1к Мат. Анализ. Семинар № 5

① Разбор контр. работы № 1

1. Доказать сходимость и найти сумму ряда:

I) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot q^n$ II) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot q^{2n+1}$, $|q|<1$.

Решение: Сделаем замену: I) $x=-q$, II) $x=-q^2$

I) $-\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ II) $-q\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

Найдем $S_n(x) = x+2x^2+\ldots+nx^n = (x^n+\ldots+x^n)+ \ldots (x^{n-1}+x^n)+x^n =$

$= (x+x^2+\ldots+x^n)+(x^2+\ldots+x^n)+\ldots+\frac{x^{n-1}-x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^n-x^{n+1}}{1-x} =$

$= \frac{x-x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^2-x^{n+1}}{1-x}+\ldots$

$= \frac{1}{1-x}(x+x^2+\ldots+x^n) - \frac{n \cdot x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^{n+1}}{1-x} - \frac{n \cdot x^{n+1}}{1-x}$

$\boxed{S_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{n \cdot x^{n+1}}{1-x}}$, $x^{n+1} \to 0$, $n \cdot x^{n+1} \to 0$.

$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow$ I) $\Sigma = \frac{q}{(1+q)^2}$; II) $\Sigma = \frac{q^3}{(1+q^2)^2}$

② Доказать, что сумма S ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ удовлетворяет неравенству:

(I) $0{,}79 < S < 0{,}87$

Решение: Знакочередующийся ряд. Сходится по признаку Лейбница. Част. суммы S_n:

$S_{2n+1} \searrow$, $S_{2n} \nearrow$, $S_{2n} < S < S_{2n+1}$.

$$0{,}79 < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} < S < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} < 0{,}87$$

Альтернативное решение: Ряд сходится абсолютно, можно переставлять члены ряда.

Найдем сумму S, воспользовавшись рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

---

(3) Доказать сходимость знакочеред. ряда

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ln^2 n}{n+1}$.

Решение: a_n — монотонно убывает к 0.
Ряд сходится по признаку Лейбница.

---

(4) Доказать сходимость ряда:

I) $1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} + \dots$

II) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$

Решение: Ряд — сумма трех (четырех) знакочередующихся рядов, каждый из которых сходится по признаку Лейбница.

Другое решение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, где $a_n \downarrow 0$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right|$ — ограничена (3 или 4).

Сходится по признаку Дирихле

---

(5) Доказать, что ряд абсолютно сходится

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\frac{\pi}{4n}$; II) $\sum \cos^3 n \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$

Решение: I) $\arcsin x = x + o(x)$

II) $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$.

I) $|a_n| \leq \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n^{6/5}} + o\left(\frac{1}{n^{6/5}}\right)\right)$ $6/5 > 1$. Сход.

II) $|a_n| \leq \frac{n+1}{n^3+2} \leq \frac{1}{n^2-1}$, сходится

---

(6) Найти α, при которых ряд а) условно б) абсолютно сходится:

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{n^\alpha}$ II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^\alpha}$

Решение: а) $\sum a_n \cdot b_n$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$a_n \downarrow 0$ при $\alpha > 0$, $\sum b_n$ - ограничена.

I) $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\alpha k$

$\cos x(\cos^2 x) = \cos x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x)$

II) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$; $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\alpha k$

Ряд сходится по признаку Дирихле.

б) При $\alpha > 1$ сход. абсолютн.: $|a_n| < \frac{1}{n^\alpha}$

Показать, что при $\alpha \le 1$ не сходится абсолютно

Г $\sum \frac{|\cos^3 x|}{n^\alpha}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin^3 x|}{n^\alpha}$. расх

Воспользоваться неравенствами:

$|\cos^3 x| \geqslant \cos^4 x$, $|\sin^3 x| \geqslant \sin^4 x$.

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$$\underbrace{\frac{|\sin^3 n|}{n^\alpha}}_{\text{расх}} \geqslant \underbrace{\frac{3}{8}\frac{1}{n^\alpha}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\cos 2n}{n^\alpha}}_{\text{сход. усл.}} + \frac{1}{8}\underbrace{\frac{\cos 4n}{n^\alpha}}_{\text{сход. усл.}}$$

расх $\Leftarrow$ расх.

Аналогично с косинусом

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

---

(7) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится, $a_n \geqslant 0$.

Доказать: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ – расходится

<u>Решение:</u> 1) Если $a_n \to 0$, то $a_n < 1$ $\forall n \geqslant n_0$

$\frac{a_n}{1+a_n} \geqslant \frac{a_n}{2} \Rightarrow \sum \frac{a_n}{1+a_n}$ – расх. пр. срав.

