Ученые записки ИГПИ, 1973 г. т.125
Логика. Алгебра. Вычислительная математика.
Труды объединения математических кафедр пед. институтов Центральной зоны РСФСР. Т.2, вып.2

С.Р.КОГАЛОВСКИЙ и М.А.РОРЕР

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ПОНЯТИЯ ОПРЕДЕЛИМОСТИ

Одним из фундаментальных теоретико-модельных понятий является понятие определимости отношения в структуре. Естественен вопрос: определимо ли в структуре G на языке высших ступеней множество $\mathcal{D}_\tau(G)$ всех отношений типа τ, определимых в G на этом языке? Иначе говоря, имеет ли место $\mathcal{D}_\tau(G) \in \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$? Ответ зависит от G. Так, если $\mathcal{D}_\tau(G)$ конечно, то оно очевидно определимо в G. В работе А. Тарского [4] этот вопрос исследовался для случая, когда G – стандартная модель арифметики, и было установлено, что $\mathcal{D}_{((0))}(G)$ – множество всех определимых семейств множеств натуральных чисел – не принадлежит $\mathcal{D}_{(((0)))}(G)$. В [2] доказано, что аналогичное верно и для $\mathcal{D}_{(0)}(G)$ (см.также [I]). Отсюда легко выводится, что $\mathcal{D}_\tau(G) \notin \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$ для всякого $\tau \neq 0$.

Пользуясь упомянутыми результатами, можно, в частности, показать (см.§ 3), что для всякой не конечной структуры G и всякого типа τ, ступень которого не ниже 2, имеет место $\mathcal{D}_\tau(G) \notin \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$. Последнее не всегда имеет место для типов τ ступени I. Например, для всякой структуры множества G $\mathcal{D}_\tau(G)$ конечно и потому определимо для всякого типа τ ступени I. Кажется правдоподобной следующая гипотеза: для всякой структуры G и всякого типа $\tau \neq 0$ имеет место $\mathcal{D}_\tau(G) \in \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$ в точности тогда, когда $\mathcal{D}_\tau(G)$ конечно.

Статья носит вводный характер. Она предпосылается готовящейся к печати статье первого из авторов, которая будет содержать, в частности, доказательство сформулированной гипотезы в $ZF+V=L$.

План настоящей статьи таков. В § I определяются необходимые понятия. В § 2, распространяя идею Тарского [4] на произвольные структуры, мы доказываем, что для всякой структуры G, база которой имеет счетное подмножество, имеет место $\mathcal{D}_{((0))}(G) \notin \mathcal{D}_{(((0)))}(G)$. Доказательство основывается по существу на следующем предложении: если во вполне упорядоченной структуре G имеется неопределимый элемент, то $\mathcal{D}_0(G) \notin \mathcal{D}_{(0)}(G)$. Это же предложение является стержнем доказательства следующего предложения (которое войдет в готовящуюся к печати статью): в $ZF+V=L$ для всякой структуры G и всякого типа τ $\mathcal{D}_\tau(G) \in \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$ имеет место в точности тогда, когда в G множество отношений типа τ, инвариантных относительно автоморфизмов G, не более чем счетно. Отсюда следует, что в $ZF+V=L$ для всякой структуры G и всякого $\tau \neq 0$ имеет место $\mathcal{D}_\tau(G) \in \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$ в точности тогда, когда $\mathcal{D}_\tau(G)$ конечно. В § 3 с использованием результата Енсена [2] доказывается, что для всякой не конечной структуры G и всякого типа τ не ниже 2-ой ступени имеет место $\mathcal{D}_\tau(G) \notin \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$. Более того, доказывается, что если структура G такова, что в ней определима бесконечная последовательность отношений типа $\tau \neq 0$ с попарно различными членами, то $\mathcal{D}_\tau(G) \notin \mathcal{D}_{(\tau)}(G)$. В частности, последнее имеет место для всякой арифметизированной структуры, то есть структуры, являющейся расширением или обогащением стандартной модели арифметики, например, для всякой модели ZF.

В § 4 обсуждаются вопросы следующего вида: при каких условиях в структуре G определимо формулой из $\mathcal{L}$ множество всех отношений данного типа, определимых в G формулами из $\mathcal{L}$, где под $\mathcal{L}$ понимаются языки конечных ступеней и некоторые их фрагменты.

Наши рассмотрения проводятся в рамках ZF.

§ I. Через T будем обозначать наименьшее из множеств M слов в алфавите $\{0, (,)\}$, для которых $0 \in M$ и, если $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M$, то $(\tau_1 \ldots \tau_n) \in M$. Элементы T будем называть типами, а само множество T – шкалой типов. Ступенью типа τ будем называть число $St\,\tau$ такое, что

I. $St\,0 = 0$,

2. $St(\tau_1 \ldots \tau_n) = 1 + \max\{St\,\tau_1, \ldots, St\,\tau_n\}$.

Пусть A – непустое множество. Типовой шкалой множеств над A будем называть семейство $(A^\tau)_{\tau \in T}$, определяемое так:

I. $A^0 = A$

2. $A^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} = P(A^{\tau_1} \times \ldots \times A^{\tau_n})$,

где $A^{\tau_1} \times \ldots \times A^{\tau_n}$ – декартово произведение множеств $A^{\tau_1}, \ldots, A^{\tau_n}$; $P(B)$ – множество всех подмножеств B. Для каждого $\tau \in T$ элементы множества A^τ будем называть отношениями типа τ на A и обозначать малыми начальными латинскими буквами с верхним индексом τ и, возможно, с нижними индексами.

Пусть имеем типовые шкалы множеств $(A^\tau)_{\tau \in T}$, $(B^\tau)_{\tau \in T}$ и отображение $F_0 : A^0 \longrightarrow B^0$. Отображения $F_\tau : A^\tau \longrightarrow B^\tau \ (\tau \in T)$ определяем рекурсией:

$$F_{(\tau_1 \ldots \tau_n)}(a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}) = \{\langle b_1^{\tau_1} \ldots b_n^{\tau_n}\rangle : \exists a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} (b_1^{\tau_1} = F_{\tau_1}(a_1^{\tau_1}) \wedge \ldots \wedge b_n^{\tau_n} = F_{\tau_n}(a_n^{\tau_n}) \wedge \langle a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n}\rangle \in a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)})\},$$

где $a_i^{\tau_i} \in A^{\tau_i}$. Эти отображения будем называть распростра-

нениями отображения F_0. Легко видеть, что если F_0 – отображение A^0 на B^0, то F_τ есть отображение A^τ на B^τ для всякого $\tau \in T$. Если F_0 – взаимно однозначное отображение, то и его распространения взаимно однозначны.

Пусть C – некоторое множество символов, называемых константами, и пусть каждой из констант соотнесен верхний индекс $\tau \in T$, называемый типом этой константы. С множеством C ассоциируется язык высших степеней $L(C)$, который содержит:

I. для каждого типа τ последовательность символов V_0^τ, $V_1^\tau, \ldots$, не содержащихся в C и называемых переменными типа τ;

2. символы логических операций: $\neg$, $\wedge$, $\forall$, $=$ и скобки $(,)$. (Предполагается, что и эти символы не принадлежат C).

Переменные и константы (типа τ) будем называть термами (типа τ или $St\,\tau$ -ой ступени). Термы типа 0 будем называть индивидными термами. В их обозначениях верхние индексы (их типы) чаще всего будем опускать.

Выражения видов $t_1 = t_2$ и $t^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} t^{\tau_1} \ldots t^{\tau_n}$, где t_1, t_2, $t^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$ – термы, называются атомарными формулами.

