{0.080 \cdot 0.013}} = -0.021\,.$$

Выборочная проверка вариант 18 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.314 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.021 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{12}^{5} = 95040\,.$ $C_{12}^{5} = 792\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.154\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.176\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.049\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.044\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.398\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.514\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.823\,.$ $x_2 = 2.533\,.$ $P = 0.9597\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.687\,.$ $P_2 = 0.839\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.154\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.224\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.7) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.85\,.$ $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = 0.6261\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.380\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.456\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.002\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.700\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 7.996\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.760\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 83.160\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.124\,.$

Задача 15. $C = 2.551\,,$ $f(x, y) = 1.531 \cdot x + 3.571\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.612 \cdot x + 0.571\,,$ $f_2(y) = 3.571 \cdot y + 1.072\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.751\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.419\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.080\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.314\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.021\,.$

возврат огл

Вариант 19

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_{11}^{6}, C_{11}^{6}.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_{11}^{6} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}_{6 \text{ множителей}} = \boxed{332640}$.

$C_{11}^{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{462}$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_{11}^{6} =$ введи 332640 Клик

формат abcd, $C_{11}^{6} =$ введи 462 Клик

Задача 2

В ящике 12 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекается 7 шаров. Найти вероятность того, что

1 *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*

2 *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^7 = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 31824.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^3 \cdot C_6^4 = 220 \cdot 15 = 3300.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3300}{31824} = 0.104.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.104$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_6^5}{31824} = \frac{66 \cdot 6}{31824} = 0.012,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_6^6}{31824} = \frac{12 \cdot 1}{31824} = 0.000,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.116$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.104	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.012	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\le 3}) =$ введи	0.116	Клик	

Задача 3

В тире имеется 67 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.08 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{67} = 0.164\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{56}{67} = 0.836\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.164 + 0.08 * 0.836 = 0.069\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.164}{0.069} = 0.024\,.$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.069 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.024 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{19}^2} = 0.322\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_8^1}{C_{19}^2} = 0.515\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{15}^2}{C_{24}^4} = 0.356\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{19}^2} = 0.164\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{16}^2}{C_{24}^4} = 0.316\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.385 \cdot 0.322 + 0.356 \cdot 0.515 + 0.316 \cdot 0.164 = 0.359\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.356 \cdot 0.515}{0.359} = 0.511$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.359 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.511 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084$.

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.44 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4295 *и* 4516 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.44$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4295$, $k_2 = 4516$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4295 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-105}{49.639} = -2.115,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4516 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = 2.337.$$

Поэтому $P_{10000}(4295, 4516) = \Phi(2.337) - \Phi(-2.115) = \Phi(2.337) + \Phi(2.115)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.337) = 0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(2.115) = 0.4830.$$

Окончательно, $P_{10000}(4295, 4516) = 0.4904 + 0.4830 = 0.9734$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.115 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.337 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9734 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 412 *и* 468 *(вероятность* P_1*)*

2) между 399 *и* 481 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 412 = 468 - 440 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 28) \geq 1 - \frac{246.4}{28^2} = 0.686.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 399 = 481 - 440 = 41$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 41) \geq 1 - \frac{246.4}{41^2} = 0.853.$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.686 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.853 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	5	8	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.047 + 3 * 0.164 + 5 * 0.207 + 8 * 0.401 + 10 * 0.158 + 13 * 0.023 =$$

$$= 6.708 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.708)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.047 + 3^2 * 0.164 + 5^2 * 0.207 + 8^2 * 0.401 + 10^2 * 0.158 + 13^2 * 0.023 =$$

$$= 52.190 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 52.190 - 6.708^2 = 7.193 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.682 .$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.708 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 7.193 Клик

Задача 10

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $0.8 \le x \le 4.3$. Определить плотность $f(x)$, функцию распределения $F(x)$, и построить графики этих функций.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, дисперсию $\mathbb{D}(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7)$ попадания в интервал $1.3 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

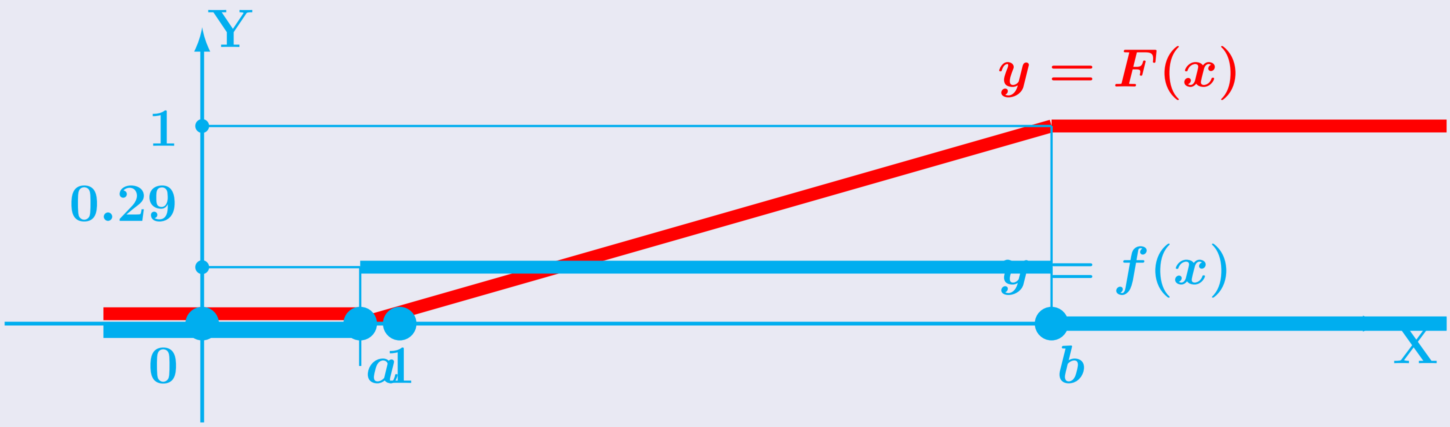

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.8}{2} = 2.55$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.8)^2}{12} = 1.021$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.010$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.3) = \frac{3.7-0.8}{3.5} - \frac{1.3-0.8}{3.5} = 0.829 - 0.143 = 0.686$

Выборочная проверка вариант 19 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) =$ введи 0.686 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $0.9 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.8^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}\,dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{0.9-2.8}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.8} = 0.61$,

$$\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9) = \int_{0.9}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.61) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.61) = 0.2291 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9) = 0.2291 + 0.3554 = 0.5845$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.61 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5845 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$

$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**2**	**4**	**5**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.16**	**0.14**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 18 * 0.60 = 16.000$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 262.000 - (16.000)^2 = 6.000$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16 + 4*0.14 + 5*0.15 + 7*0.55 = 5.480$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 33.580 - (5.480)^2 = 3.550$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.480 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.550 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=13}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 13 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.335$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 13^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.335)^2 = 5.553$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	4	5	7
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	7
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150+4*0.100+5*0.125+7*0.625 = 5.700$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150+4^2*0.100+5^2*0.125+7^2*0.625-(5.700)^2 = 3.460$.

Выборочная проверка вариант 19 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3})=$ введи 16.335 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3})=$ введи 5.553 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1})=$ введи 5.700 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1})=$ введи 3.460 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.480$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 3.550$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &= \\
&= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 5 * 0.05 + 13 * 7 * 0.25 &+ \\
&+ 18 * 2 * 0.10 + 18 * 4 * 0.10 + 18 * 5 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 &= \\
&= 87.240 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{87.240 - 16.000 * 5.480}{\sqrt{6.000 * 3.550}} = -0.095 .$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 87.240 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.095 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C(0.6\,x + 1.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (0.6\,x + 1.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.6} (0.432 + 2.280 \cdot y - 0.048 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.6} (0.384 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.384\,y + \frac{1.520}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = C\big(0.384\,y + 0.7600\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.384 \cdot 0.6 + 0.7600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.384 \cdot 0.2 + 0.7600 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.5040 - 0.1072\big) = 0.3968\,C\,.$$

Значит, $0.3968 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.3968} = 2.520$,

$$f(x,y) = 2.520 * (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{1.512}_{A}\, x + \underbrace{4.788}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.512\,x + 4.788\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.520	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.512	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	4.788	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.512\,x + 4.788\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.6} (1.512 \cdot x + 4.788 \cdot y)\,dy = \left(1.512 \cdot x \cdot y + 4.788 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0.2}^{y=0.6} =$$

$$= 1.512 \cdot x \cdot 0.6 + 4.788 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 1.512 \cdot x \cdot 0.2 - 4.788 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.605} \cdot x + \boxed{0.766}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (1.512 \cdot x + 4.788 \cdot y)\,dx = \left(1.512 \cdot \frac{x^2}{2} + 4.788 \cdot x \cdot y\right)\Bigg|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 1.512 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 4.788 \cdot 1.2 \cdot y - 1.512 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 4.788 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{3.830} \cdot y + \boxed{0.968}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.605}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.766}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{3.830}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.968}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.605\,x + 0.766\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.605\,x^2 + 0.766\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.605\,\tfrac{x^3}{3} + 0.766\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.074 = \boxed{0.826},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y \cdot \big(3.830\,y + 0.968\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(3.830\,y^2 + 0.968\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(3.830\,\tfrac{y^3}{3} + 0.968\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.450 - 0.030 = \boxed{0.420},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.605\,x + 0.766\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.605\,x^3 + 0.766\,x^2\big)\,dx - 0.682 = \big(0.605\,\tfrac{x^4}{4} + 0.766\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.682 =$$

$$= 0.755 - 0.020 - 0.682 = \boxed{0.053},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.6} y^2 \cdot \big(3.830\,y + 0.968\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \big(3.830\,y^3 + 0.968\,y^2\big)\,dy - 0.176 = \big(3.830\,\tfrac{x^4}{4} + 0.968\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.6} - 0.176 =$$

$$= 0.194 - 0.004 - 0.176 = \boxed{0.014}.$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.605	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.766	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	3.830	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.968	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.826	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.420	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.053	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.014	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.512\,x + 4.788\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.826, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.420, \quad \mathbb{D}(X) = 0.053, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.014$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.512\,x + 4.788\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} \big(1.512\,x^2 y + 4.788\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.6} \Big(1.512\,\frac{x^3}{3}\,y + 4.788\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.6} \Big(1.512\,\frac{x^3}{3}\,y + 4.788\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.6} \big(0.839\,y + 3.064\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.839 \cdot \frac{y^2}{2} + 3.064 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.6} = 0.372 - 0.025 = 0.347\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.347 - 0.826 \cdot 0.420}{\sqrt{0.053 \cdot 0.014}} = 0.003\,.$$

Выборочная проверка вариант 19 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи	0.347	Клик	
формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{11}^{6} = 332640\,.$ $C_{11}^{6} = 462\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.104\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.116\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.069\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.024\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.359\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.511\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.115\,.$ $x_2 = 2.337\,.$ $P = 0.9734\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.686\,.$ $P_2 = 0.853\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.708\,.$ $\mathbb{D}(X) = 7.193\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.021\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.7) = 0.686\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.61\,.$ $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = 0.5845\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.480\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.550\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 16.335\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.700\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 5.553\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 3.460\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 87.240\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.095\,.$

Задача 15. $C = 2.520\,,$ $f(x,y) = 1.512 \cdot x + 4.788\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.605 \cdot x + 0.766\,,$ $f_2(y) = 3.830 \cdot y + 0.968\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.826\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.420\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.053\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.014\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.347\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.003\,.$

возврат огл

Вариант 20

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A^4_{10}, C^4_{10}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A^4_{10} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}_{4 \text{ множителей}} = \boxed{5040}$.

$C^4_{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{210}$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A^4_{10} =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $C^4_{10} =$ введи 210 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^5 = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 3003.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^3 \cdot C_4^2 = 165 \cdot 6 = 990.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{990}{3003} = 0.330.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.330$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_4^3}{3003} = \frac{55 \cdot 4}{3003} = 0.073,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_4^4}{3003} = \frac{11 \cdot 1}{3003} = 0.004,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.407$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.330	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.073	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.004	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.407	Клик	

Задача 3

В тире имеется 46 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.05 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{46} = 0.217\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{36}{46} = 0.783\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.217 + 0.05 * 0.783 = 0.041\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.217}{0.041} = 0.053\,.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.041 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.053 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{20}^2} = 0.411; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_9^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^2} = 0.479; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{10}^2}{C_{19}^4} = 0.418;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{20}^2} = 0.111; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{11}^2}{C_{19}^4} = 0.397;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.418 \cdot 0.411 + 0.418 \cdot 0.479 + 0.397 \cdot 0.111 = 0.416.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.418 \cdot 0.479}{0.416} = 0.481$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.416 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.481 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.36 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3510 *и* 3704 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.36$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.64$,
$k_1 = 3510$, $k_2 = 3704$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3510 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = \frac{-90}{48.000} = -1.875,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3704 - 3600}{\sqrt{2304.0}} = 2.167.$$

Поэтому $P_{10000}(3510, 3704) = \Phi(2.167) - \Phi(-1.875) = \Phi(2.167) + \Phi(1.875)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.167) = 0.4846 \quad \text{и} \quad \Phi(1.875) = 0.4699.$$

Окончательно, $P_{10000}(3510, 3704) = 0.4846 + 0.4699 = 0.9545$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.875 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.167 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9545 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.400$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 374 *и* 426 *(вероятность* P_1*)*

2) между 362 *и* 438 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.400 = 400$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.400 * (1 - 0.400) = 240.0.$$

1. Берем $\varepsilon = 400 - 374 = 426 - 400 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 400| < 26) \geq 1 - \frac{240.0}{26^2} = 0.645.$$

2. Берем $\varepsilon = 400 - 362 = 438 - 400 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 400| < 38) \geq 1 - \frac{240.0}{38^2} = 0.834.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.645 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.834 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	6	7	9	13	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.073 + 3 * 0.221 + 6 * 0.231 + 7 * 0.345 + 9 * 0.116 + 13 * 0.014 =$$

$$= 5.836 \,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.836)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.073 + 3^2 * 0.221 + 6^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 9^2 * 0.116 + 13^2 * 0.014 =$$

$$= 39.264 \,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 39.264 - 5.836^2 = 5.205 \,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.281 \,.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.836 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.205 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{1}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases},$$

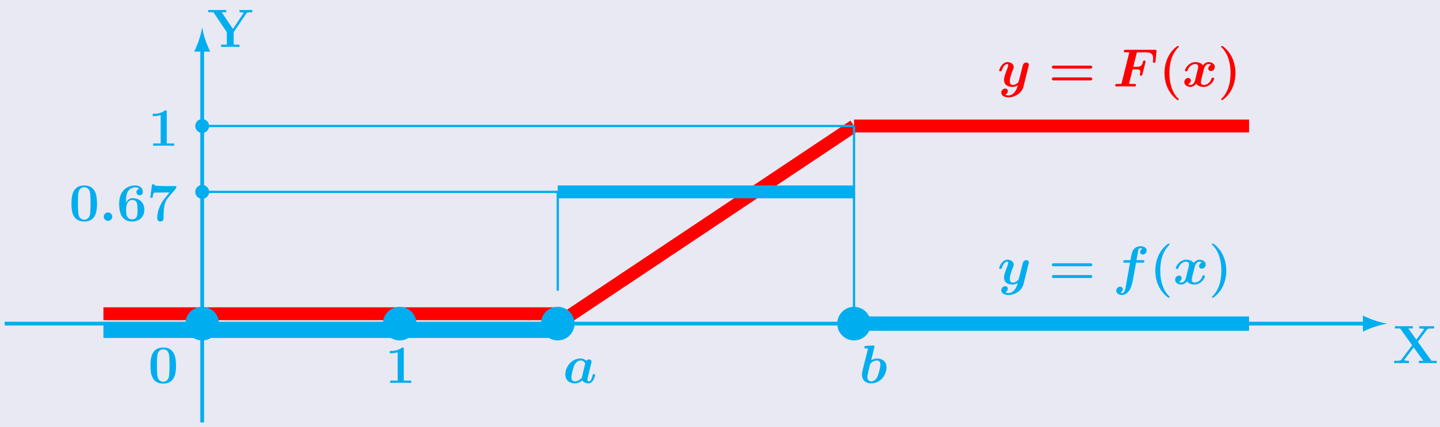

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.8}{2} = 2.55$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.8)^2}{12} = 0.188$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.434$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(2.0) = \frac{3.0-1.8}{1.5} - \frac{2.0-1.8}{1.5} = 0.800 - 0.133 = 0.667$

Выборочная проверка вариант 20 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.188 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) =$ введи 0.667 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2)$ *попадания в интервал* $1.9 \leq x \leq 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.9-2.8}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{0.8} = 0.50$,

$$\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = \int_{1.9}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.50) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.50) = 0.1915 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.1915 + 0.3708 = 0.5623$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5623 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4}$ – сумма по строке i таблицы.

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = p_{1k} + p_{2k}$ – сумма по столбцу k таблицы.

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.18**	**0.12**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{15.200}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 242.800 - (15.200)^2 = \boxed{11.760}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18+3*0.12+6*0.20+7*0.50 = \boxed{5.240}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 32.960 - (5.240)^2 = \boxed{5.502}$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.200 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 11.760 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.240 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.502 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ и $Y|_{X=11}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 11 * 0.500 + 18 * 0.500 = 14.500$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 11^2 * 0.500 + 18^2 * 0.500 - (14.500)^2 = 12.250$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	3	6	7
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y\|_{X=11=x_1}$	1	3	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y\|_{X=11=x_1}$	1	3	6	7
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1 * 0.100 + 3 * 0.150 + 6 * 0.250 + 7 * 0.500 = 5.550$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 3^2 * 0.150 + 6^2 * 0.250 + 7^2 * 0.500 - (5.550)^2 = 4.148$.

Выборочная проверка вариант 20 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 14.500 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 12.250 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1})=$ введи 5.550 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1})=$ введи 4.148 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**7**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.200$, $\mathbb{M}(Y) = 5.240$, $\mathbb{D}(X) = 11.760$, $\mathbb{D}(Y) = 5.502$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij} && = \\ &= 11*1*0.04 + 11*3*0.06 + 11*6*0.10 + 11*7*0.20 && + \\ &+ 18*1*0.14 + 18*3*0.06 + 18*6*0.10 + 18*7*0.30 && = \\ &= 78.780\,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{78.780 - 15.200*5.240}{\sqrt{11.760*5.502}} = -0.108.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 78.780 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.108 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.0} C(0.6\,x + 0.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.0} (0.6\,x + 0.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.300 + 0.900 \cdot y - 0.012 - 0.180 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.288 + 0.720 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.288\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2 \Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = C\big(0.288\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.288 \cdot 0.6 + 0.3600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.288 \cdot 0.4 + 0.3600 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.3024 - 0.1728\big) = 0.1296\,C\,.$$

Значит, $0.1296 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.1296} = \boxed{7.716}$,

$$f(x, y) = 7.716 * (0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{4.630}_{A}\; x + \underbrace{6.944}_{B}\; y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.630\,x + 6.944\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	7.716	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	4.630	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	6.944	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \leq x \leq 1.0$, $0.4 \leq y \leq 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4.630\,x + 6.944\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \leq x \leq 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (4.630 \cdot x + 6.944 \cdot y)\,dy = \left(4.630 \cdot x \cdot y + 6.944 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 4.630 \cdot x \cdot 0.6 + 6.944 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 4.630 \cdot x \cdot 0.4 - 6.944 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.926} \cdot x + \boxed{0.694},$$

и если $0.4 \leq y \leq 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (4.630 \cdot x + 6.944 \cdot y)\,dx = \left(4.630 \cdot \frac{x^2}{2} + 6.944 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 4.630 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 6.944 \cdot 1.0 \cdot y - 4.630 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 6.944 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{5.555} \cdot y + \boxed{2.222}.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.926}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.694}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \leq x \leq 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{5.555}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{2.222}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \leq y \leq 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(0.926\,x + 0.694\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(0.926\,x^2 + 0.694\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.926\,\frac{x^3}{3} + 0.694\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.656 - 0.016 = 0.640,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(5.555\,y + 2.222\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(5.555\,y^2 + 2.222\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(5.555\,\frac{y^3}{3} + 2.222\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.800 - 0.296 = 0.504,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.926\,x + 0.694\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(0.926\,x^3 + 0.694\,x^2\big)\,dx - 0.410 = \big(0.926\,\frac{x^4}{4} + 0.694\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.410 =$$

$$= 0.463 - 0.002 - 0.410 = 0.051,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(5.555\,y + 2.222\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(5.555\,y^3 + 2.222\,y^2\big)\,dy - 0.254 = \big(5.555\,\frac{x^4}{4} + 2.222\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.254 =$$

$$= 0.340 - 0.083 - 0.254 = 0.003.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.926	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.694	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	5.555	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	2.222	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.640	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.504	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.051	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4.630\,x + 6.944\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.640, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.504, \quad \mathbb{D}(X) = 0.051, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(4.630\,x + 6.944\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.2}^{1.0} \big(4.630\,x^2y + 6.944\,y^2x\big)\,dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \Big(4.630\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.944\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \Big(4.630\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.944\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(1.531\,y + 3.333\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(1.531 \cdot \frac{y^2}{2} + 3.333 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.516 - 0.194 = 0.322\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.322 - 0.640{\cdot}0.504}{\sqrt{0.051{\cdot}0.003}} = -0.045\,.$$

Выборочная проверка вариант 20 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.322 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.045 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{10}^{4} = 5040\,.$ $C_{10}^{4} = 210\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.330\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.407\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.041\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.053\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.416\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.481\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.875\,.$ $x_2 = 2.167\,.$ $P = 0.9545\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.645\,.$ $P_2 = 0.834\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.836\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.205\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.188\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.0) = 0.667\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.50\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.5623\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.200\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.240\,.$ $\mathbb{D}(X) = 11.760\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.502\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 14.500\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.550\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12.250\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 4.148\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 78.780\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.108\,.$

Задача 15. $C = 7.716\,,$ $f(x, y) = 4.630 \cdot x + 6.944\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.926 \cdot x + 0.694\,,$ $f_2(y) = 5.555 \cdot y + 2.222\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.640\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.504\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.051\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.322\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.045\,.$

возврат огл

Вариант 21

возврат огл

Задача 1

Найти $7!\,,\ A_9^5,\ C_9^5\,.$

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}\,.$

$A_9^5 = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}_{5\ \text{множителей}} = \boxed{15120}\,.$

