Уравнения в частных производных

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов

Факультет математики ВШЭ, 2016г. 4 модуль

Лекция 10 (19 марта 2019)

§1. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности. Метод Фурье. Построение классического решения

Пусть $u(x,t)$ – температура в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \geq 0$. Здесь Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + f(x,t),$$

где $k(x) > 0$ – коэффициент температуропроводности, $f(x,t)$ – плотность источников тепла. Как мы знаем, такой же вид имеет уравнение, описывающее процесс диффузии.

Если коэффициент $k = const$ не зависит от x, то уравнение упрощается, и соответствующая смешанная краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f(x,t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{\partial\Omega} = \mu(x).$$

Будем рассматривать одномерный случай, обозначив $k = a^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Начнем изучение с первой краевой задачи, при которой задаются *начальные условия*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

и *граничные условия*

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Решим сначала однородное уравнение при $f \equiv 0$, т.е., когда нет источников тепла. Будем предполагать, что $\mu = \nu \equiv 0$, т.е., на концах отрезка поддерживается нулевая температура.

§2. Метод Фурье

Решение задачи (1) – (3) ищется в прямоугольнике

$$Q = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}\,.$$

Обозначим часть его границы через

$$\Gamma = \{0 \le x \le l,\ t = 0\} \cup \{x = 0,\ 0 < t \le T\} \cup \{x = l,\ 0 < t \le T\}\,.$$

Решение задачи (1) – (3) строится методом разделения переменных, аналогично решению уравнения колебаний струны.

1. Первый шаг. Ищем частные решения вида $U(x,t) = Y(x)Z(t)$. Подставляем это в уравнение и получаем

$$Y(x) \cdot Z'(t) = a^2 Y''(x) \cdot Z(t).$$

Делим на $a^2 Y(x)Z(t)$ и получаем

$$\frac{Z'(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{Y''(t)}{Y(t)} = \lambda.$$

2. Второй шаг совпадает со вторым шагом метода Фурье для уравнения колебаний струны. Рассматривается задача Штурма-Лиувилля

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \quad Y(0) = Y(l) = 0, \tag{4}$$

которая имеет решение

$$\lambda = -\mu_k^2, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad Y_k(x) = \sin \mu_k x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Нашли все собственные значения и собственные функции задачи (4).

3. Следующий шаг состоит в решении уравнения для $Z(t)$, которое имеет первый а не второй порядок. Для каждого μ_k это уравнение имеет вид

$$Z'(t) + a^2 \mu_k Z(t) = 0,$$

а его общее решение

$$Z(t) = C_k e^{-a^2 \mu_k t}.$$

Нашли все решения уравнения (1) вида $Y(x)Z(t)$, которые удовлетворяют граничному условию (3):

$$u_k(x,t) = C_k e^{-a^2 \mu_k t} \sin \mu_k x.$$

4. На этом шаге ищется решение всей задачи (1) – (3) в виде следующего ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x. \tag{5}$$

Из начального условия (2) получаем

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \mu_k x,$$

где C_k – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее по собственным функциям $\{\sin \mu_k x\}$ задачи (4):

$$C_k = \tfrac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \, ds. \tag{6}$$

5. На заключительном шаге делается обоснование сходимости ряда (5), а также рядов, которые получаются его почленным дифференцированием один раз по t и два раза по x. Для этого, аналогично уравнению струны, будем предполагать, что $\varphi(x) \in C_0^4([0,l])$ – гладкая финитная функция на отрезке $[0,l]$. Тогда, как мы знаем,

$$C_k = O\left(\tfrac{1}{k^4}\right).$$

Эта оценка легко выводится из (6) интегрированием по частям. Ряды, которые получаются из (5) формальным дифференцированием, имеют вид

по t :

$$-\sum_{k=1}^{\infty} C_k a^2 \mu_k^2 e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x;$$

по x (1 раз):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu_k e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cos \mu_k x;$$

по x (2 раз):

$$-\sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu_k^2 e^{-a^2 \mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Поскольку $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, то мажорантами для всех этих рядов, включая ряд (5), служат числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k|C_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |C_k| < \infty.$$

Следовательно, все функциональные ряды равномерно сходятся в $\bar{Q}$, ряд (5) можно почленно дифференцировать, и, значит, построенная функция $u(x,t)$ является решением задачи (1) – (3).

Доказана следующая теорема о существовании классического решения.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x) \in C_0^4([0,l])$. Тогда при любом $T > 0$ ряд (5) равномерно сходится при $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, его сумма $u(x,t)$, а также производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в $\bar{Q}$. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), начальному условию (2) и граничному условию (3).*

Отметим, что на функцию $\varphi(x)$ были наложены очень сильные ограничения. Их можно будет существенно ослабить, о чем мы поговорим на другой лекции.

§3. Функция Грина для уравнения теплопроводности

Перепишем формулу для решения (5), подставив в нее выражения для коэффициентов C_k из (6):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \cdot \sin \mu_k x \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \, ds.$$

Пусть $t \geq \beta > 0$, где β – фиксированное число. Тогда справа можно поменять местами суммирование и интегрирование:

$$u(x,t) = \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k s \cdot \sin \mu_k x \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \right) \varphi(s) ds.$$

Отметим, что в этой части прямоугольника $\bar{Q}$ выполнены неравенства

$$e^{-a^2 \mu_k^2 t} \leq e^{-a^2 \mu_k^2 \beta} \leq \frac{M_n}{k^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Следовательно, в ней получаем равномерно сходящийся ряд

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k s \cdot \sin \mu_k x \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}.$$

Сумма этого ряда называется функцией Грина $G(x,s,t)$ первой краевой задачи уравнения теплопроводности:

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k s \cdot \sin \mu_k x \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}. \tag{8}$$

Сформулируем свойства этой функции:

a) Функция $G(x,s,t)$ симметрична по переменным x и s;

b) функция $G(x,s,t)$ бесконечно дифференцируема по x, s и t при $0 < x < l, \; 0 < s < l, \; 0 < t \leq T$. (Это следует из оценки (7).)

c) при каждом s функция $G(x,s,t)$ удовлетворяет по переменным (x,t) уравнению теплопроводности и граничному условию:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,s,t) = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,s,t), \quad G(0,s,t) = G(l,s,t) = 0.$$

Из теоремы 1 заключаем, что решение задачи (1) – (3) при $t > 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией по x и t, причем его можно записать в виде

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,s,t) \varphi(s) ds, \quad t > 0,$$

а при $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l].$$

§4. Принцип максимума и теорема единственности

Обозначим оператор
$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
действующий на функциях $u(x,t),\ x \in Q = \{0 < x < l, 0 < t \le T\}$. Напомним, что $Q = \bar{Q} \setminus \Gamma,\ \bar{Q} = Q \cup \Gamma$.

Лемма 1 *Если* $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, *причем*
$$u|_\Gamma \ge 0, \quad Lu > 0,\ \forall\ (x,t) \in Q,$$
тогда
$$u(x,t) \ge 0,\ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

(Если температура была неотрицательна в начальный момент времени и на границе области и есть *положительные* источники тепла, то температура будет все время неотрицательной везде в области.)

Доказательство. Предположим противное, т.е., существует точка $(x,t) \in \bar{Q}$, в которой $u(x,t) < 0$. Тогда минимум этой функции на $\bar{Q}$ также отрицателен. Пусть (x_0,t_0) точка минимума, т.е., $u(x_0,t_0) < 0$. Тогда по условию точка (x_0,t_0) не лежит на Γ, т.е., $(x,t) \in Q$. Но тогда x_0 – внутренняя точка интервала $(0,l)$. Следовательно, по необходимому условию минимума, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \ge 0$. Кроме того, очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \le 0$. Тогда
$$Lu(x_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0,$$
что противоречит предположениям леммы 1. ■

Лемма 2 *Если* $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, *причем*
$$u|_\Gamma \ge 0, \quad Lu \ge 0,\ \forall\ (x,t) \in Q,$$
тогда
$$u(x,t) \ge 0,\ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon \cdot t,$$
где $\varepsilon > 0$. В силу предположения леммы,
$$v|_\Gamma \ge 0, \quad Lv = Lu + \varepsilon > 0,\ \forall\ (x,t) \in Q.$$
Тогда по лемме 1, при любом $\varepsilon > 0$
$$u(x,t) + \varepsilon \cdot t = v(x,t) \ge 0,\ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$
Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon \to 0+$, получаем, что
$$u(x,t) \ge 0,\ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

■

Лемма 3 *Пусть* $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, *причем*

$$m \le u|_\Gamma \le M, \quad Lu = 0, \ \forall (x,t) \in Q.$$

Тогда

$$m \le u(x,t) \le M, \ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность $u_1(x,t) = u(x,t) - m$. По условию леммы,

$$u_1|_\Gamma \ge 0, \quad Lu_1 = 0, \ \forall (x,t) \in Q.$$

Тогда по лемме 2

$$u_1(x,t) \ge 0, \ \forall (x,t) \in \bar{Q},$$

т.е.,

$$u(x,t) \ge m, \ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

Аналогично доказывается оценка $u_2(x,t) = M - u(x,t) \ge 0$ при всех $(x,t) \in \bar{Q}$. ■

Следствие 1 (Принцип максимума) *Пусть* $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, *причем*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \forall (x,t) \in Q.$$

Тогда максимум и минимум функции $u(x,t)$ *в* $\bar{Q}$ *достигается на границе* Γ.

Следствие 2 *Пусть* $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, *причем*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \forall (x,t) \in Q.$$

Тогда

$$\max_{(x,t)\in\bar{Q}} |u(x,t)| = \max_{(x,t)\in\Gamma} |u(x,t)|.$$

Из последнего неравенства вытекает теорема о единственности и непрерывной зависимости решения уравнения теплопроводности от начальных и граничных условий, а также от правой части.