Множество формул определяется как наименьшее из множеств F таких, что

I. атомарные формулы принадлежат F;

2. если φ_1, φ_2 принадлежат F, то $\neg(\varphi_1)$, $(\varphi_1) \wedge (\varphi_2)$, $\forall V_i^\tau (\varphi_1)$ принадлежат F.

Часто мы будем писать "$(\varphi_1) \vee (\varphi_2)$", вместо "$\neg((\neg(\varphi_1)) \wedge (\neg(\varphi_2)))$", "$(\varphi_1) \rightarrow (\varphi_2)$" – вместо "$(\neg(\varphi_1)) \vee (\varphi_2)$" и "$(\varphi_1) \leftrightarrow (\varphi_2)$" вместо "$((\varphi_1) \rightarrow (\varphi_2)) \wedge ((\varphi_2) \rightarrow (\varphi_1))$".

Мы будем в записях формул часто опускать скобки там, где это не будет приводить к разночтениям.

Понятия свободного и связанного вхождений переменной в формулу определяются обычным образом.

Если σ обозначает некоторую формулу, то символ $\sigma(v_{i_1}^{\tau_1},\dots,v_{i_n}^{\tau_n})$ будет служить и обозначением той же формулы и указанием на то, что все вхождения переменных $v_{i_1}^{\tau_1},\dots,v_{i_n}^{\tau_n}$ в σ свободны и что не существует свободных вхождений в σ иных переменных.

Ступенью формулы будем называть наивысшую из ступеней входящих в неё переменных, увеличенную на единицу, или число 0, если в формулу не входят переменные.

Структурой рода C, или C-структурой, или структурой языка $L(C)$ будем называть всякую пару $\mathcal{G}=\langle A,F\rangle$, где A - непустое множество, а F - функция, определенная на C и такая, что $F(c^\tau)\in A^\tau$ для всякой константы c^τ из C. Множество A называется базой структуры $\mathcal{G}$, отношения на A - отношениями в $\mathcal{G}$, отношения $F(c^\tau)$ для $c^\tau\in C$ - определяющими отношениями $\mathcal{G}$. Если существует максимум ступеней констант из C, то его будем называть ступенью $\mathcal{G}$.

Пусть множества констант C и C_1, таковы, что $C_1\subset C$, и пусть $\mathcal{G}=\langle A,F\rangle$- структура рода C. Структуру $\mathcal{G}_1=\langle A,F\restriction C_1\rangle$ будем называть обеднением структуры $\mathcal{G}$. Будем также говорить, что $\mathcal{G}$ - обогащение структуры $\mathcal{G}_1$.

Пусть $\mathcal{G}_1=\langle A,F_1\rangle$ и $\mathcal{G}_2=\langle B,F_2\rangle$ - структуры рода C и f_0 - взаимно однозначное отображение A на B, для которого $f_\tau(F_1(c^\tau))=F_2(c^\tau)$ для всякой константы c^τ из C, где f_τ - распространения f_0. Тогда будем писать $\mathcal{G}_1\simeq\mathcal{G}_2$ и говорить, что структуры $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ изоморфны и что f_0 -

изоморфное отображение $\mathcal{G}_1$ на $\mathcal{G}_2$.

Пусть $\mathcal{G}=\langle A,F\rangle$ структура рода C и σ - формула из $L(C)$. Функцию f будем называть $(\mathcal{G},\sigma)$ - функцией, если

1. в область её определения $\mathcal{D}$ входят все константы $c^\tau\in C$ и переменные, входящие в σ свободно;
2. $f(c^\tau)=F(c^\tau)$ для всякой константы c^τ из C;
3. $f(v^\tau)\in A^\tau$ для всякой переменной v^τ из $\mathcal{D}$.

Теперь определим понятие выполнения $(\mathcal{G},\sigma)$ -функцией f формулы σ в $\mathcal{G}$.

1. если σ -атомарная формула $t_1=t_2$, то f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда $f(t_1)=f(t_2)$;
2. если σ -атомарная формула $t^{(\tau_1\dots\tau_n)}t_1^{\tau_1}\dots t_n^{\tau_n}$, то f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда
$$\langle f(t_1^{\tau_1})\dots f(t_n^{\tau_n})\rangle\in f(t^{(\tau_1\dots\tau_n)});$$
3. если σ есть $\neg\sigma_1$, то f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда f не выполняет σ_1 в $\mathcal{G}$;
4. если σ есть $\sigma_1\wedge\sigma_2$, то f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда f выполняет σ_1 и f выполняет σ_2 в $\mathcal{G}$;
5. если σ есть $\forall v^\tau(\sigma_1)$, то f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда всякая $(\mathcal{G},\sigma_1)$ - функция g такая, что $f(t)=g(t)$ для всякого $t\neq v^\tau$, выполняет σ_1 в $\mathcal{G}$.

Из определения непосредственно следует, что $(\mathcal{G},\sigma)$-функция f выполняет σ в $\mathcal{G}$ в точности тогда, когда формулу σ выполняет в $\mathcal{G}$ функция $f\restriction C\cup V$, где V - множество переменных, входящих в σ свободно.

Будем говорить, что $\langle a_{i_1}^{\tau_1}\dots a_{i_n}^{\tau_n}\rangle$ выполняет $\sigma(v_{i_1}^{\tau_1},\dots,v_{i_n}^{\tau_n})$, или что $\sigma(a_{i_1}^{\tau_1},\dots,a_{i_n}^{\tau_n})$ выполняется в $\mathcal{G}$, и писать

$\mathfrak{G} \vdash \sigma(a_{i_1}^{\tau_1}, \dots, a_{i_n}^{\tau_n})$, если $(\mathfrak{G}, \sigma)$ -функция f такая, что $f(v_j^{\tau_j}) = a_j^{\tau_j}$ $(j = 1, \dots, n)$ выполняет σ в $\mathfrak{G}$.

Формула σ называется выполнимой в $\mathfrak{G}$, если она выполняется в $\mathfrak{G}$ какой-нибудь $(\mathfrak{G}, \sigma)$ - функцией, и истинной в $\mathfrak{G}$, если она выполняется всякой $(\mathfrak{G}, \sigma)$ -функцией.

Пусть C - род структуры $\mathfrak{G}$, $\mathcal{L}$ - некоторый фрагмент языка $L(C)$. Будем говорить, что отношение a^{τ} определяется в $\mathfrak{G}$ по содержанию формулой $\varphi(v^{\tau})$, если

$$\mathfrak{G} \vdash \varphi(a^{\tau}) \wedge \forall v^{\tau} (\varphi(v^{\tau}) \longrightarrow v^{\tau} = a^{\tau}).$$

Отношение a^{τ} будем называть $\mathcal{L}$-определимым в $\mathfrak{G}$ по содержанию, если существует формула из $\mathcal{L}$, определяющая a^{τ} в $\mathfrak{G}$ по содержанию.

Будем говорить, что отношение a^{τ}, $\tau = (\tau_1 \dots \tau_n)$, в $\mathfrak{G}$ определяется по объему формулой $\psi(v_1^{\tau_1}, \dots, v_n^{\tau_n})$, если

$$\langle a_{i_1}^{\tau_1} \dots a_{i_n}^{\tau_n} \rangle \in a^{\tau} \Leftrightarrow \mathfrak{G} \vdash \psi(a_{i_1}^{\tau_1}, \dots, a_{i_n}^{\tau_n})$$

Отношение a^{τ} будем называть $\mathcal{L}$ -определимым в $\mathfrak{G}$ по объему, если существует формула из $\mathcal{L}$, определяющая a^{τ} в $\mathfrak{G}$ по объему.