$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{126}\,.$

Выборочная проверка вариант 21 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_9^5 =$ введи 15120 Клик

формат abcd, $C_9^5 =$ введи 126 Клик

Задача 2

В ящике 10 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

$$\text{среди } 6 \text{ извлеченных шаров оказалось ровно } k \text{ белых,}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 15. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{15}^{6} = \frac{15 \cdot \ldots \cdot 10}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 5005.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 120 \cdot 10 = 1200.$$

(извлекаем 3 шара из 10 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1200}{5005} = 0.240.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.240$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{5005} = \frac{45 \cdot 5}{5005} = 0.045,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{5005} = \frac{10 \cdot 1}{5005} = 0.002,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.287$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.240 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.045 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.002 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.287 Клик

Задача 3

В тире имеется 57 *винтовок, из них* 9 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{9}{57} = 0.158\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{48}{57} = 0.842\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.158 + 0.06 * 0.842 = 0.052\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A)*\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01*0.158}{0.052} = 0.030\,.$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.052 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.030 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 7 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{20}^2} = 0.411\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{22}^4} = 0.406\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^2} = 0.479\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{13}^2}{C_{22}^4} = 0.384\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_7^2}{C_{20}^2} = 0.111\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{14}^2}{C_{22}^4} = 0.348\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.406 \cdot 0.411 + 0.384 \cdot 0.479 + 0.348 \cdot 0.111 = 0.389\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.384 \cdot 0.479}{0.389} = 0.473\,.$

Выборочная проверка вариант 21 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.389 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.473 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.360. Производится 5 испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины X, равной числу отказов прибора. Найти $\mathbb{M}(X)$ и $\mathbb{D}(X)$ из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.360$, $q = 1 - p = 0.640$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.1073 = 0.107$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.3600 * 0.1677 = 0.302$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1296 * 0.2621 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0467 * 0.4096 = 0.191$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0168 * 0.6400 = 0.054$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0060 * 1.000 = 0.006$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.107**	**0.302**	**0.340**	**0.191**	**0.054**	**0.006**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 2 * 0.340 + 3 * 0.191 + 4 * 0.054 + 5 * 0.006 = 1.801.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.360 = \mathbf{1.800}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.801)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.107 + 1 * 0.302 + 4 * 0.340 + 9 * 0.191 + 16 * 0.054 + 25 * 0.006 = 4.395.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 4.395 - (1.801)^2 = 1.151$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.360 * 0.640 = \mathbf{1.152}$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.801 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.151 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.38 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3695 *и* 3895 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.38$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.62$,
$k_1 = 3695$, $k_2 = 3895$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3695 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \frac{-105}{48.539} = -2.163,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3895 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = 1.957.$$

Поэтому $P_{10000}(3695, 3895) = \Phi(1.957) - \Phi(-2.163) = \Phi(1.957) + \Phi(2.163)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(1.957) = 0.4750 \quad \text{и} \quad \Phi(2.163) = 0.4846.$$

Окончательно, $P_{10000}(3695, 3895) = 0.4750 + 0.4846 = 0.9596$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.163 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 1.957 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9596 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 384 *и* 436 *(вероятность* P_1*)*

2) между 370 *и* 450 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 384 = 436 - 410 = 26$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 26) \geq 1 - \frac{241.9}{26^2} = 0.642.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 370 = 450 - 410 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 40) \geq 1 - \frac{241.9}{40^2} = 0.849.$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.642 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.849 Клик

Задача 9

Случайная величина X задана рядом распределения

значение x_i	2	3	6	7	10	14	$\sum$
вероятность p_i	0.104	0.275	0.245	0.287	0.081	0.008	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.104 + 3 * 0.275 + 6 * 0.245 + 7 * 0.287 + 10 * 0.081 + 14 * 0.008 =$$

$$= 5.434 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.434)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.104 + 3^2 * 0.275 + 6^2 * 0.245 + 7^2 * 0.287 + 10^2 * 0.081 + 14^2 * 0.008 =$$

$$= 35.442 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 35.442 - 5.434^2 = 5.914 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.432 .$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.434 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.914 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

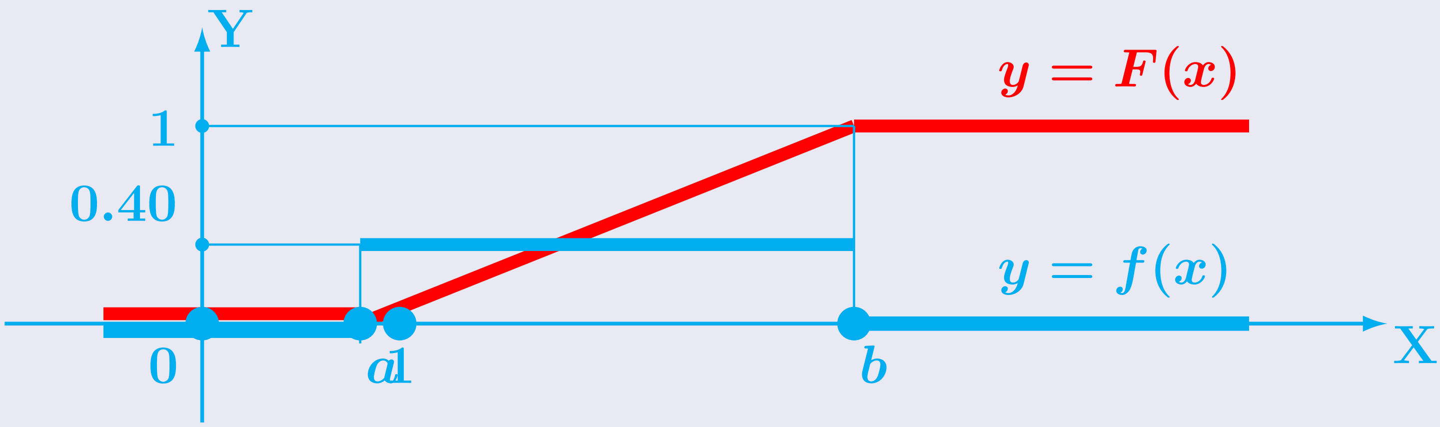

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.8}{2} = 2.05$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.3) = \frac{3.0-0.8}{2.5} - \frac{1.3-0.8}{2.5} = 0.880 - 0.200 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 21 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.2-2.8}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{1.3} = 0.31$,

$$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = \int_{1.2}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.31) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.31) = 0.1217 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = 0.1217 + 0.3907 = 0.5124$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.31 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5124 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**7**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4}$ – сумма по строке i таблицы.

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = p_{1k} + p_{2k}$ – сумма по столбцу k таблицы.

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$

$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.20**	**0.10**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = \boxed{15.600}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = \boxed{8.640}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 3*0.10 + 6*0.20 + 7*0.50 = \boxed{5.400}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 33.400 - (5.400)^2 = \boxed{4.240}$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.400 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 4.240 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	3	6	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.10	0.30

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	12	18
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	12	18
вероятность p_i этого значения	0.500	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.500 + 18 * 0.500 = 15.000$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.500 + 18^2 * 0.500 - (15.000)^2 = 9.000$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	7
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2 * 0.150 + 3 * 0.100 + 6 * 0.250 + 7 * 0.500 = 5.600$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2 * 0.150 + 3^2 * 0.100 + 6^2 * 0.250 + 7^2 * 0.500 - (5.600)^2 = 3.640$.

Выборочная проверка вариант 21 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 15.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 9.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 3.640 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	7
12	0.06	0.04	0.10	0.20
18	0.14	0.06	0.10	0.30

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.400$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 4.240$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\
&= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 6 * 0.10 + 12 * 7 * 0.20 + \\
&+ 18 * 2 * 0.14 + 18 * 3 * 0.06 + 18 * 6 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 = \\
&= 83.760 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{83.760 - 15.600 * 5.400}{\sqrt{8.640 * 4.240}} = -0.079 .$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 83.760 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.079 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.0} C(0.6\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (0.6\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.300 + 1.400 \cdot y - 0.048 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.252 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C\Big(0.252\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = C\big(0.252\, y + 0.4200\, y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C\Big(\big(0.252 \cdot 0.6 + 0.4200 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.252 \cdot 0.4 + 0.4200 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.3024 - 0.1680\big) = 0.1344\, C\,.$$

Значит, $0.1344 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.1344} = 7.440$,

$$f(x, y) = 7.440 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{4.464}_{A}\, x + \underbrace{10.417}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.464\, x + 10.417\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	7.440	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	4.464	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	10.417	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4.464\,x + 10.417\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (4.464 \cdot x + 10.417 \cdot y)\,dy = \left(4.464 \cdot x \cdot y + 10.417 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 4.464 \cdot x \cdot 0.6 + 10.417 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 4.464 \cdot x \cdot 0.4 - 10.417 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.893} \cdot x + \boxed{1.042}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (4.464 \cdot x + 10.417 \cdot y)\,dx = \left(4.464 \cdot \frac{x^2}{2} + 10.417 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 4.464 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 10.417 \cdot 1.0 \cdot y - 4.464 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 10.417 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{6.250} \cdot y + \boxed{1.875}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.893}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{1.042}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{6.250}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.875}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(0.893\,x + 1.042\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(0.893\,x^2 + 1.042\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.893\,\tfrac{x^3}{3} + 1.042\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.819 - 0.102 = \boxed{0.717},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(6.250\,y + 1.875\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(6.250\,y^2 + 1.875\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(6.250\,\tfrac{y^3}{3} + 1.875\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.788 - 0.283 = \boxed{0.505},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(0.893\,x + 1.042\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(0.893\,x^3 + 1.042\,x^2\big)\,dx - 0.514 = \big(0.893\,\tfrac{x^4}{4} + 1.042\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.514 =$$

$$= 0.571 - 0.028 - 0.514 = \boxed{0.029},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(6.250\,y + 1.875\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(6.250\,y^3 + 1.875\,y^2\big)\,dy - 0.255 = \big(6.250\,\tfrac{x^4}{4} + 1.875\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.255 =$$

$$= 0.338 - 0.080 - 0.255 = \boxed{0.003}.$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.893	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	1.042	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	6.250	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.875	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.717	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.505	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.029	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4.464\,x + 10.417\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.717, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.505, \quad \mathbb{D}(X) = 0.029, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X\cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.4}^{1.0} x\cdot y\cdot\big(4.464\,x + 10.417\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6}\int_{0.4}^{1.0}\big(4.464\,x^2y + 10.417\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6}\Big(4.464\,\frac{x^3}{3}\,y + 10.417\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy$$

$$= \int_{0.4}^{0.6}\Big(4.464\,\frac{x^3}{3}\,y + 10.417\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.6}\big(1.393\,y + 4.376\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(1.393\cdot\frac{y^2}{2} + 4.376\cdot\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.566 - 0.205 = 0.361\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.361 - 0.717\cdot 0.505}{\sqrt{0.029\cdot 0.003}} = -0.116\,.$$

Выборочная проверка вариант 21 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 0.361 Клик

формат 1.234, $r(X\cdot Y) =$ введи -0.116 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_9^5 = 15120\,.$ $C_9^5 = 126\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.240\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.287\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.052\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.030\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.389\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.473\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.801\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.151\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.163\,.$ $x_2 = 1.957\,.$ $P = 0.9596\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.642\,.$ $P_2 = 0.849\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.434\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.914\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.0) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.31\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.2) = 0.5124\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.400\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 4.240\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.600\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 9.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.640\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 83.760\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.079\,.$

Задача 15. $C = 7.440\,,$ $f(x,y) = 4.464 \cdot x + 10.417\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.893 \cdot x + 1.042\,,$ $f_2(y) = 6.250 \cdot y + 1.875\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.717\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.505\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.029\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.361\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.116\,.$

возврат огл

Вариант 22

возврат огл

Задача 1

Найти $6!\,,\ A_{12}^{5}\,,\ C_{12}^{5}\,.$

Решение

$6! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}\ .$

$A_{12}^{5} = \underbrace{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 8}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{95040}\,.$

$C_{12}^{5} = \frac{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{792}\,.$

Выборочная проверка вариант 22 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{12}^{5} =$ введи 95040 Клик

формат abcd, $C_{12}^{5} =$ введи 792 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{6} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 18564.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 286 \cdot 10 = 2860.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{2860}{18564} = 0.154.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.154$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{18564} = \frac{78 \cdot 5}{18564} = 0.021,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{18564} = \frac{13 \cdot 1}{18564} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.176$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.154	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.021	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.176	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{56} = 0.214\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{44}{56} = 0.786\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.214 + 0.06 * 0.786 = 0.049\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A)*\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01*0.214}{0.049} = 0.044\,.$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.049 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.044 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{21}^2} = 0.371\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_8^1}{C_{21}^2} = 0.495\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{12}^2}{C_{21}^4} = 0.397\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{21}^2} = 0.133\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{13}^2}{C_{21}^4} = 0.365\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.414 \cdot 0.371 + 0.397 \cdot 0.495 + 0.365 \cdot 0.133 = 0.399\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.397 \cdot 0.495}{0.399} = 0.493$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.399 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.493 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.42. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4110 *и* 4325.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.42$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.58$,
$k_1 = 4110$, $k_2 = 4325$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4110 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \frac{-90}{49.356} = \boxed{-1.823},$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4325 - 4200}{\sqrt{2436.0}} = \boxed{2.533}.$$

Поэтому $P_{10000}(4110, 4325) = \Phi(2.533) - \Phi(-1.823) = \Phi(2.533) + \Phi(1.823)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.533) = 0.4941 \quad \text{и} \quad \Phi(1.823) = 0.4656.$$

Окончательно, $P_{10000}(4110, 4325) = 0.4941 + 0.4656 = \boxed{0.9597}$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.823 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.533 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9597 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.430$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 402 *и* 458 *(вероятность* P_1*)*

2) между 391 *и* 469 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.430 = 430$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.430 * (1 - 0.430) = 245.1.$$

1. Берем $\varepsilon = 430 - 402 = 458 - 430 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 430| < 28) \geq 1 - \frac{245.1}{28^2} = 0.687.$$

2. Берем $\varepsilon = 430 - 391 = 469 - 430 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 430| < 39) \geq 1 - \frac{245.1}{39^2} = 0.839.$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.687 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.839 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	6	8	9	13	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.025 + 3 * 0.106 + 6 * 0.175 + 8 * 0.449 + 9 * 0.207 + 13 * 0.038 =$$

$$= 7.367 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.367)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.025 + 3^2 * 0.106 + 6^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 9^2 * 0.207 + 13^2 * 0.038 =$$

$$= 59.279 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 59.279 - 7.367^2 = 5.006 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.237 .$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.367 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.006 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

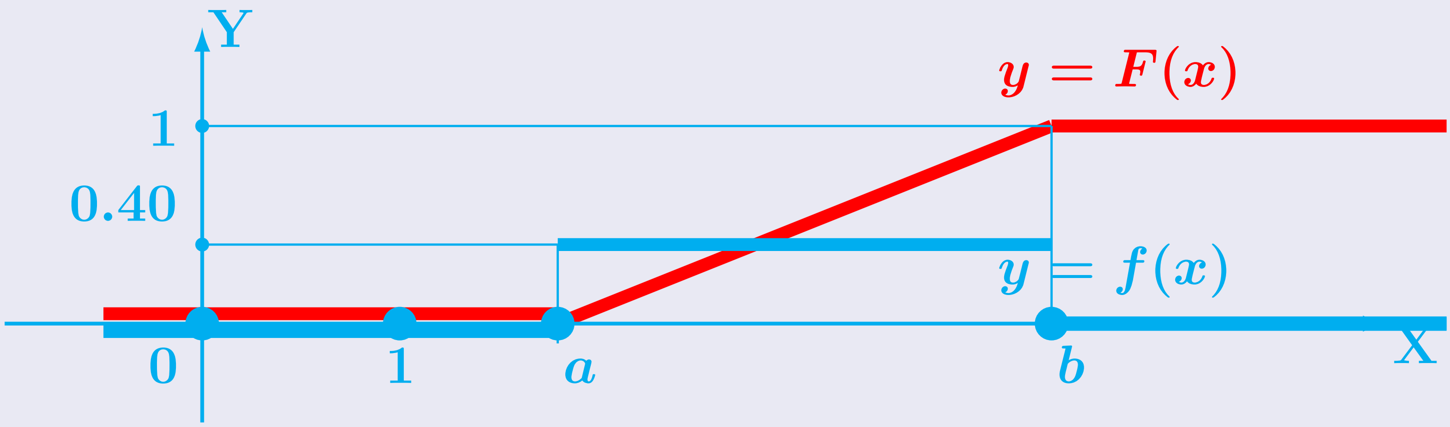

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.8}{2} = 3.05$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(2.0) = \frac{3.7-1.8}{2.5} - \frac{2.0-1.8}{2.5} = 0.760 - 0.080 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 22 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9)$ *попадания в интервал* $1.6 \leq x \leq 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.6-2.8}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.3} = 0.85$,

$$\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = \int_{1.6}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.85) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.85) = 0.3023 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = 0.3023 + 0.3238 = 0.6261$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.85 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6261 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.18**	**0.12**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 18 * 0.60 = 15.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 252.000 - (15.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18 + 4*0.12 + 6*0.15 + 7*0.55 = 5.410$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 34.450 - (5.410)^2 = 5.182$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.410 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.182 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить ряды распределения для случайных величин* $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.002$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.002)^2 = 7.996$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	6	7
12	0.04	0.06	0.05	0.25
18	0.14	0.06	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	7
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	7
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.125	0.625

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 6 * 0.125 + 7 * 0.625 = \boxed{5.825}$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 6^2 * 0.125 + 7^2 * 0.625 - (5.825)^2 = \boxed{3.694}$.

Выборочная проверка вариант 22 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X	_{Y=6=y_3}) =$ введи	16.002	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X	_{Y=6=y_3}) =$ введи	7.996	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y	_{X=12=x_1}) =$ введи	5.825	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y	_{X=12=x_1}) =$ введи	3.694	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**7**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.410$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 5.182$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} && = \\ &= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 6 * 0.05 + 12 * 7 * 0.25 && + \\ &+ 18 * 1 * 0.14 + 18 * 4 * 0.06 + 18 * 6 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 && = \\ &= 83.400 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{83.400 - 15.600 * 5.410}{\sqrt{8.640 * 5.182}} = -0.149 .$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 83.400 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.149 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} C(0.6\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (0.6\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.432 + 1.680 \cdot y - 0.012 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.420 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.420\, y + \frac{1.400}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.4}^{0.6} = C \big(0.420\, y + 0.7000\, y^2 \big) \Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.420 \cdot 0.6 + 0.7000 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.420 \cdot 0.4 + 0.7000 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.5040 - 0.2800 \big) = 0.2240\, C\,.$$

Значит, $0.2240 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.2240} = 4.464$,

$$f(x, y) = 4.464 * (0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{2.679}_{A}\, x + \underbrace{6.250}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.679\, x + 6.250\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	4.464	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.679	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	6.250	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.679\,x + 6.250\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (2.679 \cdot x + 6.250 \cdot y)\,dy = \left(2.679 \cdot x \cdot y + 6.250 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 2.679 \cdot x \cdot 0.6 + 6.250 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 2.679 \cdot x \cdot 0.4 - 6.250 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.536} \cdot x + \boxed{0.625}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (2.679 \cdot x + 6.250 \cdot y)\,dx = \left(2.679 \cdot \frac{x^2}{2} + 6.250 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 2.679 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 6.250 \cdot 1.2 \cdot y - 2.679 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 6.250 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{6.250} \cdot y + \boxed{1.875}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.536}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.625}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{6.250}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.875}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.536\,x + 0.625\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.536\,x^2 + 0.625\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.536\,\tfrac{x^3}{3} + 0.625\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.759 - 0.014 = 0.745\,,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(6.250\,y + 1.875\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(6.250\,y^2 + 1.875\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(6.250\,\tfrac{y^3}{3} + 1.875\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.788 - 0.283 = 0.505\,,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.536\,x + 0.625\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.536\,x^3 + 0.625\,x^2\big)\,dx - 0.555 = \big(0.536\,\tfrac{x^4}{4} + 0.625\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.555 =$$

$$= 0.638 - 0.002 - 0.555 = 0.081\,,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(6.250\,y + 1.875\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(6.250\,y^3 + 1.875\,y^2\big)\,dy - 0.255 = \big(6.250\,\tfrac{x^4}{4} + 1.875\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.255 =$$

$$= 0.338 - 0.080 - 0.255 = 0.003\,.$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.536	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.625	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	6.250	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.875	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.745	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.505	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.081	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.003	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.679\,x + 6.250\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.745, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.505, \quad \mathbb{D}(X) = 0.081, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.003$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(2.679\,x + 6.250\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.2}^{1.2} \big(2.679\,x^2 y + 6.250\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(2.679\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.250\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(2.679\,\frac{x^3}{3}\,y + 6.250\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(1.536\,y + 4.375\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(1.536 \cdot \frac{y^2}{2} + 4.375 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.591 - 0.216 = 0.375\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.375 - 0.745 \cdot 0.505}{\sqrt{0.081 \cdot 0.003}} = -0.079\,.$$

Выборочная проверка вариант 22 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи	0.375	Клик	
формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи	-0.079	Клик	

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{12}^{5} = 95040\,.$ $C_{12}^{5} = 792\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.154\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.176\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.049\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.044\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.399\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.493\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.823\,.$ $x_2 = 2.533\,.$ $P = 0.9597\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.687\,.$ $P_2 = 0.839\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.367\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.006\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.7) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.85\,.$ $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = 0.6261\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.410\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.182\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.002\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.825\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 7.996\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 3.694\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 83.400\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.149\,.$

Задача 15. $C = 4.464\,,$ $f(x, y) = 2.679 \cdot x + 6.250\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.536 \cdot x + 0.625\,,$ $f_2(y) = 6.250 \cdot y + 1.875\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.745\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.505\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.081\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.003\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.375\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.079\,.$

возврат огл

Вариант 23

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_{11}^{6}, C_{11}^{6}.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_{11}^{6} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}_{6 \text{ множителей}} = \boxed{332640}$.

