

1К Мат. Анализ. Семинар №4

Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей

Функциональная последовательность:
 $\{f_n(x)\}$, $x \in E$. Функции вещественная
(или комплексная)

Опр 1. Пунктовая сходимость:

$$\forall x \in E \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$
 $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(x, \varepsilon) \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Опр 2. Равномерная сходимость

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N, \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$

В отличие от пунктовой сходимости, N
обеспечивает все $x \in E$.

Достаточное условие равномер-
ной сходимости: если

$$\exists a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0 : \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E$$

тогда $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$. Достаточное условие

на самом деле, это условие необходимо
и неотделимо. Если $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$, то

$$\text{можно взять } a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

Очевидно, такая $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
Однако, для конкретных задач найти a_n
не всегда легко

Неравномерная сходимость:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N, x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

На самом деле, это эквивалентно

$$\exists \varepsilon_0 \exists n_k \rightarrow \infty, x_k \in E : |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$$

Критерий Коши равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall m \in \mathbb{N} \forall x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Достаточно критерия: не надо знать
предельную функцию $f(x)$.

Задача 0. Сформулированная критерий
отсутствия равномерной сходимости.

Решение:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \exists m \exists x \in E : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon_0$$

$$\text{Эквивалентно: } \exists \varepsilon_0 > 0 \exists n_k \rightarrow \infty, m_k \in \mathbb{N}, x_k \in E : |f_{n_k+m_k}(x_k) - f_{n_k}(x_k)| \geq \varepsilon_0$$

Задача 1. Найти предел функционального
послед. $f_n(x), x \in E$, и исследовать его на
равномерную сходимость.

$$a) f_n(x) = x^n, E = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] ; b) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, E = \mathbb{R};$$

$$b) f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}, E = (0, +\infty); v) f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}, E = [0, +\infty)$$

Решение:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Несложно выбрать: $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0, 1], f(x_n) = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$

$$b) x=0, f(0)=0, x \neq 0 |f_n(x)| \leq \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \left| \frac{1}{nx} \right| \rightarrow 0$$

Сложнее в подборке: $x_n = \frac{1}{n}, f(x_n) = \frac{1}{2}$

$$b) \frac{\sin y}{y} \rightarrow 1, y \rightarrow 0, f_n(x) = \left(\frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} \right) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Значит $f(x) = \frac{1}{x}$

Сложнее в подборке: $x_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(x_n) = n \cdot \sin 1 \rightarrow \infty$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x + \frac{1}{n}} = \sqrt{x}, x \geq 0, f(x) = \sqrt{x}$$

Неравенство: $0 \leq \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \leq ?$

$$\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{n}}$$

Следовательно: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ не годится!
Вот подборка!

- 4 -

Задача 2. Доказать равномерную сходимость:

a) $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}$, $E = [-1, 1]$; б) $f_n(x) = n \cdot \sin \frac{1}{nx}$, $E = [1, \infty)$

Решение

a) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{n^2}{n^2 + x^2} - 1 \right| = \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = a_n$$

$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ равномерная сходимость.

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ (Задача 1 б)

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = n \left| \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right| \leq$$

$$\leq \frac{n}{n^2 x^2} = \frac{1}{n x^2} < \frac{1}{n} \text{ при } x \geq 1.$$

Используем неравенство $|\sin y - y| < \frac{y^2}{2}$, $y \geq 0$
 Двойное неравенство
 $-\frac{y^2}{2} < \sin y - y < \frac{y^2}{2}$
 $-y < \cos y - 1 < y$
 $-1 < -\sin y < 1$

Еще по групп.

Верно.

Значит $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Это равномерная сходимость.

Задача 3. Доказать равномерную сходимость

$$f_n(x) = \ln \left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}} \right), \quad E = [0, \infty)$$

$f(x) = \ln 3$ — const. сходимость $\forall x$.

Нот равномерных шаг: $\chi_n = 2 \cdot \ln n$

$$f_n(x_n) - \ln 3 = \ln \left(1 + \frac{h^2 \cdot n^2}{3(n^4 + n^4)} \right) = \ln \left(\frac{7}{6} \right) \underset{\varepsilon_0}{> 0}$$

Задача 4. Исследовать на переносимость
сходимость:

a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $E = [0, 1]$;

d) $f_n(x) = x\sqrt{n} \cdot e^{-nx^2}$, $E_0 = [0, \infty)$; $E_S = [0, \infty)$

6) $f_n(x) = n \cdot \arctan\left(\frac{n}{x^2}\right)$, $E = [1, \infty)$.

Решение:

a) $f(x) = 0$.

a) $f(x) = 0$.
 Hier gilt $\max_{x \in [1, 1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} (x^n - x^{n+1})$

Y-Problem: $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1) \cdot x^n = 0$.

ищем корень $x = x_n = \frac{n}{n+1}$, ищем
 $f'_n(x) \geq 0$ при $x \in [0, x_n)$ и $f'_n(x) < 0$ при $x \in (x_n, 1]$

Знает x_n - точка максимумов $f_n(x)$.

Найдем его: $f_n(x_n) = x_n^n (1 - x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$

т.к. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \frac{n}{n+1}$. Значит: $a_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

Есть равномерное схождение!

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x\sqrt{n} \cdot e^{-nx^2}) = 0$, т.к. $\lim_{y \rightarrow \infty} y^\alpha \cdot e^{-\beta y} = 0 \quad \forall \alpha, \beta > 0$.
 $f(x) \equiv 0$.

Опять найдем максимум $f_n(x)$.

$f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot e^{-nx^2} (1 - 2nx^2) = 0$

Корень (экстремальный) $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad (x \geq 0)$
 Это максимум, т.к. f_n имеет знак $(+)$ и $(-)$.

$f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} > 0$

Вывод: на $E_0 = [0, \infty)$ нет равн. сходимости.

Возьмем $E_\delta = [\delta, \infty)$. Тогда при достаточно n

т.е., при $\delta > \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \doteq x_{n_0}, \quad n \geq n_0$

$f_n(x)$ убывает на $[\delta, \infty)$, т.е. $\forall x \geq \delta$

$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\delta) = \sqrt{n} \cdot \delta e^{-n\delta^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Вывод: на $E_\delta = [\delta, \infty)$ есть равн. сход.

6) Проверим условие Коши на равномерно сходимости

Найдем $\varepsilon > 0, n_k \rightarrow \infty, m_k, x_n \in E: |f_{n_k}(x_k) - f_{n_k+m_k}(x_k)| \geq \varepsilon$

Пусть $n_k = K$, $m_k = K$, $x_k = \sqrt{K}$

$$|f_k(x_k) - f_{2k}(x_k)| = n | \arctan 1 - 2 \arctan 2 | \geq$$

$$\geq C \cdot n, \quad C = 2 \arctan 2 - \arctan 1 > 0.$$

т.е. нет равномерной сходимости

Есть ли сходимость? (поверим)

$$\frac{\arctan y}{y} \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow 0):$$

$$n \cdot \arctan \frac{n}{x^2} = x^2 \cdot \frac{\arctan \frac{n}{x^2}}{\left(\frac{n}{x^2}\right)} \rightarrow x^2$$

$$f_n(x) \rightarrow x^2 \quad (x \neq 0)$$