Пусть a^{τ} определяется в $\mathfrak{G}$ по содержанию формулой $\varphi(v^{\tau})$. Тогда a^{τ} определяется в $\mathfrak{G}$ по объему формулой

$$\forall v^{\tau} (\varphi(v^{\tau}) \longrightarrow v^{\tau} v_1^{\tau_1} \dots v_n^{\tau_n}),$$

или формулой

$$\exists v^{\tau} (\varphi(v^{\tau}) \wedge v^{\tau} v_1^{\tau_1} \dots v_n^{\tau_n}).$$

Если a^{τ} определяется в $\mathfrak{G}$ по объему формулой $\psi(v_1^{\tau_1}, \dots, v_n^{\tau_n})$, то a^{τ} определяется в $\mathfrak{G}$ по содержанию формулой

$$\forall v_1^{\tau_1} \dots \forall v_n^{\tau_n} (v^{\tau} v_1^{\tau_1} \dots v_n^{\tau_n} \longleftrightarrow \psi(v_1^{\tau_1}, \dots, v_n^{\tau_n})).$$

Таким образом, $L(C)$ - определимость в $\mathfrak{G}$ отношения ненулевого типа по содержанию равносильна его $L(C)$ -определимости в $\mathfrak{G}$ по объему. Поэтому отношения, $L(C)$ - определимые в $\mathfrak{G}$ по содержанию, будем называть $L(C)$ - определимыми или просто определимыми в $\mathfrak{G}$ отношениями.

Пусть $a_1^{\tau_1}$ и $a_2^{\tau_2}$ отношения в $\mathfrak{G}$. Будем говорить, что $a_2^{\tau_2}$ определимо в $\mathfrak{G}$ относительно $a_1^{\tau_1}$ и писать $a_2^{\tau_2} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}, a_1^{\tau_1})$, если $a_2^{\tau_2}$ определимо в структуре $\mathfrak{G}(a_1^{\tau_1}) = \langle A, G \rangle$, где G - функция, определенная на $C \cup \{a_1^{\tau_1}\}$ такая, что $G(a_1^{\tau_1}) = a_1^{\tau_1}$ и $G \restriction C = F$. Если $a_2^{\tau_2} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}, a_1^{\tau_1})$ и $a_1^{\tau_1} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}, a_2^{\tau_2})$, то будем говорить, что $a_1^{\tau_1}$ и $a_2^{\tau_2}$ взаимоопределимы в $\mathfrak{G}$.

Всюду далее символ $\mathfrak{G}$ будет обозначать структуру конечного рода.

§ 2. Через $\mathfrak{D}_{\tau}(\mathfrak{G})$ будем обозначать множество всех определимых в $\mathfrak{G}$ отношений типа τ, а через $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ -множество $\bigcup_{\tau \in T} \mathfrak{D}_{\tau}(\mathfrak{G})$.

Следующие предложения очевидны.

2.I.I. Для всякого типа $\tau \neq 0$ множество $\mathfrak{D}_{\tau}(\mathfrak{G})$ есть тело множеств.

В частности, $\{\mathfrak{D}_{\tau}(\mathfrak{G}), a^{(\tau)}\} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) \Rightarrow \mathfrak{D}_{\tau}(\mathfrak{G}) \cap a^{(\tau)} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

2.I.2. $a^{\tau_i} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \{\langle b_1^{\tau_1} \dots b_i^{\tau_i} \dots b_n^{\tau_n} \rangle : b_i^{\tau_i} = a^{\tau_i}\} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

В частности, $a^{\tau} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \{a^{\tau}\} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

2.I.3. $a^{(\tau_1 \dots \tau_i)} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \{\langle a_1^{\tau_1} \dots a_i^{\tau_i} \dots a_n^{\tau_n} \rangle : \langle a_1^{\tau_1} \dots a_i^{\tau_i} \rangle \in a^{(\tau_1 \dots \tau_i)}\} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

2.I.4. $a^{(\tau_1 \dots \tau_i \dots \tau_n)} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \{\langle a_1^{\tau_1} \dots a_i^{\tau_i} \rangle : \exists a_{i+1}^{\tau_{i+1}} \dots \exists a_n^{\tau_n} \langle a_1^{\tau_1} \dots a_n^{\tau_n} \rangle \in a^{(\tau_1 \dots \tau_n)}\} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

Следующее предложение обобщает теорему Тарского [4].

2.2. Пусть $a^{(\tau)} \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$, $a^{(\tau\tau)} \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ и $a^{(\tau\tau)} \upharpoonright a^{(\tau)}$ - отношение вполне упорядочения на $a^{(\tau)}$. Тогда если $a^{(\tau)} \not\subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{G})$, то $a^{(\tau)} \cap \mathcal{D}(\mathfrak{G}) \notin \mathcal{D}(\mathfrak{G})$.

В самом деле, пусть $a^{(\tau)}$ определяется (по объему) формулой $\varphi(v^\tau)$, $a^{(\tau\tau)}$ - формулой $\psi(v^\tau, w^\tau)$. Допустим, что $a^{(\tau)} \cap \mathcal{D}(\mathfrak{G}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Пусть $a^{(\tau)} \cap \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ определяется некоторой формулой $\chi(v^\tau)$. Рассмотрим следующую формулу $\omega(v^\tau)$:

$$\varphi(v^\tau) \wedge \neg\chi(v^\tau) \wedge \forall w^\tau(\varphi(w^\tau) \wedge \neg\chi(w^\tau) \longrightarrow \psi(v^\tau, w^\tau)).$$

Её выполняет единственное отношение типа τ - наименьший относительно вполне упорядочения $a^{(\tau\tau)} \upharpoonright a^{(\tau)}$ неопределимый элемент из $a^{(\tau)}$ (таковой существует по условию $a^{(\tau)} \not\subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{G})$). Таким образом, формула ω определяет некоторое отношение, принадлежащее $a^{(\tau)} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{G})$, вопреки тому, что всякое отношение из $a^{(\tau)} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ не определимо. Из полученного противоречия следует, что допущение неверно.

Из этих рассуждений вытекает справедливость следующего более сильного предложения.

2.3. При условиях 2.2 всякая формула χ, выполняющаяся на каждом определимом отношении из $a^{(\tau)}$, выполняется на каждом отношении из $a^{(\tau)}$.

Допустим, что χ выполняется на каждом отношении из $a^{(\tau)} \cap \mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Если бы при этом существовало отношение из $a^{(\tau)}$, не выполняющее χ, то для такой формулы χ формула ω, [illegible] выше, была бы определением неопределимого элемента из $a^{(\tau)}$, что не может быть.

Будем говорить, что система формул $X = \{\chi_i(v^\tau)\}$ определяет по содержанию отношение a^τ в $\mathfrak{G}$, если a^τ - единственное из отношений, выполняющих в $\mathfrak{G}$ каждую формулу из X. Будем говорить, что система формул $X' = \{\chi'_i(v_1^{\tau}, \ldots, v_n^{\tau_n})\}$ определяет по объему отношение $a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$ в $\mathfrak{G}$, если $a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$ состоит в точности из тех кортежей $\langle a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} \rangle$, которые выполняют в $\mathfrak{G}$ каждую формулу из X'. Из 2.3.следует

2.4. При условиях 2.2. множество всех определимых отношений из a^τ не определяется в $\mathfrak{G}$ ни по объему, ни по содержанию никакой системой формул. Следовательно, и $\mathcal{D}_\tau(\mathfrak{G})$ не определяется в $\mathfrak{G}$ никакой системой формул.

2.5. ТЕОРЕМА. Пусть база структуры $\mathfrak{G}$ включает счетное множество. Тогда $\mathcal{D}_{((oo))}(\mathfrak{G}) \notin \mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Более того, $\mathcal{D}_{((oo))}(\mathfrak{G})$ не определяется в $\mathfrak{G}$ никакой системой формул.