Теорема 2 *Решение задачи (1) – (3) непрерывно зависит от начальных данных, от краевых условий и от правой части уравнения.*

Доказательство. Пусть $u_i(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, $i = 1,2$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q,\\
&u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad x \in [0,l], \quad \varphi_i(x) \in C([0,l]),\\
&u_i(0,t) = \mu_i(t), \quad u_i(1,t) = \nu_i(t), \quad 0 \le t \le T, \quad \mu_i(x), \nu_i(x) \in C([0,l]).
\end{aligned}$$

Кроме того, пусть

$$\max_{x\in[0,l]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \varepsilon,$$
$$\max_{x\in[0,l]} |\mu_1(x) - \mu_2(x)| \le \varepsilon, \quad \max_{x\in[0,l]} |\nu_1(x) - \nu_2(x)| \le \varepsilon,$$
$$\max_{(x,t)\in\bar{Q}} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| \le \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Тогда очевидно, что

$$|Lu| \le \varepsilon, \ \forall (x,t) \in Q, \quad \max_{(x,t)\in\Gamma} |u(x,t)| \le \varepsilon.$$

Обозначим

$$v_{\pm}(x,t) = \varepsilon(t+1) \pm u(x,t).$$

Тогда

$$Lv_{\pm}(x,t) = \varepsilon \pm Lu \ge 0, \ \forall (x,t) \in Q, \quad v_{\pm}|_{\Gamma} \ge 0.$$

В силу леммы 2

$$v_{\pm}(x,t) \ge 0, \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

Следовательно,

$$\max_{(x,t)\in\bar{Q}} |u(x,t)| \le \varepsilon(T+1),$$

что дает неравенство

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon(T+1), \ \forall (x,t) \in \bar{Q}$$

при условии малого различия начальных, граничных данных и правых частей. ■

Лекция 11 (9 апреля 2019)

§1. Свойства функции Грина уравнения теплопроводности

Продолжаем изучение смешанной краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{3}$$

На прошлой лекции мы построили функцию Грина для этой задачи

$$G(x, s, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t}, \quad \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Мы выяснили, что функция $G \in C^\infty(t > 0)$ и она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, s, t) = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, s, t), \quad G(0, s, t) = G(l, s, t) = 0.$$

Кроме того, если $\varphi(x) \in C_0^4([0, l])$, то решение (1) – (3), которое мы построили по методу Фурье, представляется в интегральной формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, s, t)\varphi(s)ds, \quad t > 0, \tag{4}$$

причем $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Продолжим изучение свойств функции Грина.

Утверждение 1 *Функция Грина G не отрицательна.*

Доказательство. Напомним, что $G \in C^\infty(t > 0)$, причем $G(x, s, t) = 0$ при $x = 0, l$ и при $s = 0, l$. Далее рассуждаем от противного. Пусть $G(x_0, s_0, t_0) < 0$ для некоторых x_0, s_0, t_0, причем $x_0, s_0 \in (0, l)$ и $t_0 > 0$. Тогда в силу непрерывности функции G найдется такое число $\delta > 0$, что $G(x_0, s, t_0) < 0$ при $|s - s_0| < \delta$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi \in C_0^4([0, l])$, такую, что $\varphi(s) \equiv 0$ при $|s - s_0| > \delta$, и, кроме того, $\varphi(s_0) > 0$ и $\varphi(s) \geq 0$ при всех $s \in [0, l]$. Такую функцию легко построить. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1) – (3) с этой начальной функцией $\varphi(x)$, которую можно построить по методу Фурье. Тогда, в силу принципа максимума, функция $u(x, t)$ не отрицательна. Однако, из формулы Грина (4) находим, что

$$u(x_0, t_0) = \int_0^l G(x_0, s, t_0)\varphi(s)ds = \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} G(x, s, t)\varphi(s)ds < 0.$$

Получили противоречие. Значит, $G(x, s, t) \geq 0$ при всех $x, s \in [0, l], \ t > 0$. ■

Утверждение 2 *Интеграл от функции Грина не превосходит* 1 :

$$\int_0^l G(x,s,t)ds \le 1, \quad \forall\ x \in [0,l],\ t>0.$$

Доказательство. Построим последовательность гладких финитных функций

$$0 \le \varphi_n(x) \le 1, \quad x \in [0,l],$$

которые равны 1 всюду, кроме малых окрестностей концов отрезка $[0,l]$, т.е.,

$$\varphi_n(x) = 1 \text{ при } \quad l/n \le x \le l - l/n,\ n = 2,4,\dots$$

Из принципа максимума следует, что решения $u_n(x,t)$ задачи (1) – (3) с начальной функцией $\varphi_n(x)$ не отрицательно и не превосходит 1. Следовательно,

$$\int_0^l G(x,s,t)\varphi_n(s)ds = u_n(x,t) \le 1.$$

Тем более, в силу неотрицательности функции G, доказанной в предложении 1,

$$\int_{l/n}^{l-n/l} G(x,s,t)ds = \int_{l/n}^{l-n/l} G(x,s,t)\varphi_n(s)ds \le \int_0^l G(x,s,t)\varphi_n(s)ds \le 1.$$

Устремляем $n \to \infty$ и получаем требуемое неравенство. ■

Дадим физическую интерпретацию функции Грина, которая часто называется *функцией точечного источника*.

Пусть $s_0 \in (0,l)$ – внутренняя точка области. Построим последовательность гладких финитных функций $\varphi_n(s) \ge 0$, отличных от нуля в малой окрестности точки s_0 при $|s - s_0| \le \delta_n$, причем

$$\int_{s_0-\delta_n}^{s_0+\delta_n} \varphi_n(s)ds = 1.$$

Пусть $u_n(x,t)$ – соответствующая последовательность решений задачи теплопроводности с начальными функциями $\varphi_n(x)$. Тогда по формуле Грина (4) имеем

$$u_n(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi_n(s)ds = \int_{s_0-\delta_n}^{s_0+\delta_n} G(x,s,t)\varphi_n(s)ds, \quad t>0.$$

По теореме о среднем

$$u_n(x,t) = G(x,s_n^*,t) \cdot \int_{s_0-\delta_n}^{s_0+\delta_n} \varphi_n(s)ds = G(x,s_n^*,t),$$

где $|s_n^* - s_0| \le \delta_n$. Поэтому, если $\delta_n \to 0$, то

$$u_n(x,t) \to G(x,s_0,t) \text{ при } n \to \infty.$$

Начальную функцию $\varphi_n(x)$ следует интерпретировать как *выделение в точке* s_0 *в момент времен* $t=0$ *единичного количества тепла.* Тогда функция $G(x,s,t)$ – это *температура в точке* x *в момент времени* $t>0$ *при условии, что в точке* s_0 *в момент времен* $t=0$ *выделилось единичное количество тепла.*

§2. Обобщенные решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим способ построения обобщенных решений с помощью перехода к пределу в последовательности гладких классических решений, как это делалось для уравнения колебаний струны. Оказывается, что при таком подходе класс решений для уравнения теплопроводности существенно не расширяется. Это является отличительной особенностью параболических уравнений. Гладкость решений при $t > 0$ не теряется, т.е., решения остаются бесконечно гладкими. Можно лишь ослабить условия для начальной функции.

Теорема 1 *Пусть $u_n(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ – последовательность классических решений задачи (1) – (3) с начальной функцией $u_n(x,0) = \varphi_n(x)$. Если последовательность $\varphi_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0,l]$ при $n \to \infty$ к функции $\varphi(x)$, то последовательность $u_n(x,t)$ сходится равномерно на $\bar{Q}$ к некоторой функции $u(x,t)$.*

Доказательство. По критерию Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m \geq N$ выполнено неравенство

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [0,l].$$

Но тогда из принципа максимума заключаем, что

$$|u_n(x,t) - u_m(x,t)| \leq \varepsilon, \ \forall (x,t) \in \bar{Q}.$$

Следовательно, по критерию Коши, последовательность равномерно (по $(x,t) \in \bar{Q}$) сходится к некоторой непрерывной функции $u(x,t) \in C(\bar{Q})$. ■

Теперь можно ослабить условия на начальную функцию $\varphi(x)$ для краевой задачи (1) – (3).

Теорема 2 *Пусть $\varphi(x) \in C([0,l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует и единственная функция $u(x,t) \in C(\bar{Q}) \cap C^\infty(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$, условиям (2) и (3), а, кроме того, при $t > 0$ записывается в виде интеграла Грина*

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi(s)ds, \quad t > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Построим последовательность финитных функций $\varphi_n(x) \in C_0^4([0,l])$, которая равномерно (по $x \in [0,l]$) стремится к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$. Такая последовательность существует (доказательство опускаем, оно основано на теореме Вейерштрасса). Рассмотрим соответствующую последовательность классических решений $u_n(x,t)$ задачи (1) – (3) с начальными функциями $\varphi_n(x)$. По теореме 1 последовательность $u_n(x,t)$ равномерно (по $(x,t) \in \bar{Q}$) сходится к непрерывной функции $u(x,t)$. Для решений $u_n(x,t)$ справедлива формула Грина:

$$u_n(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi_n(s)ds, \quad t > 0.$$

Переходя в этой формуле к пределу в обеих частях равенства, получаем для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi(s)ds, \quad t > 0,$$

причем, очевидно, что функция $u(x,t) \in C^\infty(t>0)$, удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и начальным условиям (3) $u(x,0)=\varphi(x)$. Теорема доказана. ■

Вывод: "Обобщенные решения", полученные предельным переходом из последовательности классических решений в $\bar{Q}$, остаются классическими при $t>0$. Гладкость в $\bar{Q}$ не сохраняется (т.к., $\varphi(x)$ не гладкая), но это решение непрерывно в $\bar{Q}$.

