

К проблеме А. Тарского об упрощении описаний

В. Г. Кановей и В. А. Любецкий

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича
ИППИ РАН

Сентябрь 2025

ИТИС'25

Москва

Альфред Тарский (1948) рассмотрел определимость множества всех объектов данного типа в стандартной теоретико-типовой структуре, определяемых формулами с ограничениями на типы переменных.

Поставленные Тарским проблемы в этой области оставались открытыми до недавнего времени. Об их решении рассказывается в этом докладе.

Вопросы определимости и способов описания математических объектов поднимались в ходе дискуссий об основаниях математики, теории множеств и аксиоме выбора в начале двадцатого века.

А. Тарский (1936) показал, что понятие “быть определимым” может быть тщательно анализировано только после предварительного определения конкретного формального контекста, в котором оно рассматривается.

Теория определимости Тарского была применена и получила дальнейшее развитие в классических работах Клини и в более поздних исследованиях Аддисона, Чегельского, и др.

Различные аспекты определимости находятся в центре внимания современных исследований в теории множеств, в частности тех, которые связаны с самым широким контекстом универсума множеств или классов, или даже *мультиверсума* как одного из современных направлений, или с конкретными моделями теории множеств.

Тарский рассматривал структуру типов T :

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \\ \text{— тип } n+1, \quad T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n) = \{X : X \subseteq T_n\} \\ \text{— тип } n, \quad T_n \\ \dots \dots \\ \text{— тип } 2, \quad T_2 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \text{— тип } 1, \quad T_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{X : X \subseteq \mathbb{N}\} = \mathbb{R} \\ \text{— тип } 0, \quad T_0 = \mathbb{N} = \text{натуральные числа} \end{array} \right.$$

Структура типов T включает всю арифметику в T_0 , за которой следует итерация взятия множества всех подмножеств $\mathcal{P}(\cdot)$.

Начиная с работ Кантора конца 19 века, и затем Рассела, показано, что всю обычную математику можно вложить в T . За исключением теории множеств, теории категорий и некоторых других направлений.

Тарский рассматривает множества $D_n^p =$ множество всех элементов типа n , определенных формулами типа $\leq p$.

Более подробно, при $n \geq 1$,

$$D_n^p = \{X \in T_n : \underbrace{\exists \Phi_n^p(y) \forall y \in T_{n-1} (y \in X \iff \Phi_n^p(y))}_{X \text{ определено формулой } \Phi_n^p(y)}\} \subsetneq T_n,$$

где запись $\Phi_n^p(y)$ означает, что в формуле Φ :

- 1) переменная y имеет тип $n - 1$, и
- 2) все переменные в кванторах только по типам $p' \leq p$, т. е.

$$\Phi := Q_1 z_1 \in T_{t_1} \dots Q_k z_k \in T_{t_k} \varphi(z_1, \dots, z_k, y),$$

где φ бескванторная, $Q_i = \exists$ или $\forall$, а типовые индексы $t_1, \dots, t_k \leq p$.

Таким образом, в записи D_n^p : n – тип элементов X множества D_n^p ,
 p – ограничение на тип кванторов.

Очевидно: $D_n^p \in T_{n+1}$.

Тарский: $D_n^p \in D_{n+1}^{p+1}$. Верно ли, что $D_n^p \in D_{n+1}^p$??

Тарский: если $n \geq 2$, то неверно, т. е. $D_n^p \notin D_{n+1}^p$.

Остается $n = 1$, где точно имеем $D_1^p \in D_2^{p+1}$, а хотим $D_1^p \in D_2^p$.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, верно ли, что $D_1^p \in D_2^p$? — Упрощение описания множества D_1^p против ожидаемого D_2^{p+1} .

Тарский: в конструктивной модели Гёделя L ответ отрицательный: $D_1^p \notin D_2^p$ для любого $p \geq 1$.

Проблема (переформулировка, Тарский, 1948)

Для данного $p \geq 1$, найти модель теории множеств, в которой ответ положительный: $D_1^p \in D_2^p$, т. е. с упрощением описания.

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall p \geq 1$, существует модель теории множеств, в которой ответ положительный: $D_1^p \in D_2^p$, и даже $D_1^p \in D_2^1$, **т. е. возможно СУЩЕСТВЕННОЕ упрощение описания множества D_1^p по сравнению с ожидаемым D_2^{p+1} .**

Напомним что $D_1^p \in D_2^1$ означает следующее:

*множество D_1^p — а оно удовлетворяет $D_1^p \subseteq T_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
— определимо формулой с кванторами только по T_1 .*

Уточнение к теореме 1 состоит в том, что для описания D_1^p **достаточно всего двух кванторов по T_1 в комбинации $\exists \forall$.**

Доказательство Теоремы 1.

- 1 Начинаем с **класса $\mathbf{L}$** всех множеств, конструктивных по Гёделю.
- 2 Берем **частично упорядоченное множ-во** $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq$.
- 3 Если $D \subseteq Q$ и $\forall q \in Q \exists d \in D (q \leq d)$, то D наз. **плотным в Q** .
- 4 Если **1)** $G \subseteq Q$, **2)** выполнено $\forall r \in G \forall q \in Q (q \leq r \implies q \in G)$ (т. е. G – *фильтр*), и **3)** G непусто пересекается с любым мн-вом $D \subseteq Q$, $D \in \mathbf{L}$, плотным в Q , то G назыв. **генерическим**.
- 5 В этом случае, строим **Q -генерическое расширение $\mathbf{L}[G]$** ; оно является моделью аксиом теории множеств.
- 6 При подходящем выборе Q получаем: **в модели $\mathbf{L}[G]$ выполнено $D_1^p \in D_2^1$** . В этом и состоит доказательство Теоремы 1.

Нами также получено усиление Теоремы 1, о котором вряд ли даже можно было думать во времена Тарского.

Напомним: множество U называется **алгоритмически разрешимым**, если существует алгоритм, который на $p \in U$ выдаёт 1 и на $p \notin U$ выдаёт 0.

Теорема 2 (Кановой – Любецкий)

Для любого алгоритмически разрешимого множества U , существует модель теории множеств, в которой истинно:

$$\forall p \geq 1, \quad \begin{cases} p \in U \implies \mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p, \\ p \notin U \implies \mathbf{D}_1^p \notin \mathbf{D}_2^p. \end{cases}$$

- [1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы
- [2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the ‘definability of definable’ problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1
- [3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the ‘definability of definable’ problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2
- [4] V. Kanovei and V. Lyubetsky, A good lightface Δ_n^1 well-ordering of the reals does not imply the existence of boldface $\mathbf{\Delta}_{n-1}^1$ well-orderings. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2024, Vol. 175, No. 6, Article 103426, P. 1–38. DOI. Приложения результатов и методов
- [5] V. Kanovei and V. Lyubetsky, Parameterfree comprehension does not imply full comprehension in second order Peano arithmetic. *Studia Logica*, 2025, Vol. 113, P. 109–124. DOI. То же

**Докладчик признателен всем за интерес и
внимание**