Мат. Анализ. Семинар №1

Числовые ряды

① Напоминание из 1-го семестра.

Что такое ряд? Бесконечная сумма:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

Частичная сумма: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Опр. Ряд сходится, если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S называется суммой ряда: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Утв 1. Необходимое условие сходимости ряда:
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

Утв 2. Пусть $a_n \geq 0$. Достаточное условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $\{S_n\}$ — ограниченная последовательность.

Примеры сходящихся и расходящихся рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (геом. прогрессия) $\boxed{S = \dfrac{1}{1-q}}$

при $|q| < 1$ сходится

при $|q| \geq 1$ расходится. $|q| = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится. (Признак сравнения)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится. (Критерий Коши)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$: при $s > 1$ сходится, при $0 < s \leq 1$ расходится

(Признак $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, a_n — монотон., сходится $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ — сходится.

Теорема 1. (Критерий Коши)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N,\ m \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Утв 3. Арифметические свойства сходящихся рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 2. (Признак Даламбера)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$.

Если $p < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

Если $p > 1$, то ряд расходится;

Если $p = 1$, то не известно.

Теорема 3 (Признак Коши)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

Если $q > 1$, то ряд расходится

Если $q = 1$, то не известно.

---

2) Признак Лейбница

Ряд называется знакочередующимся, если он имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n$, где $a_n \geq 0$.

Теорема 4 (Признак Лейбница)

Пусть $a_n \geq 0$, a_n - монотонно убывает и $a_n \to 0$

Тогда знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ сходится.

(То же про $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$).

Доказательство: Рассмотрим частичные суммы S_{2n+1} и S_{2n}. | Ряд: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$

Утв: S_{2n+1} монотонно убывает:

$S_1 = a_1$, $S_3 = S_1 - (a_2 - a_3) < S_1$

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < S_{2n-1}$

т.к. $a_{2n} > a_{2n+1}$

Аналогично, S_{2n} — возрастает

$S_2 = a_1 - a_2$, $S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) > S_2$.

$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > S_{2n}$

т.к. $a_{2n+1} > a_{2n+2}$

Кроме того: $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} > 0$.

т.е. $S_{2n} < S_{2n+1}$

Следовательно: S_{2n} и S_{2n+1} — монотонные ограниченные последовательности. По принципу Вейерштрасса они имеют пределы, причем $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim S_{2n+1}$, т.к. $a_{2n+1} \to 0$.

Значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Примеры рядов, сходящихся по признаку Лейбница:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}$.

<u>Задача 1.</u> Привести пример знакочередующегося ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$, $a_n \to 0$, который расходится, т.е. условие монотонности в признаке Лейбница существенно.

<u>Решение:</u> $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$$

последовательность не монотонно убывает

$$\frac{1}{1+1} < \frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{\sqrt{3}+1} < \frac{1}{\sqrt{4}-1} > \dots$$

т.к. $$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \iff \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 2.$$

Рассмотрим разность рядов: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n}-(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})\cdot\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})\sqrt{n}}.$$

Этот ряд <u>расходится</u>, по признаку сравнения с гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ <u>сходится</u> по Лейбницу

Следовательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ <u>расходится</u>.

Задача 2. Доказать формулу:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + o(1) \quad (n \to \infty),$$