$C_{11}^{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{462}$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_{11}^{6} =$ введи 332640 Клик

формат abcd, $C_{11}^{6} =$ введи 462 Клик

Задача 2

В ящике 12 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекается 7 шаров. Найти вероятность того, что

1 *среди извлеченных шаров — ровно 3 белых,*

2 *не более 3 белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 18. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{18}^{7} = \frac{18 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 31824.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 220 \cdot 15 = 3300.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3300}{31824} = 0.104.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.104$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{31824} = \frac{66 \cdot 6}{31824} = 0.012$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{31824} = \frac{12 \cdot 1}{31824} = 0.000$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.116$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.104	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.012	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.116	Клик	

Задача 3

В тире имеется 67 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.08 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{67} = 0.164\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{56}{67} = 0.836\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.164 + 0.08 * 0.836 = 0.069\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.164}{0.069} = 0.024\,.$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.069 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.024 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 8 черных;

2-й ящик: 8 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{21}^2} = 0.371\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_8^1}{C_{21}^2} = 0.495\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_9^2 \cdot C_{15}^2}{C_{24}^4} = 0.356\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_8^2}{C_{21}^2} = 0.133\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^2 \cdot C_{16}^2}{C_{24}^4} = 0.316\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) = \\ &= 0.385\cdot 0.371 + 0.356\cdot 0.495 + 0.316\cdot 0.133 = 0.361\,.\end{aligned}$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.356\cdot 0.495}{0.361} = 0.488$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.361 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.488 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.44 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4295 *и* 4516 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.44$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4295$, $k_2 = 4516$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4295 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-105}{49.639} = -2.115 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4516 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = 2.337 .$$

Поэтому $P_{10000}(4295, 4516) = \Phi(2.337) - \Phi(-2.115) = \Phi(2.337) + \Phi(2.115)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.337) = 0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(2.115) = 0.4830 .$$

Окончательно, $P_{10000}(4295, 4516) = 0.4904 + 0.4830 = 0.9734$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.115 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.337 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9734 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 412 *и* 468 *(вероятность* P_1*)*

2) между 399 *и* 481 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 412 = 468 - 440 = 28$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 28) \geq 1 - \frac{246.4}{28^2} = 0.686.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 399 = 481 - 440 = 41$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 41) \geq 1 - \frac{246.4}{41^2} = 0.853.$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.686 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.853 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	3	6	8	10	14	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$ *,*
дисперсию $\mathbb{D}(X)$ *,*
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ *.*

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.047 + 3 * 0.164 + 6 * 0.207 + 8 * 0.401 + 10 * 0.158 + 14 * 0.023 =$$

$$= 6.938 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.938)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.047 + 3^2 * 0.164 + 6^2 * 0.207 + 8^2 * 0.401 + 10^2 * 0.158 + 14^2 * 0.023 =$$

$$= 55.088 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 55.088 - 6.938^2 = 6.952 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.637 .$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.938 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.952 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

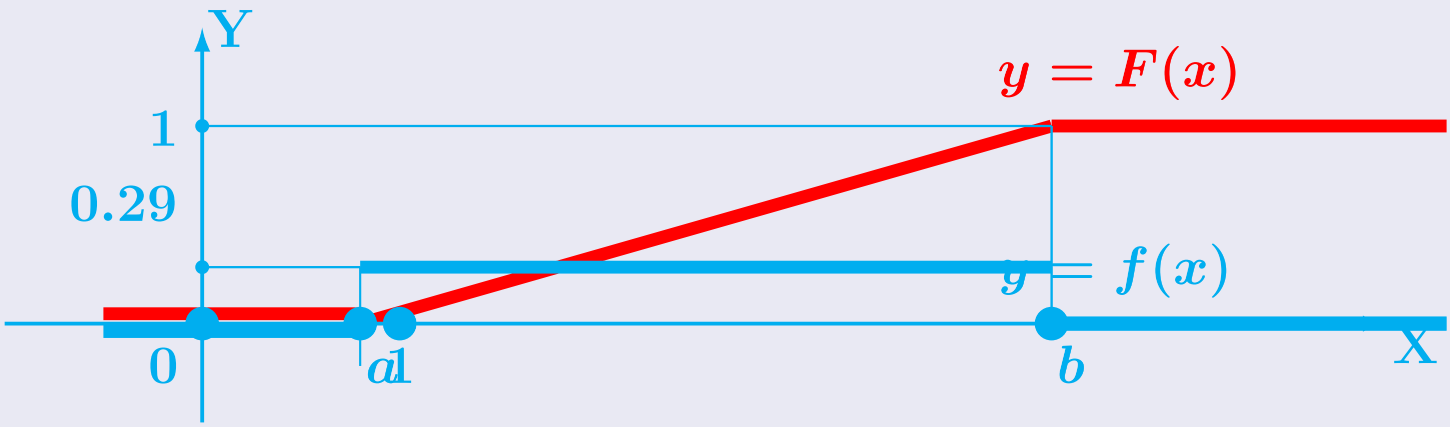

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.8}{2} = 2.55$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.8)^2}{12} = 1.021$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.010$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.3) = \frac{3.7-0.8}{3.5} - \frac{1.3-0.8}{3.5} = 0.829 - 0.143 = 0.686$

Выборочная проверка вариант 23 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) =$ введи 0.686 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9)$ *попадания в интервал* $0.9 \leq x \leq 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.8^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{0.9-2.8}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.8} = 0.61$,

$$\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = \int_{0.9}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.61) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.61) = 0.2291 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = 0.2291 + 0.3554 = 0.5845$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.61 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5845 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**18**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j **этого значения**	**0.20**	**0.10**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 18 * 0.60 = 16.000$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 262.000 - (16.000)^2 = 6.000$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 4*0.10 + 6*0.15 + 7*0.55 = 5.550$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 34.750 - (5.550)^2 = 3.948$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 16.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.550 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 3.948 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=13}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X\|_{Y=6=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X\|_{Y=6=y_3}$	**13**	**18**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 13 * 0.333 + 18 * 0.667 = 16.335$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 13^2 * 0.333 + 18^2 * 0.667 - (16.335)^2 = 5.553$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**7**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
18	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	**2**	**4**	**6**	**7**
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150 + 4*0.100 + 6*0.125 + 7*0.625 = 5.825$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150 + 4^2*0.100 + 6^2*0.125 + 7^2*0.625 - (5.825)^2 = 3.394$.

Выборочная проверка вариант 23 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 16.335 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 5.553 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 5.825 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 3.394 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	4	6	7
13	0.06	0.04	0.05	0.25
18	0.14	0.06	0.10	0.30

задачи 12. *Определить коэффициент корреляции* X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 16.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.550$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 3.948$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 6 * 0.05 + 13 * 7 * 0.25 + \\ &+ 18 * 2 * 0.14 + 18 * 4 * 0.06 + 18 * 6 * 0.10 + 18 * 7 * 0.30 = \\ &= 88.250 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{88.250 - 16.000 * 5.550}{\sqrt{6.000 * 3.948}} = -0.113 .$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 88.250 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.113 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x,y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} C(0.6\,x + 1.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (0.6\,x + 1.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} \Big(\big(0.6 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(0.6 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.6} (0.432 + 2.280 \cdot y - 0.048 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.6} (0.384 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.384\, y + \frac{1.520}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.4}^{0.6} = C \big(0.384\, y + 0.7600\, y^2 \big) \Big|_{0.4}^{0.6} =$$

$$= C \Big(\big(0.384 \cdot 0.6 + 0.7600 \cdot 0.6^2\big) - \big(0.384 \cdot 0.4 + 0.7600 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(0.5040 - 0.2752 \big) = 0.2288\, C\,.$$

Значит, $0.2288 \cdot C = 1\,,\quad C = \frac{1}{0.2288} = 4.371\,,$

$$f(x,y) = 4.371 * (0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{2.622}_{A}\, x + \underbrace{8.304}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.622\, x + 8.304\, y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	4.371	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.622	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	8.304	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.622\, x + 8.304\, y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.6} (2.622 \cdot x + 8.304 \cdot y)\, dy = \left(2.622 \cdot x \cdot y + 8.304 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.6} =$$

$$= 2.622 \cdot x \cdot 0.6 + 8.304 \cdot \frac{0.6^2}{2} - 2.622 \cdot x \cdot 0.4 - 8.304 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.524} \cdot x + \boxed{0.830}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.6$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (2.622 \cdot x + 8.304 \cdot y)\, dx = \left(2.622 \cdot \frac{x^2}{2} + 8.304 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 2.622 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 8.304 \cdot 1.2 \cdot y - 2.622 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 8.304 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{6.643} \cdot y + \boxed{1.678}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.524}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.830}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{6.643}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.678}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.6\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.6\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.524\,x + 0.830\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.524\,x^2 + 0.830\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.524\,\frac{x^3}{3} + 0.830\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.899 - 0.078 = 0.821,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y \cdot \big(6.643\,y + 1.678\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(6.643\,y^2 + 1.678\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(6.643\,\frac{y^3}{3} + 1.678\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.780 - 0.276 = 0.504,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.524\,x + 0.830\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.524\,x^3 + 0.830\,x^2\big)\,dx - 0.674 = \big(0.524\,\frac{x^4}{4} + 0.830\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.674 =$$

$$= 0.750 - 0.021 - 0.674 = 0.055,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.6} y^2 \cdot \big(6.643\,y + 1.678\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \big(6.643\,y^3 + 1.678\,y^2\big)\,dy - 0.254 = \big(6.643\,\frac{x^4}{4} + 1.678\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.6} - 0.254 =$$

$$= 0.336 - 0.078 - 0.254 = 0.004.$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.524	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.830	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	6.643	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.678	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.821	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.504	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.055	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.004	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.6$ *пропорционально* $0.6 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.622\,x + 8.304\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.821, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.504, \quad \mathbb{D}(X) = 0.055, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.004$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(2.622\,x + 8.304\,y\big) dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \int_{0.4}^{1.2} \big(2.622\,x^2 y + 8.304\,y^2 x\big) dx\,dy = \int_{0.4}^{0.6} \Big(2.622\,\frac{x^3}{3}\,y + 8.304\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} \Big(2.622\,\frac{x^3}{3}\,y + 8.304\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.6} \big(1.454\,y + 5.315\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(1.454 \cdot \frac{y^2}{2} + 5.315 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.6} = 0.644 - 0.230 = 0.414\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.414 - 0.821 \cdot 0.504}{\sqrt{0.055 \cdot 0.004}} = 0.015.$$

Выборочная проверка вариант 23 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.414 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи 0.015 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{11}^{6} = 332640\,.$ $C_{11}^{6} = 462\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.104\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.116\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.069\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.024\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.361\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.488\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.115\,.$ $x_2 = 2.337\,.$ $P = 0.9734\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.686\,.$ $P_2 = 0.853\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.938\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.952\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.021\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.7) = 0.686\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.61\,.$ $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = 0.5845\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 16.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.550\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 3.948\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 16.335\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.825\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 5.553\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 3.394\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 88.250\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.113\,.$

Задача 15. $C = 4.371\,,$ $f(x,y) = 2.622 \cdot x + 8.304\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.524 \cdot x + 0.830\,,$ $f_2(y) = 6.643 \cdot y + 1.678\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.821\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.504\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.055\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.004\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.414\,.$ $r(X \cdot Y) = 0.015\,.$

возврат огл

Вариант 24

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{11}^{4}, C_{11}^{4}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{11}^{4} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 8}_{4\text{ множителей}} = \boxed{7920}$.

$C_{11}^{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{330}$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{11}^{4} =$ введи 7920 Клик

формат abcd, $C_{11}^{4} =$ введи 330 Клик

Задача 2

В ящике 12 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 5 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 5 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^5 = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 4368.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^3 \cdot C_4^2 = 220 \cdot 6 = 1320.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1320}{4368} = 0.302.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.302$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_4^3}{4368} = \frac{66 \cdot 4}{4368} = 0.060,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_4^4}{4368} = \frac{12 \cdot 1}{4368} = 0.003,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.365$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.302	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.060	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.003	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.365	Клик	

Задача 3

В тире имеется 46 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.05 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{46} = 0.239\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{35}{46} = 0.761\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.239 + 0.05 * 0.761 = 0.040\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.239}{0.040} = 0.060\,.$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.040 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.060 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{20}^2} = 0.289; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_9^2}{C_{21}^4} = 0.397;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_9^1}{C_{20}^2} = 0.521; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{10}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{20}^2} = 0.189; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.397 \cdot 0.289 + 0.414 \cdot 0.521 + 0.414 \cdot 0.189 = 0.409.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.414 \cdot 0.521}{0.409} = 0.527$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.409 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.527 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084$.

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.38 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3710 *и* 3914 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.38$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.62$,
$k_1 = 3710$, $k_2 = 3914$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3710 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \frac{-90}{48.539} = \boxed{-1.854},$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3914 - 3800}{\sqrt{2356.0}} = \boxed{2.349}.$$

Поэтому $P_{10000}(3710, 3914) = \Phi(2.349) - \Phi(-1.854) = \Phi(2.349) + \Phi(1.854)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.349) = 0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(1.854) = 0.4678.$$

Окончательно, $P_{10000}(3710, 3914) = 0.4904 + 0.4678 = \boxed{0.9582}$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.854 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.349 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9582 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 383 *и* 437 *(вероятность* P_1*)*

2) между 372 *и* 448 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 383 = 437 - 410 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 27) \geq 1 - \frac{241.9}{27^2} = 0.668.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 372 = 448 - 410 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 38) \geq 1 - \frac{241.9}{38^2} = 0.832.$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 8

формат 1.23,	$P_1 =$ введи	0.668	Клик	
формат 1.23,	$P_2 =$ введи	0.832	Клик	

Задача 9

Случайная величина X задана рядом распределения

значение x_i	2	4	5	7	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.047 + 4 * 0.164 + 5 * 0.207 + 7 * 0.401 + 9 * 0.158 + 12 * 0.023 =$$

$$= \boxed{6.290}\,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.290)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.047 + 4^2 * 0.164 + 5^2 * 0.207 + 7^2 * 0.401 + 9^2 * 0.158 + 12^2 * 0.023 =$$

$$= \boxed{43.746}\,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 43.746 - 6.290^2 = \boxed{4.182}\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.045\,.$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.290 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 4.182 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{1}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{1.5} & \text{при} \quad 1.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3.3 \end{cases},$$

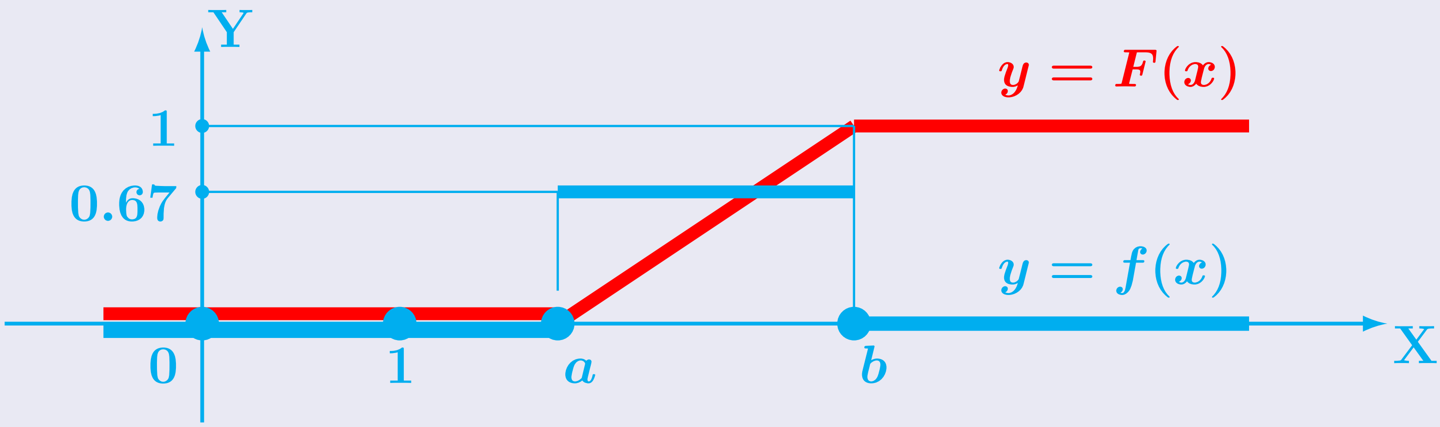

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.8}{2} = 2.55$, $\quad \mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.8)^2}{12} = 0.188$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.434$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(2.0) = \frac{3.0-1.8}{1.5} - \frac{2.0-1.8}{1.5} = 0.800 - 0.133 = 0.667$

Выборочная проверка вариант 24 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.188 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) =$ введи 0.667 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.9 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.9-2.8}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{0.8} = 0.50$,

$$\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.2) = \int_{1.9}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.50) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.50) = 0.1915 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.9 \le X \le 3.2) = 0.1915 + 0.3708 = 0.5623$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5623 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**1**	**3**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.14**	**0.16**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 17 * 0.60 = \boxed{14.600}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 221.800 - (14.600)^2 = \boxed{8.640}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1 * 0.14 + 3 * 0.16 + 5 * 0.20 + 8 * 0.50 = \boxed{5.620}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 38.580 - (5.620)^2 = \boxed{6.996}$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 14.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.620 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.996 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=11}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 11 * 0.500 + 17 * 0.500 = 14.000$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 11^2 * 0.500 + 17^2 * 0.500 - (14.000)^2 = 9.000$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	1	3	5	8
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	1	3	5	8
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1*0.100+3*0.150+5*0.250+8*0.500 = 5.800$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2*0.100+3^2*0.150+5^2*0.250+8^2*0.500-(5.800)^2 = 6.060$.

Выборочная проверка вариант 24 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	14.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=5=y_3}) =$ введи	9.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	5.800	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=11=x_1}) =$ введи	6.060	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**5**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 14.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.620$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 6.996$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} &= \\
&= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 5 * 0.10 + 11 * 8 * 0.20 &+ \\
&+ 17 * 1 * 0.10 + 17 * 3 * 0.10 + 17 * 5 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 &= \\
&= 81.620 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{81.620 - 14.600 * 5.620}{\sqrt{8.640 * 6.996}} = -0.056 .$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 81.620 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.056 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x,y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C \cdot (1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C(1.1\,x + 0.9\,y)\,dx\,dy = C\int_{0.2}^{0.8}\Big(\int_{0.2}^{1.0}(1.1\,x + 0.9\,y)\,dx\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.2}^{0.8}\Big(\Big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0}\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.2}^{0.8}\Big(\Big(1.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\Big) - \Big(1.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\Big)\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.2}^{0.8}(0.550 + 0.900 \cdot y - 0.022 - 0.180 \cdot y)dy = C\int_{0.2}^{0.8}(0.528 + 0.720 \cdot y)dy =$$

$$= C\Big(0.528\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.528\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.528 \cdot 0.8 + 0.3600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.528 \cdot 0.2 + 0.3600 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.6528 - 0.1200\big) = 0.5328\,C\,.$$

Значит, $0.5328 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.5328} = 1.877$,

$$f(x,y) = 1.877 * (1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{2.065}_{A}\,x + \underbrace{1.689}_{B}\,y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.065\,x + 1.689\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.877	Клик		
формат 1.23, $A =$ введи	2.065	Клик		
формат 1.23, $B =$ введи	1.689	Клик		

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.065\,x + 1.689\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (2.065 \cdot x + 1.689 \cdot y)\, dy = \left(2.065 \cdot x \cdot y + 1.689 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 2.065 \cdot x \cdot 0.8 + 1.689 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 2.065 \cdot x \cdot 0.2 - 1.689 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{1.239} \cdot x + \boxed{0.507}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (2.065 \cdot x + 1.689 \cdot y)\, dx = \left(2.065 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.689 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 2.065 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.689 \cdot 1.0 \cdot y - 2.065 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 1.689 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{1.351} \cdot y + \boxed{0.991}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{1.239}_{A_1} \cdot x + \underbrace{0.507}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{1.351}_{A_2} \cdot y + \underbrace{0.991}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(1.239\,x + 0.507\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(1.239\,x^2 + 0.507\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(1.239\,\frac{x^3}{3} + 0.507\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.667 - 0.013 = 0.654,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(1.351\,y + 0.991\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.351\,y^2 + 0.991\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(1.351\,\frac{y^3}{3} + 0.991\,\frac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.548 - 0.023 = 0.525,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(1.239\,x + 0.507\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(1.239\,x^3 + 0.507\,x^2\big)\,dx - 0.428 = \big(1.239\,\frac{x^4}{4} + 0.507\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.428 =$$

$$= 0.479 - 0.002 - 0.428 = 0.049,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.351\,y + 0.991\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.351\,y^3 + 0.991\,y^2\big)\,dy - 0.276 = \big(1.351\,\frac{x^4}{4} + 0.991\,\frac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.276 =$$

$$= 0.307 - 0.003 - 0.276 = 0.028.$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	1.239	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.507	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	1.351	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.991	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.654	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.525	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.049	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.028	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.065\,x + 1.689\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.654, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.525, \quad \mathbb{D}(X) = 0.049, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.028$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(2.065\,x + 1.689\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} \big(2.065\,x^2 y + 1.689\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \Big(2.065\,\frac{x^3}{3}\,y + 1.689\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \Big(2.065\,\frac{x^3}{3}\,y + 1.689\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.682\,y + 0.811\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.682 \cdot \frac{y^2}{2} + 0.811 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.357 - 0.016 = \boxed{0.341}\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.341 - 0.654 \cdot 0.525}{\sqrt{0.049 \cdot 0.028}} = \boxed{-0.063}\,.$$

Выборочная проверка вариант 24 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи	0.341	Клик	
формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи	-0.063	Клик	

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{11}^{4} = 7920\,.$ $C_{11}^{4} = 330\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.302\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.365\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.040\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.060\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.409\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.527\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.854\,.$ $x_2 = 2.349\,.$ $P = 0.9582\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.668\,.$ $P_2 = 0.832\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.290\,.$ $\mathbb{D}(X) = 4.182\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.188\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.0) = 0.667\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.50\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.5623\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 14.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.620\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.996\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 14.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.800\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 9.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 6.060\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 81.620\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.056\,.$

Задача 15. $C = 1.877\,,$ $f(x, y) = 2.065 \cdot x + 1.689\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.239 \cdot x + 0.507\,,$ $f_2(y) = 1.351 \cdot y + 0.991\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.654\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.525\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.049\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.028\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.341\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.063\,.$

возврат огл

Вариант 25

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_{10}^{5}, C_{10}^{5}.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_{10}^{5} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{30240}$.

