

Введение в эргодическую теорию М.Л. Бланк (ВШЭ и ИППИ РАН)

Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что "типичные" детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории похожи на реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2-4 курса, магистрантов и аспирантов. Предварительных знаний кроме курса мат. анализа не требуется (хотя они и желательны).

Программа курса:

- Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
- Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
- Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая-Боуэна-Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
- Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
- Эргодический подход к задачам теории чисел.
- Гиперболические динамические системы и показатели Ляпунова.
- Энтропия: метрический и топологический подходы.
- Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
- Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
- Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

Литература:

- М. Бланк. "Устойчивость и локализация в хаотической динамике", МЦНМО, Москва, 2001.
- И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин. "Эргодическая теория", Наука, Москва, 1980.
- A. Katok, B. Hasselblatt. "Introduction to the modern theory of dynamical systems", 1995.

Курс читается на ф-те математики Высшей школы экономики.

Introduction to Ergodic Theory

M.L. Blank (HSE and IITP RAS)

Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that “typical” deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2-4 bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

Course program:

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, the concept randomness.
- The action in the space of measures, the concept of the transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai-Bowen-Ruelle measures and natural / observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Hyperbolic dynamical systems and Lyapunov exponents.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

Literature:

- M. Blank. “Stability and localization in chaotic dynamics”, MCCME, Moscow, 2001.
- I.P. Kornfeld, Ya.G. Sinai, S.V. Fomin. “Ergodic theory”, Nauka, Moscow, 1980.
- A. Katok, B. Hasselblatt. “Introduction to the modern theory of dynamical systems”, Cambridge Univ. Press, 1995.