Уравнения в частных производных
Лектор — д.ф.-м.н. Чепыжов Владимир Викторович

Без преувеличения можно утверждать: все, что мы видим (а также, слышим, осязаем, и т.д.) описывается уравнениями в частных производных. Более точно это означает, что математические модели таких физических процессов, как колебания струны, волны на поверхности воды, звук и электромагнитные колебания, в частности, свет, распространение тепла и диффузия, а также модели многих других явлений природы описываются уравнениями математической физики, которые, как правило, являются уравнениями в частных производных. Теория уравнений в частных производных (УрЧП) возникла в середине XVIII века в трудах Д'Аламбера, Эйлера, Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье. Эти ученые исследовали конкретные задачи математической физики, а разработанные ими идеи и методы оказались применимы к широким классам дифференциальных, что послужило в конце XIX века основой для развития общей теории УрЧП.

Теория УрЧП тесно связана с другими разделами математики: с функциональным анализом и теорией функций, топологией, алгеброй, комплексным анализом и другими. УрЧП используют основные понятия и методы этих областей математики и, в свою очередь, влияют на их проблематику и направление исследований. Классический пример – это исследование колебаний струны. Уравнение колебаний струны было выведено Д'Аламбером в 1747 году. Он также получил формулу, представляющую общее решение этого уравнения. Эйлер получил формулу, которая дает решение задачи Коши для уравнения колебаний струны. Эта формула теперь называется формулой Д'Аламбера. Бернулли утверждал, что всякое решение этого уравнения представляется тригонометрическим рядом. Спор Эйлера с Д'Аламбером и Бернулли о природе решений уравнения колебаний струны имел важное значение для развития математической физики, анализа и особенно теории тригонометрических рядов. Дальнейшее исследование проблемы о разложении функций в тригонометрические ряды было проделано Фурье в 1822 г. в связи с задачами о распространении тепла, а затем в работах Дирихле были впервые сформулированы достаточные условия разложимости функции в тригонометрический ряд.

Таким образом, вопрос о представлении функции тригонометрическим рядом впервые возник в задачах математической физики и в значительно мере способствовал созданию современной теории множеств и теории функций. При изучении конкретных уравнений из физических задач часто создавались общие методы, которые применялись вначале без строгого математического обоснования к широкому кругу проблем. Например, так возникли метод Фурье, метод Рица, метод Галеркина, методы теории возмущений и др. Эффективность этих методов заставляла искать для них строгое математическое обоснование. Это приводило к созданию новых математических теорий и новых направлений исследований (теория интеграла Фурье, теория разложения по собственным функция, теория обобщенных функций и пр.)

Необходимые знания

математический анализ 4 семестра, топология, динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения

Примерная программа курса

1. Некоторые важные физические задачи, приводящие к УрЧП.

2. Основные типы линейных УрЧП второго порядка.

3. Постановка основных краевых задач. Теорема Коши-Ковалевской.

4. Решение уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.

5. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций этой задачи. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.

6. Решение уравнение теплопроводности методом Фурье и с помощью преобразования Фурье. Формула Пуассона. Принцип максимума.

7. Уравнения и системы УрЧП, корректные по Петровскому.

8. Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Распространение волн.

9. Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

10. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.

11. Обобщенные производные и пространства Соболева. Неравенство Фридрихса. Вариационный метод решения эллиптических уравнений.

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.

[2] Соболев С.Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988.

[3] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

[6] Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.

[7] Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под ред. Шамаева А.С. – М.: БИНОМ, 2005.