$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{252}$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_{10}^{5} =$ введи 30240 Клик

формат abcd, $C_{10}^{5} =$ введи 252 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^6 = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 8008.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^3 \cdot C_5^3 = 165 \cdot 10 = 1650.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1650}{8008} = 0.206.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.206$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_5^4}{8008} = \frac{55 \cdot 5}{8008} = 0.034$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_5^5}{8008} = \frac{11 \cdot 1}{8008} = 0.001$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.241$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.206	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.034	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.241	Клик	

Задача 3

В тире имеется 57 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 , *для устаревшей* 0.06 . *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{57} = 0.175\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{47}{57} = 0.825\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.175 + 0.06 * 0.825 = 0.051\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.175}{0.051} = 0.034\,.$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.051 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.034 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{20}^2} = 0.289; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{24}^4} = 0.410;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_9^1}{C_{20}^2} = 0.521; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{13}^2}{C_{24}^4} = 0.404;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{20}^2} = 0.189; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.410 \cdot 0.289 + 0.404 \cdot 0.521 + 0.385 \cdot 0.189 = 0.402.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.404 \cdot 0.521}{0.402} = 0.524$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.524 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999$.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 =$ **2.000**.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 =$ **1.200**.

Выборочная проверка вариант 25 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.40 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3895 *и* 4105 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$,
где $n=10000$ – число независимых испытаний,
$p=0.40$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q=1-p=0.60$,
$k_1=3895$, $k_2=4105$, и

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{3895-4000}{\sqrt{2400.0}}=\frac{-105}{48.990}=-2.143\,,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4105-4000}{\sqrt{2400.0}}=2.143\,.$$

Поэтому $P_{10000}(3895,4105)=\Phi(2.143)-\Phi(-2.143)=\Phi(2.143)+\Phi(2.143)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.143)=0.4838 \quad \text{и} \quad \Phi(2.143)=0.4838\,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3895,4105)=0.4838+0.4838=0.9676$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 6

формат 1.23, $x_1=$ введи -2.143 Клик

формат 1.23, $x_2=$ введи 2.143 Клик

формат 1.23, $P=$ введи 0.9676 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.420$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 393 *и* 447 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 380 *и* 460 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.420 = 420$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.420 * (1 - 0.420) = 243.6.$$

1. Берем $\varepsilon = 420 - 393 = 447 - 420 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 420| < 27) \geq 1 - \frac{243.6}{27^2} = 0.666.$$

2. Берем $\varepsilon = 420 - 380 = 460 - 420 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 420| < 40) \geq 1 - \frac{243.6}{40^2} = 0.848.$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.666 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.848 Клик

Задача 9

Случайная величина X задана рядом распределения

значение x_i	2	4	5	7	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.073 + 4 * 0.221 + 5 * 0.231 + 7 * 0.345 + 10 * 0.116 + 13 * 0.014 =$$

$$= 5.942 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (5.942)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.073 + 4^2 * 0.221 + 5^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 10^2 * 0.116 + 13^2 * 0.014 =$$

$$= 40.474 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 40.474 - 5.942^2 = 5.167 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.273 .$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 5.942 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.167 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

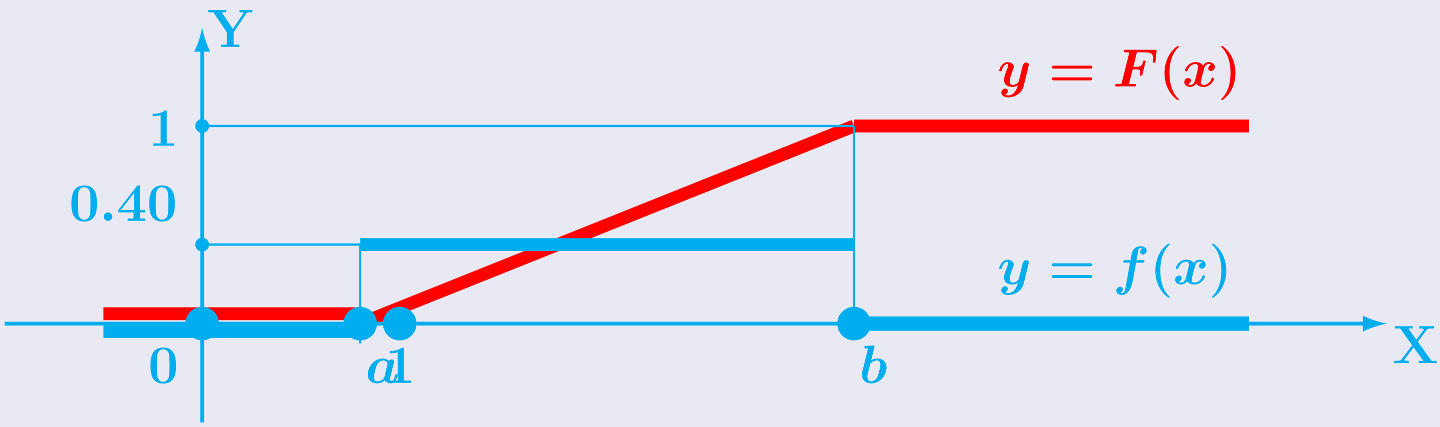

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.8}{2} = 2.05$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.3) = \frac{3.0-0.8}{2.5} - \frac{1.3-0.8}{2.5} = 0.880 - 0.200 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 25 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.2-2.8}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{1.3} = 0.31$,

$$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = \int_{1.2}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.31) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.31) = 0.1217 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = 0.1217 + 0.3907 = 0.5124$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.31 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5124 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	3	5	8
12	0.06	0.04	0.10	0.20
17	0.10	0.10	0.10	0.30

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	12	17
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	2	3	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	12	17
вероятность p_i этого значения	0.40	0.60

значение y_j случайной величины Y	2	3	5	8
вероятность q_j этого значения	0.16	0.14	0.20	0.50

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 17 * 0.60 = \boxed{15.000}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 231.000 - (15.000)^2 = \boxed{6.000}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16+3*0.14+5*0.20+8*0.50 = \boxed{5.740}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 38.900 - (5.740)^2 = \boxed{5.952}$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.740 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.952 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ и $Y|_{X=12}$, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$, $p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.500 + 17 * 0.500 = 14.500$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.500 + 17^2 * 0.500 - (14.500)^2 = 6.250$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	5	8
12	0.06	0.04	0.10	0.20
17	0.10	0.10	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$ – в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	5	8
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.250	0.500

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2 * 0.150 + 3 * 0.100 + 5 * 0.250 + 8 * 0.500 = 5.850$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2 * 0.150 + 3^2 * 0.100 + 5^2 * 0.250 + 8^2 * 0.500 - (5.850)^2 = 5.528$.

Выборочная проверка вариант 25 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 14.500 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 6.250 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.850 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи 5.528 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**5**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.740$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 5.952$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 12 * 2 * 0.06 + 12 * 3 * 0.04 + 12 * 5 * 0.10 + 12 * 8 * 0.20 + \\ &+ 17 * 2 * 0.10 + 17 * 3 * 0.10 + 17 * 5 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 = \\ &= 85.880 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{85.880 - 15.000 * 5.740}{\sqrt{6.000 * 5.952}} = -0.037 .$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 85.880 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.037 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x,y) = C(1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C(1.1\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (1.1\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \tfrac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \tfrac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \tfrac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.550 + 1.400 \cdot y - 0.088 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.462 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.462\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.462\, y + 0.4200\, y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.462 \cdot 0.8 + 0.4200 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.462 \cdot 0.2 + 0.4200 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(0.6384 - 0.1092\big) = 0.5292\, C\,.$$

Значит, $0.5292 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.5292} = 1.890\,,$

$$f(x,y) = 1.890 * (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{2.079}_{A}\, x + \underbrace{2.646}_{B}\, y\,.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.079\, x + 2.646\, y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.890	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.079	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.646	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \leq x \leq 1.0$, $0.2 \leq y \leq 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.079\,x + 2.646\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \leq x \leq 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (2.079 \cdot x + 2.646 \cdot y)\,dy = \left(2.079 \cdot x \cdot y + 2.646 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 2.079 \cdot x \cdot 0.8 + 2.646 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 2.079 \cdot x \cdot 0.2 - 2.646 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{1.247} \cdot x + \boxed{0.794}\,,$$

и если $0.2 \leq y \leq 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (2.079 \cdot x + 2.646 \cdot y)\,dx = \left(2.079 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.646 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 2.079 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 2.646 \cdot 1.0 \cdot y - 2.079 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 2.646 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{1.588} \cdot y + \boxed{0.873}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.247}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.794}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.588}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.873}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \leq y \leq 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(1.247\,x + 0.794\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(1.247\,x^2 + 0.794\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(1.247\,\tfrac{x^3}{3} + 0.794\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.813 - 0.090 = \boxed{0.723},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(1.588\,y + 0.873\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.588\,y^2 + 0.873\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(1.588\,\tfrac{y^3}{3} + 0.873\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.550 - 0.022 = \boxed{0.528},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(1.247\,x + 0.794\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(1.247\,x^3 + 0.794\,x^2\big)\,dx - 0.523 = \big(1.247\,\tfrac{x^4}{4} + 0.794\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.523 =$$

$$= 0.576 - 0.025 - 0.523 = \boxed{0.028},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.588\,y + 0.873\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.588\,y^3 + 0.873\,y^2\big)\,dy - 0.279 = \big(1.588\,\tfrac{x^4}{4} + 0.873\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.279 =$$

$$= 0.312 - 0.003 - 0.279 = \boxed{0.030}.$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	1.247	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.794	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	1.588	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.873	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.723	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.528	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.028	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.030	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.079\,x + 2.646\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.723, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.528, \quad \mathbb{D}(X) = 0.028, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.030$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X, Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(2.079\,x + 2.646\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} \big(2.079\,x^2 y + 2.646\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \Big(2.079\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.646\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \Big(2.079\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.646\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.649\,y + 1.111\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.649 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.111 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.397 - 0.016 = 0.381\,.$$

Поэтому

$$r(X, Y) = \frac{0.381 - 0.723 \cdot 0.528}{\sqrt{0.028 \cdot 0.030}} = -0.026\,.$$

Выборочная проверка вариант 25 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.381 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.026 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{10}^{5} = 30240\,.$ $C_{10}^{5} = 252\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.206\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.241\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.051\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.034\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.402\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.524\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.143\,.$ $x_2 = 2.143\,.$ $P = 0.9676\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.666\,.$ $P_2 = 0.848\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 5.942\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.167\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.0) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.31\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.2) = 0.5124\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.740\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.952\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 14.500\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.850\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 6.250\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.528\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 85.880\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.037\,.$

Задача 15. $C = 1.890\,,$ $f(x, y) = 2.079 \cdot x + 2.646\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.247 \cdot x + 0.794\,,$ $f_2(y) = 1.588 \cdot y + 0.873\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.723\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.528\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.028\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.030\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.381\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.026\,.$

возврат огл

Вариант 26

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{13}^{5}, C_{13}^{5}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{13}^{5} = \underbrace{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{154440}$.

$C_{13}^{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{1287}$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{13}^{5} =$ введи 154440 Клик

формат abcd, $C_{13}^{5} =$ введи 1287 Клик

Задача 2

В ящике 14 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^6 = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 14}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 27132.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{14}^3 \cdot C_5^3 = 364 \cdot 10 = 3640.$$

(извлекаем 3 шара из 14 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3640}{27132} = 0.134.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.134$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{14}^2 \cdot C_5^4}{27132} = \frac{91 \cdot 5}{27132} = 0.017,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{14}^1 \cdot C_5^5}{27132} = \frac{14 \cdot 1}{27132} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.152$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.134	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.017	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.152	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 13 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01, *для устаревшей* 0.06. *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{13}{56} = 0.232\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{43}{56} = 0.768\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.232 + 0.06 * 0.768 = 0.048\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A)*\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01*0.232}{0.048} = 0.048\,.$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.048 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.048 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: *11 белых шаров и 10 черных;*

2-й ящик: *10 белых шаров и 11 черных.*

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{21}^2} = 0.262\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{23}^4} = 0.410\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{21}^2} = 0.524\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{23}^4} = 0.410\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{21}^2} = 0.214\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{13}^2}{C_{23}^4} = 0.396\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.410 \cdot 0.262 + 0.410 \cdot 0.524 + 0.396 \cdot 0.214 = 0.407\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.410 \cdot 0.524}{0.407} = 0.528\,.$

Выборочная проверка вариант 26 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.407 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.528 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.520. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.520$, $q = 1 - p = 0.480$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0255 = 0.026$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.5200 * 0.0531 = 0.138$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2704 * 0.1106 = 0.299$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1406 * 0.2304 = 0.324$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0731 * 0.4800 = 0.175$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0380 * 1.000 = 0.038$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.026**	**0.138**	**0.299**	**0.324**	**0.175**	**0.038**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 2 * 0.299 + 3 * 0.324 + 4 * 0.175 + 5 * 0.038 = 2.598.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.520 = \mathbf{2.600}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.598)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 4 * 0.299 + 9 * 0.324 + 16 * 0.175 + 25 * 0.038 = 8.000.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 8.000 - (2.598)^2 = 1.250$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.520 * 0.480 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.598 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.44. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4310 *и* 4535.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.44$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4310$, $k_2 = 4535$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4310 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-90}{49.639} = -1.813,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4535 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = 2.720.$$

Поэтому $P_{10000}(4310, 4535) = \Phi(2.720) - \Phi(-1.813) = \Phi(2.720) + \Phi(1.813)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.720) = 0.4967 \quad \text{и} \quad \Phi(1.813) = 0.4649.$$

Окончательно, $P_{10000}(4310, 4535) = 0.4967 + 0.4649 = 0.9616$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.813 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.720 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9616 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ — число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ — вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ — число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 411 *и* 469 *(вероятность* P_1*)*

2) между 401 *и* 479 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 411 = 469 - 440 = 29$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 29) \geq 1 - \frac{246.4}{29^2} = 0.707.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 401 = 479 - 440 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 39) \geq 1 - \frac{246.4}{39^2} = 0.838.$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.707 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.838 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	4	5	8	9	12	$\sum$
вероятность p_i	0.013	0.069	0.150	0.474	0.244	0.050	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \dots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.013 + 4 * 0.069 + 5 * 0.150 + 8 * 0.474 + 9 * 0.244 + 12 * 0.050 =$$

$$= 7.640 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.640)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \dots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.013 + 4^2 * 0.069 + 5^2 * 0.150 + 8^2 * 0.474 + 9^2 * 0.244 + 12^2 * 0.050 =$$

$$= 62.206 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 62.206 - 7.640^2 = 3.836 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.959 .$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.836 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

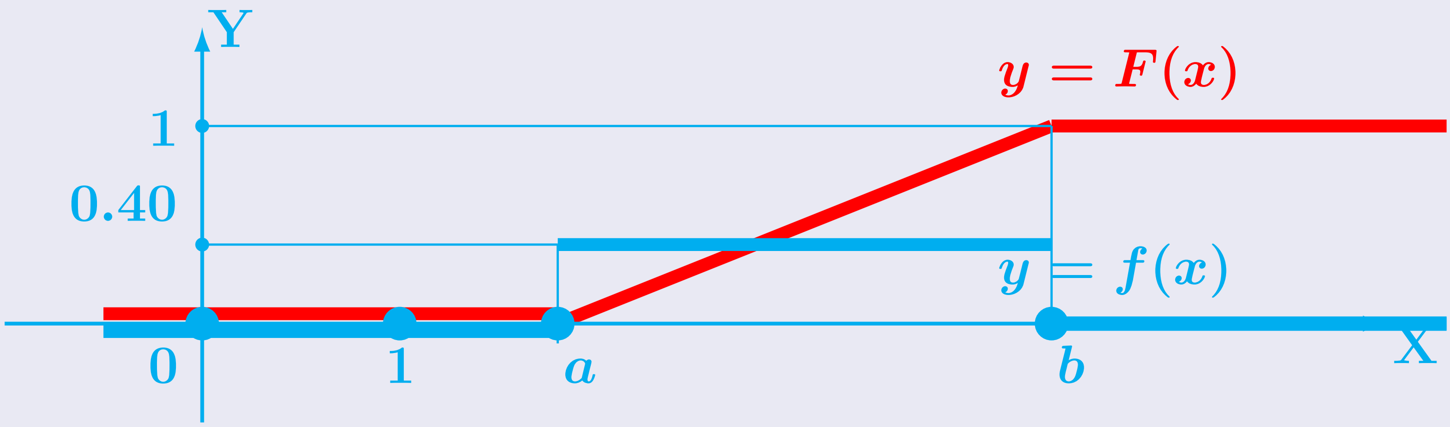

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.8}{2} = 3.05$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(2.0) = \frac{3.7-1.8}{2.5} - \frac{2.0-1.8}{2.5} = 0.760 - 0.080 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 26 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $1.6 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.6-2.8}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.3} = 0.85$,

$$\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = \int_{1.6}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.85) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.85) = 0.3023 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = 0.3023 + 0.3238 = 0.6261$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.85 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6261 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.10 = 0.14$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.10 = 0.16$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	**0.14**	**0.16**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 17 * 0.60 = \boxed{15.000}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 231.000 - (15.000)^2 = \boxed{6.000}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.14 + 4*0.16 + 5*0.15 + 8*0.55 = \boxed{5.930}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 41.650 - (5.930)^2 = \boxed{6.485}$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.930 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.485 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=12}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X\|_{Y=5=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X\|_{Y=5=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 12 * 0.333 + 17 * 0.667 = 15.335$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 17^2 * 0.667 - (15.335)^2 = 5.553$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	5	8
12	0.04	0.06	0.05	0.25
17	0.10	0.10	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$$ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	5	8
вероятность q_j этого значения	0.100	0.150	0.125	0.625

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 5 * 0.125 + 8 * 0.625 = 6.325$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 5^2 * 0.125 + 8^2 * 0.625 - (6.325)^2 = 5.619$.

Выборочная проверка вариант 26 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи	15.335	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи	5.553	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи	6.325	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.619	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**5**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.930$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 6.485$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} & = \\
&= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 5 * 0.05 + 12 * 8 * 0.25 & + \\
&+ \ 17 * 1 * 0.10 + 17 * 4 * 0.10 + 17 * 5 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 & = \\
&= 88.160 .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{88.160 - 15.000 * 5.930}{\sqrt{6.000 * 6.485}} = -0.127 .$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 88.160 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.127 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C(1.1\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (1.1\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.792 + 1.680 \cdot y - 0.022 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.770 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.770\,y + \frac{1.400}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.770\,y + 0.7000\,y^2\big)\Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.770 \cdot 0.8 + 0.7000 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.770 \cdot 0.2 + 0.7000 \cdot 0.2^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(1.0640 - 0.1820\big) = 0.8820\,C\,.$$

Значит, $0.8820 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.8820} = 1.134$,

$$f(x, y) = 1.134 * (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.247}_{A}\, x + \underbrace{1.587}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.247\,x + 1.587\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.134	Клик		
формат 1.23, $A =$ введи	1.247	Клик		
формат 1.23, $B =$ введи	1.587	Клик		

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \leq x \leq 1.2$, $0.2 \leq y \leq 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.247\,x + 1.587\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \leq x \leq 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (1.247 \cdot x + 1.587 \cdot y)\,dy = \left(1.247 \cdot x \cdot y + 1.587 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 1.247 \cdot x \cdot 0.8 + 1.587 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.247 \cdot x \cdot 0.2 - 1.587 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.748} \cdot x + \boxed{0.476}\,,$$

и если $0.2 \leq y \leq 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (1.247 \cdot x + 1.587 \cdot y)\,dx = \left(1.247 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.587 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 1.247 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.587 \cdot 1.2 \cdot y - 1.247 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 1.587 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{1.587} \cdot y + \boxed{0.873}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.748}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.476}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \leq x \leq 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.587}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{0.873}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \leq y \leq 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.748\,x + 0.476\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.748\,x^2 + 0.476\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.748\,\tfrac{x^3}{3} + 0.476\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.774 - 0.012 = 0.762,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(1.587\,y + 0.873\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.587\,y^2 + 0.873\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(1.587\,\tfrac{y^3}{3} + 0.873\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.550 - 0.022 = 0.528,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.748\,x + 0.476\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.748\,x^3 + 0.476\,x^2\big)\,dx - 0.581 = \big(0.748\,\tfrac{x^4}{4} + 0.476\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.581 =$$

$$= 0.662 - 0.002 - 0.581 = 0.079,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.587\,y + 0.873\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.587\,y^3 + 0.873\,y^2\big)\,dy - 0.279 = \big(1.587\,\tfrac{x^4}{4} + 0.873\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.279 =$$

$$= 0.312 - 0.003 - 0.279 = 0.030.$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 16

формат 1.23,	$A_1 =$ введи	0.748	Клик	
формат 1.23,	$B_1 =$ введи	0.476	Клик	
формат 1.23,	$A_2 =$ введи	1.587	Клик	
формат 1.23,	$B_2 =$ введи	0.873	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(X) =$ введи	0.762	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.528	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(X) =$ введи	0.079	Клик	
формат 1.234,	$\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.030	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.247\,x + 1.587\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.762, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.528, \quad \mathbb{D}(X) = 0.079, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.030$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.247\,x + 1.587\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} \big(1.247\,x^2 y + 1.587\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.247\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 1.587\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.247\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 1.587\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.715\,y + 1.111\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.715 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.111 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.418 - 0.017 = 0.401\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.401 - 0.762 \cdot 0.528}{\sqrt{0.079 \cdot 0.030}} = -0.027\,.$$

Выборочная проверка вариант 26 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.401 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.027 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{13}^{5} = 154440\,.$ $C_{13}^{5} = 1287\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.134\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.152\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.048\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.048\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.407\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.528\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.598\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.813\,.$ $x_2 = 2.720\,.$ $P = 0.9616\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.707\,.$ $P_2 = 0.838\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.640\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.836\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.7) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.85\,.$ $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = 0.6261\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.930\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.485\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 15.335\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.325\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 5.553\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.619\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 88.160\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.127\,.$

Задача 15. $C = 1.134\,,$ $f(x, y) = 1.247 \cdot x + 1.587\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.748 \cdot x + 0.476\,,$ $f_2(y) = 1.587 \cdot y + 0.873\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.762\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.528\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.079\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.030\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.401\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.027\,.$

возврат огл

Вариант 27

возврат огл

Задача 1

Найти $7!\,,\ A^{6}_{12}\,,\ C^{6}_{12}\,.$

Решение

$7! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}\ .$

$A^{6}_{12} = \underbrace{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 7}_{6\ \text{множителей}} = \boxed{665280}\,.$

$C^{6}_{12} = \frac{12\cdot 11\cdot \ldots \cdot 7}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{924}\,.$

Выборочная проверка вариант 27 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A^{6}_{12} =$ введи 665280 Клик

формат abcd, $C^{6}_{12} =$ введи 924 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 6 *черных шаров. Наудачу извлекается* 7 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{7} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 50388.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 286 \cdot 15 = 4290.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{4290}{50388} = 0.085.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.085$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{50388} = \frac{78 \cdot 6}{50388} = 0.009$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{50388} = \frac{13 \cdot 1}{50388} = 0.000$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.094$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 2

формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.085	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.009	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.094	Клик	

Задача 3

В тире имеется 67 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.08 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{67} = 0.179\,,\quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{55}{67} = 0.821\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,,\quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.179 + 0.08 * 0.821 = 0.067\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.179}{0.067} = 0.027\,.$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.067 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.027 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 11 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{11}^2}{C_{21}^2} = 0.262; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{26}^4} = 0.402;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{11}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{21}^2} = 0.524; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{15}^2}{C_{26}^4} = 0.386;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{21}^2} = 0.214; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{16}^2}{C_{26}^4} = 0.361;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.402 \cdot 0.262 + 0.386 \cdot 0.524 + 0.361 \cdot 0.214 = 0.385.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.386 \cdot 0.524}{0.385} = 0.525$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.385 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.525 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 =$ 2.402.