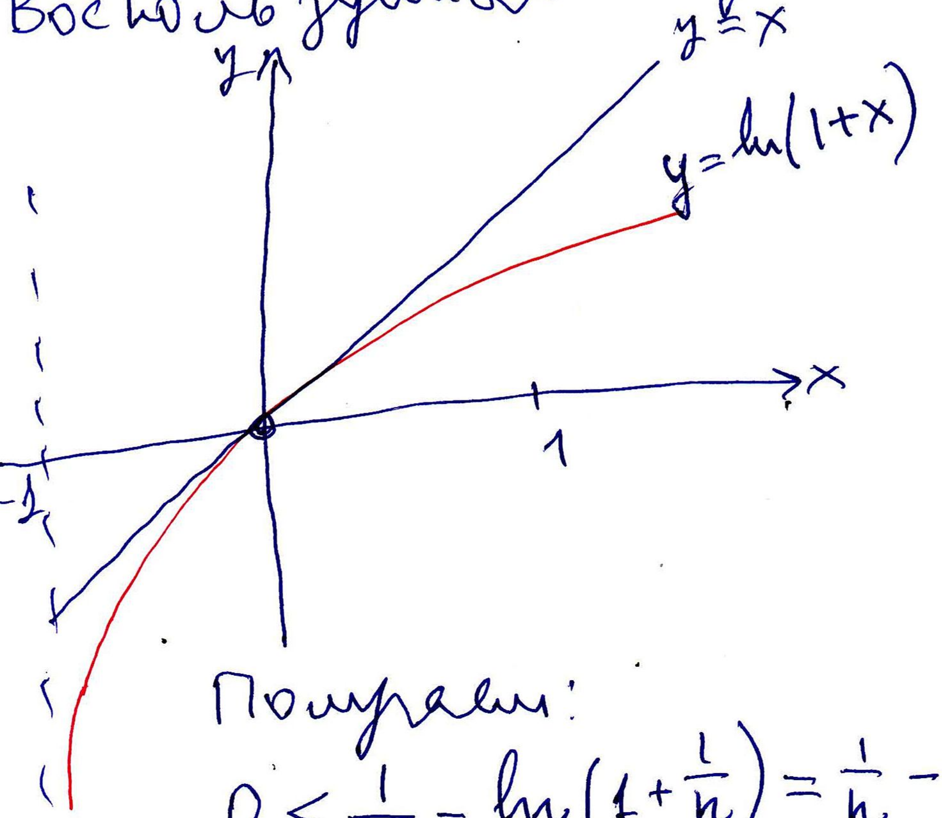
где γ — некоторая константа, которая называется постоянной Эйлера.

Решение: Рассмотрим разность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ — сходится.}$$

Воспользуемся неравенством: $\ln(1+x) < x$, $x > -1$



Продифференцируем

$$\frac{1}{1+x} < 1 \text{ при } x > 0$$

$$\frac{1}{1+x} > 1 \text{ при } x < 0$$

Получим:

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

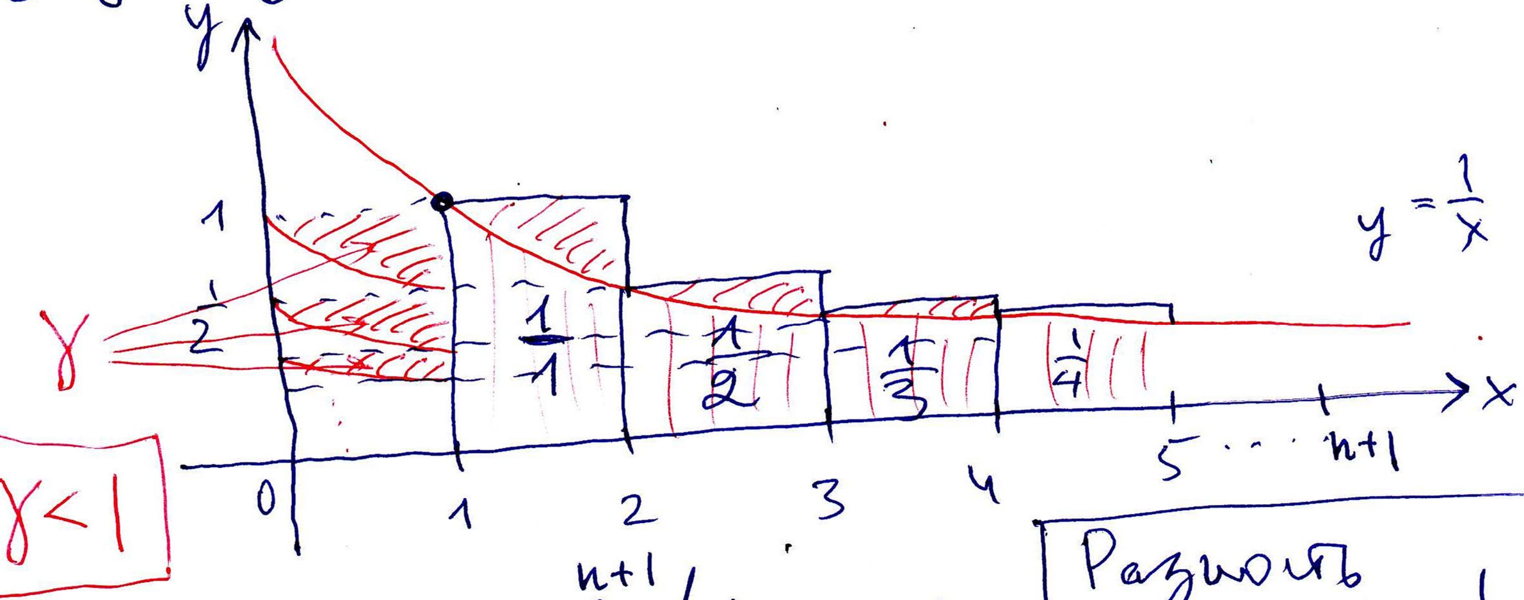
$$= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$$

