

Межвузовский сборник N 597

©

**МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
(МИИТ), 1978
31802-897**

Канд.техн.наук доц. Х.М.ЛАЗАРЕВ,
канд.физ.-мат.наук В.Г.КАНОВЕЙ
(МИИТ)

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ОПЕРАТИВНОГО РУКОВОДСТВА ПЕРЕВОЗОЧНЫМ ПРОЦЕССОМ

В современных условиях оперативного руководства перевозочным процессом оптимизация работы и сокращение транспортных затрат немислимо без применения экономико-математических методов и ЭВМ. Значительный интерес представляют задачи распределения ресурсов вагонов, автомобилей, комплексных механизированных передвижных бригад с учетом вероятностного спроса и значимости объекта, на который распределяются ресурсы.

Предлагаемая задача распределения ресурсов, например, автомобилей, возникает вследствие того, что в практической работе ежедневно возникают ситуации выпуска автомобилей на грузовые станции узла в часы, когда тот или иной автомобиль может с момента выхода на линию выполнить большую работу, если он будет направлен на другую станцию, чем это планировалось до конкретной ситуации.

Аналогичные ситуации возникают ежедневно в узлах, на отделении и в масштабе дороги, а также на сети железных дорог, и по распределению таких ресурсов, как вагоны, локомотивы, передвижные механизированные бригады.

0,91, а при отсутствии двух последних - 0,54.

Расчетная формула остатка грузов на ГСК определяется следующим выражением:

$$y = 0,0415 \cdot x_1 + 0,144 \cdot x_2 + 0,0130 \cdot x_3 + 0,1801 \cdot x_4 + 0,0066 \cdot x_5 + 0,1592 \cdot x_6 + 0,0911 \cdot x_7 + 0,0789 \cdot x_8 + 0,2274 \cdot x_9 + 0,4758 \cdot x_{10} \quad (19)$$

где y - остаток груза, т;

x_1, x_2, x_3, \dots - перечисленные выше факторы.

Сравнительный анализ расчетных и фактических остатков грузов на ГСК свидетельствует о хорошей схожести и поэтому элементы расчетной формулы (19) могут быть рекомендованы для определения остатков груза по каждому ГСК.

Метод многофакторного корреляционного анализа может быть рекомендован для нормирования остатка грузов на складах, наличия контейнеров к вывозу, потребного парка автомобилей и других показателей работы грузового хозяйства.

Выполненные исследования на кафедре "Организация грузовой и коммерческой работы" МИИТа показали, что многофакторный корреляционный анализ может быть с успехом применен для нормирования показателей работы контейнерных пунктов, грузовых станций и отделений железных дорог.

В данной статье предлагается алгоритм распределения ресурсов на примере автомобилей для завоза и вывоза грузов (контейнеров). Задача рассматривается для условий предварительного (на первом этапе до начала работы) и окончательного распределения (на втором этапе после начала работы) ресурса¹.

1. Исходные данные. Рассматривается задача о распределении ресурса между потребителями (КП) $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i, \dots, \Pi_n$ (всего n потребителей; индекс i - порядковый номер КП). Автоэкспедиционные комбинаты (АЭК) $C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_k$, на которых находятся автомобили (j - порядковый номер АЭК).

Для каждого $j \leq k$ выделено множество N_j номеров потребителей, которые могут пользоваться j -ым АЭК. Предполагается

$$N_{j_1} \cap N_{j_2} = \emptyset \text{ при } j_1 \neq j_2.$$

Общий запас ресурса у оперирующей стороны (ОС) равен Y .

Суммарное требование ресурса X со стороны потребителей известно ОС.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ имеются числа $\gamma_i, \rho_i, \varphi_i$, известные ОС. Число γ_i - "вес" потребителя. ρ_i - означает, что чем больше γ_i , тем в большей степени ОС заинтересована удовлетворить запрос Π_i . Значение чисел ρ_i и φ_i разъясняется в п. 2.