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 =$ **2.400**.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 =$ 1.250 .
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 =$ **1.248**.

Выборочная проверка вариант 27 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.45 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4395 *и* 4626 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ — число независимых испытаний,
$p = 0.45$ — вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.55$,
$k_1 = 4395$, $k_2 = 4626$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4395 - 4500}{\sqrt{2475.0}} = \frac{-105}{49.749} = -2.111 \, ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4626 - 4500}{\sqrt{2475.0}} = 2.533 \, .$$

Поэтому $P_{10000}(4395, 4626) = \Phi(2.533) - \Phi(-2.111) = \Phi(2.533) + \Phi(2.111)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.533) = 0.4941 \quad \text{и} \quad \Phi(2.111) = 0.4821 \, .$$

Окончательно, $P_{10000}(4395, 4626) = 0.4941 + 0.4821 = 0.9762$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.111 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.533 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9762 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.450$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 421 *и* 479 *(вероятность* P_1*)*

2) между 409 *и* 491 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.450 = 450$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.450 * (1 - 0.450) = 247.5.$$

1. Берем $\varepsilon = 450 - 421 = 479 - 450 = 29$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 450| < 29) \geq 1 - \frac{247.5}{29^2} = 0.706.$$

2. Берем $\varepsilon = 450 - 409 = 491 - 450 = 41$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 450| < 41) \geq 1 - \frac{247.5}{41^2} = 0.853.$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.706 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.853 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	4	5	8	10	13	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.025 + 4 * 0.106 + 5 * 0.175 + 8 * 0.449 + 10 * 0.207 + 13 * 0.038 =$$

$$= 7.505 \,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.505)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.025 + 4^2 * 0.106 + 5^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 10^2 * 0.207 + 13^2 * 0.038 =$$

$$= 62.029 \,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 62.029 - 7.505^2 = 5.704 \,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.388 \,.$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.505 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.704 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

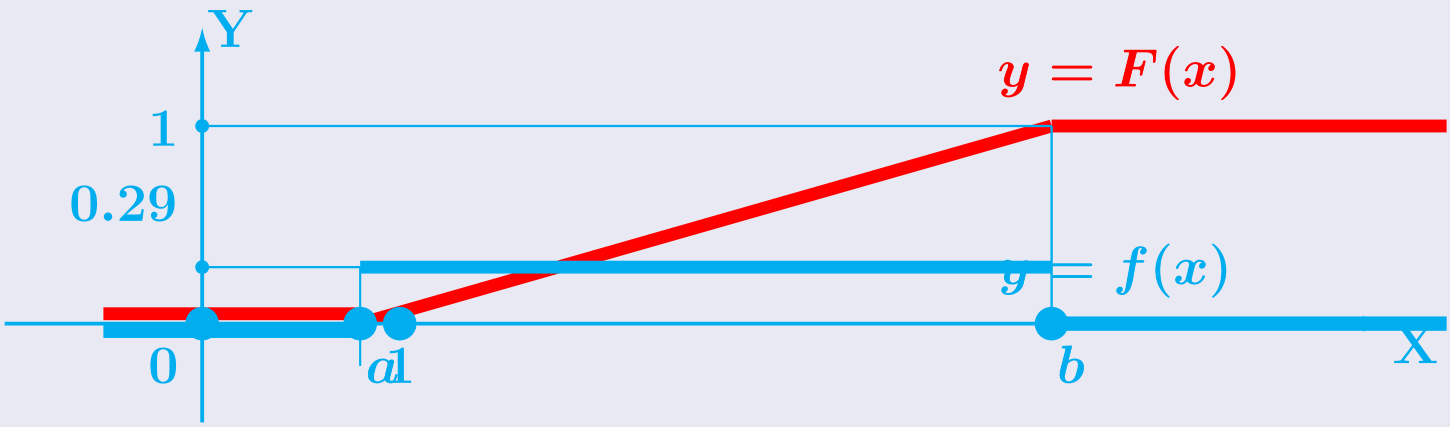

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.8}{2} = 2.55$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.8)^2}{12} = 1.021$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.010$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.3) = \frac{3.7-0.8}{3.5} - \frac{1.3-0.8}{3.5} = 0.829 - 0.143 = 0.686$

Выборочная проверка вариант 27 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) =$ введи 0.686 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $0.9 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.8^2}} = \dfrac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{0.9-2.8}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.8} = 0.61$,

$$\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9) = \int_{0.9}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.61) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.61) = 0.2291 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9) = 0.2291 + 0.3554 = 0.5845$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.61 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5845 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**13**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4}$ – сумма по строке i таблицы.

значение y_j случайной величины Y	**2**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = p_{1k} + p_{2k}$ – сумма по столбцу k таблицы.

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.10 + 0.10 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.10 = 0.16$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.10 = 0.14$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**13**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**2**	**4**	**5**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.16**	**0.14**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 17 * 0.60 = \boxed{15.400}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 241.000 - (15.400)^2 = \boxed{3.840}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.16+4*0.14+5*0.15+8*0.55 = \boxed{6.030}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 41.830 - (6.030)^2 = \boxed{5.469}$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.400 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.840 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 6.030 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.469 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	2	4	5	8
13	0.06	0.04	0.05	0.25
17	0.10	0.10	0.10	0.30

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=5}$ *и* $Y|_{X=13}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	13	17
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,,\quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=5=y_3}$	13	17
вероятность p_i этого значения	0.333	0.667

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 13 * 0.333 + 17 * 0.667 = 15.668$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 13^2 * 0.333 + 17^2 * 0.667 - (15.668)^2 = 3.554$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	4	5	8
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	5	8
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150+4*0.100+5*0.125+8*0.625 = 6.325$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150+4^2*0.100+5^2*0.125+8^2*0.625-(6.325)^2 = 5.319$.

Выборочная проверка вариант 27 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 15.668 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) =$ введи 3.554 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 6.325 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) =$ введи 5.319 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**4**	**5**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.10**	**0.10**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X и Y.

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.400$, $\mathbb{M}(Y) = 6.030$, $\mathbb{D}(X) = 3.840$, $\mathbb{D}(Y) = 5.469$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 13 * 2 * 0.06 + 13 * 4 * 0.04 + 13 * 5 * 0.05 + 13 * 8 * 0.25 + \\ &+ 17 * 2 * 0.10 + 17 * 4 * 0.10 + 17 * 5 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 = \\ &= 92.390 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{92.390 - 15.400 * 6.030}{\sqrt{3.840 * 5.469}} = -0.103 .$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 92.390 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.103 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.2}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C(1.1\,x + 1.9\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (1.1\,x + 1.9\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.2}^{0.8} (0.792 + 2.280 \cdot y - 0.088 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.2}^{0.8} (0.704 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.704\, y + \frac{1.520}{2}\, y^2 \Big) \Big|_{0.2}^{0.8} = C\big(0.704\, y + 0.7600\, y^2\big) \Big|_{0.2}^{0.8} =$$

$$= C \Big(\big(0.704 \cdot 0.8 + 0.7600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.704 \cdot 0.2 + 0.7600 \cdot 0.2^2\big) \Big) =$$

$$= C\big(1.0496 - 0.1712\big) = 0.8784\, C\,.$$

Значит, $0.8784 \cdot C = 1$, $\quad C = \frac{1}{0.8784} = 1.138$,

$$f(x, y) = 1.138 * (1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{1.252}_{A}\, x + \underbrace{2.163}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.252\, x + 2.163\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи 1.138 Клик

формат 1.23, $A =$ введи 1.252 Клик

формат 1.23, $B =$ введи 2.163 Клик

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.252\,x + 2.163\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.2}^{0.8} (1.252 \cdot x + 2.163 \cdot y)\,dy = \left(1.252 \cdot x \cdot y + 2.163 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.2}^{y=0.8} =$$

$$= 1.252 \cdot x \cdot 0.8 + 2.163 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.252 \cdot x \cdot 0.2 - 2.163 \cdot \frac{0.2^2}{2} = \boxed{0.751} \cdot x + \boxed{0.649}\,,$$

и если $0.2 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (1.252 \cdot x + 2.163 \cdot y)\,dx = \left(1.252 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.163 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 1.252 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.163 \cdot 1.2 \cdot y - 1.252 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 2.163 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{1.730} \cdot y + \boxed{0.801}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{0.751}_{A_1} \cdot x + \underbrace{0.649}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{1.730}_{A_2} \cdot y + \underbrace{0.801}_{B_2}\,, & \text{если } 0.2 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.2 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.751\,x + 0.649\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.751\,x^2 + 0.649\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.751\,\tfrac{x^3}{3} + 0.649\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.068 = 0.832,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y \cdot \big(1.730\,y + 0.801\big)\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.730\,y^2 + 0.801\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(1.730\,\tfrac{y^3}{3} + 0.801\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.552 - 0.021 = 0.531,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.751\,x + 0.649\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.751\,x^3 + 0.649\,x^2\big)\,dx - 0.692 = \big(0.751\,\tfrac{x^4}{4} + 0.649\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.692 =$$

$$= 0.763 - 0.019 - 0.692 = 0.052,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.2}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.730\,y + 0.801\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.730\,y^3 + 0.801\,y^2\big)\,dy - 0.282 = \big(1.730\,\tfrac{x^4}{4} + 0.801\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} - 0.282 =$$

$$= 0.314 - 0.003 - 0.282 = 0.029.$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.751	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.649	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	1.730	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	0.801	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.832	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.531	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.052	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.029	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.2 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.252\,x + 2.163\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.832, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.531, \quad \mathbb{D}(X) = 0.052, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.029$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.252\,x + 2.163\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8}\int_{0.4}^{1.2} \big(1.252\,x^2y + 2.163\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(1.252\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.163\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.2}^{0.8} \big(1.252\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.163\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.2}^{0.8} \big(0.694\,y + 1.384\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.694 \cdot \tfrac{y^2}{2} + 1.384 \cdot \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{0.8} = 0.458 - 0.018 = 0.440\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.440 - 0.832\cdot 0.531}{\sqrt{0.052\cdot 0.029}} = -0.046\,.$$

Выборочная проверка вариант 27 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.440 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.046 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{12}^{6} = 665280\,.$ $C_{12}^{6} = 924\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.085\,.$ $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = 0.094\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.067\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.027\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.385\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.525\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.111\,.$ $x_2 = 2.533\,.$ $P = 0.9762\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.706\,.$ $P_2 = 0.853\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.505\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.704\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.021\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) = 0.686\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.61\,.$ $\mathbb{P}(0.9 \le X \le 3.9) = 0.5845\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.400\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 6.030\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.840\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.469\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=5=y_3}) = 15.668\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 6.325\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=5=y_3}) = 3.554\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.319\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 92.390\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.103\,.$

Задача 15. $C = 1.138\,,$ $f(x, y) = 1.252 \cdot x + 2.163\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.751 \cdot x + 0.649\,,$ $f_2(y) = 1.730 \cdot y + 0.801\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.832\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.531\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.052\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.029\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.440\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.046\,.$

возврат огл

Вариант 28

возврат огл

Задача 1

Найти $6!$, A_{11}^{4}, C_{11}^{4}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{11}^{4} = \underbrace{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 8}_{4 \text{ множителей}} = \boxed{7920}$.

$C_{11}^{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} = \boxed{330}$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{11}^{4} =$ введи 7920 Клик

формат abcd, $C_{11}^{4} =$ введи 330 Клик

Задача 2

В ящике 12 *белых и* 4 *черных шаров. Наудачу извлекается* 5 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

$$\text{среди } 5 \text{ извлеченных шаров оказалось ровно } k \text{ белых,}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 5$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$.
Всего извлекается 5 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^5 = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot \ldots \cdot 5} = 4368.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{12}^3 \cdot C_4^2 = 220 \cdot 6 = 1320.$$

(извлекаем 3 шара из 12 белых и 2 из 4 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1320}{4368} = 0.302.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.302$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{N(A_2)}{N} = \dfrac{C_{12}^2 \cdot C_4^3}{4368} = \dfrac{66 \cdot 4}{4368} = 0.060$,

$\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{N(A_1)}{N} = \dfrac{C_{12}^1 \cdot C_4^4}{4368} = \dfrac{12 \cdot 1}{4368} = 0.003$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 5 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 4).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.365$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.302 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.060 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.003 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.365 Клик

Задача 3

В тире имеется 46 *винтовок, из них* 11 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.05 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{11}{46} = 0.239\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{35}{46} = 0.761\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.05\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.239 + 0.05 * 0.761 = 0.040\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.239}{0.040} = 0.060\,.$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.040 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.060 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 9 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1 *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*

2 *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{22}^2} = 0.338; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_9^2}{C_{21}^4} = 0.397;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_9^1}{C_{22}^2} = 0.506; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{10}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{22}^2} = 0.156; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^4} = 0.414;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.397 \cdot 0.338 + 0.414 \cdot 0.506 + 0.414 \cdot 0.156 = 0.408.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.414 \cdot 0.506}{0.408} = 0.513$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.408 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.513 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.440*. Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X*, равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.440$, $q = 1 - p = 0.560$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0550 = 0.055$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4400 * 0.0983 = 0.216$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1936 * 0.1756 = 0.340$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0852 * 0.3136 = 0.267$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0375 * 0.5600 = 0.105$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0165 * 1.000 = 0.017$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.055**	**0.216**	**0.340**	**0.267**	**0.105**	**0.017**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 2 * 0.340 + 3 * 0.267 + 4 * 0.105 + 5 * 0.017 = 2.202.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.440 = \mathbf{2.200}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.202)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.055 + 1 * 0.216 + 4 * 0.340 + 9 * 0.267 + 16 * 0.105 + 25 * 0.017 = 6.084.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 6.084 - (2.202)^2 = 1.235$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.440 * 0.560 = \mathbf{1.232}$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.202 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.235 Клик

Задача 6

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.38. *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3710 *и* 3914.

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$,
где $n=10000$ – число независимых испытаний,
$p=0.38$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q=1-p=0.62$,
$k_1=3710$, $k_2=3914$, и

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{3710-3800}{\sqrt{2356.0}}=\frac{-90}{48.539}=-1.854,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{3914-3800}{\sqrt{2356.0}}=2.349.$$

Поэтому $P_{10000}(3710,3914)=\Phi(2.349)-\Phi(-1.854)=\Phi(2.349)+\Phi(1.854)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.349)=0.4904 \quad \text{и} \quad \Phi(1.854)=0.4678.$$

Окончательно, $P_{10000}(3710,3914)=0.4904+0.4678=0.9582$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 6

формат 1.23, $x_1=$ введи -1.854 Клик

формат 1.23, $x_2=$ введи 2.349 Клик

формат 1.23, $P=$ введи 0.9582 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007 . *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 4 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 4$ – число успехов.

Поэтому $P_4 = \frac{7.0^4 \cdot e^{-7.0}}{4!} = \frac{2401.00 \cdot 0.000912}{24} = 0.091238$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 7

формат 1.23, $P_4 =$ введи 0.091238 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.410$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 383 *и* 437 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 372 *и* 448 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.410 = 410$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.410 * (1 - 0.410) = 241.9.$$

1. Берем $\varepsilon = 410 - 383 = 437 - 410 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 410| < 27) \geq 1 - \frac{241.9}{27^2} = 0.668.$$

2. Берем $\varepsilon = 410 - 372 = 448 - 410 = 38$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 410| < 38) \geq 1 - \frac{241.9}{38^2} = 0.832.$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.668 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.832 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	4	6	7	9	13	$\sum$
вероятность p_i	0.047	0.164	0.207	0.401	0.158	0.023	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.047 + 4 * 0.164 + 6 * 0.207 + 7 * 0.401 + 9 * 0.158 + 13 * 0.023 =$$

$$= 6.520 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.520)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.047 + 4^2 * 0.164 + 6^2 * 0.207 + 7^2 * 0.401 + 9^2 * 0.158 + 13^2 * 0.023 =$$

$$= 46.598 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 46.598 - 6.520^2 = 4.088 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.022 .$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.520 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 4.088 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1.8 \\ \frac{1}{1.5} \text{ при } 1.8 \le x \le 3.3 \\ 0 \text{ при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{1.5} \text{ при } 1.8 \le x \le 3.3 \\ 1 \text{ при } x > 3.3 \end{cases},$$

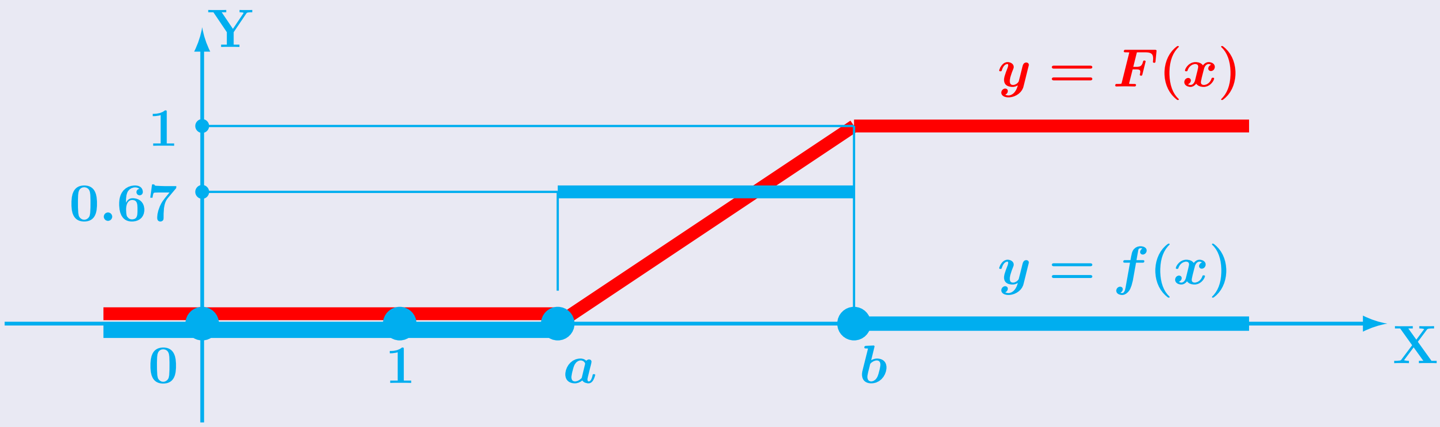

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+1.8}{2} = 2.55$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-1.8)^2}{12} = 0.188$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.434$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(2.0) = \frac{3.0-1.8}{1.5} - \frac{2.0-1.8}{1.5} = 0.800 - 0.133 = 0.667$

Выборочная проверка вариант 28 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.188 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.0) =$ введи 0.667 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 0.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2)$ *попадания в интервал* $1.9 \leq x \leq 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{0.8{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*0.8^2}} = \frac{1}{0.8{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.8{*}\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{1.28}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 0.64$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.9-2.8}{0.8} = -1.13$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{0.8} = 0.50$,

$$\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = \int_{1.9}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.50) - \Phi(-1.13)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.50) = 0.1915 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.13) = -\Phi(1.13) = -0.3708\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.1915 + 0.3708 = 0.5623$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.13 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.50 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5623 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ **и** $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**11**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	**0.18**	**0.12**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 11 * 0.40 + 17 * 0.60 = 14.600$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 221.800 - (14.600)^2 = 8.640$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18+3*0.12+6*0.20+8*0.50 = 5.740$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 40.460 - (5.740)^2 = 7.512$.

Выборочная проверка вариант 28 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 14.600 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 8.640 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.740 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 7.512 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=11}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$*.*

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**11**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 11 * 0.500 + 17 * 0.500 = 14.000$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 11^2 * 0.500 + 17^2 * 0.500 - (14.000)^2 = 9.000$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=11=x_1}$	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}}$ – в знаменателе сумма по строке 1 таблицы

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.04+0.06+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=11=x_1}$	**1**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 1 * 0.100 + 3 * 0.150 + 6 * 0.250 + 8 * 0.500 =$ 6.050 ,

$\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 3^2 * 0.150 + 6^2 * 0.250 + 8^2 * 0.500 - (6.050)^2 =$ 5.848 .

Выборочная проверка вариант 28 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 14.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) =$ введи 9.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 6.050 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) =$ введи 5.848 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**3**	**6**	**8**
11	**0.04**	**0.06**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y .