§3. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим первую краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{7}$$

Теорема 3 *Пусть* $f,\ f_x,\ f_{xx} \in C(\bar{Q})$ *и функция* $f\equiv 0$ *в окрестности боковых сторон* $\{x=0, 0\le t\le T\}$ *и* $\{x=l, 0\le t\le T\}$. *Тогда существует решение* $u(x,t)\in C^2(\bar{Q})$ *задачи (6), (7), для которого справедлива формула*

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,s,t-\tau)f(s,\tau)\ ds\ d\tau. \tag{8}$$

Доказательство. Напомним, что функция Грина $G(x,s,t)$ является неотрицательной при $t>0$ и ее интеграл

$$\int_0^l G(x,s,t)ds \le 1, \quad \forall\ x\in[0,l],\ t>0.$$

Поэтому формула (8) имеет смысл (воспользоваться теоремой Фубини о повторном интегрировании).

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по x :

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\sin\mu_k x, \quad p_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(s,t)\sin\mu_k s\ ds, \quad \mu_k=\frac{k\pi}{l}.$$

Из условий, наложенных на f находим, после двухкратного интегрирования по частям, следующую оценку для $p_k(t)$:

$$|p_k(t)| \le \frac{M}{k^2},\ \forall k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin\mu_k x. \tag{10}$$

Подставим выражения для $u(x,t)$ и $f(x,t)$ в (6) и получаем формальное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k'(t)\sin\mu_k x = -a^2\sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\mu_k^2\sin\mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\sin\mu_k x.$$

Приравняв коэффициенты при всех $\sin\mu_k x$ и воспользовавшись нулевым начальным условием из (7), получим, что функция $q_k(t)$ является решением следующей задачи Коши для ОДУ:

$$q_k'(t) = -a^2\mu_k^2 q_k(t) + p_k(t), \quad q_k(0) = 0.$$

Эта линейная неоднородная задача легко решается методом вариации постоянной (можно также просто умножить уравнение на $e^{-a^2\mu_k t}$ и проинтегрировать обе части, выделив полную производную). Решение находится по формуле

$$q_k(t) = \int_0^l e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)} p_k(\tau)\ d\tau.$$

Поскольку $p_k(t)$ удовлетворяет оценке (9), то легко видеть, что

$$|q_k(t)| \le \frac{M}{k^2a^2\mu_k^2} \le \frac{M_1}{k^4}.$$

Из этой оценки следует равномерная сходимость ряда (10) и всех рядов, которые из него получаются почленным дифференцированием 1 раз по t и два раза по x. При этом, очевидно, что сумма ряда (10) удовлетворяет уравнению (6) в $\bar{Q}$, а также нулевым начальным и граничным условиям (7). Следовательно, получаем формулу для решения задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}\frac{2}{l}\left[\int_0^l \sin\mu_k s\cdot f(s,\tau)\ ds\right]\ d\tau\right)\sin\mu_k x =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^t\int_0^l \sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k s\cdot e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}f(s,\tau)\ ds\ d\tau.$$

Из оценок для $p_k(t)$ и $q_k(t)$ вытекает, что в последней формуле можно поменять местами суммирование и интегрирование. Получаем

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k s\cdot e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}f(s,\tau)\right)\ ds\ d\tau =$$
$$= \int_0^t\int_0^l G(x,s,t-\tau)f(s,\tau)\ ds\ d\tau.$$

При этом мы воспользовались суммируемостью и положительностью функции G. Теорема доказана. ■

Отметим, что формулу (8) можно один раз дифференцировать по t и два раза – по x. При этом получаемые производные будут непрерывными функциями в $\bar{Q}$.

Рассмотрим теперь “обобщенное решение” задачи (6), (7), которое определяется как предел классических решений $u_n(x,t)$ той же задачи, но с гладкими и финитными правыми частями $f_n(x,t)$, которые при $n\to\infty$ сходятся к $f_n(x,t)$ равномерно на $\bar{Q}$.

Теорема 4 *Пусть $f(x,t) \in C(\bar{Q})$, причем $f(0,t) = f(l,t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$. Тогда для задачи (6), (7) существует и единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Построим последовательность гладких финитных функций $f_n(x,t) \in C_x^2([0,l])$, которые удовлетворяют условиям теоремы 3, причем $f_n(x,t) \to f(x,t)$ при $n \to \infty$ равномерно на $\bar{Q}$. Такая последовательность существует (доказательство опускается). Рассмотрим соответствующие классические решения $u_n(x,t)$ задачи (6), (7) с правыми частями $f_n(x,t)$. Из теоремы 2, доказанной на прошлой лекции, следует, что $u_n(x,t)$ сходится равномерно на $\bar{Q}$ к некоторой функции $u(x,t)$, причем $u(x,t)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $f_n(x,t)$ (проверьте это!). Тогда, по определению, $u(x,t)$ будет обобщенным решением исходной задачи (6), (7) с правой частью $f(x,t)$.

По теореме 3 для функции $u_n(x,t)$ справедлива формула

$$u_n(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,s,t-\tau) f_n(s,\tau)\, ds\, d\tau.$$

Согласно свойствам функции Грина, $G \geq 0$ и $\int_0^l G(x,s,t)ds \leq 1$. Тогда мы можем воспользоваться теоремой Лебега и перейти пределу при $n \to \infty$ в обеих частях этого равенства. Следовательно, обобщенное решение $u(x,t)$ выражается таким же интегралом:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,s,t-\tau) f(s,\tau)\, ds\, d\tau. \tag{11}$$

Единственность обобщенного решения $u(x,t)$ получается из этой формулы. Теорема доказана. ■

Замечание. На самом деле, можно показать, что функция в формуле (11) удовлетворяет уравнению (6) при $t > 0$.

Лекция 12 (16 апреля 2019)

§1. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Начнем изучение задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве по $x \in \mathbb{R}^1$. В этом случае нет граничных условий, и задается только начальное распределение температуры.

Обозначим через D полосу $\{x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t \le T\}$ на плоскости (x, t). Тогда

$$\bar{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^1,\ 0 \le t \le T\right\}.$$

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

а начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) будем называть *ограниченную* функцию $u(x,t) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2). Требование ограниченности решения означает, что для некоторого $M > 0$ выполнено неравенство

$$|u(x, t)| \le M, \quad \forall (x, t) \in D.$$

Докажем, что решение задачи Коши в такой постановке является единственным и это решение непрерывно зависит от начальной функции $\varphi(x)$.

Пусть

$$|\varphi(x)| \le \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Зафиксируем произвольную точку $(x_0, t_0) \in D$ и замкнутый прямоугольник

$$Q = \{(x, t) \quad | \quad |x| \le R,\ 0 \le t \le T\},$$

такой, что $|x_0| < R,\ 0 < t_0 \le T$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_\delta(x, t) := \varepsilon + \delta(x^2 + 4a^2 t) \pm u(x, t),$$

где

$$\delta = MR^{-2}.$$

Тогда, очевидно, что

$$Lw_\delta = \delta(4a^2 - 2a^2) > 0.$$

На нижнем основании прямоугольника Q, где $t = 0$, справедливо неравенство

$$w_\delta \ge 0,$$

а на боковой поверхности, где $|x| = R$,

$$w_\delta(\pm R, t) \ge \varepsilon + \delta R^2 - M = \varepsilon > 0$$

в силу выбора числа δ. Следовательно, из Леммы 1, доказанной на позапрошлой лекции, находим, что

$$w_\delta(x,t) \geq 0, \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Значит, $w_\delta(x_0,t_0) \geq 0$, и, следовательно,

$$|u(x_0,t_0)| \leq \varepsilon + \delta(x_0^2 + 4a^2 t_0) = \varepsilon + MR^{-2}(x_0^2 + 4a^2 t_0).$$

В этом неравенстве, которое справедливо для всех $R > |x_0|$, переходим к пределу при $R \to \infty$ и получаем оценку

$$|u(x_0,t_0)| \leq \varepsilon,$$

которая выполнена для любой точки $(x_0,t_0) \in D$. Отсюда следует как единственность (ограниченного) решения $u(x,t)$, так и его непрерывная зависимость от $\varphi(x)$ в равномерной sup-норме пространства $C_b(\mathbb{R})$ непрерывных ограниченных функций.

§2. Преобразование Фурье

На прошлых лекциях мы научились строить решения краевых задач для уравнения колебаний струны и для уравнения теплопроводности методом разделения переменных, когда начальные функции задаются на конечном отрезке. Основную роль при этом играло разложение функций в ряд Фурье. Если начальная функция задана на всей прямой $\mathbb{R}^1$, то метод разложения в ряд Фурье не применим. Для таких функций аналогом ряда фурье служит *преобразование Фурье.*

Определение 1 Преобразованием Фурье *функции* $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, *называется функция*

$$\tilde{u}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} u(x)dx, \quad s \in \mathbb{R}^1. \tag{1}$$

Мы будем также использовать стандартное обозначение

$$F[u](s) := \tilde{u}(s).$$

Чтобы формула (1) имела смысл, необходимо наложить определенные условия на функцию $u(x)$. Мы рассмотрим достаточно узкий класс функций – класс Шварца S. Он состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со всеми своими производными быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Определение 2 *Комплекснозначная функция $u(x)$ принадлежит классу Шварца S, если $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и для любых целых $k \geq 0$ и $n \geq 0$ найдется $M_{k,n} > 0$, такое, что*

$$\left|\frac{d^k u}{dx^k}\right| \leq \frac{M_{k,n}}{(1+x^2)^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Примеры. Классу Шварца S принадлежат следующие функции: e^{-x^2}, $P_m(x)e^{Q_{2l}(x)}$. Здесь $P_m(x)$ и $Q_{2l}(x)$ – полиномы степени m и $2l$, причем старший коэффициент $Q_{2l}(x)$ отрицателен.