2. План игры. Рассматриваемая игра состоит из следующих этапов:

А) ОС разбивает свой ресурс Y на два слагаемых: $Y = R + Y'$;

Б) ОС распределяет часть R своего ресурса по АЭК: $R = R_1 + \dots + R_k$.

Ресурс R_j направляется на АЭК C_j ;

В) ОС распределяет часть Y' своего ресурса по КП:

$$Y' = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

¹ Л.В.А г л о в а. Задача распределения ресурса. - "Техническая кибернетика", 1976, № 4.

Ресурс y_i доставляется КП Π_i ;

Г) От каждого КП Π_i поступает запрос x_i ;

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = X;$$

Д) Зная вектор запроса $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

ОС распределяют часть R своего ресурса, оставшегося после распределения по КП, между КП Π_i : $R = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. При этом, в соответствии с п. 1, для каждого $j \neq k$ выполняется равенство

$$R_j = \sum_{i \in N_j} z_i. \quad (1)$$

Игра окончена.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ подсчитывается число

$$W_i = \max \{ 0, \gamma_i (x_i - p_i y_i - \varphi_i z_i) \}, \quad (2)$$

имеющее смысл неудовлетворенности КП Π_i в результате игры. Подсчитывается также суммарная неудовлетворенность $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ всех КП.

Числа p_i и φ_i , фигурирующие в подсчете W (известные ОС), имеют смысл степени эффективности использования ресурса КП Π_i соответственно на этапах В и Д. В рассматриваемой задаче предполагается $p_i \geq \varphi_i$, т.е. ресурс, распределяемый раньше, используется более эффективно.

Цель игры со стороны ОС — подобрать такую стратегию этапов А, Б, В, Д, чтобы минимизировать неудовлетворенность W при самом худшем с точки зрения ОС действии КП $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ на этапе Г. Заметим, что КП связаны условием $x_1 + x_2 + \dots + x_n = X$.

3. Стратегия ОС на этапе Д. На этом этапе к исходным данным, упомянутым в п. 1, прибавляются следующие:

числа R_1, R_2, \dots, R_k , и $R = R_1 + \dots + R_k$;

числа y_1, y_2, \dots, y_n ;

числа x_1, x_2, \dots, x_n .

Нужно вычислить числа $z_1, z_2, \dots, z_n \geq 0$, удовлетворяющие равенству (2) (при всех $j \neq k$) и обеспечивающие наименьшее значение функции W .

Для каждого $j \neq k$ вводится совокупность $M_j = \{ i \in N_j : x_i - p_i y_i \geq 0 \}$ номеров тех КП Π_i , которые обслуживаются АЭК C_j и которые не удовлетворены предварительным распределением ресурса на этапе В.

На этапе Д из АЭК C_j обслуживаются те КП, номера которых входят в M_j , и прежде всего те из них, в которых величина $\gamma_i \varphi_i$ наибольшая. Это достигается следующим образом. Пусть $M_j = \{ i_1, i_2, \dots, i_l, \dots, i_k \}$ — нумерация множества M_j в порядке убывания $\gamma_i \varphi_i$, т.е.

$$\gamma_{i_1} \varphi_{i_1} \geq \gamma_{i_2} \varphi_{i_2} \geq \dots \geq \gamma_{i_l} \varphi_{i_l} \geq \dots \geq \gamma_{i_k} \varphi_{i_k}$$

(величины γ и i_1, i_2, \dots, i_k зависят от рассматриваемого j).

Теперь индукцией по $l \geq 2$ определяем

$$z_{i_l} = \min \left\{ \frac{x_{i_l} - p_{i_l} y_{i_l}}{\varphi_{i_l}}, R_j - \sum_{m=1}^{l-1} z_{i_m} \right\}. \quad (3)$$

Если же $i \in N_j - M_j$, то полагаем $z_i = 0$.

Таким образом, значение z_i определено для всех $i \in N_j$. Проведя эту операцию последовательно для $j = 1, 2, \dots, K$, получаем искомые числа z_1, z_2, \dots, z_n .

