К проблеме А. Тарского об упрощении описаний

В. Г. Кановей и В. А. Любецкий

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича
ИППИ РАН

Сентябрь 2025

ИТИС'25

Москва

Альфред Тарский (1948) рассмотрел определимость множества всех объектов данного типа в стандартной теоретико-типовой структуре, определимых формулами с ограничениями на типы переменных.

Поставленные Тарским проблемы в этой области оставались открытыми до недавнего времени. Об их решении рассказывается в этом докладе.

Вопросы определимости и способов описания математических объектов поднимались в ходе дискуссий об основаниях математики, теории множеств и аксиоме выбора в начале двадцатого века.
А. Тарский (1936) показал, что понятие "быть определимым" может быть тщательно анализировано только после предварительного определения конкретного формального контекста, в котором оно рассматривается.

Теория определимости Тарского была применена и получила дальнейшее развитие в классических работах Клини и в более поздних исследованиях Аддисона, Чегельского, и др.

Различные аспекты определимости находятся в центре внимания современных исследований в теории множеств, в частности тех, которые связаны с самым широким контекстом универсума множеств или классов, или даже *мультиверсума* как одного из современных направлений, или с конкретными моделями теории множеств.

Тарский рассматривал структуру типов T :

Тарский рассматривал структуру типов T :

$$\boxed{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$$

Тарский рассматривал структуру типов T :

$$\boxed{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \ldots & \ldots \\ — & \text{тип } n+1, \quad T_{n+1} = \mathscr{P}(T_n) = \{X : X \subseteq T_n\} \\ — & \text{тип } n, \quad T_n \\ \ldots & \ldots \\ — & \text{тип } 2, \quad T_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ — & \text{тип } 1, \quad T_1 = \boxed{\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{X : X \subseteq \mathbb{N}\}} = \boxed{\mathbb{R}} \\ — & \text{тип } 0, \quad T_0 = \mathbb{N} = \boxed{\text{натуральные числа}} \end{array} \right.$$

Тарский рассматривал структуру типов T :

$$\boxed{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \ldots & \ldots \\ — & \text{тип } n+1, \quad T_{n+1} = \mathscr{P}(T_n) = \{X : X \subseteq T_n\} \\ — & \text{тип } n, \quad T_n \\ \ldots & \ldots \\ — & \text{тип } 2, \quad T_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ — & \text{тип } 1, \quad T_1 = \boxed{\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{X : X \subseteq \mathbb{N}\}} = \boxed{\mathbb{R}} \\ — & \text{тип } 0, \quad T_0 = \mathbb{N} = \boxed{\text{натуральные числа}} \end{array} \right.$$

Структура типов T включает всю арифметику в T_0, за которой следует итерация взятия множества всех подмножеств $\mathscr{P}(\cdot)$.

Тарский рассматривал структуру типов T :

$$\boxed{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dots & \dots \\ — & \text{тип } n+1, \quad T_{n+1} = \mathscr{P}(T_n) = \{X : X \subseteq T_n\} \\ — & \text{тип } n, \quad T_n \\ \dots & \dots \\ — & \text{тип } 2, \quad T_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ — & \text{тип } 1, \quad T_1 = \boxed{\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{X : X \subseteq \mathbb{N}\}} = \boxed{\mathbb{R}} \\ — & \text{тип } 0, \quad T_0 = \mathbb{N} = \boxed{\text{натуральные числа}} \end{array} \right.$$

Структура типов T включает всю арифметику в T_0, за которой следует итерация взятия множества всех подмножеств $\mathscr{P}(\cdot)$.

Начиная с работ Кантора конца 19 века, и затем Рассела, показано, что всю обычную математику можно вложить в T. За исключением теории множеств, теории категорий и некоторых других направлений.

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\le p$.

Более подробно, при $\boxed{n \ge 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p = \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \ \forall y \in T_{n-1} \left(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\right)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \subsetneqq T_n \ ,$$

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p \;=\; \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \;\; \forall y \in T_{n-1} \left(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\right)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \;\subsetneqq\; T_n \;,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p \ = \ \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \ \forall y \in T_{n-1} \left(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\right)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \ \subsetneqq \ T_n \ ,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi \ := \ \mathrm{Q}_1 z_1 \in T_{t_1} \dots \mathrm{Q}_k z_k \in T_{t_k} \, \varphi(z_1, ..., z_k, y),$$

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p \;=\; \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y)\;\; \forall y \in T_{n-1}\,\big(y \in X \iff \Phi_n^p(y)\big)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \;\subsetneqq\; T_n\,,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi \;:=\; \mathrm{Q}_1 z_1 \in T_{t_1} \ldots \mathrm{Q}_k z_k \in T_{t_k}\, \varphi(z_1, ..., z_k, y),$$

где φ бескванторная, $\mathrm{Q}_i = \exists$ или $\forall$, а типовые индексы $t_1, ..., t_k \leq p$.