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 14.600$, $\mathbb{M}(Y) = 5.740$, $\mathbb{D}(X) = 8.640$, $\mathbb{D}(Y) = 7.512$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 11 * 1 * 0.04 + 11 * 3 * 0.06 + 11 * 6 * 0.10 + 11 * 8 * 0.20 + \\ &+ 17 * 1 * 0.14 + 17 * 3 * 0.06 + 17 * 6 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 = \\ &= 83.060 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{83.060 - 14.600 * 5.740}{\sqrt{8.640 * 7.512}} = -0.092 .$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 83.060 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.092 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C \cdot (1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} C(1.1\,x + 0.9\,y)\, dx\, dy = C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\int_{0.2}^{1.0}(1.1\,x + 0.9\,y)\, dx\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.9 \cdot xy\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0}\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}\Big(\big(1.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 0.9 \cdot 1.0 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 0.9 \cdot 0.2 \cdot y\big)\Big)dy =$$

$$= C\int_{0.4}^{0.8}(0.550 + 0.900 \cdot y - 0.022 - 0.180 \cdot y)dy = C\int_{0.4}^{0.8}(0.528 + 0.720 \cdot y)dy =$$

$$= C\Big(0.528\,y + \frac{0.720}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.528\,y + 0.3600\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.528 \cdot 0.8 + 0.3600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.528 \cdot 0.4 + 0.3600 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(0.6528 - 0.2688\big) = 0.3840\, C\,.$$

Значит, $0.3840 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.3840} = 2.604\,,$

$$f(x, y) = 2.604 * (1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y) = \underbrace{2.865}_{A}\, x + \underbrace{2.344}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.865\,x + 2.344\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.604	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.865	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.344	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.865\,x + 2.344\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (2.865 \cdot x + 2.344 \cdot y)\,dy = \left(2.865 \cdot x \cdot y + 2.344 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 2.865 \cdot x \cdot 0.8 + 2.344 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 2.865 \cdot x \cdot 0.4 - 2.344 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{1.146} \cdot x + \boxed{0.563}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.0} (2.865 \cdot x + 2.344 \cdot y)\,dx = \left(2.865 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.344 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} =$$

$$= 2.865 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 2.344 \cdot 1.0 \cdot y - 2.865 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 2.344 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{1.875} \cdot y + \boxed{1.375}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.146}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.563}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.875}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.375}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x \cdot \big(1.146\,x + 0.563\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.0} \big(1.146\,x^2 + 0.563\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(1.146\,\tfrac{x^3}{3} + 0.563\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} = 0.664 - 0.014 = 0.650,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(1.875\,y + 1.375\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(1.875\,y^2 + 1.375\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(1.875\,\tfrac{y^3}{3} + 1.375\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.760 - 0.150 = 0.610,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.0} x^2 \cdot \big(1.146\,x + 0.563\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.0} \big(1.146\,x^3 + 0.563\,x^2\big)\,dx - 0.423 = \big(1.146\,\tfrac{x^4}{4} + 0.563\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.0} - 0.423 =$$

$$= 0.474 - 0.002 - 0.423 = 0.049,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(1.875\,y + 1.375\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(1.875\,y^3 + 1.375\,y^2\big)\,dy - 0.372 = \big(1.875\,\tfrac{x^4}{4} + 1.375\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.372 =$$

$$= 0.427 - 0.041 - 0.372 = 0.014.$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	1.146	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.563	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	1.875	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.375	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.650	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.610	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.049	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.014	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 0.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.865\,x + 2.344\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.650, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.610, \quad \mathbb{D}(X) = 0.049, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.014$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X\cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0} x\cdot y\cdot\big(2.865\,x + 2.344\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\int_{0.2}^{1.0}\big(2.865\,x^2y + 2.344\,y^2x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8}\big(2.865\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.344\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8}\big(2.865\,\tfrac{x^3}{3}\,y + 2.344\,y^2\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.2}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.8}\big(0.947\,y + 1.125\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.947\cdot\tfrac{y^2}{2} + 1.125\cdot\tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.495 - 0.100 = 0.395\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.395 - 0.650\cdot 0.610}{\sqrt{0.049\cdot 0.014}} = -0.057\,.$$

Выборочная проверка вариант 28 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 0.395 Клик

формат 1.234, $r(X\cdot Y) =$ введи -0.057 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{11}^{4} = 7920\,.$ $C_{11}^{4} = 330\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.302\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.365\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.040\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.060\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.408\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.513\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.202\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.235\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.854\,.$ $x_2 = 2.349\,.$ $P = 0.9582\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091238\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.668\,.$ $P_2 = 0.832\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.520\,.$ $\mathbb{D}(X) = 4.088\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.188\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.0) = 0.667\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.13\,.$ $x_2 = 0.50\,.$ $\mathbb{P}(1.9 \leq X \leq 3.2) = 0.5623\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 14.600\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.740\,.$ $\mathbb{D}(X) = 8.640\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 7.512\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 14.000\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=11=x_1}) = 6.050\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 9.000\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=11=x_1}) = 5.848\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 83.060\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.092\,.$

Задача 15. $C = 2.604\,,$ $f(x, y) = 2.865 \cdot x + 2.344\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.146 \cdot x + 0.563\,,$ $f_2(y) = 1.875 \cdot y + 1.375\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.650\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.610\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.049\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.014\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.395\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.057\,.$

возврат огл

Вариант 29

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_{10}^{5}, C_{10}^{5}.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_{10}^{5} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{30240}$.

$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{252}$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_{10}^{5} =$ введи 30240 Клик

формат abcd, $C_{10}^{5} =$ введи 252 Клик

Задача 2

В ящике 11 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 16. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{16}^{6} = \frac{16 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 8008.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{11}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 165 \cdot 10 = 1650.$$

(извлекаем 3 шара из 11 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{1650}{8008} = 0.206.$$

2. Данное событие $A_{\le 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.206$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{11}^{2} \cdot C_5^4}{8008} = \frac{55 \cdot 5}{8008} = 0.034$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{11}^{1} \cdot C_5^5}{8008} = \frac{11 \cdot 1}{8008} = 0.001$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\le 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.241$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи 0.206 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи 0.034 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи 0.001 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи 0.241 Клик

Задача 3

В тире имеется 57 *винтовок, из них* 10 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.06 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{10}{57} = 0.175\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{47}{57} = 0.825\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.175 + 0.06 * 0.825 = 0.051\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.175}{0.051} = 0.034\,.$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.051 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.034 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 9 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 12 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{22}^2} = 0.338\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{24}^4} = 0.410\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_9^1}{C_{22}^2} = 0.506\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{13}^2}{C_{24}^4} = 0.404\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_9^2}{C_{22}^2} = 0.156\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{24}^4} = 0.385\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) = \\ &= 0.410\cdot 0.338 + 0.404\cdot 0.506 + 0.385\cdot 0.156 = 0.403\,.\end{aligned}$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.404\cdot 0.506}{0.403} = 0.507$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.403 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.507 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.400. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.400$, $q = 1 - p = 0.600$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0778 = 0.078$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4000 * 0.1296 = 0.259$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.1600 * 0.2160 = 0.346$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.0640 * 0.3600 = 0.230$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0256 * 0.6000 = 0.077$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0102 * 1.000 = 0.010$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.078**	**0.259**	**0.346**	**0.230**	**0.077**	**0.010**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 2 * 0.346 + 3 * 0.230 + 4 * 0.077 + 5 * 0.010 = 1.999.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.400 = \mathbf{2.000}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (1.999)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.078 + 1 * 0.259 + 4 * 0.346 + 9 * 0.230 + 16 * 0.077 + 25 * 0.010 = 5.195.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 5.195 - (1.999)^2 = 1.199$.

Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.400 * 0.600 = \mathbf{1.200}$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 1.999 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.199 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.40 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 3895 *и* 4105 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.40$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.60$,
$k_1 = 3895$, $k_2 = 4105$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3895 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = \frac{-105}{48.990} = -2.143 \,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4105 - 4000}{\sqrt{2400.0}} = 2.143 \,.$$

Поэтому $P_{10000}(3895, 4105) = \Phi(2.143) - \Phi(-2.143) = \Phi(2.143) + \Phi(2.143)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.143) = 0.4838 \quad \text{и} \quad \Phi(2.143) = 0.4838 \,.$$

Окончательно, $P_{10000}(3895, 4105) = 0.4838 + 0.4838 = 0.9676$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.143 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.143 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9676 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0007. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0007 = 7.0$,

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0007$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{7.0^5 \cdot e^{-7.0}}{5!} = \frac{16807.00 \cdot 0.000912}{120} = 0.127733$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.127733 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.420$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 393 *и* 447 *(вероятность* P_1*)*

2) между 380 *и* 460 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.420 = 420$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.420 * (1 - 0.420) = 243.6.$$

1. Берем $\varepsilon = 420 - 393 = 447 - 420 = 27$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 420| < 27) \geq 1 - \frac{243.6}{27^2} = 0.666.$$

2. Берем $\varepsilon = 420 - 380 = 460 - 420 = 40$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 420| < 40) \geq 1 - \frac{243.6}{40^2} = 0.848.$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.666 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.848 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	4	6	7	10	14	$\sum$
вероятность p_i	0.073	0.221	0.231	0.345	0.116	0.014	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.073 + 4 * 0.221 + 6 * 0.231 + 7 * 0.345 + 10 * 0.116 + 14 * 0.014 =$$

$$= 6.187 .$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (6.187)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.073 + 4^2 * 0.221 + 6^2 * 0.231 + 7^2 * 0.345 + 10^2 * 0.116 + 14^2 * 0.014 =$$

$$= 43.393 .$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 43.393 - 6.187^2 = 5.114 ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.261 .$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 6.187 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.114 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 3.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.0$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 3.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 0 & \text{при } x > 3.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{2.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 3.3 \\ 1 & \text{при } x > 3.3 \end{cases},$$

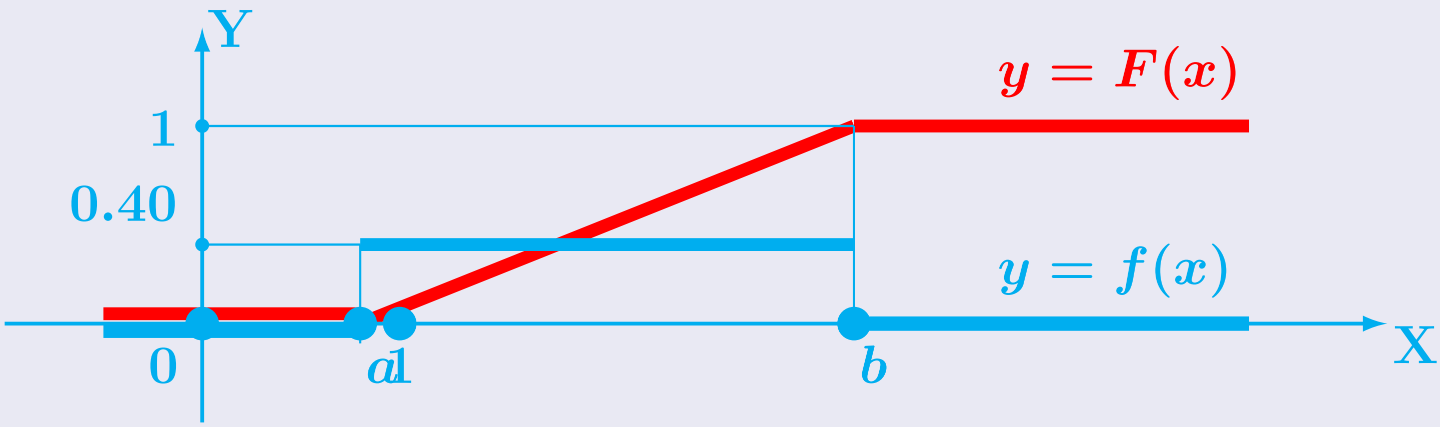

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{3.3+0.8}{2} = 2.05$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(3.3-0.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) = F(3.0) - F(1.3) = \frac{3.0-0.8}{2.5} - \frac{1.3-0.8}{2.5} = 0.880 - 0.200 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 29 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.0) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2)$ *попадания в интервал* $1.2 \le x \le 3.2$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{1.2-2.8}{1.3} = -1.23$ и $x_2 = \frac{3.2-2.8}{1.3} = 0.31$,

$$\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = \int_{1.2}^{3.2} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.31) - \Phi(-1.23)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.31) = 0.1217 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.23) = -\Phi(1.23) = -0.3907\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.2 \le X \le 3.2) = 0.1217 + 0.3907 = 0.5124$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.23 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.31 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5124 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X и Y, найти $\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i случайной величины X	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.10 + 0.20 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20, \quad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.10 + 0.10 = 0.20, \quad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.20 + 0.30 = 0.50$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i случайной величины X	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.40**	**0.60**

значение y_j случайной величины Y	**2**	**3**	**6**	**8**
вероятность q_j этого значения	**0.20**	**0.10**	**0.20**	**0.50**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 17 * 0.60 = 15.000$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 231.000 - (15.000)^2 = 6.000$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20 + 3*0.10 + 6*0.20 + 8*0.50 = 5.900$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 40.900 - (5.900)^2 = 6.090$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.900 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 6.090 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ ***и*** $Y\rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.10+0.10} = 0.500$

значение x_i **случайной величины** $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	**0.500**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.500 + 17 * 0.500 = \boxed{14.500}\,,$

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.500 + 17^2 * 0.500 - (14.500)^2 = \boxed{6.250}\,,$

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	3	6	8
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.10}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.250$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.20}{0.06+0.04+0.10+0.20} = 0.500$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	2	3	6	8
вероятность q_j этого значения	**0.150**	**0.100**	**0.250**	**0.500**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 2*0.150+3*0.100+6*0.250+8*0.500 = 6.100$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 2^2*0.150+3^2*0.100+6^2*0.250+8^2*0.500-(6.100)^2 = 5.290$.

Выборочная проверка вариант 29 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 14.500 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3})=$ введи 6.250 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1})=$ введи 6.100 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1})=$ введи 5.290 Клик

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**2**	**3**	**6**	**8**
12	**0.06**	**0.04**	**0.10**	**0.20**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X{\cdot}Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X){\cdot}\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.900$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 6.090$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(X\cdot Y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\
&= 12*2*0.06 + 12*3*0.04 + 12*6*0.10 + 12*8*0.20 + \\
&+ 17*2*0.14 + 17*3*0.06 + 17*6*0.10 + 17*8*0.30 = \\
&= 88.100 \,.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{88.100 - 15.000*5.900}{\sqrt{6.000*6.090}} = -0.066 \,.$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 88.100 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.066 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} C(1.1\, x + 1.4\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.0} (1.1\, x + 1.4\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \left(\left(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\right) \Big|_{x=0.4}^{x=1.0} \right) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \left(\left(1.1 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 1.4 \cdot 1.0 \cdot y\right) - \left(1.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.4 \cdot 0.4 \cdot y\right) \right) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} (0.550 + 1.400 \cdot y - 0.088 - 0.560 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.8} (0.462 + 0.840 \cdot y) dy =$$

$$= C \left(0.462\, y + \frac{0.840}{2}\, y^2\right) \Big|_{0.4}^{0.8} = C \left(0.462\, y + 0.4200\, y^2\right) \Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C \Big(\left(0.462 \cdot 0.8 + 0.4200 \cdot 0.8^2\right) - \left(0.462 \cdot 0.4 + 0.4200 \cdot 0.4^2\right) \Big) =$$

$$= C \left(0.6384 - 0.2520\right) = 0.3864\, C\,.$$

Значит, $0.3864 \cdot C = 1\,, \quad C = \frac{1}{0.3864} = 2.588\,,$

$$f(x, y) = 2.588 * (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{2.847}_{A}\, x + \underbrace{3.623}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.847\, x + 3.623\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	2.588	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	2.847	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	3.623	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.847\,x + 3.623\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.0$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (2.847 \cdot x + 3.623 \cdot y)\,dy = \left(2.847 \cdot x \cdot y + 3.623 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 2.847 \cdot x \cdot 0.8 + 3.623 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 2.847 \cdot x \cdot 0.4 - 3.623 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{1.139} \cdot x + \boxed{0.870}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.0} (2.847 \cdot x + 3.623 \cdot y)\,dx = \left(2.847 \cdot \frac{x^2}{2} + 3.623 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} =$$

$$= 2.847 \cdot \frac{1.0^2}{2} + 3.623 \cdot 1.0 \cdot y - 2.847 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 3.623 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.174} \cdot y + \boxed{1.196}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{1.139}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.870}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.0\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.0\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.174}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.196}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x \cdot \big(1.139\,x + 0.870\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.0} \big(1.139\,x^2 + 0.870\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(1.139\,\tfrac{x^3}{3} + 0.870\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} = 0.815 - 0.094 = \boxed{0.721},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.174\,y + 1.196\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.174\,y^2 + 1.196\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.174\,\tfrac{y^3}{3} + 1.196\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.754 - 0.142 = \boxed{0.612},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.0} x^2 \cdot \big(1.139\,x + 0.870\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.0} \big(1.139\,x^3 + 0.870\,x^2\big)\,dx - 0.520 = \big(1.139\,\tfrac{x^4}{4} + 0.870\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.0} - 0.520 =$$

$$= 0.575 - 0.026 - 0.520 = \boxed{0.029},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.174\,y + 1.196\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.174\,y^3 + 1.196\,y^2\big)\,dy - 0.375 = \big(2.174\,\tfrac{x^4}{4} + 1.196\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.375 =$$

$$= 0.427 - 0.039 - 0.375 = \boxed{0.013}.$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	1.139	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.870	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.174	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.196	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.721	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.612	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.029	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.0$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2.847\,x + 3.623\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.721, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.612, \quad \mathbb{D}(X) = 0.029, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} x \cdot y \cdot \big(2.847\,x + 3.623\,y\big)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.0} \big(2.847\,x^2 y + 3.623\,y^2 x\big)\,dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \Big(2.847\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.623\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \Big(2.847\,\frac{x^3}{3}\,y + 3.623\,y^2\,\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.0} dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(0.888\,y + 1.522\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \Big(0.888 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.522 \cdot \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.544 - 0.104 = 0.440\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.440 - 0.721 \cdot 0.612}{\sqrt{0.029 \cdot 0.013}} = -0.064\,.$$

Выборочная проверка вариант 29 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи	0.440	Клик	
формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи	-0.064	Клик	

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{10}^{5} = 30240\,.$ $C_{10}^{5} = 252\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.206\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.241\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.051\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.034\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.403\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.507\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 1.999\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.199\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.143\,.$ $x_2 = 2.143\,.$ $P = 0.9676\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.127733\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.666\,.$ $P_2 = 0.848\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 6.187\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.114\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.0) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.23\,.$ $x_2 = 0.31\,.$ $\mathbb{P}(1.2 \leq X \leq 3.2) = 0.5124\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.900\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 6.090\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 14.500\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.100\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 6.250\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.290\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 88.100\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.066\,.$

Задача 15. $C = 2.588\,,$ $f(x,y) = 2.847 \cdot x + 3.623\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 1.139 \cdot x + 0.870\,,$ $f_2(y) = 2.174 \cdot y + 1.196\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.721\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.612\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.029\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.440\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.064\,.$

Вариант 30

Задача 1

Найти $6!$, A_{13}^{5}, C_{13}^{5}.

Решение

$6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = \boxed{720}$.

$A_{13}^{5} = \underbrace{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}_{5 \text{ множителей}} = \boxed{154440}$.

$C_{13}^{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \boxed{1287}$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 1

формат abcd, $6! =$ введи 720 Клик

формат abcd, $A_{13}^{5} =$ введи 154440 Клик

формат abcd, $C_{13}^{5} =$ введи 1287 Клик

Задача 2

В ящике 14 *белых и* 5 *черных шаров. Наудачу извлекается* 6 *шаров. Найти вероятность того, что*

1 *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*

2 *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 6 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 6 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{6} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 14}{1 \cdot \ldots \cdot 6} = 27132.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{14}^{3} \cdot C_{5}^{3} = 364 \cdot 10 = 3640.$$

(извлекаем 3 шара из 14 белых и 3 из 5 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{3640}{27132} = 0.134.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.134$ (см. п. 1),

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{14}^{2} \cdot C_{5}^{4}}{27132} = \frac{91 \cdot 5}{27132} = 0.017,$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{14}^{1} \cdot C_{5}^{5}}{27132} = \frac{14 \cdot 1}{27132} = 0.001,$$

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 6 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 5).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.152$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.134	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.017	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.001	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.152	Клик	

Задача 3

В тире имеется 56 *винтовок, из них* 13 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01 *, для устаревшей* 0.06 *. Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{13}{56} = 0.232\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{43}{56} = 0.768\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.06\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.232 + 0.06 * 0.768 = 0.048\,.\end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.232}{0.048} = 0.048\,.$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.048 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.048 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 11 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 : оба перемещенных шара — белые,
H_2 : из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3 : оба перемещенных шара — черные,

A : среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{23}^2} = 0.308; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{11}^2}{C_{23}^4} = 0.410;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{23}^2} = 0.514; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{23}^4} = 0.410;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{23}^2} = 0.178; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{13}^2}{C_{23}^4} = 0.396;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A) \cdot \mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.410 \cdot 0.308 + 0.410 \cdot 0.514 + 0.396 \cdot 0.178 = 0.408 .$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{H_2}(A) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.410 \cdot 0.514}{0.408} = 0.517$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.408 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.517 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.520. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.520$, $q = 1 - p = 0.480$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0255 = 0.026$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.5200 * 0.0531 = 0.138$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2704 * 0.1106 = 0.299$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1406 * 0.2304 = 0.324$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0731 * 0.4800 = 0.175$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0380 * 1.000 = 0.038$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.026**	**0.138**	**0.299**	**0.324**	**0.175**	**0.038**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n =$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 2 * 0.299 + 3 * 0.324 + 4 * 0.175 + 5 * 0.038 = 2.598.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.520 = \mathbf{2.600}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.598)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + \cdots + x_n^2p_n =$$

$$= 0 * 0.026 + 1 * 0.138 + 4 * 0.299 + 9 * 0.324 + 16 * 0.175 + 25 * 0.038 = 8.000.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 8.000 - (2.598)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.520 * 0.480 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.598 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.44 *. По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4310 *и* 4535 *.*

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.44$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.56$,
$k_1 = 4310$, $k_2 = 4535$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4310 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = \frac{-90}{49.639} = -1.813 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4535 - 4400}{\sqrt{2464.0}} = 2.720 .$$

Поэтому $P_{10000}(4310, 4535) = \Phi(2.720) - \Phi(-1.813) = \Phi(2.720) + \Phi(1.813)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.720) = 0.4967 \quad \text{и} \quad \Phi(1.813) = 0.4649 .$$

Окончательно, $P_{10000}(4310, 4535) = 0.4967 + 0.4649 = 0.9616$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.813 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.720 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9616 Клик

Задача 7

Партия содержит $10\,000$ *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008. *По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 5 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 5$ – число успехов.