Рассмотрим пример расчета по этому алгоритму.

4. Пример расчета на этапе Д. Выбраны следующие исходные данные.

Т а б л и ц а 1

i	γ_i	p_i	φ_i	y_i	x_i
1	5	4	1	80	100
2	1	3	1	0	100
3	1	2	1	0	50

Продолжение табл. 1

i	γ_i	ρ_i	q_i	y_i	x_i
4	2	4	1	74	150
5	2	2	1	148	100

$$X = 500; Y = 400; k = 2; N_1 = \{1, 2, 3\}; R_1 = 100; \\ N_2 = \{4, 5\}; R_2 = 0.$$

Примечание. Значения y_i, R_1, R_2 взяты произвольно, а в соответствии с предложенными ниже расчетами по этапам А, Б, В.

1) $j = 1$. Итак, $N_1 = \{1, 2, 3\}$.

Вычисляем M_1 .

$$1a - x_1 - \rho_1 y_1 = 100 - 320 < 0;$$

$$x_2 - \rho_2 y_2 = 100 > 0;$$

$$x_3 - \rho_3 y_3 = 50 > 0.$$

Таким образом, $M_1 = \{2, 3\}$.

1б - перенумеровываем M_1 ,

$$\gamma_2 q_2 = 1;$$

$$\gamma_3 q_3 = 1.$$

Таким образом, можно оставить нумерацию в соответствии с естественным порядком: $i_1 = 2, i_2 = 3$.

1в - вычисляем по формуле (3)

$$z_{i_1} = z_2 = \min \left\{ \frac{x_2 - \rho_2 y_2}{q_2}, R_1 \right\} = \min \left\{ \frac{100}{1}, 100 \right\} = 100;$$

$$z_{i_2} = z_3 = \min \left\{ \frac{x_3 - \rho_3 y_3}{q_3}, R_1 - z_{i_1} \right\} = \min \{ 100, 0 \} = 0;$$

$$z_1 = 0 \text{ потому что } 1 \in N_1 - M_1.$$

Итак, $z_1 = 0, z_2 = 100, z_3 = 0$.

2) $j = 2$. $N_2 = \{4, 5\}$.

Вычисляем M_2

$$x_4 - \rho_4 y_4 = 150 - 4 \cdot 74 < 0;$$

$$x_5 - \rho_5 y_5 = 100 - 2 \cdot 148 < 0;$$

M_2 - пустое множество;

$$z_4 = z_5 = 0.$$

Окончательный результат:
 $z_1 = 0; z_2 = 100; z_3 = 0; z_4 = 0; z_5 = 0.$

5. Второй пример расчета на этапе Д.

Таблица 2

i	γ_i	ρ_i	q_i	y_i	x_i
1	5	4	1	78	150
2	1	3	1	0	50
3	1	2	2	0	50
4	2	4	1	57	0
5	2	2	1	115	250

$$X = 500; Y = 400; k = 2; N_1 = \{1, 2, 3\}; N_2 = \{4, 5\}; \\ R_1 = 100; R_2 = 50.$$

1) $j = 1; N_1 = \{1, 2, 3\}$.

1a - $x_1 - \rho_1 y_1 < 0;$

$$x_2 - \rho_2 y_2 > 0;$$

$$x_3 - \rho_3 y_3 > 0;$$

$$M_1 = \{2, 3\}.$$

1б - $\gamma_2 q_2 = 1, \gamma_3 q_3 = 2.$

Значит, $i_1 = 3, i_2 = 2.$

$$1в - z_{i_1} = z_3 = \min \left\{ \frac{x_3 - \rho_3 y_3}{q_3}, R_1 \right\} = \min \left\{ \frac{50}{1}, 100 \right\} = 25;$$

$$z_{i_2} = z_2 = \min \left\{ \frac{50}{1}, 100 - z_{i_1} \right\} = 50;$$

$$z_1 = 0;$$

2) $j = 2; N_2 = \{4, 5\}$.