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p$ = множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p \;=\; \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \;\; \forall y \in T_{n-1} \left(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\right)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \;\subsetneqq\; T_n \;,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi \;:=\; \mathrm{Q}_1 z_1 \in T_{t_1} \ldots \mathrm{Q}_k z_k \in T_{t_k}\, \varphi(z_1, ..., z_k, y),$$

где φ бескванторная, $\mathrm{Q}_i = \exists$ или $\forall$, а типовые индексы $t_1, ..., t_k \leq p$.

Таким образом, в записи $\mathbf{D}_n^p$:

Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p =$ множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p = \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \; \forall y \in T_{n-1} \left(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\right)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \subsetneqq T_n ,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi := \mathrm{Q}_1 z_1 \in T_{t_1} \ldots \mathrm{Q}_k z_k \in T_{t_k} \varphi(z_1, \ldots, z_k, y),$$

где φ бескванторная, $\mathrm{Q}_i = \exists$ или $\forall$, а типовые индексы $t_1, \ldots, t_k \leq p$.

Таким образом, в записи $\mathbf{D}_n^p$: n – тип элементов X множества $\mathbf{D}_n^p$, Тарский рассматривает множества $\mathbf{D}_n^p$ = множество всех элементов типа n, определимых формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $\boxed{n \geq 1}$,

$$\mathbf{D}_n^p \;=\; \{X \in T_n : \underbrace{\;\exists\,\Phi_n^p(y)\;\;\forall y \in T_{n-1}\;\big(y \in X \Longleftrightarrow \Phi_n^p(y)\big)}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \;\subsetneqq\; T_n\;,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ:

1) переменная y имеет тип $n-1$, и

2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi \;:=\; \mathrm{Q}_1 z_1 \in T_{t_1} \ldots \mathrm{Q}_k z_k \in T_{t_k}\, \varphi(z_1, ..., z_k, y),$$

где φ бескванторная, $\mathrm{Q}_i = \exists$ или $\forall$, а типовые индексы $t_1, ..., t_k \leq p$.

Таким образом, в записи $\mathbf{D}_n^p$: n – тип элементов X множества $\mathbf{D}_n^p$, p – ограничение на тип кванторов.

Очевидно: $\mathsf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Очевидно: $\mathbf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^{p+1}$.

Очевидно: $\mathsf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathsf{D}_n^p \in \mathsf{D}_{n+1}^{p+1}$. **Верно ли, что $\mathsf{D}_n^p \in \mathsf{D}_{n+1}^p$??**

Очевидно: $\mathsf{D}^p_n \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathsf{D}^p_n \in \mathsf{D}^{p+1}_{n+1}$. **Верно ли, что $\mathsf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}} \in \mathsf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n+1}}$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathsf{D}^p_n \notin \mathsf{D}^p_{n+1}$.

Очевидно: $\mathbf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^{p+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^p$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}_n^p \notin \mathbf{D}_{n+1}^p$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^{p+1}$, а хотим $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$.

Очевидно: $\mathbf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^{p+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^p$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}_n^p \notin \mathbf{D}_{n+1}^p$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^{p+1}$, а хотим $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$?

Очевидно: $\mathbf{D}_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^{p+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}_n^p \in \mathbf{D}_{n+1}^p$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}_n^p \notin \mathbf{D}_{n+1}^p$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^{p+1}$, а хотим $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$? — **Упрощение описания множества $\mathbf{D}_1^p$ против ожидаемого $\mathbf{D}_2^{p+1}$.**

Очевидно: $\mathbf{D}^p_n \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}^p_n \in \mathbf{D}^{p+1}_{n+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}} \in \mathbf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}+1}$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}^p_n \notin \mathbf{D}^p_{n+1}$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^{p+1}_2$, а хотим $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$? — **Упрощение описания множества $\mathbf{D}^{\boldsymbol{p}}_1$ против ожидаемого $\mathbf{D}^{\boldsymbol{p}+1}_2$.**

Тарский: в конструктивной модели Гёделя $\mathbf{L}$ ответ отрицательный: $\mathbf{D}^p_1 \notin \mathbf{D}^p_2$ для любого $p \geq 1$.