Поэтому $P_5 = \frac{8.0^5 \cdot e^{-8.0}}{5!} = \frac{32768.00 \cdot 0.000335}{120} = 0.091477$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 7

формат 1.23, $P_5 =$ введи 0.091477 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.440$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 411 *и* 469 *(вероятность* P_1*)*

2) между 401 *и* 479 *(вероятность* P_2*).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.440 = 440$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.440 * (1 - 0.440) = 246.4.$$

1. Берем $\varepsilon = 440 - 411 = 469 - 440 = 29$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 440| < 29) \geq 1 - \frac{246.4}{29^2} = 0.707.$$

2. Берем $\varepsilon = 440 - 401 = 479 - 440 = 39$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 440| < 39) \geq 1 - \frac{246.4}{39^2} = 0.838.$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.707 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.838 Клик

Задача 9

Случайная величина X *задана рядом распределения*

значение x_i	2	4	6	8	9	13	$\sum$
вероятность p_i	0.013	0.069	0.150	0.474	0.244	0.050	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.013 + 4 * 0.069 + 6 * 0.150 + 8 * 0.474 + 9 * 0.244 + 13 * 0.050 =$$

$$= \boxed{7.840}\,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.840)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.013 + 4^2 * 0.069 + 6^2 * 0.150 + 8^2 * 0.474 + 9^2 * 0.244 + 13^2 * 0.050 =$$

$$= \boxed{65.106}\,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 65.106 - 7.840^2 = \boxed{3.640}\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.908\,.$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.840 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.640 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $1.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $2.0 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 1.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{1}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1.8 \\ \frac{x-1.8}{2.5} & \text{при } 1.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

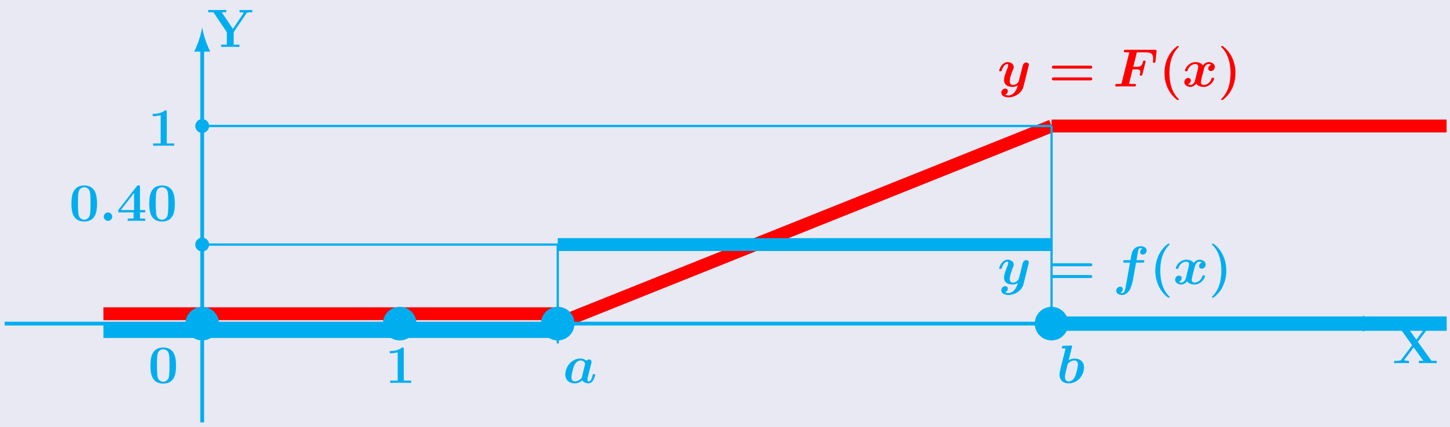

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+1.8}{2} = 3.05$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-1.8)^2}{12} = 0.521$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 0.722$,

$\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(2.0) = \frac{3.7-1.8}{2.5} - \frac{2.0-1.8}{2.5} = 0.760 - 0.080 = 0.680$

Выборочная проверка вариант 30 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 3.05 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 0.521 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(2.0 \le X \le 3.7) =$ введи 0.680 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9)$ *попадания в интервал* $1.6 \le x \le 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,

плотность $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.3^2}} = \dfrac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.3*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{3.38}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 1.69$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \dfrac{1.6-2.8}{1.3} = -0.92$ и $x_2 = \dfrac{3.9-2.8}{1.3} = 0.85$,

$$\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = \int_{1.6}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.85) - \Phi(-0.92)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.85) = 0.3023 \quad \text{и} \quad \Phi(-0.92) = -\Phi(0.92) = -0.3238\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(1.6 \le X \le 3.9) = 0.3023 + 0.3238 = 0.6261$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -0.92 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.85 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.6261 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.04 + 0.06 + 0.05 + 0.25 = 0.40$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$$

$$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.04 + 0.14 = 0.18, \qquad q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.06 + 0.06 = 0.12$$
$$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15, \qquad q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**12**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**1**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	**0.18**	**0.12**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 12 * 0.40 + 17 * 0.60 = \boxed{15.000}$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 231.000 - (15.000)^2 = \boxed{6.000}$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 1*0.18 + 4*0.12 + 6*0.15 + 8*0.55 = \boxed{5.960}$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 42.700 - (5.960)^2 = \boxed{7.178}$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 6.000 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 5.960 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 7.178 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	**1**	**4**	**6**	**8**
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. *Определить ряды распределения для случайных величин* $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=12}$, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**12**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 12 * 0.333 + 17 * 0.667 = 15.335$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 12^2 * 0.333 + 17^2 * 0.667 - (15.335)^2 = 5.553$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	6	8
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.04+0.06+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=12=x_1}$	1	4	6	8
вероятность q_j этого значения	**0.100**	**0.150**	**0.125**	**0.625**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 1 * 0.100 + 4 * 0.150 + 6 * 0.125 + 8 * 0.625 = 6.450$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 1^2 * 0.100 + 4^2 * 0.150 + 6^2 * 0.125 + 8^2 * 0.625 - (6.450)^2 = 5.398$.

Выборочная проверка вариант 30 задача 13

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	15.335	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	5.553	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	6.450	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{D}(Y\|_{X=12=x_1}) =$ введи	5.398	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	1	4	6	8
12	**0.04**	**0.06**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.000$, $\mathbb{M}(Y) = 5.960$, $\mathbb{D}(X) = 6.000$, $\mathbb{D}(Y) = 7.178$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 12 * 1 * 0.04 + 12 * 4 * 0.06 + 12 * 6 * 0.05 + 12 * 8 * 0.25 + \\ &+ 17 * 1 * 0.14 + 17 * 4 * 0.06 + 17 * 6 * 0.10 + 17 * 8 * 0.30 = \\ &= 88.420 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{88.420 - 15.000 * 5.960}{\sqrt{6.000 * 7.178}} = -0.149 .$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 88.420 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.149 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)$, где C — постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} C(1.1\,x + 1.4\,y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\int_{0.2}^{1.2} (1.1\,x + 1.4\,y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.4 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.2}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.4 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \frac{0.2^2}{2} + 1.4 \cdot 0.2 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} (0.792 + 1.680 \cdot y - 0.022 - 0.280 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.8} (0.770 + 1.400 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.770\,y + \frac{1.400}{2}\,y^2\Big)\Big|_{0.4}^{0.8} = C\big(0.770\,y + 0.7000\,y^2\big)\Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C\Big(\big(0.770 \cdot 0.8 + 0.7000 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.770 \cdot 0.4 + 0.7000 \cdot 0.4^2\big)\Big) =$$

$$= C\big(1.0640 - 0.4200\big) = 0.6440\,C\,.$$

Значит, $0.6440 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.6440} = \boxed{1.553}$,

$$f(x, y) = 1.553 * (1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y) = \underbrace{1.708}_{A}\, x + \underbrace{2.174}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.708\,x + 2.174\,y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.553	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.708	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.174	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.708\,x + 2.174\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.2 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (1.708 \cdot x + 2.174 \cdot y)\,dy = \left(1.708 \cdot x \cdot y + 2.174 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 1.708 \cdot x \cdot 0.8 + 2.174 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.708 \cdot x \cdot 0.4 - 2.174 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.683} \cdot x + \boxed{0.522}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.2}^{1.2} (1.708 \cdot x + 2.174 \cdot y)\,dx = \left(1.708 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.174 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.2}^{x=1.2} =$$

$$= 1.708 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.174 \cdot 1.2 \cdot y - 1.708 \cdot \frac{0.2^2}{2} - 2.174 \cdot 0.2 \cdot y = \boxed{2.174} \cdot y + \boxed{1.196}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.683}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.522}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.2 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.2 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.174}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.196}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x \cdot \big(0.683\,x + 0.522\big)\,dx = \int_{0.2}^{1.2} \big(0.683\,x^2 + 0.522\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.683\,\tfrac{x^3}{3} + 0.522\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} = 0.769 - 0.012 = \boxed{0.757},$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.174\,y + 1.196\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.174\,y^2 + 1.196\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.174\,\tfrac{y^3}{3} + 1.196\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.754 - 0.142 = \boxed{0.612},$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.2}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.683\,x + 0.522\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.2}^{1.2} \big(0.683\,x^3 + 0.522\,x^2\big)\,dx - 0.573 = \big(0.683\,\tfrac{x^4}{4} + 0.522\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.2}^{1.2} - 0.573 =$$

$$= 0.655 - 0.002 - 0.573 = \boxed{0.080},$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.174\,y + 1.196\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.174\,y^3 + 1.196\,y^2\big)\,dy - 0.375 = \big(2.174\,\tfrac{x^4}{4} + 1.196\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.375 =$$

$$= 0.427 - 0.039 - 0.375 = \boxed{0.013}.$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.683	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.522	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.174	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.196	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.757	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.612	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.080	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.2 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.4 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.708\,x + 2.174\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.757, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.612, \quad \mathbb{D}(X) = 0.080, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} x \cdot y \cdot (1.708\,x + 2.174\,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.2}^{1.2} (1.708\,x^2 y + 2.174\,y^2 x)\,dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \left(1.708\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.174\,y^2\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0.2}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \left(1.708\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.174\,y^2\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0.2}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.8} (0.979\,y + 1.522\,y^2)\,dy =$$

$$= \left(0.979 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.522 \cdot \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0.4}^{0.8} = 0.573 - 0.111 = 0.462\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.462 - 0.757 \cdot 0.612}{\sqrt{0.080 \cdot 0.013}} = -0.040\,.$$

Выборочная проверка вариант 30 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.462 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.040 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $6! = 720\,.$ $A_{13}^{5} = 154440\,.$ $C_{13}^{5} = 1287\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.134\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.152\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.048\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.048\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.408\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.517\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.598\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -1.813\,.$ $x_2 = 2.720\,.$ $P = 0.9616\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.091477\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.707\,.$ $P_2 = 0.838\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.840\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.640\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 3.05\,.$ $\mathbb{D}(X) = 0.521\,.$ $\mathbb{P}(2.0 \leq X \leq 3.7) = 0.680\,.$

Задача 11. $x_1 = -0.92\,.$ $x_2 = 0.85\,.$ $\mathbb{P}(1.6 \leq X \leq 3.9) = 0.6261\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.000\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 5.960\,.$ $\mathbb{D}(X) = 6.000\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 7.178\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 15.335\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=12=x_1}) = 6.450\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 5.553\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=12=x_1}) = 5.398\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 88.420\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.149\,.$

Задача 15. $C = 1.553\,,$ $f(x, y) = 1.708 \cdot x + 2.174\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.683 \cdot x + 0.522\,,$ $f_2(y) = 2.174 \cdot y + 1.196\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.757\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.612\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.080\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.462\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.040\,.$

возврат огл

Вариант 31

возврат огл

Задача 1

Найти $7!$, A_{12}^{6}, C_{12}^{6}.

Решение

$7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = \boxed{5040}$.

$A_{12}^{6} = \underbrace{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7}_{6 \text{ множителей}} = \boxed{665280}$.

$C_{12}^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = \boxed{924}$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 1

формат abcd, $7! =$ введи 5040 Клик

формат abcd, $A_{12}^{6} =$ введи 665280 Клик

формат abcd, $C_{12}^{6} =$ введи 924 Клик

Задача 2

В ящике 13 *белых и* 6 *черных шаров. Наудачу извлекается* 7 *шаров. Найти вероятность того, что*

1. *среди извлеченных шаров — ровно* 3 *белых,*
2. *не более* 3 *белых.*

Решение

1. Через A_k обозначим событие:

среди 7 извлеченных шаров оказалось ровно k белых,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Нас интересует событие A_3 и вероятность $\mathbb{P}(A_3)$. Всего извлекается 7 шаров из общего числа 19. Поэтому общее число равновероятных исходов равно

$$N = C_{19}^{7} = \frac{19 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot \ldots \cdot 7} = 50388.$$

Число благоприятных исходов равно

$$N(A_3) = C_{13}^{3} \cdot C_{6}^{4} = 286 \cdot 15 = 4290.$$

(извлекаем 3 шара из 13 белых и 4 из 6 черных). Теперь по правилу 4

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{4290}{50388} = 0.085.$$

2. Данное событие $A_{\leq 3} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$, причем события A_0, A_1, A_2, A_3 попарно несовместны. Поэтому $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$.

$\mathbb{P}(A_3) = 0.085$ (см. п. 1),

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{N(A_2)}{N} = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{6}^{5}}{50388} = \frac{78 \cdot 6}{50388} = 0.009$,

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N(A_1)}{N} = \frac{C_{13}^{1} \cdot C_{6}^{6}}{50388} = \frac{13 \cdot 1}{50388} = 0.000$,

$\mathbb{P}(A_0) = 0$, так как среди 7 извлеченных шаров обязательно есть хотя бы один белый (черных шаров всего 6).

Окончательно $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) + 0 = 0.094$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 2

формат 1.23, $\mathbb{P}(A_3) =$ введи	0.085	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_2) =$ введи	0.009	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_1) =$ введи	0.000	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) =$ введи	0.094	Клик	

Задача 3

В тире имеется 67 *винтовок, из них* 12 *современных, остальные устаревшие. Вероятность осечки для современной винтовки равна* 0.01, *для устаревшей* 0.08. *Стрелок берет наудачу винтовку и делает выстрел.*

1 *Найти вероятность осечки.*

2 *Осечка произошла. Найти вероятность того, что была взята современная винтовка.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1 – взята современная винтовка,

H_2 – взята устаревшая винтовка,

A – произошла осечка.

По условию,

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{12}{67} = 0.179\,, \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{55}{67} = 0.821\,,$

$\mathbb{P}_{H_1}(A) = 0.01\,, \quad \mathbb{P}_{H_2}(A) = 0.08\,.$

По формуле полной вероятности правила 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A) * \mathbb{P}(H_2) = \\ &= 0.01 * 0.179 + 0.08 * 0.821 = 0.067\,. \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса правила 14,

$$\mathbb{P}_A(H_1) = \frac{\mathbb{P}_{H_1}(A) * \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.01 * 0.179}{0.067} = 0.027\,.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 3

формат 1.234, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.067 Клик

формат 1.234, $\mathbb{P}_A(H_1) =$ введи 0.027 Клик

Задача 4

Два ящика с шарами содержат:

1-й ящик: 13 белых шаров и 10 черных;

2-й ящик: 10 белых шаров и 14 черных.

Из 1-го ящика наудачу извлекаются 2 шара и перекладываются во второй ящик. Затем из 2-го ящика наудачу извлекаются 4 шара.

1. *Найти вероятность того, что среди этих 4-х шаров ровно 2 белых.*
2. *Среди этих 4х шаров оказалось ровно 2 белых. Найти вероятность того, что из 2-х перемещенных шаров один был белый а другой черный.*

Решение

1. Обозначим события:

H_1: оба перемещенных шара — белые,
H_2: из 2-х перемещенных шаров один белый а другой черный,
H_3: оба перемещенных шара — черные,

A: среди 4-х шаров, извлеченных из 2-го ящика, ровно 2 белых.

Требуется найти $\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}_A(H_2)$.
Вычисляем вспомогательные вероятности, по методу задачи 2.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{N(H_1)}{N} = \frac{C_{13}^2}{C_{23}^2} = 0.308\,; \qquad \mathbb{P}_{H_1}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{14}^2}{C_{26}^4} = 0.402\,;$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{N(H_2)}{N} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{23}^2} = 0.514\,; \qquad \mathbb{P}_{H_2}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{15}^2}{C_{26}^4} = 0.386\,;$$

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{N(H_3)}{N} = \frac{C_{10}^2}{C_{23}^2} = 0.178\,; \qquad \mathbb{P}_{H_3}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{16}^2}{C_{26}^4} = 0.361\,;$$

1. По формуле полной вероятности правила 13,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{H_1}(A)\cdot\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}_{H_3}(A)\cdot\mathbb{P}(H_3) =$$
$$= 0.402\cdot 0.308 + 0.386\cdot 0.514 + 0.361\cdot 0.178 = 0.386\,.$$

2. По ф-ле Байеса правила 14, $\mathbb{P}_A(H_2) = \frac{\mathbb{P}_{H_2}(A)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.386\cdot 0.514}{0.386} = 0.514\,.$

Выборочная проверка вариант 31 задача 4

формат 1.23, $\mathbb{P}(A) =$ введи 0.386 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}_A(H_2) =$ введи 0.514 Клик

Задача 5

Вероятность отказа прибора в ходе испытания равна 0.480. *Производится* 5 *испытаний. По формуле Бернулли, составить ряд распределения случайной величины* X, *равной числу отказов прибора. Найти* $\mathbb{M}(X)$ *и* $\mathbb{D}(X)$ *из ряда распределения и сравнить с теоретическими значениями.*

Решение

По формуле правила 15 требуется вычислить значения $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $n = 5$, $p = 0.480$, $q = 1 - p = 0.520$.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 * 1.000 * 0.0380 = 0.038$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 * 0.4800 * 0.0731 = 0.175$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 * 0.2304 * 0.1406 = 0.324$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 * 0.1106 * 0.2704 = 0.299$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 * 0.0531 * 0.5200 = 0.138$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 * 0.0255 * 1.000 = 0.026$$

значение	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$
вероятность	**0.038**	**0.175**	**0.324**	**0.299**	**0.138**	**0.026**	**1.000**

По формуле правила 19, $\mathbb{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n =$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 2 * 0.324 + 3 * 0.299 + 4 * 0.138 + 5 * 0.026 = 2.402.$$

Точное значение по правилу 23 $\mathbb{M}(X) = np = 5 * 0.480 = \mathbf{2.400}$.

По правилу 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (2.402)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \cdots + x_n^2 p_n =$$

$$= 0 * 0.038 + 1 * 0.175 + 4 * 0.324 + 9 * 0.299 + 16 * 0.138 + 25 * 0.026 = 7.020.$$

Значит, $\mathbb{D}(X) = 7.020 - (2.402)^2 = 1.250$.
Точное значение по правилу 23: $\mathbb{D}(X) = npq = 5 * 0.480 * 0.520 = \mathbf{1.248}$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 5

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.402 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.250 Клик

Задача 6

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.45 . *По формуле Лапласа, найти вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено между* 4395 *и* 4626 .

Решение

По интегральной формуле Лапласа правила 17, $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,
где $n = 10000$ – число независимых испытаний,
$p = 0.45$ – вероятность успеха в одном испытании,
$q = 1 - p = 0.55$,
$k_1 = 4395$, $k_2 = 4626$, и

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4395 - 4500}{\sqrt{2475.0}} = \frac{-105}{49.749} = -2.111 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4626 - 4500}{\sqrt{2475.0}} = 2.533 .$$

Поэтому $P_{10000}(4395, 4626) = \Phi(2.533) - \Phi(-2.111) = \Phi(2.533) + \Phi(2.111)$.
По таблице стр. 32,

$$\Phi(2.533) = 0.4941 \quad \text{и} \quad \Phi(2.111) = 0.4821 .$$

Окончательно, $P_{10000}(4395, 4626) = 0.4941 + 0.4821 = 0.9762$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 6

формат 1.23, $x_1 =$ введи -2.111 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 2.533 Клик

формат 1.23, $P =$ введи 0.9762 Клик

Задача 7

Партия содержит 10 000 *деталей. Вероятность брака равна* 0.0008 *. По формуле распределения Пуассона, найти вероятность того, что партия содержит ровно* 6 *бракованых деталей.*

Решение

По формуле правила 24, $P_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где

$\lambda = np = 10000 \cdot 0.0008 = 8.0\,,$

$n = 10000$ – число независимых испытаний,

$p = 0.0008$ – вероятность успеха в одном испытании,

$k = 6$ – число успехов.