2a - $x_4 - \rho_4 y_4 < 0;$

$$x_5 - \rho_5 y_5 > 0;$$

$$M_2 = \{5\}.$$

26. — Поскольку M_2 — одноэлементное множество, то $i_1 = 5$.

$$2в. — Z_5 = z_{i_1} = \min \left\{ \frac{250-230}{1}, 50 \right\} = 20$$

Результат: $Z_1 = 0$; $Z_2 = 50$, $Z_3 = 25$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 20$.

6. Схема расчета на этапе В. Помимо исходных данных, упомянутых в п. 1, мы имеем число R и числа R_1, R_2, \dots, R_k : $R_1 + R_2 + \dots + R_k = R$.

Нужно определить y_1, y_2, \dots, y_n .

Для каждого $i \leq n$ через $R^{(i)}$ обозначаем R_j , где $j \leq k$ таково, что $i \in N_j$ (единственность и существование j обеспечиваются соображениями п.1).

Для $i \leq n$ вводим функцию $\varphi_i(R) = \gamma_i(X - q_i R)$ (от переменной R). Предполагается, что

$$\varphi_1(R^{(1)}) \geq \varphi_2(R^{(2)}) \geq \dots \geq \varphi_n(R^{(n)}). \quad (4)$$

Если это не так, то перенумеровываем Π_i и вносим соответствующие изменения в остальные исходные данные.

Далее, для каждого считаем

$$\varphi_m \left[X \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} - (Y-R) - \sum_{i=1}^m \frac{q_i R^{(i)}}{p_i} \right] / \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_i p_i}. \quad (5)$$

Если найдется такое $m < n$, что выполняется

$\varphi_m \geq \varphi_{m+1}(R^{(m+1)})$ то через m^* обозначаем наименьшее из таких чисел m .

Если же таких $m < n$ нет, то полагаем $m^* = n$.

После вычисления m^* , числа y_1, y_2, \dots, y_n определяются из следующего соотношения:

$$y_i = [\gamma_i(X - q_i R^{(i)}) - \psi_m] / \gamma_i p_i, \quad (6)$$

если $i \leq m^*$, и $y_i = 0$, если $i > m^*$.

7. Пример расчета на этапе В. Исходные данные приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

i	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	5	4	1	100
2	1	3	1	100
3	1	2	1	100
4	2	4	1	50
5	2	2	1	50

$$X = 500; Y = 400; N_1 = \{1, 2, 3\}; N_2 = \{4, 5\}; R_1 = 100; R_2 = 150; R = 50.$$

Значение $R^{(i)}$ определяется, как указано в п. 6:

$$\begin{aligned} \varphi_1(R) &= 2500 - 5R; & \varphi_1(R^{(1)}) &= 2000; \\ \varphi_2(R) &= 500 - R; & \varphi_2(R^{(2)}) &= 400; \\ \varphi_3(R) &= 500 - R; & \varphi_3(R^{(3)}) &= 400; \\ \varphi_4(R) &= 1000 - 2R; & \varphi_4(R^{(4)}) &= 800; \\ \varphi_5(R) &= 1000 - 2R; & \varphi_5(R^{(5)}) &= 800. \end{aligned}$$

Вводим новую нумерацию в порядке убывания $\varphi_i(R^{(i)})$

Т а б л и ц а 4

$i_{стар}$	$i_{нов}$	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	1	5	4	1	100
4	2	2	4	1	50
5	3	2	2	1	50
2	4	1	3	1	100
3	5	1	2	1	100

$$N_1 = \{1, 4, 5\}; N_2 = \{2, 3\}; \varphi_1(R^{(1)}) = 2000; \varphi_2(R^{(2)}) = 800; \varphi_3(R^{(3)}) = 800; \varphi_4(R^{(4)}) = 400; \varphi_5(R^{(5)}) = 400.$$

Теперь для вычисления Ψ_m составим табл. 5.

