Уравнения в частных производных

Вопросы к экзамену за 4 модуль, весна 2019 г.

1. Привести постановку смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о существовании классического решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье для гладкой финитной начальной функции. Построить функцию Грина $G(x,s,t)$ первой краевой задачи уравнения теплопроводности и установить ее простейшие свойства: симметричность по x и s, бесконечная дифференцируемость по всем переменным при $t>0$, выполнение для $G(x,s,t)$ уравнения теплопроводности и граничных условий по переменным x,t. Выписать решение первой краевой задачи уравнения теплопроводности через функцию Грина $G(x,s,t)$. [2, § 10,11], [3, Лекции 13, 14], [4, § 6.8].

2. Доказать принцип максимума для классического решения уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Доказать теорему о единственности и непрерывной зависимости от начальных данных решения первой краевой задачи уравнения теплопроводности на отрезке. [2, § 10,11], [3, Лекция 13], [4, § 6.8].

3. Доказать свойства функции Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности: неотрицательность и оценка сверху интеграла по отрезку $[0,l]$. Дать физическую интерпретацию функции Грина уравнения теплопроводности. Доказать теорему о сходимости классических решений первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности к обобщенному решению этой задачи. Доказать теорему о существовании, единственности и бесконечной дифференцируемости при $t>0$ решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности для непрерывной начальной функции. [2, § 11], [3, Лекция 14].

4. Доказать теорему о существовании классического решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями методом Фурье для гладкой финитной правой части $f(x,t)$. Выразить это решение через функцию Грина. Доказать теорему о существовании обобщенного решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями и с непрерывной правой частью $f(x,t)$ с помощью функции Грина. [2, § 12], [3, Лекция 14].

5. Доказать теорему единственности и непрерывной зависимости классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в полосе $D=\{(x,t): \ x\in\mathbb{R},\ 0<t\le T\}$ в классе ограниченных функций. Свойства преобразования Фурье в пространстве Шварца: преобразование операторов дифференцирования и умножения на полиномы. Доказать теорему о том, что преобразование Фурье отображает пространство Шварца в себя. Привести формулу обращения преобразования Фурье в пространстве Шварца (без доказательства). [2, § 13,14].

6. Применить преобразование Фурье при выводе формулы Пуассона для решений уравнения теплопроводности из пространства Шварца. Построить функцию Грина (ядро Пуассона) $G(x,y,t)$ для уравнения теплопроводности на всей оси и установить ее основные свойства: симметричность, положительность, интеграл от $G(x,y,t)$ по $y\in\mathbb{R}$ равен 1. Доказать теорему существования ограниченного решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности для ограниченной и непрерывной начальной функции, используя формулу Пуассона. [2, § 15], [3, Лекция 15], [4, § 6.4].

7. Привести формулу Пуассона в n-мерном случае. Доказать, что эта формула задает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbb{R}^n$. Привести формулу для решения неоднородного одномерного уравнения теплопроводности с нулевой начальной функцией (без доказательства). Построить с помощью формулы Пуассона решение первой и второй краевой задачи одномерного уравнения теплопрводности на полупрямой. [2, § 15], [3, Лекция 16], [4, § 6.5].

8. Дать определение линейного уравнения с частными производными, корректного по Петровскому. Привести примеры корректных и некорректных уравнений по Петровскому. Вывести с помощью преобразования Фурье формулу решения задачи Коши для уравнения, корректного по Петровскому в классе Шварца. Вывести формулу решения задачи Коши для одномерного уравнения Шредингера на всей оси в классе Шварца. [2, § 4.2].

9. Дать определение обобщенной производной по Соболеву суммируемой функции. Доказать единственность обобщенной производной по Соболеву. Дать определение пространства Соболева $H^1(\Omega)$. Доказать что пространство Соболева $H^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством. Дать определение пространству $H_0^1(\Omega)$. Доказать неравенство Фридрихса для функций из $H_0^1(\Omega)$. [5, Гл. 1].

10. Сформулировать задачу Дирихле для уравнения Пуассона в классе обобщенных решений по Соболеву. Доказать, что любое классическое решение эадачи Дирихле для уравнения Пуассона является обобщенным решением. Доказать теорему о существовании, единственности и корректности обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Доказать теорему о о существовании решения обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона вариационным методом. Сформулировать обобщенную постановку для уравнения Пуассона с неоднородными условиями Дирихле на границе области. [5, Гл.3, § 3.13].

Список литературы

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

Порядок проведения экзамена

Экзамен письменный по из программы по теории УрЧП за 4 модуль. Рассчитан на 1,5 часа. Каждый студент получит билет из трех вопросов, взятых из разных пунктов приведенного выше списка. Необходимо подробно осветить каждый вопрос, привести относящиеся к нему определения, сформулировать требуемые свойства и теоремы, а также доказать их, привести примеры, если требуется. Дополнительными материалами пользоваться строго запрещается.