Поэтому $P_6 = \frac{8.0^6 \cdot e^{-8.0}}{6!} = \frac{262144.00 \cdot 0.000335}{720} = 0.121970$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 7

формат 1.23, $P_6 =$ введи 0.121970 Клик

Задача 8

Партия содержит 1000 *деталей. Вероятность брака равна* $p = 0.450$. *По формуле Чебышева, оценить вероятность того, что число бракованых деталей будет заключено:*

1) между 421 *и* 479 *(вероятность* P_1 *)*

2) между 409 *и* 491 *(вероятность* P_2 *).*

Решение

Через X обозначим случайную величину числа бракованных деталей. По формуле правила 26,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{M}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

По формуле правила 23, $\mathbb{M}(X) = np = 1000 * 0.450 = 450$ и

$$\mathbb{D}(X) = npq = 1000 * 0.450 * (1 - 0.450) = 247.5.$$

1. Берем $\varepsilon = 450 - 421 = 479 - 450 = 29$.

$$P_1 = \mathbb{P}(|X - 450| < 29) \geq 1 - \frac{247.5}{29^2} = 0.706.$$

2. Берем $\varepsilon = 450 - 409 = 491 - 450 = 41$.

$$P_2 = \mathbb{P}(|X - 450| < 41) \geq 1 - \frac{247.5}{41^2} = 0.853.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 8

формат 1.23, $P_1 =$ введи 0.706 Клик

формат 1.23, $P_2 =$ введи 0.853 Клик

Задача 9

Случайная величина X задана рядом распределения

значение x_i	2	4	6	8	10	14	$\sum$
вероятность p_i	0.025	0.106	0.175	0.449	0.207	0.038	1.000

Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$,
дисперсию $\mathbb{D}(X)$,
среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Решение

По формуле правила 19,

$$\mathbb{M}(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + \cdots + x_n * p_n =$$

$$= 2 * 0.025 + 4 * 0.106 + 6 * 0.175 + 8 * 0.449 + 10 * 0.207 + 14 * 0.038 =$$

$$= \boxed{7.718}\,.$$

По ф-ле правила 20, $\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = M(X^2) - (7.718)^2$, где

$$\mathbb{M}(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 + x_3^2 * p_3 + \cdots + x_n^2 * p_n =$$

$$= 2^2 * 0.025 + 4^2 * 0.106 + 6^2 * 0.175 + 8^2 * 0.449 + 10^2 * 0.207 + 14^2 * 0.038 =$$

$$= \boxed{64.980}\,.$$

Значит,

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = 64.980 - 7.718^2 = \boxed{5.412}\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 2.326\,.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 9

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 7.718 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 5.412 Клик

Задача 10

Случайная величина X *распределена равномерно на отрезке* $0.8 \le x \le 4.3$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить графики этих функций.*
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7)$ *попадания в интервал* $1.3 \le x \le 3.7$.

Решение

По формулам правила 36, где $a = 0.8$ и $b = 4.3$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{1}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 0 & \text{при } x > 4.3 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0.8 \\ \frac{x-0.8}{3.5} & \text{при } 0.8 \le x \le 4.3 \\ 1 & \text{при } x > 4.3 \end{cases},$$

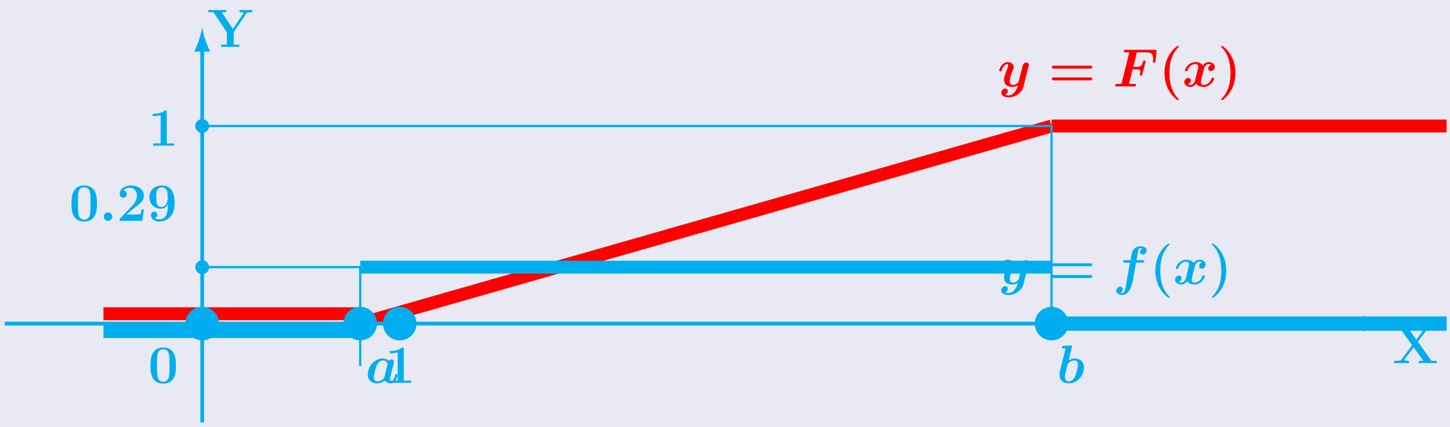

Рис.: Графики функций f и F:

$\mathbb{M}(X) = \frac{4.3+0.8}{2} = 2.55$, $\mathbb{D}(X) = \frac{(4.3-0.8)^2}{12} = 1.021$,

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)} = 1.010$,

$\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) = F(3.7) - F(1.3) = \frac{3.7-0.8}{3.5} - \frac{1.3-0.8}{3.5} = 0.829 - 0.143 = 0.686$

Выборочная проверка вариант 31 задача 10

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 2.55 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 1.021 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P}(1.3 \le X \le 3.7) =$ введи 0.686 Клик

Задача 11

Случайная величина X *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 2.8$, $\sigma = 1.8$. *Определить плотность* $f(x)$, *функцию распределения* $F(x)$, *и построить график функции* $y = f(x)$.
Найти математическое ожидание $\mathbb{M}(X)$, *дисперсию* $\mathbb{D}(X)$, *среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X)$.
Найти вероятность $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9)$ *попадания в интервал* $0.9 \leq x \leq 3.9$.

Решение

Согласно правилу 37,
плотность $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{2*1.8^2}} = \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}$,

функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1.8*\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-2.8)^2}{6.48}}\, dx\,,$$

$\mathbb{M}(X) = a = 2.8$, $\quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2 = 3.24$.

Согласно правилу 38, $x_1 = \frac{0.9-2.8}{1.8} = -1.06$ и $x_2 = \frac{3.9-2.8}{1.8} = 0.61$,

$$\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = \int_{0.9}^{3.9} f(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0.61) - \Phi(-1.06)\,.$$

По таблице стр. 32,

$$\Phi(0.61) = 0.2291 \quad \text{и} \quad \Phi(-1.06) = -\Phi(1.06) = -0.3554\,.$$

Поэтому $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = 0.2291 + 0.3554 = 0.5845$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 11

формат 1.23, $x_1 =$ введи -1.06 Клик

формат 1.23, $x_2 =$ введи 0.61 Клик

формат 1.23, $\mathbb{P} =$ введи 0.5845 Клик

Задача 12

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ **и** $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

Определить ряды распределения для самих СВ X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 28, ряды распределения для X и Y вычисляются так.

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	p_1	p_2

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4} - \text{сумма по строке } i \text{ таблицы.}$$

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = p_{1k} + p_{2k} - \text{сумма по столбцу } k \text{ таблицы.}$$

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.06 + 0.04 + 0.05 + 0.25 = 0.40$
$p_2 = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.14 + 0.06 + 0.10 + 0.30 = 0.60$

$q_1 = p_{11} + p_{21} = 0.06 + 0.14 = 0.20$, $q_2 = p_{12} + p_{22} = 0.04 + 0.06 = 0.10$
$q_3 = p_{13} + p_{23} = 0.05 + 0.10 = 0.15$, $q_4 = p_{14} + p_{24} = 0.25 + 0.30 = 0.55$

Окончательно заполняем таблицы

значение x_i **случайной величины** X	**13**	**17**
вероятность p_i **этого значения**	**0.40**	**0.60**

значение y_j **случайной величины** Y	**2**	**4**	**6**	**8**
вероятность q_j **этого значения**	**0.20**	**0.10**	**0.15**	**0.55**

Решение (продолжение)

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21:

$\mathbb{M}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 13 * 0.40 + 17 * 0.60 = 15.400$,

$\mathbb{D}(X) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 - (\mathbb{M}(X))^2 = 241.000 - (15.400)^2 = 3.840$,

$\mathbb{M}(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2 + y_3 \cdot q_3 + y_4 \cdot q_4 = 2*0.20+4*0.10+6*0.15+8*0.55 = 6.100$,

$\mathbb{D}(Y) = y_1^2 \cdot q_1 + y_2^2 \cdot q_2 + y_3^2 \cdot q_3 + y_4^2 \cdot q_4 - (\mathbb{M}(Y))^2 = 43.000 - (6.100)^2 = 5.790$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 12

формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи 15.400 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(X) =$ введи 3.840 Клик

формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи 6.100 Клик

формат 1.23, $\mathbb{D}(Y) =$ введи 5.790 Клик

Задача 13

Система 2х дискретных случайных величин задана таблицей

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить ряды распределения для случайных величин $X|_{Y=6}$ *и* $Y|_{X=13}$*, найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

По правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$ вычисляется так:

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**17**
вероятность p_i этого значения	p_1	p_2

$p_i = \frac{p_{i3}}{p_{13}+p_{23}}$ – в знаменателе сумма по столбцу 3 табл. задачи 12.

$p_1 = \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.05}{0.05+0.10} = 0.333\,, \quad p_2 = \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} = \frac{0.10}{0.05+0.10} = 0.667$

значение x_i случайной величины $X|_{Y=6=y_3}$	**13**	**17**
вероятность p_i этого значения	**0.333**	**0.667**

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 13 * 0.333 + 17 * 0.667 = 15.668$,

$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 13^2 * 0.333 + 17^2 * 0.667 - (15.668)^2 = 3.554$,

Решение (окончание)

Для той же таблицы

значения СВ $X \downarrow$ и $Y \rightarrow$	2	4	6	8
13	0.06	0.04	0.05	0.25
17	0.14	0.06	0.10	0.30

по правилу 29, ряд условного распределения для случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$ вычисляется так:

значение y_j случайной величины $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	6	8
вероятность q_j этого значения	q_1	q_2	q_3	q_4

$$q_k = \frac{p_{1k}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} \text{ — в знаменателе сумма по строке 1 таблицы}$$

$$q_1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.06}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.150$$

$$q_2 = \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.04}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.100$$

$$q_3 = \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.05}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.125$$

$$q_4 = \frac{p_{14}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}} = \frac{0.25}{0.06+0.04+0.05+0.25} = 0.625$$

значение y_j СВ $Y|_{X=13=x_1}$	2	4	6	8
вероятность q_j этого значения	0.150	0.100	0.125	0.625

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{D}$ вычисляем по формулам правил 19, 21 .

$\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 2*0.150 + 4*0.100 + 6*0.125 + 8*0.625 = 6.450$,

$\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 2^2*0.150 + 4^2*0.100 + 6^2*0.125 + 8^2*0.625 - (6.450)^2 = 5.098$.

Выборочная проверка вариант 31 задача 13

формат 1.23,	$\mathbb{M}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	15.668	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{D}(X\|_{Y=6=y_3}) =$ введи	3.554	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{M}(Y\|_{X=13=x_1}) =$ введи	6.450	Клик	
формат 1.23,	$\mathbb{D}(Y\|_{X=13=x_1}) =$ введи	5.098	Клик	

Задача 14

Система двух дискретных случайных величин X, Y *задана таблицей*

значения СВ $X\downarrow$ и $Y\rightarrow$	**2**	**4**	**6**	**8**
13	**0.06**	**0.04**	**0.05**	**0.25**
17	**0.14**	**0.06**	**0.10**	**0.30**

задачи 12. Определить коэффициент корреляции X *и* Y *.*

Решение

По формуле правла 30,

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X\cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\cdot\mathbb{D}(Y)}},$$

где $\mathbb{M}(X) = 15.400$, $\mathbb{M}(Y) = 6.100$, $\mathbb{D}(X) = 3.840$, $\mathbb{D}(Y) = 5.790$ (см. решение задачи 12), а

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \\ &= 13*2*0.06 + 13*4*0.04 + 13*6*0.05 + 13*8*0.25 + \\ &+ 17*2*0.14 + 17*4*0.06 + 17*6*0.10 + 17*8*0.30 = \\ &= 93.380 . \end{aligned}$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{93.380 - 15.400*6.100}{\sqrt{3.840*5.790}} = -0.119.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 14

формат 1.23, $\mathbb{M}(X\cdot Y) =$ введи 93.380 Клик

формат 1.23, $r(X,Y) =$ введи -0.119 Клик

Задача 15

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить двумерную плотность распределения* $f(x, y)$.

Решение

По условию $f(x, y) = C(1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)$, где C – постоянная, которую мы найдем из формулы правила 44, то есть

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C \cdot (1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y)\, dx\, dy = 1\,.$$

Вычисляем:

$$\int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} C(1.1\, x + 1.9\, y)\, dx\, dy = C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\int_{0.4}^{1.2} (1.1\, x + 1.9\, y)\, dx \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.9 \cdot xy\big) \Big|_{x=0.4}^{x=1.2} \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} \Big(\big(1.1 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 1.9 \cdot 1.2 \cdot y\big) - \big(1.1 \cdot \frac{0.4^2}{2} + 1.9 \cdot 0.4 \cdot y\big) \Big) dy =$$

$$= C \int_{0.4}^{0.8} (0.792 + 2.280 \cdot y - 0.088 - 0.760 \cdot y) dy = C \int_{0.4}^{0.8} (0.704 + 1.520 \cdot y) dy =$$

$$= C \Big(0.704\, y + \frac{1.520}{2}\, y^2\Big) \Big|_{0.4}^{0.8} = C \big(0.704\, y + 0.7600\, y^2\big) \Big|_{0.4}^{0.8} =$$

$$= C \Big(\big(0.704 \cdot 0.8 + 0.7600 \cdot 0.8^2\big) - \big(0.704 \cdot 0.4 + 0.7600 \cdot 0.4^2\big) \Big) =$$

$$= C \big(1.0496 - 0.4032\big) = 0.6464\, C\,.$$

Значит, $0.6464 \cdot C = 1$, $C = \frac{1}{0.6464} = 1.547$,

$$f(x, y) = 1.547 * (1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y) = \underbrace{1.702}_{A}\, x + \underbrace{2.939}_{B}\, y\,.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.702\, x + 2.939\, y\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x, y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 15

формат 1.23, $C =$ введи	1.547	Клик	
формат 1.23, $A =$ введи	1.702	Клик	
формат 1.23, $B =$ введи	2.939	Клик	

Задача 16

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить плотности распределения для составляющих* X *и* Y, *найти* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{D}$.

Решение

Функция двумерной плотности см. задача 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.702\,x + 2.939\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника.} \end{cases}$$

Согласно формулам правила 42, если $0.4 \le x \le 1.2$, то

$$f_1(x) = \int_{0.4}^{0.8} (1.702 \cdot x + 2.939 \cdot y)\, dy = \left(1.702 \cdot x \cdot y + 2.939 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0.4}^{y=0.8} =$$

$$= 1.702 \cdot x \cdot 0.8 + 2.939 \cdot \frac{0.8^2}{2} - 1.702 \cdot x \cdot 0.4 - 2.939 \cdot \frac{0.4^2}{2} = \boxed{0.681} \cdot x + \boxed{0.705}\,,$$

и если $0.4 \le y \le 0.8$, то

$$f_2(y) = \int_{0.4}^{1.2} (1.702 \cdot x + 2.939 \cdot y)\, dx = \left(1.702 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.939 \cdot x \cdot y\right)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} =$$

$$= 1.702 \cdot \frac{1.2^2}{2} + 2.939 \cdot 1.2 \cdot y - 1.702 \cdot \frac{0.4^2}{2} - 2.939 \cdot 0.4 \cdot y = \boxed{2.351} \cdot y + \boxed{1.089}\,.$$

Окончательно,

$$f_1(x) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{0.681}}_{A_1} \cdot x + \underbrace{\boxed{0.705}}_{B_1}\,, & \text{если } 0.4 \le x \le 1.2\,, \\ 0\,, & \text{если } x < 0.4 \text{ или } x > 1.2\,, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \underbrace{\boxed{2.351}}_{A_2} \cdot y + \underbrace{\boxed{1.089}}_{B_2}\,, & \text{если } 0.4 \le y \le 0.8\,, \\ 0\,, & \text{если } y < 0.4 \text{ или } y > 0.8\,. \end{cases}$$

Решение (окончание)

Математические ожидания и дисперсии находим по формуле правила 35:

$$\mathbb{M}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x \cdot \big(0.681\,x + 0.705\big)\,dx = \int_{0.4}^{1.2} \big(0.681\,x^2 + 0.705\,x\big)\,dx =$$

$$= \big(0.681\,\tfrac{x^3}{3} + 0.705\,\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} = 0.900 - 0.071 = 0.829,$$

$$\mathbb{M}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y \cdot \big(2.351\,y + 1.089\big)\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(2.351\,y^2 + 1.089\,y\big)\,dy =$$

$$= \big(2.351\,\tfrac{y^3}{3} + 1.089\,\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.750 - 0.137 = 0.613,$$

$$\mathbb{D}(X) = \int_{0.4}^{1.2} x^2 \cdot \big(0.681\,x + 0.705\big)\,dx - (\mathbb{M}(X))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{1.2} \big(0.681\,x^3 + 0.705\,x^2\big)\,dx - 0.687 = \big(0.681\,\tfrac{x^4}{4} + 0.705\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{1.2} - 0.687 =$$

$$= 0.759 - 0.019 - 0.687 = 0.053,$$

$$\mathbb{D}(Y) = \int_{0.4}^{0.8} y^2 \cdot \big(2.351\,y + 1.089\big)\,dy - (\mathbb{M}(Y))^2 =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(2.351\,y^3 + 1.089\,y^2\big)\,dy - 0.376 = \big(2.351\,\tfrac{x^4}{4} + 1.089\,\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} - 0.376 =$$

$$= 0.427 - 0.038 - 0.376 = 0.013.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 16

формат 1.23, $A_1 =$ введи	0.681	Клик	
формат 1.23, $B_1 =$ введи	0.705	Клик	
формат 1.23, $A_2 =$ введи	2.351	Клик	
формат 1.23, $B_2 =$ введи	1.089	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(X) =$ введи	0.829	Клик	
формат 1.23, $\mathbb{M}(Y) =$ введи	0.613	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(X) =$ введи	0.053	Клик	
формат 1.234, $\mathbb{D}(Y) =$ введи	0.013	Клик	

Задача 17

Система 2х непрерывных СВ X, Y *распределена на прямоугольнике* $0.4 \le x \le 1.2$, $0.4 \le y \le 0.8$ *пропорционально* $1.1 \cdot x + 1.9 \cdot y$. *Определить корреляцию.*

Решение

Функцию двумерной плотности берем из задачи 15:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1.702\,x + 2.939\,y\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ в прямоугольнике,} \\ 0\,, & \text{если точка } (x,y) \text{ вне прямоугольника,} \end{cases}$$

а значения

$$\mathbb{M}(X) = 0.829, \quad \mathbb{M}(Y) = 0.613, \quad \mathbb{D}(X) = 0.053, \quad \mathbb{D}(Y) = 0.013$$

берем из задачи 15. Для вычисления корреляции используем правило 30.

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{M}(X \cdot Y) - \mathbb{M}(X)\mathbb{M}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)}}\,,$$

где, по формуле правила 43,

$$\mathbb{M}(X \cdot Y) = \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} x \cdot y \cdot \big(1.702\,x + 2.939\,y\big)dx\,dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \int_{0.4}^{1.2} \big(1.702\,x^2 y + 2.939\,y^2 x\big)dx\,dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(1.702\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.939\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy =$$

$$= \int_{0.4}^{0.8} \big(1.702\,\frac{x^3}{3}\,y + 2.939\,y^2\,\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{x=0.4}^{x=1.2} dy = \int_{0.4}^{0.8} \big(0.944\,y + 1.881\,y^2\big)\,dy =$$

$$= \big(0.944 \cdot \frac{y^2}{2} + 1.881 \cdot \frac{y^3}{3}\big)\Big|_{0.4}^{0.8} = 0.623 - 0.116 = 0.507\,.$$

Поэтому

$$r(X,Y) = \frac{0.507 - 0.829 \cdot 0.613}{\sqrt{0.053 \cdot 0.013}} = -0.045\,.$$

Выборочная проверка вариант 31 задача 17

формат 1.23, $\mathbb{M}(X \cdot Y) =$ введи 0.507 Клик

формат 1.234, $r(X \cdot Y) =$ введи -0.045 Клик

Задача 20

Составить сводку полученных результатов.

Решение

Задача 1. $7! = 5040\,.$ $A_{12}^{6} = 665280\,.$ $C_{12}^{6} = 924\,.$

Задача 2. $\mathbb{P}(A_3) = 0.085\,.$ $\mathbb{P}(A_{\leq 3}) = 0.094\,.$

Задача 3. $\mathbb{P}(A) = 0.067\,.$ $\mathbb{P}_A(H_1) = 0.027\,.$

Задача 4. $\mathbb{P}(A) = 0.386\,.$ $\mathbb{P}_A(H_2) = 0.514\,.$

Задача 5. $\mathbb{M}(X) = 2.402\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.250\,.$

Задача 6. $x_1 = -2.111\,.$ $x_2 = 2.533\,.$ $P = 0.9762\,.$

Задача 7. $P_4 = 0.121970\,.$

Задача 8. $P_1 = 0.706\,.$ $P_2 = 0.853\,.$

Задача 9. $\mathbb{M}(X) = 7.718\,.$ $\mathbb{D}(X) = 5.412\,.$

Задача 10. $\mathbb{M}(X) = 2.55\,.$ $\mathbb{D}(X) = 1.021\,.$ $\mathbb{P}(1.3 \leq X \leq 3.7) = 0.686\,.$

Задача 11. $x_1 = -1.06\,.$ $x_2 = 0.61\,.$ $\mathbb{P}(0.9 \leq X \leq 3.9) = 0.5845\,.$

Задача 12. $\mathbb{M}(X) = 15.400\,.$ $\mathbb{M}(Y) = 6.100\,.$ $\mathbb{D}(X) = 3.840\,.$ $\mathbb{D}(Y) = 5.790\,.$

Задача 13. $\mathbb{M}(X|_{Y=6=y_3}) = 15.668\,.$ $\mathbb{M}(Y|_{X=13=x_1}) = 6.450\,.$
$\mathbb{D}(X|_{Y=6=y_3}) = 3.554\,.$ $\mathbb{D}(Y|_{X=13=x_1}) = 5.098\,.$

Задача 14. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 93.380\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.119\,.$

Задача 15. $C = 1.547\,,$ $f(x,y) = 1.702 \cdot x + 2.939\,.$

Задача 16. $f_1(x) = 0.681 \cdot x + 0.705\,,$ $f_2(y) = 2.351 \cdot y + 1.089\,.$
$\mathbb{M}(X) = 0.829\,,$ $\mathbb{M}(Y) = 0.613\,,$ $\mathbb{D}(X) = 0.053\,,$ $\mathbb{D}(Y) = 0.013\,.$

Задача 17. $\mathbb{M}(X \cdot Y) = 0.507\,.$ $r(X \cdot Y) = -0.045\,.$