Т а б л и ц а 5

m	1	2	3	4	5
$\sum_{i=1}^m 1/p_i$	1/4	1/2	1	4/3	11/6
$\sum_{i=1}^m 1/\gamma_i p_i$	1/20	7/40	17/40	91/120	151/120
$\sum_{i=1}^m q_i R^{(i)}$	25	37 1/2	62 1/2	95	145 5/6

$$\Psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 250 - 25] / 1/20 < 0;$$

$$\Psi_2 = [500 \cdot 1/2 - 250 - 37 \cdot 1/2] / 7/40 < 0;$$

$$\Psi_3 = [500 \cdot 1 - 250 - 62 \cdot 1/2] / 17/40 = 187 \cdot 1/2 / 17/40 = 44$$

Итак, мы получили $\Psi_3 > \Psi_4 (R^{(4)}) = 400$.
Значит, $m^* = 3$.

Теперь определяем $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$

$$\psi_1 = [5(500 - 100) - 440] / 120 = 78;$$

$$\psi_2 = [2(500 - 50) - 440] / 78 = 57;$$

$$\psi_3 = [2(500 - 50) - 440] / 4 = 115;$$

$$\psi_4 = \psi_5 = 0.$$

Произведя восстановление старой нумерации, получаем

$$\psi_1 = 78, \psi_2 = 0, \psi_3 = 0, \psi_4 = 57, \psi_5 = 115.$$

8. Один шаг итерации в вычислениях на этапах А и Б (случай $k = 1$).

Вычисления на этапах В и Д проводятся по простым схемам с помощью готовых формул пп. 3 и 6. В отличие от них вычисление на этапах А и Б имеет характер итеративного процесса с заранее неизвестным числом шагов.

Укажем схему одного шага итерации в случае $k = 1$, т.е. когда имеется всего один АЭК C_1 . Эта схема войдет в схему общего случая.

Итак, имеются исходные данные, упомянутые в п.1 (причем $k = 1$). Предположим также, что у нас есть "старое" значение $R = R_{ст}$. Укажем процедуру для нахождения "нового" значения $R = R_{нов}$, которое и будет результатом шага итерации.

По данному значению $R_{ст}$ в соответствии со следой п.6 происходит вычисление m^* .

Вычисляем

$$\varphi_{m^*} = 1 - \sum_{i=1}^{m^*} q_i / p_i \quad (5)$$

Теперь возможны два случая.

С л у ч а й 1: $\varphi_{m^*} \geq 0$.

В этом случае полагаем $R_{нов} = R_{ст}$.

С л у ч а й 2: $\varphi_{m^*} < 0$.

В этом случае решаем уравнения вида:

$$\Psi_{m^*}(R) = \psi_i(R),$$

где

$$\psi_i(R) = \gamma_i(X - q_i R) \quad \text{и}$$

$$\Psi_{m^*}(R) = [X \sum_{i=1}^{m^*} 1/p_i - Y + R(1 - \sum_{i=1}^{m^*} q_i/p_i)] / \sum_{i=1}^{m^*} 1/\gamma_i p_i \quad (6)$$

(результат преобразования формулы из п.6 с учетом $k = 1$ и $R^{(i)} = R_i = R$ для всех $i \in n$).

В результате получаем n решений $R_1^*, R_2^*, \dots, R_n^*$. Возникнет два следующих варианта решения задачи:

2а - среди этих решений R_i^* нет такого, которое удовлетворяет $R_{ст} < R_i^* \leq Y$.

В результате определяем $R_{нов} = Y$

2б - найдется такое R_i^* , что $R_{ст} < R_i^* \leq Y$.

В этом случае в качестве $R_{нов}$ берем наименьшее из таких R_i^* .

Построение $R_{нов}$ закончено.

Если в ходе построения мы пришли к случаю 1 или случаю 2а, то сделанный шаг итерации называем финальным. Если же мы пришли к случаю 2б, то шаг называем нефинальным.

9. Примеры одного шага итерации ($k = 1$)

Пример 1.