Легко проверяется

Утверждение 1 *Если $u(x) \in S$, то для любого целого $k \geq 0$ производная $\frac{d^k u}{dx^k}(x) \in S$, и для любого полинома $P(x)$ функция $P(x)u(x) \in S$.*

Поскольку

$$\left|e^{ixs}\right| = 1 \text{ при } x, s \in \mathbb{R}^1,$$

очевидно, что для функции $u \in S$ интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно по $s \in \mathbb{R}^1$, и его можно дифференцировать по s любое число раз

$$\frac{d\tilde{u}}{ds}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{ixs}u(x)dx, \quad \frac{d^k\tilde{u}}{ds^k}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{ixs}u(x)dx.$$

Обозначим через D оператор однократного дифференцирования по x или по s

$$D_x u(x) := \frac{du}{ds}(x), \quad D_s\tilde{u}(s) := \frac{d\tilde{u}}{ds}(s).$$

Если $P(z)$ полином степени m, то $P(D)$ – это дифференциальный оператор порядка m. Например, если

$$P(z) = 2z^3 - 4iz^2 + iz + 5, \quad \text{то} \quad P(D_x)u = 2\frac{d^3u}{dx^3} - 4i\frac{d^2u}{dx^2} + i\frac{du}{dx} + 5u.$$

При каждом дифференцировании интеграла по (1) по s подынтегральная функция умножается на ix. Поэтому для любого полинома $P(z)$

$$P(D_s)\tilde{u}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(ix)e^{ixs}u(x)dx. \tag{3}$$

Следовательно,

$$P(D_s)\tilde{u} = \widetilde{P(ix)u}, \quad P(D_s)F[u] = F[P(ix)u]. \tag{4}$$

Рассмотрим преобразование Фурье от функции $\frac{du}{dx}$:

$$F\left[\frac{du}{dx}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}\frac{du}{dx}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-is)e^{ixs}u(x)dx = (-is)F\left[u\right],$$

здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались тем, что $|u(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$ для $u \in S$. Следовательно,

$$\widetilde{P(D_x)u} = P(-is)\tilde{u}, \quad F[P(D_x)u] = P(-is)F[u]. \tag{5}$$

Теорема 1 *Преобразование Фурье переводит функции из класса S в функции из S.*

Доказательство. Заметим, что функции из класса S ограничены, поэтому

$$|\tilde{u}(s)| \ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| \ dx, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1.$$

Из (3) следует, что $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Производные функций из S также принадлежат этому классу (см. утверждение 1). Значит, в левой части (5) стоит преобразование Фурье функции из S. Рассмотрим полином $P(z) = (1 + z^{4n})$. Из формулы (5) следует, что

$$(1 + s^{4n})\,|F[u](s)| \leq \left|F[(1 + D_x^4)u](s)\right| \leq M, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1,$$

для некоторого числа M. Следовательно, преобразование Фурье от $u \in S$ стремится к нулю быстрее любой степени s.

Из формулы (4) видно, что производная преобразования Фурье функции из S является преобразованием Фурье функции из S (см. утверждение 1), т.е., эта производная также стремится к нулю при $|s| \to \infty$ быстрее любой степени s. ■

Теорема 2 (формула обращения преобразования Фурье) *Если* $u(x) \in S$ *и*

$$\tilde{u}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} u(x) dx,$$

то

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \tilde{u}(s) ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство. Функции из S стремятся к нулю быстрее любой степени аргумента. Поэтому,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \tilde{u}(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iys} u(y) dy ds =$$
$$= \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} e^{-ixs} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iys} u(y) dy ds = \lim_{N \to \infty} I_N(x).$$

Здесь введено обозначение

$$I_N(x) := \int_{-N}^{N} e^{-ixs} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iys} u(y) dy ds.$$

Тогда в этом выражении можно поменять порядок интегрирования:

$$I_N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \left[\int_{-N}^{N} e^{-ixs + iys} ds\right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\, \frac{e^{is(y-x)}}{i(y-x)}\bigg|_{s=-N}^{s=N} dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \frac{e^{iN(y-x)} - e^{-iN(y-x)}}{i(y-x)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \cdot 2 \frac{\sin N(y-x)}{(y-x)} dy.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $t = y - x,\ y = t + x :$

$$I_N(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+t) \frac{\sin Nt}{t} dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x+t) - u(x)] \frac{\sin Nt}{t} dt + 2u(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt =$$
$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x+t) - u(x)] \frac{\sin Nt}{t} dt + 2u(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{Nt} d(Nt) =$$
$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x+t) - u(x)] \frac{\sin Nt}{t} dt + 2u(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Известно, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad \text{(это табличный интеграл Дирихле).}$$

Нам осталось проверить соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x+t) - u(x)] \frac{\sin Nt}{t} dt \ \to \ 0 \ (N \to \infty). \tag{6}$$

Обозначим функцию

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} = g(t)$$

(точка x фиксирована). Покажем, что $g \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$, стремится к нулю при $t \to \infty$, и справедлива оценка

$$|g'(t)| \le M(1+t^2)^{-1}.$$

Два последних свойства следуют из того, что $u \in S$. Проверим гладкость функции $g(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$u(x+t) - u(x) = \int_x^{x+t} u'(\xi) d\xi.$$

Делаем замену $\xi = x + t\theta, \ d\xi = t d\theta :$

$$u(x+t) - u(x) = t \int_0^1 u'(x + t\theta) d\theta.$$

Следовательно,

$$g(t) = \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \int_0^1 u'(x+t\theta) d\theta,$$

откуда вытекает, что $g \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$, поскольку $u \in S$. Поэтому интеграл (6) можно интегрировать по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin Nt \ dt = - \frac{1}{N} g(t) \cos Nt \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \cos Nt \ dt =$$

$$= 0 + \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \cos Nt \ dt = O\left(\frac{1}{N}\right) \to 0 \ (N \to \infty).$$

Теорема доказана. ■

Замечание. Преобразование Фурье легко обобщается на случай функций многих переменных. Вводится класс Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, состоящий из функций $u(x), x \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, которые стремятся к нулю вместе со всеми производными при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$. Формула преобразования Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,s)} u(x) dx, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (x,s) = \sum_{j=1}^n x_j s_j.$$

Обратное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)} \tilde{u}(s) \ ds.$$

Лекция 13 (23 апреля 2019)

§1. Применение преобразования Фурье

Преобразование Фурье помогает построить решение начальной задачи Коши для многих УрЧП. Основой этого применения является то обстоятельство, что при преобразовании Фурье оператор дифференцирования переходит в более простой оператор умножения на независимую переменную. Воспользуемся преобразованием Фурье для решения задачи Коши уравнения теплопроводности. На прошлой лекции была доказана теорема о единственности для этой задачи в классе гладких ограниченных функций. Теперь с помощью преобразования Фурье мы получим формулу для решения и докажем теорему существования.

Пусть $u(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Будем считать, что $u(x,t) \in C^\infty$ и, более того, при каждом фиксированном t функция $u(x,t) \in S$ равномерно по t на каждом отрезке $[0,T]$. (Равномерность означает, что константа $M_{k,n}$ в оценке $\left|\frac{d^k u}{dx^k}\right| \leq \frac{M_{k,n}}{(1+x^2)^n}$ при $x \in \mathbb{R}^1$, не зависит от $t \in [0,T]$). Рассмотрим преобразование Фурье от обеих частей уравнения (1). Получаем следующие выражения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} u(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(s,t),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dx = (-is)^2 \tilde{u}(s,t).$$

Приходим к ОДУ с параметром s

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(s,t) = -a^2 s^2 \tilde{u}(s,t),$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{u}(s,t) = \tilde{u}(s,0)e^{-a^2 s^2 t}.$$

Теперь воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \tilde{u}(s,t)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs - a^2 s^2 t} \tilde{u}(s,0)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs - a^2 s^2 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isy} \varphi(y)dy \right] ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 s^2 t - is(x-y)} ds \right] dy.$$

Изменение порядка интегрирования законно при $t > 0$, так как $\varphi \in S$, а по переменной

s функция быстро убывает на бесконечности. Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a^2s^2t - is(x-y)\right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a^2t\left(s + \frac{i(x-y)}{2a^2t}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) ds =$$

$$= \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a^2t\left(s + \frac{i(x-y)}{2a^2t}\right)^2\right) ds =$$

$$= e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2tz^2} dz = \tfrac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}.$$

Во второй и третьей строках мы сделали замены переменных $s + \frac{i(x-y)}{2a^2t} = z$ и $a\sqrt{t}z = \sigma$, а также воспользовались табличным интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}.$$

В результате получили *формулу Пуассона* для решения задачи (1), (2)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy, \tag{3}$$

где функция

$$G(x,y,t) = \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$$

называется ядром Пуассона. Очевидно, что $G(x,y,t)$ является функцией Грина задачи (1), (2).

Формула (3) была получена при очень жестких условиях на $\varphi(x)$ и $u(x,t)$. Однако эта формула имеет смысл для значительно более широкого класса функций, что позволяет закончить исследование задачи Коши (1), (2).

§2. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Решением задачи Коши (1), (2) называется функция $u(x,t)$, которая определена при $x \in \mathbb{R}^1,\ t \geq 0$, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$, непрерывна при $t \geq 0$ и совпадает с заданной начальной функцией $\varphi(x)$ при $t = 0$.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{R}^1$. Тогда функция $u(x,t)$, определенная по формуле (3), бесконечно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0$, и удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$. Кроме того, эта функция непрерывна при $t \geq 0$, удовлетворяет условию (2) и неравенству*

$$|u(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)|.$$

Доказательство. Для любой точки (x_0, t_0), где $t_0 > 0$ найдется ее окрестность, где $t \geq \gamma > 0$, $|x| < m$. Для точек из этой окрестности интеграл (3) равномерно сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз. Прямым дифференцированием убеждаемся, что функция $G(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} &= -\frac{1}{2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^2t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{(x-y)}{2a^2t}G, \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2a^2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^4t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, функция (3) также удовлетворяет уравнению (1).

