1к

Мат. Анализ. Семинар №3

Абсолютно и условно сходящиеся ряды (продолжение).

Задача 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится (по признаку Лейбница). Расставить его члены так, чтобы получился расходящийся ряд.

Решение: предлагается следующая расстановка: взять 3 положительных члена, а потом отрицательный и т.д.:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Проверим следующее неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant 0, \text{ т.к.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2n} \geqslant \sqrt{6n-1} \Leftrightarrow 8n \geqslant 6n-1$$

Следовательно: $a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ – расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Задача 2</u>. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right), \text{ где } k \text{ — параметр.}$$

<u>Решение:</u>

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \sin \pi\left(\sqrt{n^2+k^2} - n\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = (-1)^n \cdot a_n$$

Последовательность $\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ монотонно (при $n \geq n_0$) стремится к нулю ($\sin x$ монотонная функция при $0 < x < \pi$).

Абсолютной сходимости нет, т.к. $a_n \sim \frac{1}{n}$

<u>Задача 3</u>. Исследовать на сх. и абс. сход:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

<u>Решение</u>: $\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi n^2}{n^2+1} - \pi n\right) =$

$$= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ сходится по пр. Лейбница. Последовательность $a_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$ монотонно возрастает и ограничена. Тогда по признаку Абеля исх. ряд сходится. <u>Абс. сход. нет.</u>

Задача 4. Доказать, что следующий ряд сходится:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Решение: имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где

$a_n=\frac{1}{n}$, $\{b_n\}=\{1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,\ldots\}$

Тогда a_n – монотонно стремится к нулю.

$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq 3$. Сходится по пр. Дирихле.

Задача 5. Исследовать на абс. сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), \quad p>0.$$

Решение: По ф. Тейлора: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, $x\to 0$.

т.е. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится по пр. Лейбница ($\forall p>0$)

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ сходится при $2p>1$ т.е. $p>1/2$

и расходится при $0<2p<1$, т.е. $0<p<\frac{1}{2}$

Ответ: Ряд сходится при $p>\frac{1}{2}$

Ряд расходится при $p<\frac{1}{2}$

Воспользуемся неравенствами:

$$\frac{|x|}{2} < |\ln(1+x)| < 2|x|, \quad |x| \ll 1$$

следовательно, $\frac{1}{2n^p} < \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right| < \frac{2}{n^p}$

Поэтому, при $p > 1$ ряд сходится абсолютно

а при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ сходится условно

Задача 6. Исследовать на абс. сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p + \sin n}, \quad p > 0.$$

Решение:

$$\frac{\sin n}{n^p + \sin n} = \frac{\sin n}{n^p}\left(1 + \frac{\sin n}{n^p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin n}{n^p}\left(1 - \frac{\sin n}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin n}{n^p} - \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ - сходится $\forall p > 0$ (Дирихле)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$; $\frac{\sin^2 n}{n^{2p}} = \frac{1 - \cos 2n}{2 n^{2p}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^{2p}}$ - сходится $\forall p > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ $\begin{cases} \text{- сходится при } p > 1/2 \\ \text{- расходится при } 0 < p < \frac{1}{2} \end{cases}$

Для исследования абсолютной сходимости воспользуемся неравенствами:

$$\frac{|\sin n|}{2n^p} < \left|\frac{\sin n}{n^p+\sin n}\right| < \frac{2|\sin n|}{n^p}$$

$$|\sin n| > \sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{n}$$

Из которых следует абс. сходимость при $p>1$

при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ имеем условную сходимость

---

② Произведение рядов

Даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Составим их произведение в виде бесконечной матрицы:

$$\begin{pmatrix}
a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n & \cdots \\
a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{pmatrix}$$

Можно по-разному нумеровать члены этой матрицы и получать разные ряды:

$$A_1 = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \ldots$$

$$A_2 = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1 + \ldots$$

Если один из этих рядов абсолютно сходится, то и все остальные сходятся к одной и той же сумме

Теорема (Коши) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то их произведение в любой последовательности абсолютно сходится к $A \cdot B$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Если нет абсолютной сходимости то можно суммировать по-разному.

Опр. Суммирование по Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ где}$$

$$c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$$

Теорема (Мертенс) Если один из рядов абсолютно сходится, то произведение по Коши сходится и

$$C = A \cdot B$$

Задача 7. Перемножить по правилу Коши ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$, $|x|, |y| < 1$

Решение: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n = x \cdot y^n + x^2 y^{n-1} + \ldots + x^n \cdot y =$

$$= x^n y\left[\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right) + 1\right] =$$

$$= x^n \cdot y\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^n - 1}{\left(\frac{y}{x}\right) - 1}\right] = \frac{xy^{n+1} - x^{n+1}y}{y-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xy}{y-x}\left[y^n - x^n\right] = \frac{x \cdot y}{y-x}\left[\frac{y}{1-y} - \frac{x}{1-x}\right] =$$

$$= \frac{xy}{y-x}\left[\frac{y \cancel{-xy} - x \cancel{+yx}}{(1-y)(1-x)}\right] = \frac{xy}{(1-x)(1-y)}.$$

Задача 8. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Он сходится условно (Лейбниц).

Найдем его квадрат по Коши:

$$c_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$

Следовательно, $|c_n| > 1$ и ряд произведения по Коши <u>расходится</u>.

<u>Задача 9.</u> Проверить, что квадрат по Коши ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится,

Решение:

$$c_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\ldots+\frac{1}{k(n-k+1)}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)+\ldots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right]=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Лейбн.

Теорема Мертенса не применима!

Однако

Задача 9* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n=(\ln 2)^2.$

(Самостоятельно)