Т а б л и ц а 6

i	γ_i	ρ_i	q_i
1	1	4	1
2	1	4	2
3	1/2	2	1
4	1/2	1	1/2

$X = 500; Y = 200; R_{cr} = 0.$

$\psi_1(R) = \gamma_1(X - q_1 R) = 500 - R.$

$\psi_2(R) = 500 - 2R.$

$\psi_3(R) = 250 - 1/2 R.$

$\psi_4(R) = 250 - 1/4 R.$

$\psi_1(R_{cr}) = 500;$

$\psi_2(R_{cr}) = 500;$

$\psi_3(R_{cr}) = 250;$

$\psi_4(R_{cr}) = 250.$

Нумерацию можно сохранить.

Т а б л и ц а 7

m	1	2	3	4
$\sum 1/\rho_i$	1/4	1/2	1	2
$\sum \gamma_i \rho_i$	1/4	1/2		7/2
$\sum q_i/\rho_i$	1/4	3/4	5/4	7/4
g_m	3/4	1/4	-1/4	-3/4

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 200 + 0 \cdot \frac{3}{4}] / 1/4 = -300; \psi_2 = 100;$

$\psi_3 = 200; \psi_4 = 229.$

В соответствии с п.6, полагаем $m^* = 4$. Тогда $g_{m^*} = 3/4 < 0$, и мы имеем случай 2 из п.8. Выписываем функцию $\psi_4(R)$:

$\psi_4(R) = [500 \cdot 2 - 200 - 3/4 R] / 7/2 \approx 230 - 3/14 R.$

Решаем уравнения $\psi_4(R) = \psi_i(R)$

$i = 1 \quad 230 - 3/14 R = 500 - R; \quad 11/14 R = 270; \quad R_1^*$ лежит вне $[0, 200].$

$i = 2 \quad 230 - 3/14 R = 500 - 2R; \quad 5/7 R = 270.$

$R_2^* = \frac{270 \cdot 14}{25} \approx 145.$

$i = 3 \quad 230 - 3/14 R = 250 - 1/2 R; \quad R_3^* = \frac{20 \cdot 14}{4} = 70.$

$i = 4 \quad 230 - 3/14 R = 250 - 1/4 R; \quad R_4^* > 200.$

В интервале $[0, 200]$ лежат R_2^* и R_3^* . Берем из них наименьшее: R_3^* , и полагаем $R_{нов} = R_3^* = 70$. Сделанный шаг нефинальный.

Пример 2.

Т а б л и ц а 8

i	γ_i	ρ_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$X = 500; Y = 180; R_{cr} = 0;$

$\psi_1(R) = 2500 - 5R; \quad \psi_1(R_{cr}) = 2500;$

$\psi_2(R) = 500 - R; \quad \psi_2(R_{cr}) = 500;$

$\psi_3(R) = 500 - R; \quad \psi_3(R_{cr}) = 500.$

Нумерация остается.

Т а б л и ц а 9

m	1	2	3
$\sum 1/\rho_i$	1/4	7/12	13/12
$\sum \gamma_i \rho_i$	1/20	23/80	53/80
g_m	3/4	5/12	-1/12

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 180 + 0] / 1/20 < 0; \psi_2 = [500 \cdot 7/12 - 180] / 23/80 \approx 294 < 500.$

Значит, $m^* = 3$. Поскольку $g_{m^*} = g_3 < 0$, то имеет место случай 2 из п.8.

Пишем $\psi_3(R) = 410 - 5/53 R.$

Решаем уравнения $\psi_3(R) = \psi_i(R)$

$i = 1 \quad 410 - 5/53 R = 2500 - 5R; \quad R_1^* > 400.$

$$i = 2,9 \quad 410 - \frac{5}{53}R = 500 - R; \quad \frac{48}{53}R = 90; \quad R_2^* = R \approx 100.$$

Таким образом, $R_{нов} = 100$, и сделанный шаг нефинальный.

Пример 3.