Заметим, что $G(x, y, t) > 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t)dy = 1.$$

Поэтому,

$$|u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t)dy = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\varphi(x)|. \tag{4}$$

Осталось проверить, что $u(x, t)$ непрерывна при $t = 0$. Рассмотрим произвольную точку $(z, 0)$ и проверим, что

$$u(x,t) - \varphi(z) \to 0 \quad \text{при } x \to z,\ t \to 0+\,.$$

Возьмем разность

$$\begin{aligned}
u(x,t) - \varphi(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy - \varphi(z)\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)[\varphi(y) - \varphi(z)]dy.
\end{aligned}$$

Пусть $|\varphi(x)| \leq M$. Оценим разность $u(x,t) - \varphi(z)$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)[\varphi(y) - \varphi(z)]dy\right| &\leq \left|\int_{|y-z|<\delta} G(x,y,t)[\varphi(y) - \varphi(z)]dy\right| + \\
&+ \left|\int_{|y-z|\geq\delta} G(x,y,t)[\varphi(y) - \varphi(z)]dy\right|.
\end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, так, что

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon/2 \quad \text{при } |y - z| < \delta.$$

Тогда

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \leq \varepsilon/2 + \int_{|y-z|\geq\delta} 2M \cdot G(x,y,t)dy. \tag{5}$$

Если теперь $|x-z|<\delta/2$ и $|y-z|\geq\delta$, то $|y-x|\geq\delta/2$. Следовательно,

$$2M\int_{|y-z|\geq\delta}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy<\frac{2M}{\sqrt{\pi t}}\int_{\delta/2}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{4a^2t}}ds=M_1\int_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma. \tag{6}$$

В последнем равенстве мы сделали замену переменной $s=2a\sqrt{t}\sigma$. Константа M_1 не зависит от t.

Выберем, наконец, малое число $\mu=\mu(\delta)>0$ так, чтобы при $0<t<\mu$ выполнялось

$$M_1\int_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\leq M_1\int_{\frac{\delta}{4a\sqrt{\mu}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\leq\varepsilon/2.$$

Тогда из оценок (5) и (6) заключаем, что

$$|u(x,t)-\varphi(z)|\leq\varepsilon\quad\text{при } |x-z|<\delta/2,\ 0<t<\mu.$$

Следовательно, $u(x,t)\to\varphi(z)$ при $x\to z,\ t\to 0+$. Теорема доказана. ■

Таким образом, мы разобрались с задачей Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций. Мы доказали для этого уравнения теорему о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

§3. Многомерное уравнение теплопроводности

Приведенная выше теория легко обобщается на многомерный случай:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Здесь $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа. Предполагается, что $\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^n)$ и φ ограниченная функция.

Формула Пуассона для $\mathbb{R}^n$ выглядит следующим образом:

$$u(x,t)=\left(\tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2}\varphi(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}G_n(x-y,t)\varphi(y)dy. \tag{8}$$

Здесь

$$G_n(z,t)=\left(\tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-\frac{1}{4a^2t}|z|^2}\ \text{– ядро Пуассона в } \mathbb{R}^n.$$

Как и в одномерном случае легко убедится в том, что при $t\geq\gamma>0$ интеграл (8) абсолютно и равномерно сходится, а функция $u(x,t)$ является бесконечно дифференцируемой по x и t (и даже аналитической в этой области).

Легко проверить, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (7), поскольку ему удовлетворяет *функция Грина* $G(x,y,t)=G_n(x-y,t)$ этой задачи. Действительно, найдем производные этой функции:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-\frac{n}{2t}G+\tfrac{|x-y|^2}{4a^2t^2}G,\quad \frac{\partial G}{\partial x_i}=-\frac{(x_i-y_i)}{2a^2t}G,$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{2a^2t}G+\frac{(x_i-y_i)^2}{4a^2t^2}G,\quad \frac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta G.$$

Аналогично одномерному случаю проверяется, что функция $G(x,t)$ непрерывна при $t = 0$ и для любого $z \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \ \to 0 \quad \text{при } x \to z, \ t \to 0+,$$

следовательно, $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$.

Единственность решения задачи Коши (7) в классе ограниченных функций доказывается как и в одномерном случае с помощью принципа максимума, который имеет ту же формулировку, что и при $n = 1$. (Докажите это самостоятельно).

Отметим, что многомерная функция Грина $G(x,y,t)$ имеет тот же физический смысл, что и для случая $n = 1$. Функцию $G(x,y,t)$ следует интерпретировать как температуру в точке $x \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t > 0$ при условии, что в точке $y \in \mathbb{R}^n$ выделилось единичное количество тепла.

Как и в одномерном случае, можно выписать формулу решения начальной задачи для *неоднородного* уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

если известно, что $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ и $f(x,t)$ ограничена на $\{x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le T\}$. Эта формула имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x-y, t-\tau) \varphi(y) \ dy \ d\tau.$$

(Доказательство приводить не будем. Оно основано на общем принципе Дюамеля, с помощью которого решаются неоднородные линейные уравнения.)

Лекция 14 (30 апреля 2019)

§1. Уравнение теплопроводности на полупрямой

Формулу Пуассона легко обобщить для случая задачи на полупрямой (полуплоскости, полупространства). Пусть требуется найти решение смешанной краевой задачи (1), (2) ($n = 1$) на полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$ при $t \geq 0$. При этом на границе $\{x = 0\}$ задано одно из следующих граничных условий

$$u|_{x=0} = 0 \tag{1}$$

(условие первого рода, температура стержня на конце равна нулю) или

$$u_x|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

(условие второго рода, конец стержня теплоизолирован).

Обе эти задачи легко сводятся к задаче Коши на всей оси $\mathbb{R}$. Заметим, что для непрерывной нечетной функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, всегда $g(0) = 0$, а для дифференцируемой четной функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, выполнено $g_x(0) = 0$.

Поэтому, при граничном условии (1) (непрерывную) начальную функцию $\varphi(x), x \geq 0$ (которая также должна удовлетворять этому граничному условию $\varphi(0) = 0$) продолжаем при $x \leq 0$ нечетным образом:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

а при граничном условии (2) (дифференцируемую) начальную функцию $\varphi(x), x \geq 0$ (для которая также $\varphi_x(0) = 0$) продолжаем при $x \leq 0$ четным образом:

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Затем рассматриваем задачу Коши для уравнения теплопроводности на всей оси с продолженными начальными условиями и выписываем формулу Пуассона.

При нечетном продолжении получаем, что

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+0} e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} \left[-\varphi(-y)\right] dy + \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} \varphi(y) dy =$$
$$= \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} - e^{-\frac{1}{4a^2t}|x+y|^2}\right] \varphi(y) dy.$$

Легко видеть, что $u(x,t)$ – нечетная по x функция и выполнено граничное условие (1).

При четном продолжении

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+0} e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} \left[\varphi(-y)\right] dy + \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} \varphi(y) dy =$$
$$= \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} + e^{-\frac{1}{4a^2t}|x+y|^2}\right] \varphi(y) dy.$$

Видно, что эта функция является нечетной по x и выполнено граничное условие (2).

Мы построили решения задач (1), (2), (1) и (1), (2), (2). Единственность решений этих задач доказывается с помощью принципа максимума.

Замечание. Обратите внимание на то, как выглядит функция Грина для этих задач, например, для первой краевой задачи

$$G(x,y,t) = e^{-\frac{1}{4a^2t}|x-y|^2} - e^{-\frac{1}{4a^2t}|x+y|^2},\ x,y \geq 0,\ t \geq 0.$$

Как и положено, эта функция положительная при $x > 0,\ x \neq y$.

Для пространств большей размерности ситуация точно такая же: если на границе полупространства $\{x_n \geq 0\}$ задано условие $u = 0$, то начальную функцию $\varphi(x)$ следует продолжать нечетным образом при $x_n < 0$, а если условие имеет вид $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$, то – четным. Затем решается соответствующая задача Коши во всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

§2. Уравнения, корректные по Петровскому

Продолжим применение преобразования Фурье. Будем изучать уравнения и системы с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим оператор дифференцирования $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Пусть $P(z)$ – некоторый полином переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Тогда $P(D)$ обозначает линейный дифференциальный оператор, $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$.

Пример. Пусть $P(z) = z_1^2 + 5iz_2z_3 + 7z_4,\ n = 4$. Тогда

$$P(D) = D_1^2 + 5iD_2D_3 + 7D_4,\ P(D)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 5i\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + 7\frac{\partial u}{\partial x_4}.$$

Уравнение теплопроводности запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad P(D) = a^2 \sum_{j=1}^{n} D_j^2.$$

Для произвольного полинома $P(z)$ рассмотрим задачу Коши для общего линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{4}$$

Определение 1 *Уравнение (3) называется* корректным по Петровскому*, если существует константа $M \in \mathbb{R}$, такая, что для любого вещественного вектора $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re} P(is) \leq M.$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(x)$ принадлежит классу Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что в этом случае для корректных по Петровскому уравнений решение задачи (3), (4) можно построить, прибегнув к преобразованию Фурье. Напомним, что

$$\tilde{u}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,s)} u(x)dx, \quad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)} \tilde{u}(s)ds \text{ (обратное преобразование).}$$

Как известно, преобразование Фурье от производных

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,s)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)dx = (-is_j)\tilde{u}(s,t),$$
$$\widetilde{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}} = (-is_j)(-is_k)\tilde{u}(s,t), \quad \widetilde{P(D)u} = P(-is)\tilde{u}.$$

Умножим обе части уравнения (3) на $e^{i(x,s)}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Поучим ОДУ с параметром s:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(s,t) = P(-is)\tilde{u}(s,t),$$

Поскольку $\tilde{u}(s,0) = \tilde{\varphi}(s)$, получаем решение этого уравнения

$$\tilde{u}(s,t) = \tilde{\varphi}(s)e^{P(-is)t},$$

и, следовательно,

$$u(x,t) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)}\tilde{u}(s,t)ds = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)} e^{P(-is)t}\tilde{\varphi}(s)ds. \tag{5}$$

Из условия корректности по Петровскому заключаем, что

$$\left|e^{-i(x,s)+P(-is)t}\right| = e^{\operatorname{Re} P(-is)t} \leq e^{Mt}, \quad \forall x, s \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0.$$

Поэтому интеграл в правой части (5) абсолютно и равномерно (по $x \in \mathbb{R}^n$) сходится, т.к., по предположению $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Более того, его можно дифференцировать по x и по t любое число раз. В частности,

$$P(D)u = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P(-is)e^{-i(x,s)}e^{P(-is)t}\tilde{\varphi}(s)ds,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P(-is)e^{-i(x,s)}e^{P(-is)t}\tilde{\varphi}(s)ds.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3), и, очевидно, что

$$u(x,0) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)}\tilde{\varphi}(s)ds = \varphi(x),$$

так как $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Значит, $u(x,t)$ – решение задачи (3), (4).