Отношение $a^{((oo))}$ в $\mathfrak{G}$ назовем ординальным, если оно состоит из всевозможных $a^{(oo)}$ таких, что $a^{(oo)} \upharpoonright dom\, a^{(oo)}$ являются отношениями вполне упорядочения (на множествах $dom\, a^{(oo)} = \{a : \exists b(\langle ab \rangle \in a^{(oo)})\}$), имеющими один и тот же порядковый тип. Последний назовем ординалом отношения $a^{(oo)}$. Множество $a^{(((oo)))}$ всех ординальных отношений принадлежит $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Так как для каждого ординала $\alpha < \aleph_1$ существует ординальное отношение ординала α, то множество $a^{(((oo)))}$ несчетно и, следовательно, содержит неопределимое ординальное отношение. Вполне упорядочение $a^{(((oo)))}$, индуцируемое естественным упорядочением ординалов отношений из $a^{(((oo)))}$ (находящихся во взаимно однозначном соответствии с этими отношениями), определимо в $\mathfrak{G}$. Следовательно, в силу 2.4, $a^{(((oo)))} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ не определяется никакой системой формул, а значит, не принадлежит $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. Отсюда и из 2.I.I следует, что $\mathfrak{D}_{((oo))}(\mathfrak{G})$ не принадлежит $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

Обозначим через $\leqslant$ наименьшее отношение порядка в T такое, что I) $(\underbrace{o \ldots o}_{n}) \leqslant (\underbrace{o \ldots o}_{p})$ для $n \leqslant p$, 2) $\tau_1 \leqslant v_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n \leqslant v_n \wedge n \leqslant p \Rightarrow (\tau_1 \ldots \tau_n) \leqslant (v_1 \ldots v)$

3) $\tau \leqslant (\ldots \tau \ldots)$ для всякого типа τ. Из 2.I.2, 2.I.3 и 2.5 следует

2.5.I. Пусть база структуры $\mathfrak{G}$ включает счетное множество. Тогда для всякого $\tau \in \{v : v \geqslant ((oo)) \wedge St\, v > 2\}$ имеет место $\mathfrak{D}_\tau(\mathfrak{G}) \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. Более того, $\mathfrak{D}_\tau(\mathfrak{G})$ не определяется в $\mathfrak{G}$ никакой системой формул.

Пусть $\mathfrak{G} = \langle A, F \rangle$ - структура рода C. $c^{(o)} \in C$ и множество $B = F(c^{(o)})$ не пусто. Пусть далее структура $\mathfrak{G}_1 = \langle B, G \rangle$ такова, что G - функция, определенная на $C' = C \setminus \{c^{(o)}\}$ и такая, что $G(c_i^{\tau_i}) = B^{\tau_i} \cap F(c_i^{\tau_i})$ для всякой константы $c_i^{\tau_i}$ из C'. Всякое обеднение структуры $\mathfrak{G}_1$ будем называть редукцией структуры $\mathfrak{G}$.

Структуру $\mathfrak{G}$ будем называть арифметизированной, если некоторая её редукция изоморфна стандартной модели арифметики.

2.6. Пусть $\mathfrak{G}$ - арифметизированная структура. Тогда $\mathfrak{D}_\tau(\mathfrak{G}) \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ для

всякого типа τ не ниже 2-ой ступени. Более того, для всякого такого τ $\mathfrak{D}_\tau(\mathfrak{G})$ не определяется в $\mathfrak{G}$ никакой системой формул.

Утверждение достаточно доказать для структуры, некоторая редукция которой есть стандартная модель арифметики. Пусть $\mathfrak{G}$ - такая структура. Покажем, что утверждение верно для $\tau = ((o))$. Отсюда и из 2.I.2 будет следовать, что оно верно для всякого τ такого, что $St\,\tau \geqslant 2$.

Ординальное отношение $a^{((oo))}$ в $\mathfrak{G}$ назовем числовым, если оно содержит какое-нибудь отношение $a^{(oo)}$ на множестве натуральных чисел. Множество числовых ординальных отношений определимо. Каждому числовому ординальному отношению $a^{((oo))}$ сотнесем $f(a^{((oo))}) = \{\{c(n_1, n_2) : \langle n_1 n_2 \rangle \in a^{(oo)}\} : a^{(oo)} \in a^{((oo))}\}$, где $c(n_1, n_2)$ - канторовский номер пары $\langle n_1\, n_2 \rangle$. Это соответствие взаимно однозначно, и $a^{((oo))}$ и $f(a^{((oo))})$ взаимоопределимы в $\mathfrak{G}$. Определенное в 2.5 отношение порядка между ординальными отношениями индуцирует отношение вполне упорядочения на множестве числовых ординальных отношений, которое несчётно. Отсюда и из 2.4 следует доказываемое.

§ 3. Теперь наша цель - установить, что $\mathfrak{D}_{((o))}(\mathfrak{G}) \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ не только для арифметизированных структур, но и для всякой не конечной структуры $\mathfrak{G}$.

Отношение $a^{(\tau\tau)}$ в $\mathfrak{G}$ будем называть последовательностью (отношений типа τ), если оно есть отношение вполне упорядочения множества $dom\, a^{(\tau\tau)} = \{a^\tau : \exists b^\tau (\langle a^\tau b^\tau \rangle \in a^{(\tau\tau)})\}$ по типу ω. Элементы $dom\, a^{(\tau\tau)}$ будем называть членами этой последоватальности. Наименьший относительно упорядочения $a^{(\tau\tau)}$ член последовательности будем называть первым членом, следующий за ним – вторым и т.п. Пусть $\tau \neq o$. Тогда последовательность $a^{(\tau\tau)}$ будем называть дизъюнктной, если для любых её членов a_m^τ, a_n^τ имеет место $a_m^\tau \cap a_n^\tau = \emptyset$ $(m \neq n)$.

3.I. Пусть в G имеется определимая последовательность $a^{(\tau\tau)}$ $(\tau \neq o)$. Тогда в G определима некоторая дизъюнктная последовательность $b^{(\tau\tau)}$.

Для всякого $a \in \bigcup dom\, a^{(\tau\tau)}$ будем обозначать через $\mathcal{N}(a)$ множество номеров членов $a^{(\tau\tau)}$, которым принадлежит a. Элементы a, b из $\bigcup dom\, a^{(\tau\tau)}$ полагаем эквивалентными, если $\mathcal{N}(a) = \mathcal{N}(b)$. Классы эквивалентности будем обозначать e_i^τ. Через $\mathcal{N}(e_i^\tau)$ будем обозначать $\mathcal{N}(a)$ для какого-нибудь $a \in e_i^\tau$. Пусть f – какое-нибудь эффективное взаимно однозначное отображение множества $P(\mathcal{N})$ всех множеств натуральных чисел в множество вещественных чисел интервала $(0,1)$. Обозначим через M_1 множество вещественных чисел $f\mathcal{N}(e^\tau)$ для всевозможных классов эквивалентности e^τ. Хотя бы в одном из интервалов $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$ содержится неконечное множество чисел из M_1. Пусть M_2 – множество чисел из M_1, содержащихся в левом из таких интервалов. Середина последнего делит его на два полуинтервала. Хотя бы в одном из них содержится неконечное множество чисел из M_2. Пусть M_3 – множество чисел из M_2, содержащихся в левом из таких полуинтервалов. И т.п. Среди множеств $M_1, M_2, \ldots$ бесконечно много различных. Пусть $M_1^* = M_1$, M_{n+1}^* – первое из этих множеств, отличное от $M_1^*, \ldots, M_n^*$. Последовательность M_1^*, $M_2^*, \ldots$ – убывающая. По ней строим дизъюнктную последовательность $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots$, где $\mathcal{N}_n = M_n^* \setminus M_{n+1}^*$. Каждому $\mathcal{N}_n$ соотнесем объединение b_n^τ всех классов эквивалентности e^τ, для которых числа $f\mathcal{N}(e^\tau)$ принадлежат $\mathcal{N}_n$. Последовательность b_1^τ; $b_2^\tau, \ldots$ дизъюнктна. Она определена относительно $a^{(\tau\tau)} \in \mathcal{D}(G)$ и, значит, определима в G.