Т а б л и ц а 10

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$$X = 500; \quad Y = 180; \quad R_{ст} = 100;$$

$$\varphi_1(R) = 2500 - 5R; \quad \varphi_1(R_{ст}) = 2000; \quad \varphi_2(R) = \varphi_3(R) = 500 - R;$$

$$\varphi_2(R_{ст}) = 400 = \varphi_3(R_{ст});$$

Нумерация остается.

Т а б л и ц а 11

m	1	2	3
$\sum \frac{1}{p_i}$	1/4	7/12	19/12
$\sum \frac{1}{\gamma_i p_i}$	1/20	29/60	53/60
g_m	3/4	5/12	-1/12

$$\varphi_1 = [500 \cdot 1/4 - 180 + 100 \cdot 3/4] / 1/20 = 400; \quad \varphi_2 = [500 \cdot 7/12 - 180 + 100 \cdot 5/12] / 29/60 = 402.$$

Поскольку $402 > 400 = \varphi_3(R_{ст})$, то $m^* = 2$. Тогда $g_{m^*} = g_2 = 5/12 > 0$ и мы имеем случай 1 из п.8. Следовательно, $R_{нов} = R_{ст} = 100$ и сделанный шаг - финальный.

Пример 4.

Т а б л и ц а 12

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$$X = 500; \quad Y = 220; \quad R_{ст} = 0.$$

$$\varphi_1(R) = 1000 - 2R; \quad \varphi_1(R_{ст}) = 1000;$$

$$\varphi_2(R) = 100 - 2R; \quad \varphi_2(R_{ст}) = 100.$$

Нумерация остается.

Т а б л и ц а 13

m	1	2
$\sum \frac{1}{p_i}$	1/4	3/4
$\sum \frac{1}{\gamma_i p_i}$	1/8	3/8
g_m	3/4	1/4

$$\varphi_1 = (800 \cdot 1/4 - 220) / 1/8 < 0; \quad \varphi_2 = (500 \cdot 3/4 - 220) / 3/8 > 0; \quad m^* = 2; \quad g_{m^*} > 0.$$

Таким образом, имеется случай 1 из п.8, т.е. $R_{нов} = R_{ст} = 0$, и шаг - финальный.

10. Один шаг итерации в вычислениях на этапах А и Б (общий случай).

Пусть у нас имеются исходные данные из п.1, и, кроме того, имеются "старые" значения $R_1^{ст}, R_2^{ст}, \dots, R_k^{ст}$. Укажем процедуру для нахождения "новых" значений $R_1^{нов}, R_2^{нов}, \dots, R_k^{нов}$.

1. Вычисляем $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ по схеме п.8 с исходными данными $R_1 = R_1^{ст}, R_2 = R_2^{ст}, \dots, R_k = R_k^{ст}$. Для каждого $j \neq k$ полагаем:

$$\varphi_j = R_j^{ст} + \sum_{i \in N_j} \varphi_i. \quad (7)$$

2. Для каждого $j \leq k$ проводим вычисления по схеме п.8 с такими исходными данными $X, Y, R_{CT} = R_{CT}^{ST}$. А таблица γ_i, p_i, q_i для этих вычислений получается из исходной табл. 1 вычеркиванием всех строк с номерами $i \in N_j$ (иными словами, остаются лишь строки с номерами $i \in N_j$). В результате получаем некоторое число $R_{нов}$ ($\approx R_{CT}$). Полагаем $R_j^{нов} = R_{нов}$.

Таким образом, получены "новые" значения $R_1^{нов}, \dots, R_k^{нов}$. Они и являются результатом шага итерации.

Если для всякого $j \leq k$ шаг вычислений по схеме п.8, указанный в 2, является финальным, то весь сделанный шаг (т.е. по совокупности $j \leq k$) называем финальным.

11. Стратегия ОС на этапах А и Б. Стратегия состоит в следующем. Полагаем $R_1^1 = R_2^1 = \dots = R_k^1 = 0$ (первое приближение).