Пример 1. Для уравнения теплопроводности

$$P(D) = a^2(D_1^2 + \ldots + D_n^2), \quad P(is) = -a^2(s_1^2 + \ldots + s_n^2) = -a^2|s|^2 \leq 0, \ M = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} P(is) \leq 0$ при всех $s \in \mathbb{R}^n$, т.е., уравнение теплопроводности корректно по Петровскому.

Пример 2. Уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ia^2\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Для этого уравнения

$$P(is) = ia^2((is_1)^2 + \ldots + (is_n)^2) = -ia^2|s|^2, \quad \operatorname{Re} P(-is) \equiv 0,$$

т.е., чисто мнимый случай. Уравнение Шредингера также корректно по Петровскому.

Найдем формулу для решения уравнения Шредингера для случая $n = 1$. Из общей формулы решения (5) получаем

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x,s)} e^{-ia^2 s^2 t} \tilde{\varphi}(s) ds = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs - ia^2 s^2 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iys} \varphi(y) dy \right] ds =$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ia^2 s^2 t - is(x-y)} ds \right] dy.$$

В последнем равенстве мы поменяли порядок интегрирования, что законно, так как $\varphi \in S$. Внутренний интеграл можно сосчитать явно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(a^2 s^2 t + s(x-y))} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ia^2 t \left(s + \tfrac{x-y}{2a^2 t} \right)^2 + i \tfrac{(x-y)^2}{4a^2 t} \right) ds =$$
$$= e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ia^2 t \left(s + \frac{x-y}{2a^2 t} \right)^2} ds = e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ia^2 t z^2} ds = e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \tfrac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^2} d\xi.$$

В последней строчке мы сделали две очевидные замены переменных: $z = s + \frac{x-y}{2a^2 t}$, $dz = ds$ и $\xi = a\sqrt{t} z$, $d\xi = a\sqrt{t} dz$. Наконец, воспользовавшись табличным интегралом Френеля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

получаем окончательную формулу для решения

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy.$$

Можно еще раз убедиться путем непосредственной подстановки в уравнение в том, что эта функция действительно удовлетворяет уравнению (3), если $\varphi \in S$.

Пример 3. Обратное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

В этом случае

$$P(D) = -a^2(D_1^2 + \ldots + D_n^2), \quad P(is) = a^2(s_1^2 + \ldots + s_n^2) = a^2|s|^2.$$

Условие корректности по Петровскому, очевидно, не выполнено.

§2. Системы УрЧП, корректные по Петровскому

Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Здесь $u = u(x,t) = (u^1(x,t), \dots, u^l(x,t))^T$ – неизвестная вектор-функция, $P(D)$ – матрица $l \times l$, элементами которой являются полиномами от оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами. Делаем, как обычно, преобразование Фурье от обеих частей (6):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(s,t) = P(-is)\tilde{u}(s,t), \quad \tilde{u}(s,0) = \tilde{\varphi}(s), \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где $P(-is)$ – матрица $l \times l$, элементами которой являются полиномы от параметра $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\tilde{u}(s,t) = e^{P(-is)}\tilde{u}(s,0) = e^{P(-is)}\tilde{\varphi}(s). \tag{7}$$

Здесь $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ – экспонента от матрицы A.

Определение 2 *Система (6) называется корректной по Петровскому, если найдется число M, что для любого $s \in \mathbb{R}^n$ все собственные значения $\lambda_k(s)$ матрицы $P(is)$ удовлетворяют неравенству*

$$\operatorname{Re}\lambda_k(s) \le M.$$

Пример 1. Уравнение упругих колебаний струны эквивалентно системе

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial t} = a\frac{\partial u^2}{\partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} = a\frac{\partial u^1}{\partial x} \end{array}, \quad P(D) = \begin{pmatrix} 0 & aD \\ aD & 0 \end{pmatrix}, \quad P(is) = \begin{pmatrix} 0 & ias \\ ias & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\lambda^2 - i^2(as)^2 = \lambda^2 + (as)^2$. Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = \pm ias$. Система корректна по Петровскому.

Пример 2. Система Коши-Римана

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} = -\frac{\partial u^1}{\partial x} \end{array}, \quad P(D) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad P(is) = \begin{pmatrix} 0 & is \\ -is & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\lambda^2 + i^2 s^2 = \lambda^2 - s^2$. Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = \pm s$. Система не корректна по Петровскому.

Пример 3. Волновое уравнение на плоскости

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u^1}{\partial t} = a\frac{\partial u^2}{\partial x_1} + a\frac{\partial u^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} = a\frac{\partial u^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^3}{\partial t} = a\frac{\partial u^1}{\partial x_2} \end{array}, \ P(D) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 \\ D_1 & 0 & 0 \\ D_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P(is) = \begin{pmatrix} 0 & ias_1 & ias_2 \\ ias_1 & 0 & 0 \\ ias_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $-\lambda^3 + \lambda(ias_1)^2 + \lambda(ias_2)^2 = -\lambda^3 + \lambda a^2|s|^2$. Собственные значения матрицы $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm ias$. Система корректна по Петровскому.

Решение задачи Коши для системы (6), корректной по Петровскому, получается из (7) после обращения преобразования Фурье:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)} e^{P(-is)t} \tilde{\varphi}(s) ds = \tag{8}$$

$$= \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,s)} e^{P(-is)t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,s)} \varphi(y) ds. \tag{9}$$

Этот интеграл сходится абсолютно и равномерно для любого $\varphi \in S$, в силу следующей оценки:

$$\left\| e^{P(-is)t} \right\| \le M_1 \left(1 + |s|^{2m}\right)(1 + t^{2m}) e^{Mt},$$

где m – некоторое натуральное число. Это неравенство вытекает из условия корректности по Петровскому: $\operatorname{Re} \lambda_k(s) \le M$ для всех собственных значений $\lambda_k(s)$ матрицы $P(is)$.

Если $\varphi \in S$, то формулу (8) можно дифференцировать по t и по x, и легко проверяется (как и для одного уравнения), что $u(x,t)$ является решением задачи (6).

Для некоторых системы можно (аналогично решениям уравнений теплопроводности и Шредингера) поменять в (9) порядок интегрирования и записать решение в виде

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y,t) \varphi(y) dy,$$

где

$$G(x,y,t) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x,s)} e^{P(-is)t} ds \quad \text{(функция Грина задачи)}.$$

Этот интеграл не всегда сходится (он является обобщенной функцией), поэтому с его помощью бывает трудно получить явные формулы для решения задачи Коши изучаемой системы. Например, это происходит для волнового уравнения на плоскости и в пространстве. В следующих лекциях мы построим формулы для решений волновых уравнений, не применяя преобразование Фурье и теорию обобщенных функций.

Лекция 15 (14 мая 2019)

§1. Обобщенные производные по Соболеву

Нам понадобится формула интегрирования по частям, которая выводится из формулы Гаусса-Остроградского. Напомним ее. Пусть $P \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда имеет место тождество

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_k}(x)dx = \int_{\partial\Omega} P(x)\nu_k ds, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_1, \dots, \nu_n)$ – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$, ds – элемент площади на $\partial\Omega$.

Формула интегрирования по частям. Пусть заданы две функции $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, тогда

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \cdot v(x)dx = -\int_\Omega u(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k}(x)dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot v)\nu_k ds. \tag{1}$$

Пусть теперь имеются функции $u \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е.,

$$\operatorname{supp} \varphi := \{x \mid \varphi(x) \neq 0\} \subset \Omega.$$

Подставим в (1) $v = \varphi$ и получим

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \cdot \varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)dx, \quad (\text{так как} \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0). \tag{2}$$

Аналогично, если $u \in C^k(\bar{\Omega})$, то, применяя достаточно раз формулу (2), получаем тождество

$$\int_\Omega D_x^\alpha u(x) \cdot \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \cdot D_x^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_+^n, \ |\alpha| \le k, \tag{3}$$

которое справедливо для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Напомним, что в формуле (3)

$$D_x^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |a| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Тождества (2) и (3) можно принять за определения обобщенных частных производных $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ и $D_x^\alpha u(x)$ в тех случаях, когда обычных (непрерывных) производных может не существовать.

Определение 1 *Пусть $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, т.е., функция $u(x)$ суммируема по Лебегу на любом компакте $K \Subset \Omega$. Функция $v \in L_1^{loc}(\Omega)$ называется* обобщенной производной $u(x)$ в области Ω *и обозначается $v = D_x^\alpha u$, если для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено равенство*

$$\int_\Omega v(x) \cdot \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \cdot D_x^\alpha \varphi(x)dx \tag{4}$$

Утверждение 1 *Если $u \in C^k(\bar{\Omega})$, то функция $u(x)$ имеет все обобщенные производные $D_x^\alpha u(x)$ в области Ω до порядка k, которые совпадают с обычными частными производными.*

Утверждение 2 *Любая функция $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ имеет не более одной обобщенной производной $v = D_x^\alpha u$.*

Доказательство. Действительно, если имеется две такие функции v_1 и v_2, то из (4) для $v = v_1 - v_2$ следует, что

$$\int_\Omega v(x) \cdot \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отсюда, приближая функцию $v(x)$ ступенчатыми функциями, можно показать по теореме Лебега, что $v = 0$ почти всюду в Ω, т.е., $v_1(x) = v_2(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. ■

Заметим, что старшие обобщенные производные определяются независимо от младших, т.е., например, может существовать обобщенная производная второго порядка $D_{x_1 x_2} u$, но нет обобщенных производных первого порядка $D_{x_1} u$ и $D_{x_2} u$.