Структуру будем называть τ – квазиарифметизируемой, если в ней определима какая-нибудь последовательность $a^{(\tau\tau)}$. Пусть G есть τ – квазиарифметизируемая структура конечного рода C и $\tau \neq o$. Тогда, согласно 3.I, в G определима некоторая дизъюнктная последовательность $a^{(\tau\tau)}$, члены которой будем обозначать Δ_0^τ, $\Delta_1^\tau, \ldots$

Обогатим язык $L(C)$ добавлением в качестве новых констант всевозможных отношений a^v из G и еще одной константы $c^{(\tau)}$. Полученный язык обозначим через $L(G)$. Множество всех предложений этого языка, в которые не входят атомарные формулы вида $t^{(\ldots(\tau)\ldots)} \ldots c^{(\tau)} \ldots$, будем обозначать через $L^*(G)$. Через G^* обозначим структуру $\langle A, G \rangle$ языка $L(G)$, являющуюся обогащением G и такую, что $G(a^v) = a^v$ для всякого отношения a^v в G.

Пусть g – некоторый эффективный пересчет конечных множеств натуральных чисел. Через $g\{n_1, \ldots n_p\}$ будем обозначать номер множества $\{n_1, \ldots, n_p\}$ при этом пересчете. Для каждого натурального n будем через $L(n)$ обозначать множество натуральных чисел A, для которого $gA = \ell(n)$, а через $R(n)$ – множество B, для которого $gB = r(n)$, где $n = c(\ell(n), r(n))$ и $c(p,q)$ – канторовский номер пары $\langle pq \rangle$.

Число p будем называть вынуждающим условием, если $L(p) \cap R(p) = \emptyset$.

Будем говорить, что вынуждающее условие p_2 расширяет вынуждающее условие p_1 и писать $p_2 \prec p_2$, если $L(p_1) \subset L(p_2)$ и $R(p_1) \subset R(p_2)$.

Вынуждающее условие p называется согласованным с множеством чисел M, если $L(p) \cap M = \emptyset$ и $R(p) \subseteq M$.

Рекурсией определим в G отношение вынуждения $\rhd$ между вынуждающими условиями и формулами из $L^*(G)$.

I. Пусть $\varphi(a_1^{\tau_1}, \ldots; a_n^{\tau_n})$ – атомарная формула языка $L(G)$, в которую не входит константа $c^{(\tau)}$. Для вынуждающего условия p полагаем $p \rhd \varphi(a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n})$, если $\varphi(a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n})$ выполняется в G.

2. $p \rhd c^{(\tau)} a^{\tau}$, если для некоторого $n \in R(p)$ имеет место $a^{\tau} = \Delta_n^{\tau}$.

3. $p \rhd \varphi_1 \wedge \varphi_2$, если $p \rhd \varphi_1$ и $p \rhd \varphi_2$.

4. $p \rhd \neg \varphi_1$, если ни для какого вынуждающего условия $p_1 \succ p$ не имеет места $p_1 \rhd \varphi_1$.

5. $p \rhd \forall v^{v}(\varphi(v^{v}))$, если для всякого отношения a^{v} в G имеет место $p \rhd \varphi(a^{v})$.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из приведенных определений.

3.2.I. Для любого вынуждающего условия p и любой формулы φ из $L^*(G)$ утверждения $p \rhd \varphi$ и $p \rhd \neg\varphi$ не совместны.

3.2.2. Для всякого вынуждающего условия p и всякого отношения a^{τ} $p \rhd \neg c^{(\tau)} a^{\tau}$ равносильно тому, что a^{τ} не есть член последовательности $a^{(\tau\tau)}$ или что для некоторого $n \in L(p)$ имеет место $a^{\tau} = \Delta_n^{\tau}$.

3.2.3. Если $p_1 \succ p$ и $p \rhd \varphi$, то $p_1 \rhd \varphi$.

Справедливость этого утверждения легко доказать индукцией по числу $\mathrm{dep}\,\varphi$ логических операторов, используемых при построении φ, исходя из того, что в силу пунктов I и 2 определения понятия вынуждения, это утверждение справедливо для атомарных формул.

3.2.4. Для всякого вынуждающего условия p и всякой формулы φ из $L^*(G)$ либо $p \rhd \varphi$, либо существует $p_1 \succ p$, для которого $p_1 \rhd \neg\varphi$.

Для атомарных формул φ справедливость этого утверждения непосредственно следует из пунктов I и 2 определения вынуждения и из 3.2.2.

Пусть утверждение справедливо для всех формул ψ таких, что $\mathrm{dep}\,\psi \leq n$, и пусть $\mathrm{dep}\,\varphi = n+1$. Покажем, что тогда 3.2.4 справедливо и для φ.

Пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Тогда $p \not\rhd \varphi$ равносильно тому, что $p \not\rhd \varphi_1$ или $p \not\rhd \varphi_2$. По индуктивному предположению последнее равносильно существованию $p_1 \succ p$, для которого $p_1 \rhd \neg\varphi_1$, или $p_1 \rhd \neg\varphi_2$, что влечет существование $p_1 \succ p$ такого, что для любого вынуждающего условия $p_2 \succ p_1$ имеет место ($p_2 \not\rhd \varphi_1$ или $p_2 \not\rhd \varphi_2$), или, что то же, $p_2 \not\rhd \varphi_1 \wedge \varphi_2$. А это означает существование p_1, вынуждающего $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, то есть вынуждающего $\neg\varphi$.

Пусть $\varphi = \forall v^{v}(\varphi_1)$. Тогда $p \not\rhd \varphi$ означает, согласно пункту 5 определения вынуждения и предположению индукции, существование $p_1 \succ p$ и a^v, для которых $p_1 \rhd \neg\varphi_1(a^v)$, и, следовательно, $p_2 \not\rhd \varphi_1(a^v)$, а значит $p_2 \not\rhd \varphi$ для всякого $p_2 \succ p_1$. Таким образом, $p \not\rhd \varphi$ влечет существование $p_1 \succ p$, для которого $p_1 \rhd \neg\varphi$.

Пусть $\varphi = \neg\varphi_1$. Тогда $p \not\rhd \varphi$ означает существование $p_1 \succ p$, для которого $p \rhd \varphi_1$, а значит, $p_2 \not\rhd \neg\varphi_1$ для всякого $p_2 \succ p$. Таким образом, $p \not\rhd \varphi$ влечет существование $p_1 \succ p$, для которого $p_1 \rhd \neg\neg\varphi_1$, то есть $p_1 \rhd \neg\varphi$.

3.2.5. $p \rhd \varphi \iff p \rhd \neg\neg\varphi$.

В самом деле, из 3.2.4 следует $p \rhd \varphi \Rightarrow p \rhd \neg\neg\varphi$. С другой стороны, $p \not\rhd \varphi \Rightarrow \exists p_1(p_1 \succ p \wedge p_1 \rhd \neg\varphi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall p_2(p_2 \succ p_1 \Rightarrow p_2 \not\rhd \neg\neg\varphi) \Rightarrow p \not\rhd \neg\neg\varphi.$$

3.2.6. $p \rhd \varphi_1 \to \varphi_2 \Rightarrow (p_1 \rhd \varphi_1 \Rightarrow p_1 \rhd \varphi_2)$.