Делаем вычисления по схеме п.10 с исходными данными $R_j^{ST} = R_j^1$. Получаем числа $R_j^{нов}$, $j \leq k$. Обозначаем их через R_j^2 , $j \leq k$ (второе приближение). Если сделанный шаг является финальным, то вычисления заканчиваем и полагаем $R_j = R_j^2$ для всех $j \leq k$ и $R = R_1 + R_2 + \dots + R_k$. Числа R_j и R будут результатом действий ОС на этапах А и Б.

Если же шаг не является финальным, то полагаем $R_j^{ST} = R_j^2$ для всех $j \leq k$, делаем вычисления по схеме п.10 и т.д.

Пример.

Т а б л и ц а 14

i	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	5	4	1	0
2	1	3	1	0
3	1	2	1	0
4	2	4	1	0
5	2	2	1	0

$$X = 500; Y = 400; N_1 = \{1, 2, 3\}; N_2 = \{4, 5\}; k = 2.$$

Первый шаг. Полагаем $R_1^1 = R_2^1 = 0$ (первое приближение) и проводим вычисления по схеме п.8 $y_1(R^{(1)}) = 2500; y_2(R^{(2)}) = 500; y_3(R^{(3)}) = 600; y_4(R^{(4)}) = 1000; y_5(R^{(5)}) = 1000.$

Новая таблица после переenumerации.

Т а б л и ц а 15

i_{CT}	$i_{нов}$	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	1	5	4	1	0
4	2	2	4	1	0
5	3	2	2	1	0
2	4	1	9	1	0
3	5	1	2	1	0

$$y_1(R^{(1)}) = 2600; y_2(R^{(2)}) = y_3(R^{(3)}) = 1000; y_4(R^{(4)}) = y_5(R^{(5)}) = 500.$$

Т а б л и ц а 16

m	1	2	3	4	5
$\sum_{i=1}^m 1/p_i$	1/4	1/2	1	4/3	11/8
$\sum_{i=1}^m 1/p_i$	1/20	7/20	17/40	91/120	151/120

Дальнейшие вычисления по схеме п.8 дают $m^* = 5$: $y_1 = 105; y_2 = 73; y_3 = 147; y_4 = 30$ и $y_5 = 46$ в новой нумерации и соответственно $y_1 = 105; y_2 = 30; y_3 = 45; y_4 = 73$ и $y_5 = 147$ в старой нумерации.

Таким образом, $Y_1 = 180; Y_2 = 220.$

Дальше в соответствии с пунктом 10.2 нужно сделать расчеты по п.8 со следующими исходными данными.

Таблица 17

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$$X = 500; Y = 180; R_{CT} = R_1^{CT} = 0.$$

Таблица 18

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$$X = 500; Y = 200; R_{CT} = 0.$$

Эти вычисления сделаны в п.9 (примеры 2 и 4). Они дают: $R_1^{нов} = 100$, $R_2^{нов} = 0$.

Таким образом, $R_1^2 = 100$ и $R_2^2 = 0$, причем первый шаг итерации не является финальным.

Первый шаг итерации закончен.

Второй шаг. Проведя вычисления по схеме п.8 (с исходными данными $X=500; Y=400; R_1=100; R_2=0$), мы получаем $m^2 = 3$ и далее:

$y_1 = 80; y_2 = y_3 = 0; y_4 = 74; y_5 = 146$ (в старой нумерации).

Тем самым, $Y_1 = 180; Y_2 = 220$ и нужно сделать расчеты по схеме п.8 с такими исходными данными:

Таблица 19

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$$X = 500; Y = 180; R_{CT} = R_1^{CT} = R_1^2 = 100.$$

Таблица 20

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$$X = 500; Y = 220; R_{CT} = R_2^{CT} = R_2^2 = 0.$$

Эти вычисления сделаны в п.9 (примеры 3 и 4). Они дают $R_1^3 = R_1^{нов} = 100$, $R_2^3 = R_2^{нов} = 0$, причем сделанный шаг итерации - финальный.

Итак, окончательный результат: $R_1 = R_1^3 = 100$ и $R_2 = R_2^3 = 0$.