Пример. Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) \quad | \quad |x_1| < 1, \ |x_2| < 1 \}$. Рассмотрим функцию $u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, где $f(x)$ – это функция Веерштрасса, т.е, она непрерывна и нигде не дифференцируема. Легко проверить, что $D_{x_1 x_2} u$ существует и равна нулю. Действительно,

$$\int_\Omega \left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) \right] D_{x_1 x_2} \varphi \ dx_1 dx_2 = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

поскольку

$$\int_\Omega f\left(x_1\right) D_{x_1 x_2} \varphi \ dx_1 dx_2 = \int_\Omega f\left(x_1\right) D_{x_1} D_{x_2} \varphi \ dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 f(x_1) \int_{-1}^1 D_{x_1} D_{x_2} \varphi \ dx_2 dx_1 =$$
$$= \int_{-1}^1 f(x_1) \left[D_{x_1} \varphi(x_1, 1) - D_{x_1} \varphi(x_1, -1) \right] dx_1 = 0.$$

Аналогично проверяем, что

$$\int_\Omega f\left(x_2\right) D_{x_1} D_{x_2} \varphi dx_1 dx_2 = 0.$$

Необходимо также убедиться в том, что функция Веерштрасса не имеет обобщенную производную. Оставляем это в качестве упражнения.

§2. Пространства Соболева

Будем рассматривать функции $u \in L_2(\Omega)$, у которых имеются все обобщенные производные первого порядка. По определению функция $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, если

$$\int_\Omega v_i(x) \cdot \varphi(x) dx = - \int_\Omega u(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Напомним, что гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ состоит из функций, интегрируемых в квадрате по Лебегу в области Ω. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ задаются по следующим формулам. Если $u, v \in L_2(\Omega)$, то

$$(u,v) := \int_\Omega u(x)\cdot v(x)dx, \quad \|u\|_0 := (u,u)^{1/2} = \left(\int_\Omega u(x)\cdot v(x)dx\right)^{1/2}.$$

Определение 2 *Пространство Соболева $H^1(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_2(\Omega)$, у которых есть все обобщенные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1,2,\ldots,n$, принадлежащие $L_2(\Omega)$.*

Пространство $H^1(\Omega)$ также является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$[u,v]_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega u\cdot v\ dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx.$$

Норма в $H^1(\Omega)$ задается формулой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega u^2\ dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \tag{5}$$

$$= \left(\|u\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_0^2\right)^{1/2} = \left(\|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2\right)^{1/2},$$

где $\|\nabla u\|_0$ – это норма в $L_2(\Omega)$ вектор-функции $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$.

Утверждение 3 *Пространство $H^1(\Omega)$ является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $H^1(\Omega)$ произвольную фундаментальную последовательность $\{u_m\}$, т.е., у каждой функции $u_m(x)$ имеются все обобщенные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$. Тогда, очевидно, что каждая последовательность $\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\}$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$. Из полноты пространства $L_2(\Omega)$ следует, что найдутся функции $u, v_1, \ldots, v_n$ из $L_2(\Omega)$, такие, что

$$\|u_m - u\|_0 \to 0, \quad \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i} - v_i\right\|_0 \to 0 \quad (m\to\infty). \tag{6}$$

Проверим, что $u \in H^1(\Omega)$. Действительно, для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x)\cdot\varphi(x)dx = -\int_\Omega u_m(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx.$$

В силу (6) интеграл справа стремится к $\int_\Omega u(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx$, а интеграл слева сходится к $\int_\Omega v_i(x)\cdot\varphi(x)dx$. Следовательно, предельные интегралы также равны:

$$\int_\Omega v_i(x)\cdot\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx$$

для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е., функция $v_i(x)$ является обобщенной производной функции $u(x)$ в области Ω. Тогда из (6) заключаем, что

$$\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Значит, любая фундаментальная последовательность в $H^1(\Omega)$ сходится и, тем самым доказана полнота этого пространства. ■

Имеется еще одно удобное описание пространства $H^1(\Omega)$.

Утверждение 4 *Пространство $H^1(\Omega)$ получается из пространства $C^1(\bar{\Omega})$ замыканием по норме (5).*

Доказательство. Легко проверить, что $C^1(\bar{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$. Аналогично предложению 3. В обратную сторону вложение доказывается с помощью процедуры регуляризации. Для любой функции $u \in H^1(\Omega)$ строится сглаженная функция $u_\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ при любом $\varepsilon > 0$, такая, что

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

(Эту часть доказательства мы не приводим). ■

Нам понадобиться еще одно пространство Соболева.

Определение 3 *Пространство $H_0^1(\Omega)$ есть замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (5) пространства $H^1(\Omega)$.*

Как видим, имеется цепочка вложений:

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega).$$

Скалярное произведение и норма в $H_0^1(\Omega)$ индуцируется из $H^1(\Omega)$. Однако, в $H_0^1(\Omega)$ можно ввести и другую норму, эквивалентную исходной,

$$\|u\|_1 := \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \|\nabla u\|_0\,, \tag{7}$$

а также соответствующее скалярное произведение

$$[u, v] := \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Лемма 1 ***(Неравенство Фридрихса)****. Существует константа $C = C(\Omega)$, такая, что*

$$\int_\Omega u^2\, dx \le C \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{9}$$

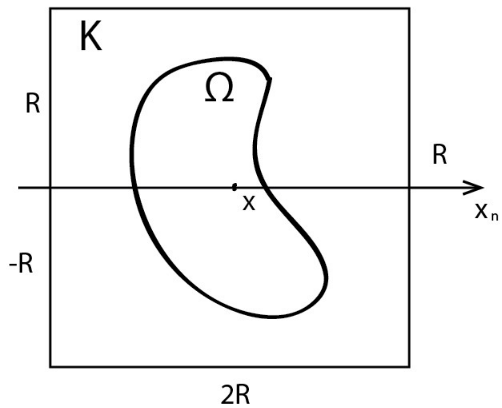

Рис. 1:

Доказательство. Достаточно проверить это неравенство лишь для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Поместим область Ω в куб $K = \{x \quad | \quad |x| < 2R\}$. (См. рис.1).

Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $u \equiv 0$ вне куба K, т.е., $u \in C_0^\infty(K)$. Рассмотрим ось x_n и запишем по формуле Ньютона-Лейбница

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \int_{-R}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n.$$

Возведем обе части в квадрат и применим неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 \quad &\leq \quad \int_{-R}^{x_n} 1^2 \, d\xi_n \cdot \int_{-R}^{x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \right)^2 d\xi_n \leq \\ &\leq \quad 2R \cdot \int_{-R}^{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \right)^2 d\xi_n. \end{aligned}$$

Теперь интегрируем получившееся неравенство по переменным $(x_1, \dots, x_{n-1}) = x'$:

$$\int_{\mathbb{R}_{x'}} |u(x', x_n)|^2 dx' \leq 2R \int_{\mathbb{R}_{x'}} \int_{-R}^{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', \xi_n) \right)^2 d\xi_n dx' = 2R \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^2 dx.$$

Выражение справа не зависит от x_n. Интегрируем получившееся неравенство по x_n на интервале $(-R, R)$ и получаем

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^2 dx \leq 4R^2 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx.$$

Неравенство Фридрихса установлено. ■

Следствие 1 *Для любой функции* $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_0^2 \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_0^2, \quad C(\Omega) = 4R^2.$$

Заключаем, что норма в $H_0^1(\Omega)$ эквивалентна $\|\nabla u\|_0 = \|u\|_1$. Действительно,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 \le (C(\Omega)+1)\|\nabla u\|_0^2 = (C(\Omega)+1)\|u\|_1^2.$$

В обратную сторону, очевидно,

$$\|u\|_1^2 = \|\nabla u\|_0^2 \le \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Лекция 16 (21 мая 2019)

§1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

Мы будем искать обобщенное решение уравнения Пуассона при нулевых граничных условиях:

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Напомним, что классическим решением этой задачи называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, которая удовлетворяет (1) и (2). При этом предполагается, что $f \in C(\Omega)$.

Утверждение 1 *Пусть функция $u \in C^2(\bar{\Omega})$ удовлетворяет уравнения, причем $f \in C(\bar{\Omega})$. Тогда для любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство*

$$[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0, \tag{3}$$

где $[\cdot,\cdot]$ обозначает скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из (1) следует, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено

$$\int_\Omega \varphi \cdot \Delta u \; dx = \int_\Omega \varphi \cdot f \; dx.$$

Выражение слева интегрируем по частям один раз (это законно даже без дополнительных условий гладкости на границе, т.к., реальное интегрирование ведется по подобласти $\Omega_1 : \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ вне которой $\varphi = 0$). В результате получаем

$$-\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \varphi \cdot f \; dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Вспоминаем формулу скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$ и получаем

$$-[u, \varphi] = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

При этом очевидно, что $u \in H^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Заметим, что скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$ и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ непрерывно зависят от функции φ в норме пространства $H_0^1(\Omega)$. Поэтому тождество (4) продолжается на все пространство $H_0^1(\Omega)$, т.е., (4) выполнено при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. ■

Замечание. В утверждении 1 достаточно требовать, что $u \in C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ и $f \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$.

Теперь мы в задаче (1) и (2) заменим уравнение (1) на тождество (4), а граничное условие (2) заменим на условие принадлежности функции u пространству $H_0^1(\Omega)$.