Пусть $p \rhd \varphi_1 \to \varphi_2$ и $p \rhd \varphi_1$. Допустим, что $p \not\rhd \varphi_2$. Тогда для некоторого $p_1 \succ p$ будет $p_1 \rhd \varphi_1$ и $p_1 \rhd \neg\varphi_2$, то есть $p_1 \rhd \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$. То есть $p_1 \rhd \neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$, что противоречит 3.2.3.

Обозначим через $G(c^{(\tau)})$ обогащение $\langle A, G\rangle$ структуры G, имеющее род $C \cup \{c^{(\tau)}\}$. Множество натуральных чисел M называется генерическим для G, если для всякой формулы φ из $L(c^{(\tau)}) = L^*(G) \cap L(C \cup \{c^{(\tau)}\})$ из $G(c^{(\tau)}) = \{\Delta^\tau_m : m \in M\}$ следует, что $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi$ равносильно существованию вынуждающего условия p, согласованного с M и такого, что $p \rhd \varphi$.

3.2.7. *Всякое вынуждающее условие p согласовано с некоторым генерическим множеством.*

В самом деле, пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ – некоторый эффективный пересчет всех формул $\forall v^\tau(\varphi(v^\tau))$ языка $L^*(c^{(\tau)})$. Определим последовательность (p_n) вынуждающих условий следующим образом: $p_0 = p$, $p_{n+1} = p_n$ в случае, если $p_n \rhd \varphi_n$, в противном случае p_{n+1} есть наименьшее натуральное число, расширяющее p_n и вынуждающее $\neg\varphi(a^v)$ для какого-нибудь a^v (таковое существует в силу 3.2.4). Пусть $M = \cup R(p_n)$. Это множество – генерическое. В самом деле, пусть $G(c^{(\tau)}) = \langle A, G\rangle$ – то обогащение G, для которого $G(c^{(\tau)}) = \{\Delta^\tau_m : m \in M\}$. Последнее утверждение непосредственно следует из

3.2.7*. *Для всякой формулы φ из $L^*(c^{(\tau)})$ $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi \iff \exists q\,(p_q \rhd \varphi)$.*

Если φ – атомарная формула, в которую не входит $c^{(\tau)}$, то справедливость 3.2.7 следует из пункта I определения вынуждения. Если φ – атомарная формула $c^{(\tau)}a^\tau$, то $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi$ равносильно $a^\tau = \Delta^\tau_m$ для некоторого $m \in M$, то есть тому, что $p_q \rhd \varphi$ для некоторого q.

Пусть утверждение доказано для всех формул ψ таких, что $gen\,\psi \le n$, и пусть $gen\,\varphi = n+1$.

Тогда если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, то $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi \iff$

$\iff (G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi_1 \wedge G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi_2) \iff (p_q \rhd \varphi_1 \wedge p_{q+r} \rhd \varphi_2$ для некоторых $q, r) \iff p_{q+r} \rhd \varphi_1 \wedge \varphi_2 \iff p_{q+r} \rhd \varphi$.

Если $\varphi = \neg\varphi_1$, то $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi \iff G(c^{(\tau)}) \nvdash \varphi_1 \iff$

$\iff (p_q \not\rhd \varphi_1$ для всякого $q) \iff p_q \rhd \varphi$.

Пусть φ есть $\forall v^\tau(\varphi_1)$. Тогда $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi \iff \forall a^\tau(G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi_1(a^\tau))$

$\Leftrightarrow \forall a^v \exists q (P_q \Vdash \varphi_1(a^v))$. Последнее влечет $\exists q (P_q \Vdash \varphi)$

В противном случае, то есть случае $\forall q (P_q \nVdash \forall v^v(\varphi_1(v^v)))$, мы имели бы, по построению (p_n), $\exists a^v (p_2 \Vdash \neg \varphi_1(a^v))$, откуда следовало бы $p_2 \Vdash \neg\varphi$, а значит $G(c^{(\tau)}) \vdash \neg \varphi$.

Итак, $G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi \Rightarrow \exists q (P_q \Vdash \varphi)$.

Но $\exists q (P_q \Vdash \varphi) \Rightarrow \forall a^v \exists q (P_q \Vdash \varphi_1(a^v)) \Rightarrow G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi$.

Следовательно, $\exists q (P_q \Vdash \varphi) \Rightarrow G(c^{(\tau)}) \vdash \varphi$.

3.2.8. M бесконечно.

Допустим противное. Пусть $M = \{n_1, \dots, n_q\}$ и n – наибольшее из $n_1,\dots,n_q$. Тогда имеем $G(c^{(\tau)}) \vdash \forall a^\tau (a^{(\tau\tau)} \Delta_n^\tau a^\tau \to \neg c^{(\tau)} a^\tau)$, что равносильно существованию вынуждающего условия p, для которого

$$p \Vdash \forall a^\tau (a^{(\tau\tau)}\Delta_n^\tau a^\tau \to \neg c^{(\tau)} a^\tau),$$

что равносильно

$$\forall a^\tau (p \Vdash (a^{(\tau\tau)}\Delta_n^\tau a^\tau \to \neg c^{(\tau)}a^\tau)).$$

Последнее влечет $\forall m (m > n \to p \Vdash \neg c^{(\tau)} a^\tau)$, откуда $m \in L(p)$ для всякого $m>n$, что невозможно в силу конечности $L(p)$.

3.2.9. Пусть M – генерическое множество для G, $a^{(\tau)} \in \mathfrak{D}(G)$, $a^{(\tau)} \in \mathfrak{D}(G)$ и $a^{(\tau)} \subseteq G(c^{(\tau)})$. Тогда $a^{(\tau)}$ конечно.

В самом деле, пусть $a^{(\tau)}$ определяется в G формулой $\varphi(v^\tau)$. По условию $G(c^{(\tau)}) \vdash \forall v^\tau (\varphi(v^\tau) \to c^{(\tau)} v^\tau)$. В силу генеричности M, последнее равносильно существованию p, для которого $p \Vdash \forall v^\tau(\varphi(v^\tau) \to c^{(\tau)}v^\tau)$, что равносильно $\forall a^\tau (p \Vdash (\varphi(a^\tau) \to c^{(\tau)} a^\tau))$. Отсюда, в силу 3.2.6, следует

$\forall a^\tau (p \Vdash \varphi(a^\tau) \Rightarrow p \Vdash c^{(\tau)} a^\tau)$, то есть

$$\forall a^\tau (a^{(\tau)} a^\tau \Rightarrow \exists n (n \in R(p) \wedge a^\tau = \Delta_n^\tau)),$$

что влечет конечность $a^{(\tau)}$ в силу конечности $R(p)$.

Множество натуральных чисел A назовем определимым в G (формулой φ), если $\{\Delta_m^\tau : m \in A\}$ определимо в G (формулой φ), или, что то же в силу дизъюнктности последовательности (Δ_m^τ), если $\bigcup_{m\in A}\Delta_m^\tau$ определимо в G. Из 3.2.8 и 3.2.9 следует

3.2.10. Не существует множества натуральных чисел, определимого в G и генерического для G.

Наша ближайшая цель – доказать, что $\mathfrak{D}_\tau(G) \notin \mathfrak{D}(G)$. Для этого достаточно доказать, что всякая формула $\varphi(v^\tau)$, выполняющаяся в G на каждом $a_A^\tau = \bigcup_{n\in A}\Delta_n^\tau$, где A – определимое в G множество натуральных чисел, выполняется в G на некотором a_A^τ, где A – неопределимое множество. Из 3.2.10 следует, что последнее будет доказано, если будет доказано, что всякая формула $\varphi(v^\tau)$, выполняющаяся в G на каждом a_A^τ, где A – генерическое множество, выполняется и на некотором определимом множестве.

