1к. Мат. Анализ. Семинар № 2.

Абсолютно и неабсолютно сходящиеся ряды. Признаки сходимости

① Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов:

1. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится, причем, его сумма S удовлетворяет неравенству: $|S| \leq \sigma$, где σ — это сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sigma$.

Док-во: Вытекает из критерия Коши сходимости ряда и следующего неравенства:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|$$

Кроме того,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sigma_n \Rightarrow |S| \leq \sigma.$$

---

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ — абс. сходится $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

---

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, так же сходится и сумма его не изменяется.

Док-во: применить критерий Коши.

Задача 1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если

а) $a_n = \dfrac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$; б) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sin n}{n}$

в) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\cdot\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение:

а) Воспользуемся неравенствами: $(n+1)\le 2n$, $|\cos 2n| \le 1$, $\sqrt[3]{n^7+3n+4} > n^7$. Получим: Тогда $|a_n| \le \dfrac{2}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{4/3}}$ сходится. Тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

б) Справедливы следующие неравенства:
$\ln(1+z) \le z, \forall z \ge 0$, $|\operatorname{arctg} z| \le |z|, \forall z \in \mathbb{R}$.
Тогда: $|a_n| \le \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n^{6/5}}$.

в) Воспользуемся формулой $1-\cos z = 2\sin^2(z/2)$ и неравенством $|\sin z| \le |z|, \forall z \in \mathbb{R}$.

$$|a_n| \le \frac{1}{\ln^2(n+1)}\, 2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{\ln^2(n+1)\cdot 2n} \le \frac{1}{2n(\ln n)^2}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ сходится. Почему?

(по признаку с прорежением $\sum a_n \Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$, $a_n \searrow 0$.

$$\sum \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^2} = \sum \frac{1}{n^2}.$$

② Знакочередующиеся ряды

Ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, где $a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$ называется знакочередующ.

Признак Лейбница: Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, причем $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, где S - сумма ряда

---

3) Признаки Дирихле и Абеля

Признак Дирихле: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится, если

а) частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, т.е. $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$;

б) последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Признак Абеля: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится, если

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

б) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена: т.е. $a_{n+1} \geq a_n$ или $a_{n+1} \leq a_n$, и $|a_n| \leq M$ $\forall n \geq n_0$.

---

4) Условно сходящиеся ряды.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ наз. условно сходящимся, если он сходится, но не абсолютно, т.е., ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится.

Теорема (Римана). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого числа A можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна A.

Задача 2. Пусть $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha n$ сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha n$ сходится при $\alpha \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Обозначим: $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \alpha k$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \alpha k$.

Тогда:
$$B_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$C_n = \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ при } \alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

(При $\alpha = 2\pi m$, $B_n = 0$, $C_n = n$)

Если $\alpha \neq 2\pi m$, то

$$|B_n| \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}; \quad |C_n| \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Тогда по признаку Дирихле ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x$ сходятся

при $\alpha = 2\pi m$, $\sin\alpha n = 0$, $\cos\alpha n = 1$.
Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\alpha n$ сходится, а ряд
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\alpha n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может расходиться.

<u>Задача 3</u> Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha n}{\ln\ln(n+2)} \cdot \cos\frac{1}{n}$$
<u>Решение</u>: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\alpha n}{\ln\ln(n+2)}$ сходится

по задаче 2. Последовательность $\cos\frac{1}{n}$
ограничена и монотонна ($\frac{1}{n} \to 0$). Возрастает
и $\cos\frac{1}{n} \to 1$. Тогда применим <u>признак Абеля</u>.

<u>Задача 4</u>. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

а) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$; б) $a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right)$, в) $a_n = \frac{\cos n}{n}$

Решение: а) Расходится (прошлый семинар)
тем более, не сходится абсолютно.

б) Воспользуемся формулой $\ln(1+z) = z + O(z^2)$.
Тогда $a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + b_n$, где $|b_n| \le \frac{C}{n^{4/3}}$.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится <u>абсолютно</u> (по пр. сравнения)
и ряд $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ сходится (по Лейбницу) <u>условно</u>

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Абсолютно не сходится.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится (Задача 2) $\alpha=1$.

Покажем, что абсолютно не сходится, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ - расходится. Воспользуемся нер.

$$|\cos n| \geqslant \cos^2 n = \frac{1+\cos 2n}{2}$$

Следовательно,

$$\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{1+\cos 2n}{n}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos 2n}{n}$ расходится, т.к.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ - расходится.

Значит $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится условно

Задача 5. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходящийся ряд.

Обозначим: $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \leq 0 \end{cases}$, $a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0 \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$

Доказать: а) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся

б) Найти $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^+}{S_n^-}$, где $S_n^{\pm} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\pm}$.

Решение: $S_n' = S_n'^{+} - S_n'^{-}$

Обозначим $A_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Тогда $A_n = S_n'^{+} + S_n'^{-}$

Если, $S_n'^{+}$ - сходится, то $S_n'^{-} = S_n' - S_n'^{+}$ - сходится

тогда $A_n = S_n'^{+} + S_n'^{-}$ - сходится, противоречие

Аналогично, для $S_n'^{-}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n'^{+}}{S_n'^{-}}$

$$\begin{cases} S_n' = S_n'^{+} - S_n'^{-} \\ A_n = S_n'^{+} + S_n'^{-} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_n'^{+} = \frac{S_n' + A_n}{2} \\ S_n'^{-} = \frac{A_n - S_n'}{2} \end{cases}$$

Заметим, что $S_n' \to S'$, $A_n \to \infty$, $\frac{S_n'}{A_n} \to 0$.

Тогда $\frac{S_n'^{+}}{S_n'^{-}} = \frac{S_n' + A_n}{A_n - S_n'} = \frac{\frac{S_n'}{A_n} + 1}{1 - \frac{S_n'}{A_n}} \to \frac{1}{1}$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n'^{+}}{S_n'^{-}} = 1$.

Вопрос: Чему равен этот предел, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится?

Ответ: может быть любое число из $\mathbb{R}_+$.