Следовательно ряд из положительных членов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ сходится. Обозначим его сумму γ. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \gamma + o(1) + o(1) = \gamma + o(1)$$

Еще одно графическое решение:



$$0 < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} \to \gamma$$

$\boxed{\text{Разность площадей!}}$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln x \Big|_{1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma.$$

Постоянная Эйлера γ равна сумме площадей заштрихованных сегментов.
Очевидно: $\gamma < 1$. Подсчитано: $\gamma \approx 0{,}57721$

Задача 3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Решение: этот ряд сходится по признаку Лейбница. Найдем его сумму. Воспользуемся задачей 2. Перегруппируем члены

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n + \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1)$$

Ответ: Сумма ряда равна $\ln 2$.

Задача 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$.

Решение: Снова воспользуемся задачей 1

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln 2 + o(1)$$

Ответ: Предел равен $\ln 2$.

Задача 5. Найти сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots$$

Решение: Обозначим частичную сумму этого ряда B_n. Пусть A_n – част. сумма знакочередующегося ряда из задачи 3.

$$B_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_n$$

Следовательно, $B_{3n}\to\frac{1}{2}\ln 2$.

Кроме того, $B_{3n-1}=B_{3n}+\frac{1}{4n}$, $B_{3n-2}=B_{3n-1}+\frac{1}{4n-2}$

Следовательно, $B_n\to\frac{1}{2}\ln 2$.

Ответ: Сумма: $\frac{1}{2}\ln 2$

Напомним, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но не абсолютно сходится, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится. В задачах 3 и 5 имеем условно сходящиеся ряды. Видно, что можно переставлять члены условно сходящегося ряда так, что получатся разные суммы сходящихся рядов. Будет теорема Римана, что сумму можно получить любую!

Задача 6. Найти следующие суммы:

а) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin kx}_{A_n}$, б) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cos kx}_{B_n}$.

Решение: Воспользуемся следующими тригонометрическими тождествами:

а) $\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x = 2\sin kx \cdot \sin\frac{x}{2}$

б) $\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = 2\cos kx \cdot \sin\frac{x}{2}$

Сложим эти равенства при $k=1,2,\dots,n$.

Тогда для а) получим:

$$\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot A_n$$

Сложим косинусы по формуле:

$$2\sin\frac{n+1}{2}\cdot x\cdot\sin\frac{nx}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$$

т.е. $A_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, при $\sin\frac{x}{2}\neq 0$.

Аналогично для б):

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cdot B_n$$

Откуда $B_n = \dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ при $\sin\frac{x}{2}\neq 0$

$\sin\frac{x}{2}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

В этом случае: а) $A_n = 0$; б) $B_n = n$.

Второе решение основано на переходе к комплексным числам по формуле Эйлера: например для б)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$ т.е. $\cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$.

Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \operatorname{Re}\frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1}.$$

(формула суммы геометрической прогрессии со знаменателем $e^{ix} = q$.

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i\frac{x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}\operatorname{Re}\left(\underline{-ie^{i(n+\frac{1}{2})x} + ie^{i\frac{x}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично для а)

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin x/2}$$