Пусть последовательность $a^{(\tau\tau)} = (\Delta_m^\tau)$ определяется в G некоторой формулой из V_i^j, $\varphi(v^\tau)$ – какая-нибудь формула из V_k^j, $l = max\{i,k\}$. Из определимости в G отношения выполнимости для формул из V_i^j следует существование формулы $\Psi(v^\tau, w^\tau)$ такой, что $G \vdash \Psi(a^\tau, b^\tau)$ в точности тогда, когда для некоторых чисел p и q $a^\tau = \Delta_p^\tau$, $b^\tau = \Delta_q^\tau$, p – вынуждающее условие и $p \Vdash \varphi_q$, где φ_q – формула из

V_l^j, имеющая номер q при некотором фиксированном эффективном пересчете формул из V_l^j, имеющих вид $\forall v^\tau(\varphi(v^\tau))$.

Пусть $p=(\tilde{p}_n)$ – последовательность, определяемая так же как и используемая в 3.2.7 последовательность (p_n), с той лишь разницей, что под φ_n понимается формула из V_l^j, имеющая номер n при только что упомянутом пересчете. $\tilde{p}$ – определимая в G последовательность, а значит, определимо в G и множество $M=\bigcup R(\tilde{p}_n)$. Повторяя рассуждения, доказывающие 3.2.7*, можно доказать, что для $c^\tau=\bigcup\limits_{n\in M}\Delta_n^\tau$, $c^{(\tau)}=\{\Delta_m^\tau : m\in M\}$ и для всякой формулы $\chi\in V_l^j$ имеет место

$$G(c^{(\tau)})\vdash\chi\iff\exists n(\tilde{p}_n\vdash\chi).$$

Отсюда $G(c^{(\tau)})\vdash\varphi(c^\tau)$.

Таким образом, имеет место

3.3. ТЕОРЕМА. Если в G определима какая-нибудь последовательность $d^{(\tau\tau)}$, где $\tau\neq 0$, то $\mathcal{D}_\tau(G)\notin\mathcal{D}(G)$.

Пусть G – произвольная структура, база которой не конечна, то есть не равномощна никакому начальному отрезку натурального ряда. Тогда для каждого натурального n база имеет n-элементное подмножество. Обозначим через $\Delta_n^{((o))}$ совокупность всех n-элементных подмножеств базы. Полагаем $\Delta_n^{((o))}<\Delta_p^{((o))}$, если $n<p$. Отношение $<$ определимо в G и определяет последовательность $(\Delta_n^{((o))})$. Отсюда и из 3.3 следует, что $\mathcal{D}_{((o))}(G)\notin\mathcal{D}(G)$. Отсюда и из 2.1.2 следует

3.4. ТЕОРЕМА. Для всякого типа τ, ступень которого не ниже 2, $\mathcal{D}_\tau(G)\in\mathcal{D}(G)$ в точности тогда, когда

база G конечна.

Из 3.3 следует также, что если в структуре G определима некоторая последовательность индивидов, то для всякого $\tau\neq 0$ имеет место $\mathcal{D}_\tau(G)\notin\mathcal{D}(G)$.

Так что, в частности, для всякой модели ZF множество определимых в ней вещественных чисел не определимо в ней.

3.5. Если в G существует бесконечное множество $M\in\mathcal{D}_{((o))}(G)$, все элементы которого определимы в G формулами n-ой ступени для некоторого n, то для всякого $\tau\neq 0$ имеет место $\mathcal{D}_\tau(G)\notin\mathcal{D}(G)$.

В самом деле, зададимся какой-нибудь эффективной нумерацией формул n-ой ступени из $L(C)$. Каждому $a^{(o)}\in M$ соотнесем $\mathcal{N}(a^{(o)})$ – наименьший из номеров формул n-ой ступени, определяющих $a^{(o)}$ в G. Для $a^{(o)}, b^{(o)}$ из M полагаем $a^{(o)}<b^{(o)}\iff\mathcal{N}(a^{(o)})<\mathcal{N}(b^{(o)})$. Отношение $<$ располагает элементы M в последовательность, которая определима в G, в силу определимости в G понятия выполнимости в G для формул n-ой ступени. Отсюда и из 3.3 следует справедливость утверждения.

Естественен вопрос: доказуемо ли в ZF, что для всякой структуры G и всякого типа $\tau\neq 0$ $\mathcal{D}_\tau(G)\in\mathcal{D}(G)$ в точности тогда, когда $\mathcal{D}_\tau(G)$ конечно? Этот вопрос открыт. Пусть ZF^* – любое усиление ZF, в котором доказуемо, что не существует структуры G, для которой $\mathcal{D}_{(o)}(G)$ бесконечно, но для всякого n множество отношений типа (o), определимых формулами n-ой ступени, конечно (таковым является, в частности, $ZF+V=L$). Из 3.5 следует

3.6. В ZF^* доказуемо, что для всякой структуры $\mathfrak{G}$ и для всякого типа $\tau\neq 0$ $\mathcal{D}_\tau(\mathfrak{G})\in\mathcal{D}(\mathfrak{G})$ в точности тогда, когда $\mathcal{D}_\tau(\mathfrak{G})$ конечно.

В рамках ZF не найдено хорошо обозримого условия определимости $\mathcal{D}_0(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{G}$. Ясно, что оно не связано определяющим образом с конечностью $\mathcal{D}_0(\mathfrak{G})$ и, значит, должно иметь иной характер, чем установленные в §§ 2,3 условия определимости $\mathcal{D}_\tau(\mathfrak{G})$.

§ 4. В этом § мы будем обсуждать вопросы, касающиеся $\mathcal{L}$-определимости понятия $\mathcal{L}$-определимости, для случая, когда $\mathcal{L}$ - языки конечных ступеней или некоторые фрагменты таковых. Вообще $\mathcal{L}$ - определимость a^τ в $\mathfrak{G}$ по объему (по содержанию) не влечет $\mathcal{L}$ - определимости a^τ в $\mathfrak{G}$ по содержанию (по объему). В случае же если $\mathcal{L}$ - язык n-ой ступени $L_n(C)$ или его фрагмент вида $\bigvee_m^{n-1}$ или $\bigwedge_m^{n-1}$ и $n>St\,\tau$, то $\mathcal{L}$ - определимость a^τ в $\mathfrak{G}$ по содержанию равносильна $\mathcal{L}$ - определимости a^τ в $\mathfrak{G}$ по объему. Если же $n=St\,\tau$, то a^τ может быть $\mathcal{L}$ - определимым (в $\mathfrak{G}$) по объему, но не $\mathcal{L}$ - определимым по содержанию. Всюду ниже $\mathcal{L}$ - определимость a^τ в $\mathfrak{G}$ мы будем понимать как $\mathcal{L}$ - определимость a^τ по объему, если $\tau\neq 0$, и как $\mathcal{L}$ -определимость a^τ по содержанию, если $\tau=0$. Если $\mathcal{L}$ есть $L_n(C)$, то множество всех отношений типа τ, $\mathcal{L}$ - определимых в $\mathfrak{G}$, будем обозначать через $\mathcal{D}_{\tau n}(\mathfrak{G})$ - , а множество $\bigcup_{\tau\in T}\mathcal{D}_{\tau n}(\mathfrak{G})$ - через $\mathcal{D}_n(\mathfrak{G})$.