Определение 1 *Функция* $u \in H_0^1(\Omega)$ *называется* обобщенным решением *задачи Дирихле (1) и (2), где* $f \in L_2(\Omega)$, *если*

$$[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Утверждение 2 *Классическое решение задачи (1) и (2) при* $f \in C(\bar{\Omega})$ *является ее обобщенным решением.*

Действительно, если $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ – классическое решение, то из условия $u|_{\partial\Omega} = 0$ выводится, что $u \in H_0^1(\Omega)$ (доказательство опускаем). Поэтому, в силу сделанного выше замечания, классическое решение удовлетворяет (5).

Теорема 1 *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$. *Обобщенное решение задачи (1) и (2) существует, единственно, а задача (1) и (2) является корректной по Адамару.*

Доказательство. При фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ линейный функционал

$$\ell(\varphi) = -(f, \varphi)$$

непрерывен по φ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Действительно, по неравенствам Коши-Буняковского и Фридрихса:

$$|\ell(\varphi)| \le \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \le \|f\|_0 \cdot \sqrt{C}\|\varphi\|_1.$$

Из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует существование единственного элемента $u \in H_0^1(\Omega)$, такого, что

$$[u, \varphi] = \ell(\varphi) = -(f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Полученное тождество совпадает с (5) из определения обобщенного решения.

Существование доказали. Докажем единственность обобщенного решения. Пусть есть два решения: $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$[u_1, \varphi] = [u_2, \varphi] = -(f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Следовательно,

$$[u_1 - u_2, \varphi] = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

и в частности при $\varphi = u_1 - u_2$, т.е.,

$$[u_1 - u_2, u_1 - u_2] = \|u_1 - u_2\|_1^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 = u_2.$$

Докажем устойчивость обобщенного решения при малых изменениях функции f. Подставим в равенство (5) функцию $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$ и получим

$$\|u\|_1^2 = -(f, u) \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_1^2 \le \|f\|_0 \cdot \|u\|_0 \le \|f\|_0 \cdot \sqrt{C}\|u\|_1 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \qquad \|u\|_1 \le \sqrt{C}\|f\|_0.$$

Поэтому, если $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ в $L_2(\Omega)$, то соответствующие решения $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ в $H_0^1(\Omega)$. ■

§2. Вариационный метод решения задачи Дирихле

Покажем, как можно решить задачу (1) и (2) по-другому с помощью так называемого вариационного метода. При фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$ рассматривается квадратичный функционал

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}[u, u] + (f, u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + (f, u).$$

Мы хотим минимизировать этот функционал, т.е., найти

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \Phi(u). \tag{6}$$

Докажем сначала ряд свойств $\Phi(u)$.

Утверждение 3 *Функционал $\Phi(u)$ непрерывен в $H_0^1(\Omega)$.*

С очевидностью следует из определения этого функционала.

Утверждение 4 *Функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу в пространстве $H_0^1(\Omega)$.*

Доказательство. Воспользуемся элементарным числовым неравенством

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0,$$

и получим

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + (f, u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \|u\|_0 \cdot \|f\|_0 \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2.$$

Применим неравенство Фридрихса: $\|u\|_0^2 \leq C\|u\|_1^2$. Имеем тогда неравенство

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{\varepsilon C}{2}\|u\|_1^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2.$$

Выберем $\varepsilon: \ \varepsilon C \leq 1$ и получим, что

$$\Phi(u) \geq -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

Следовательно, функционал $\Phi(u)$ имеет точную нижнюю грань на $H_0^1(\Omega)$:

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \Phi(u) = \mu.$$

Утверждение 5 *Если u^* является точкой минимума $\Phi(u)$, т.е., $\Phi(u^*) = \mu$, то u^* – обобщенное решение задачи Дирихле (1) и (2).*

Доказательство. Пусть $\Phi(u^*) = \mu$. Тогда для любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Phi(u^* + \alpha\varphi) \geq \mu = \Phi(u^*).$$

Раскроем выражение в левой части этого неравенства:

$$\begin{aligned}
\Phi(u^* + \alpha\varphi) &= \frac{1}{2}[u^* + \alpha\varphi, u^* + \alpha\varphi] + (f, u^* + \alpha\varphi) = \\
&= \frac{1}{2}[u^*, u^*] + \alpha[u^*, \varphi] + \frac{\alpha^2}{2}[\varphi, \varphi] + (f, u^*) + \alpha(f, \varphi) = \\
&= \left\{\frac{1}{2}[u^*, u^*] + (f, u^*)\right\} + \alpha\left\{[u^*, \varphi] + (f, \varphi)\right\} + \frac{\alpha^2}{2}[\varphi, \varphi].
\end{aligned}$$

В первых фигурных скобках стоит $\Phi(u^*)$. Тогда

$$0 \leq \Phi(u^* + \alpha\varphi) - \Phi(u^*) = \frac{\alpha^2}{2}[\varphi, \varphi] + \alpha\left\{[u^*, \varphi] + (f, \varphi)\right\}.$$

Это неравенство имеет место для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Это возможно лишь когда

$$[u^*, \varphi] + (f, \varphi) = 0.$$

Напомним, что φ – любая функция из $H_0^1(\Omega)$. Значит, u^* – обобщенное решение задачи Дирихле (1) и (2). ■

Утверждение 6 *Если u^* является обобщенным решением (1) и (2), то $\Phi(u)$ достигает минимума в точке u^*, причем минимум строгий (т.е., единственный).*

Доказательство. В предыдущей выкладке возьмем $\alpha = 1$ и получим

$$\Phi(u^* + \varphi) - \Phi(u^*) = \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \left\{[u^*, \varphi] + (f, \varphi)\right\}.$$

Раз u^* – обобщенное решение, значит

$$[u^*, \varphi] + (f, \varphi) = 0, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Следовательно,

$$\Phi(u^* + \varphi) - \Phi(u^*) = \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = \frac{1}{2}\|\varphi\|_1^2, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Поэтому,

$$\Phi(u^* + \varphi) > \Phi(u^*), \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \neq 0.$$

■

Из предложений 5 и 6 вытекает эквивалентность задачи Дирихле (в смысле определения 1) и вариационной задачи (6). Мы уже доказали в теореме 1 существование и единственность обобщенного решения задачи 5 и 6. Приведем еще одно доказательство, которое имеет самостоятельную ценность.

Последовательность $u_n \in H_0^1(\Omega)$ называется *минимизирующей*, если

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \mu = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \Phi(u).$$

Утверждение 7 *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ сходится в $H_0^1(\Omega)$.*

Доказательство. Покажем, что любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ является фундаментальной в $H_0^1(\Omega)$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_1^2 = \left\|\frac{u_n + u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2,$$

которое справедливо в любом гильбертовом пространстве (чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть скобки справа). Тогда получаем

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 + (f, u_n) + \frac{1}{2}\|u_m\|_1^2 + (f, u_m) = \\ &= \left\|\frac{u_n + u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2 + 2\left(f, \frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2.\end{aligned}$$

Известно, что $\Phi(u_n) \to \mu$ $(n \to \infty)$, т.е., для любого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства $\Phi(u_n) < \mu + \varepsilon$ и $\Phi(u_m) < \mu + \varepsilon$, если $n, m \geq N(\varepsilon)$. Но с другой стороны, $\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) \geq \mu$, так как μ – это точная нижняя грань функционала $\Phi(u)$ на $H_0^1(\Omega)$. Следовательно,

$$\begin{gathered}2\mu + 2\varepsilon > \Phi(u_n) + \Phi(u_m) = 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2 \geq \\ \geq 2\mu + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2 \quad \Longrightarrow \quad \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|_1^2 \leq 2\varepsilon,\end{gathered}$$

т.е., $\|u_n - u_m\|_1^2 \leq 8\varepsilon$, если $n, m \geq N(\varepsilon)$, и, тем самым, последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $H_0^1(\Omega)$, а значит она имеет предел в силу полноты пространства $H_0^1(\Omega)$. ■

Утверждение 8 *Предел минимизирующей последовательности является решением вариационной задачи (6).*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ – минимизирующая последовательность и u^* – это ее предел в $H_0^1(\Omega) : u_n \to u^*$ $(n \to \infty)$. В силу непрерывности функционала Φ

$$\Phi(u^*) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \mu = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \Phi(u),$$

т.е., в точке u^* достигается точная нижняя грань функционала Φ. ■

Утверждение 9 *Пределы u_1 и u_2 любых минимизирующих последовательностей совпадают (эквивалентно: решение вариационной задачи единственно).*

Доказательство. Пусть $\mu = \Phi(u_1) = \Phi(u_2)$. Построим следующую минимизирующую последовательность:

$$u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$$

(очевидно, что она минимизирующая). Значит, в силу утверждения 7 она сходится в $H_0^1(\Omega)$. Однако это возможно только если $u_1 = u_2$. ■

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 2 *Решение вариационной задачи (6) существует, единственно и оно совпадает с обобщенным решением задачи Дирихле (1) и (2). К этому решению сходится любая минимизирующая последовательность функционала Φ.*

Аналогично можно решать задачу Дирихле с неоднородными (т.е., с ненулевыми) граничными условиями

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi, \quad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Обобщенное решение этой задачи ищется теперь во всем пространстве $H^1(\Omega)$. Предполагается, что $f(x) \in L_2(\Omega)$ и $\psi(x) \in H^1(\Omega)$ (т.е., функция ψ продолжается как-то внутрь области Ω).

Определение 2 *Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется* обобщенным решением *задачи (7) и (8), если*

$$\begin{gathered} u - \psi \in H_0^1(\Omega), \\ [u, \varphi] + (f, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{gathered} \tag{9}$$

Решение этой задачи строится следующим образом. Вводится новая неизвестная функция $v = u - \psi$. Тогда тождество (9) переписывается в виде

$$[v, \varphi] = -[\psi, \varphi] - (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{10}$$

Находим функцию $v \in H_0^1(\Omega)$, которая удовлетворяет (10). Тогда, очевидно, что $u = v + \psi$ будет обобщенным решением задачи (7) и (8). Задачу (10) решают по теореме Рисса или вариационным методом, минимизируя соответствующий квадратичный функционал.