Очевидно: $\mathbf{D}^p_n \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}^p_n \in \mathbf{D}^{p+1}_{n+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}^p_n \in \mathbf{D}^p_{n+1}$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}^p_n \notin \mathbf{D}^p_{n+1}$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^{p+1}_2$, а хотим $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$? — **Упрощение описания множества $\mathbf{D}^p_1$ против ожидаемого $\mathbf{D}^{p+1}_2$.**

Тарский: в конструктивной модели Гёделя $\mathbf{L}$ ответ отрицательный: $\mathbf{D}^p_1 \notin \mathbf{D}^p_2$ для любого $p \geq 1$.

Проблема (переформулировка, Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, найти модель теории множеств, в которой ответ положительный: $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$,

Очевидно: $\mathbf{D}^p_n \in T_{n+1}$.

Тарский: $\mathbf{D}^p_n \in \mathbf{D}^{p+1}_{n+1}$. **Верно ли, что $\mathbf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}} \in \mathbf{D}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}+1}$??**

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $\mathbf{D}^p_n \notin \mathbf{D}^p_{n+1}$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^{p+1}_2$, а хотим $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$? — **Упрощение описания множества $\mathrm{D}^{\boldsymbol{p}}_1$ против ожидаемого $\mathrm{D}^{\boldsymbol{p}+1}_2$.**

Тарский: в конструктивной модели Гёделя $\mathbf{L}$ ответ отрицательный: $\mathbf{D}^p_1 \notin \mathbf{D}^p_2$ для любого $p \geq 1$.

Проблема (переформулировка, Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, найти модель теории множеств, в которой ответ положительный: $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$, **т. е. с упрощением описания**.

Теперь следует наша первая теорема:

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall p \geq 1$, *существует модель теории множеств, в которой ответ положительный:* $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^p_2$,

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall p \geq 1$, *существует модель теории множеств, в которой ответ положительный:* $\mathsf{D}^p_1 \in \mathsf{D}^p_2$, *и даже* $\mathsf{D}^p_1 \in \mathsf{D}^1_2$, **т. е. возможно СУЩЕСТВЕННОЕ упрощение описания множества** D^p_1 *по сравнению с ожидаемым* D^{p+1}_2.

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall p \geq 1$, существует модель теории множеств, в которой ответ положительный: $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$, и даже $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^1$, **т. е. возможно СУЩЕСТВЕННОЕ упрощение описания множества $\mathbf{D}_1^p$** *по сравнению с ожидаемым $\mathbf{D}_2^{p+1}$.*

Напомним что $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^1$ означает следующее:

множество $\mathbf{D}_1^p$ *— а оно удовлетворяет* $\mathbf{D}_1^p \subseteq T_1 = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *— определимо формулой с кванторами только по* T_1.

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall p \geq 1$, существует модель теории множеств, в которой ответ положительный: $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$, и даже $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^1$, **т. е. возможно СУЩЕСТВЕННОЕ упрощение описания множества $\mathbf{D}_1^p$** *по сравнению с ожидаемым $\mathbf{D}_2^{p+1}$.*

Напомним что $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^1$ означает следующее:

множество $\mathbf{D}_1^p$ — а оно удовлетворяет $\mathbf{D}_1^p \subseteq T_1 = \mathscr{P}(\mathbb{N})$
— определимо формулой с кванторами только по T_1.

Уточнение к теореме 1 состоит в том, что для описания $\mathbf{D}_1^p$ **достаточно всего двух кванторов по T_1 в комбинации $\exists\forall$.**

Доказательство Теоремы 1.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.
2. Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq$.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.
2. Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq$.
3. Если $D \subseteq Q$ и $\forall q \in Q\, \exists d \in D\, (q \leq d)$, то D наз. ***плотным в*** $\boldsymbol{Q}$.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.
2. Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq$.
3. Если $D \subseteq Q$ и $\forall q \in Q\, \exists d \in D\, (q \leq d)$, то D наз. ***плотным в Q***.
4. Если **1)** $G \subseteq Q$, **2)** выполнено $\forall r \in G\, \forall q \in Q\, (q \leq r \Longrightarrow q \in G)$ (т. е. G – *фильтр*), и **3)** G непусто пересекается с любым мн-вом $D \subseteq Q$, $D \in \mathbf{L}$, плотным в Q, то G назыв. ***генерическим***.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.

2. Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\le$.

3. Если $D \subseteq Q$ и $\forall q \in Q\, \exists d \in D\, (q \le d)$, то D наз. ***плотным в Q***.

4. Если **1)** $G \subseteq Q$, **2)** выполнено $\forall r \in G\, \forall q \in Q\, (q \le r \Longrightarrow q \in G)$ (т. е. G – *фильтр*), и **3)** G непусто пересекается с любым мн-вом $D \subseteq Q$, $D \in \mathbf{L}$, плотным в Q, то G называв. ***генерическим***.

5. В этом случае, строим ***Q-генерическое расширение*** $\mathbf{L}[G]$; оно является моделью аксиом теории множеств.

Доказательство Теоремы 1.

1. Начинаем с **класса L** всех множеств, конструктивных по Гёделю.

2. Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq$.

3. Если $D \subseteq Q$ и $\forall q \in Q \, \exists d \in D \, (q \leq d)$, то D наз. ***плотным в Q***.

4. Если 1) $G \subseteq Q$, 2) выполнено $\forall r \in G \, \forall q \in Q \, (q \leq r \Longrightarrow q \in G)$ (т. е. G – *фильтр*), и 3) G непусто пересекается с любым мн-вом $D \subseteq Q$, $D \in \mathbf{L}$, плотным в Q, то G назыв. ***генерическим***.

5. В этом случае, строим ***Q-генерическое расширение*** $\mathbf{L}[G]$; оно является моделью аксиом теории множеств.

6. При подходящем выборе Q получаем: в модели $\mathbf{L}[G]$ выполнено $\mathbf{D}^p_1 \in \mathbf{D}^1_2$. В этом и состоит доказательство Теоремы 1.

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Напомним: множество $\boldsymbol{U}$ называется алгоритмически разрешимым, если существует алгоритм, который на $p \in \boldsymbol{U}$ выдаёт 1 и на $p \notin \boldsymbol{U}$ выдаёт 0.

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Напомним: множество $\boldsymbol{U}$ называется алгоритмически разрешимым, если существует алгоритм, который на $p \in \boldsymbol{U}$ выдаёт 1 и на $p \notin \boldsymbol{U}$ выдаёт 0.

Теорема 2 (Кановей – Любецкий)

Для любого алгоритмически разрешимого множества U, существует модель теории множеств, в которой истинно:

$$\forall p \geq 1 \,,$$

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Напомним: множество $\boldsymbol{U}$ называется алгоритмически разрешимым, если существует алгоритм, который на $p \in \boldsymbol{U}$ выдаёт 1 и на $p \notin \boldsymbol{U}$ выдаёт 0.

Теорема 2 (Кановей – Любецкий)

Для любого алгоритмически разрешимого множества U, существует модель теории множеств, в которой истинно:

$$\forall p \geq 1\,, \qquad \begin{cases} p \in U \implies \mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p\,, \\ \end{cases}$$

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Напомним: множество $\boldsymbol{U}$ называется алгоритмически разрешимым, если существует алгоритм, который на $p \in \boldsymbol{U}$ выдаёт 1 и на $p \notin \boldsymbol{U}$ выдаёт 0.

Теорема 2 (Кановей – Любецкий)

Для любого алгоритмически разрешимого множества U, существует модель теории множеств, в которой истинно:

$$\forall p \geq 1\,, \qquad \begin{cases} p \in U \implies \mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p\,, \\ p \notin U \implies \mathbf{D}_1^p \notin \mathbf{D}_2^p\,. \end{cases}$$

Публикации по докладу

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

[3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

[3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2

[4] V. Kanovei and V. Lyubetsky, A good lightface $\varDelta^1_n$ well-ordering of the reals does not imply the existence of boldface $\mathbf{\Delta}^1_{n-1}$ well-orderings. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2024, Vol. 175, No. 6, Article 103426, P. 1–38. DOI. Приложения результатов и методов

[5] V. Kanovei and V. Lyubetsky, Parameterfree comprehension does not imply full comprehension in second order Peano arithmetic. *Studia Logica*, 2025, Vol. 113, P. 109–124. DOI. То же

Завершение

Докладчик признателен всем за интерес и внимание