4.1. $(ZF+AC)$ Для всякого $n>0$ и всякой бесконечной структуры конечного рода имеет место $\mathfrak{G}$ $\mathcal{D}_{\tau n}(\mathfrak{G})\in\mathcal{D}_{n+1}(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathfrak{G}$ - бесконечная структура рода C. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{G}}$ какую-нибудь арифметизированную структуру, являющуюся обогащением $\mathfrak{G}$. Зафиксируем какую-нибудь эффективную нумерацию множества $F_n(\tau_1,\dots,\tau_m)$ всех формул из $L_n(C)$ вида $\varphi(v_1^{\tau_1},\dots,v_m^{\tau_m})$. Пусть $s^{(o\tau_1\dots\tau_m)}$ - отношение в $\tilde{\mathfrak{G}}$ такое, что $\tilde{\mathfrak{G}}\vdash s^{(o\tau_1\dots\tau_m)}a^o b_1^{\tau_1}\dots b_m^{\tau_m}$ имеет место в точности тогда, когда a^o представляет номер некоторой формулы φ из $F_n(\tau_1,\dots,\tau_m)$ и $\mathfrak{G}\vdash\varphi(b_1^{\tau_1},\dots,b_m^{\tau_m})$. Известно, что $s^{(o\tau_1\dots\tau_m)}$ определяется в $\tilde{\mathfrak{G}}$ формулой $(n+1)$-ой ступени. Отсюда следует, что для всякого рекурсивного множества Φ формул из $F_n(\tau_1,\dots,\tau_m)$ существует формула Ψ $(n+1)$-ой ступени такая, что для всяких $b_1^{\tau_1},\dots,b_m^{\tau_m}$ выполнимость $\Psi(b_1^{\tau_1},\dots,b_m^{\tau_m})$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$ равносильна выполнимости в $\mathfrak{G}$ каждой формулы $\varphi(b_1^{\tau_1},\dots,b_m^{\tau_m})$ для $\varphi\in\Phi$. Пусть $\tau\geqslant\tau^*=(\tau_1\dots\tau_m)$. Каждой формуле φ_p из $F_n(\tau_1,\dots,\tau_m)$ соотнесем формулу $\psi_p(v^\tau)$:

$$\forall v_1^{\tau_1}\dots v_m^{\tau_m}\left(v^{\tau^*}v_1^{\tau_1}\dots v_m^{\tau_m}\longleftrightarrow\varphi_p(v_1^{\tau_1},\dots,v_m^{\tau_m})\right).$$

$\mathfrak{G}\vdash\psi_p(a^\tau)$ равносильно определимости a^τ в $\mathfrak{G}$ формулой φ_p. Множество всех ψ_p рекурсивно. По доказанному выше, существует формула $(n+1)$-ой ступени $\Psi(v^\tau)$ такая что $\tilde{\mathfrak{G}}\vdash\Psi(a^\tau)$ равносильно $a^\tau\notin\mathcal{D}_n(\mathfrak{G})$, или, что то же, $\tilde{\mathfrak{G}}\vdash\neg\Psi(a^\tau)$ равносильно $a^\tau\in\mathcal{D}_n(\mathfrak{G})$. Пусть Ψ_* - формула, выражающая, что $\tilde{\mathfrak{G}}$ - арифметизированная структура, C' - множество констант из рода $\tilde{\mathfrak{G}}$, не содержащихся в C. Обозначим через X формулу, образованную из $\neg\Psi\wedge\Psi_*$ заменой вхождений констант из C' вхождениями переменных тех же типов (не входящих в $\neg\Psi\wedge\Psi_*$) и связыванием этих переменных кванторами существования. $\chi\in L_{n+1}(C)$ и $G\vdash\chi(a^{\tau^*})$ равносильно $a^{\tau^*}\in\mathcal{D}_n(G)$. Следовательно, $\mathcal{D}_{\tau n}(G)\in\mathcal{D}_{n+1}(G)$.

Будем писать $\alpha(\tau n)$, если для некоторых $\tau_1,\dots,\tau_i,\dots\tau_n$ имеет место $\tau=(\tau_1\dots\tau_i\dots\tau_n)$ и $St\,\tau_i<n$. Из рассуждений, доказывающих 2.5.I, 2.6 и 3.3, следует

4.2.I. Пусть G – арифметизированная структура и имеет место $\alpha(\tau n)$. Тогда $\mathcal{D}_{\tau n}(G)\notin\mathcal{D}_n(G)$. Если при этом $n>1$, то $\mathcal{D}_{\tau n}(G)$ не определяется в G никакой системой формул n-ой ступени.

Из рассуждений, доказывающих 2.5.I и 3.4, следует

4.2.2. Если $\alpha(\tau n)$ и $St\,\tau\geqslant 2$, то $\mathcal{D}_{\tau n}\in\mathcal{D}_n(G)$ в точности тогда, когда база конечна, если же база G бесконечна и $\tau\in\{v: v>((oo))\vee St\,\tau>2\}$, то $\mathcal{D}_{\tau n}(G)$ не определяется в G никакой системой формул n-ой ступени.

4.2.3. Если в структуре G определима на языке n-ой ступени некоторая последовательность индивидов, то для $\tau\neq 0$ и $\alpha(\tau n)$ имеет место $\mathcal{D}_{\tau n}(G)\notin\mathcal{D}_n(G)$.

Через $\mathcal{D}_{\tau V_n^\kappa}(G)$ будет обозначаться множество всех отношений типа τ, определимых в G формулами из V_n^κ. Аналогичный смысл будет иметь символ $\mathcal{D}_{\tau\Lambda_n^\kappa}(G)$. Через $\mathcal{D}_{\tau\Delta_n^\kappa}(G)$ будет обозначаться $\mathcal{D}_{\tau V_n^\kappa}(G)\cap\mathcal{D}_{\tau\Lambda_n^\kappa}(G)$.

Известно, что для всякой арифметизированной структуры G понятие выполнимости в G для формул из $V_n^\kappa\cup\Lambda_n^\kappa$ определимо в G формулой из Δ_{n+1}^κ. Используя это предложение и рассуждения, доказывающие 4.I, нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

4.3. $(ZF+AC)$. Если $n>1$, $\kappa\geqslant 1$, то для всякой бесконечной структуры G и всякого τ такого, что $\alpha(\tau\,\kappa\text{-}1)$ имеет место $\{\mathcal{D}_{\tau V_n^\kappa}(G),\mathcal{D}_{\tau\Lambda_n^\kappa}(G)\}\subset\mathcal{D}_{(\tau)\Delta_n^\kappa}(G)$.

Вместе с тем, из рассуждений, доказывающих 2.5.I и 3.4, следует

4.3.I. Если $\kappa\geqslant St\,\tau\geqslant 2$, то $\mathcal{D}_{\tau V_n^\kappa}(G)\in\mathcal{D}_{(\tau)V_n^\kappa}(G)$ имеет место в точности тогда, когда база G конечна. Если $\tau\in\{v: v>((oo))\vee St\,\tau>2\}$ и база G включает счетное множество, то $\mathcal{D}_{\tau V_n^\kappa}(G)$ не определяется в G никакой системой формул из V_n^κ. Аналогичное справедливо для $\mathcal{D}_{\tau\Lambda_n^\kappa}(G)$.

Аналогичные модификации предложений 4.2.I – 4.2.3 также имеют место.

Vol 12, no 3, Issue 81, Apr 1965

Литература

1. J. W. Addison, The undefinability of definable, AMS Notices, 12, 1965, 347-348.

2. R. Jensen, Modelle der Mengenlehre, Springer-Verlag, 1967.

3. С.Р.Когаловский, К семантике теории типов. Известия ВУЗов, Математика, 1966, № 1 (50), 89-98.

4. A.Tarski, A note on the notion of definability, J.SL, 13, №2, 1948.

5. A.Tarski, A.Mostowski, R.Robinson, Undecidable Theories, Amsterdam, North-Holland, 1958.

(Поступила 15 ноября 1972 г.)