2) Если $a_n \not\to 0$, то $\frac{a_n}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n} \not\to 0$

т.к. иначе, $a_n \to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ – расх

8) С помощью формулы перемножения рядов по Коши показать, что

I) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!}\right) = 1$$

II) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}$$

Решение: $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

I) $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+(-a))^n}{n!} = 0, \; n \neq 0$$

$c_0 = 1$

II) $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot a^{n-k} = \frac{(2a)^n}{n!}$$

② Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов

1. Рассматриваются функциональные ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\quad x \in E,\quad u_n(x) \in \mathbb{R}\ (\text{или } \mathbb{C}).$$
Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum_{k=1} u_k(x)$

Определение 1. Ряд называется сходящимся в точке $x_0 \in E$, если $\sum_{n=1}^{\infty} u(x_0)$ – сходится, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$: $S_n(x_0) \to S(x_0)$

Определение 2. Ряд называется абсолютно сходящимся в т. $x_0 \in E$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится.

Аналогично: сходящийся ряд на множестве E и абсолютно сходящийся на E
$S_n(x) \xrightarrow{E} S(x)$.

Определение 3. Область сходимости, т.е. где ряд сходится; область абсолютной сходимости, т.е. где абсолютно сходится.

Определение 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, если $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ \forall x \in E\ \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда

Рассмотрим n-остаток ряда

$$r_n(x) = S_n(x) - S(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Утв 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in E} |r_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Недостаток: необходимо знать сумму $S(x)$.

Простое необходимое условие

Утв 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равн. сх. на E,

то $|u_n(x)| \overset{E}{\rightrightarrows} 0 \quad (n \to \infty)$.

3. Признак Вейерштрасса равн. сход-ти.

Теорема 1 Пусть $\exists\, a_n \geq 0$: $|u_n(x)| \leq a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, а также абсолютно равномерно.

Если $|u_n(x)| \leq a_n$, то говорят ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорирует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

4. Критерий Коши сходимости ряда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

(условие Коши)

<u>Теорема 2.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E $\Leftrightarrow$ выполнено усл. Коши.

Если условие Коши не выполнено, т.е., $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists x\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \geq \varepsilon_0$, то ряд <u>не является</u> равномерно сходящимся

В частности: $\exists \varepsilon_0 > 0\ \exists n_k \to \infty$: $|u_{n_k}(x_k)| \geq \varepsilon_0$.
$\exists x_k \in E$.

<u>Задача 1.</u> Найти область сходимости и исследовать на равномерную сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

г) $\sum\limits_{n=}^{\infty} (1-x)x^n$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

<u>Решение</u>: а) $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Обл. сходимости: $E_0 = \{|x| < 1\}$,
при $|x| \geq 1$ <u>расходится</u>. <u>Область равн. сход</u>
$\{|x| < 1 - \delta\} = E_\delta\ \forall \delta > 0$, тогда $|x^n| \leq (1-\delta)^n = a_n$
Ряд $\sum a_n$ - сходится $\Rightarrow$ $\sum x^n$ равн. сх. на E_δ.
На $E_0 = \{|x| < 1\}$ нет <u>равномерной сход</u>

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, $S_n(x_n) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n+1}} \to \infty$.

б) $S_n(x) = \dfrac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \dfrac{n \cdot x^{n+1}}{1-x}$.

Обл. сход. $E_0 = \{|x| < 1\}$, $|nx^n| < y^n$ $\forall n \geq n_0$

$y > 0$ $\quad 0 < |x| < y < 1$

Обл. равн. сход: $E_\delta = \{|x| < 1-\delta\}$ (Вейерштрасс)

На E_0 – нет равн. сходимости. $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$. Обл. сход: $E_0 = \{|x| \leq 1\}$

Обл. равн. сход $E_0 = \{|x| \leq 1\}$

$\dfrac{x^n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} = a_n$ – Вейерштрасс.

При $|x| > 1$ расходится, т.к. $u_n(x) \to \infty$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$, $u_n(x) = (1-x)x^n$.

$S_n(x) = x - x^{n+1}$, $S_n(0) = 0$, $S_n(1) = 0$

$S_n(-1) = \begin{cases} -2, & n \text{ – нечетно} \\ 0, & n \text{ – четно} \end{cases}$ | не сходится

Область сходимости: $E = (-1, 1]$

$S(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ $\quad \boxed{x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \text{ нет. равн}}$

Обл. равн. сход: $E_\delta = \{|x| < 1-\delta\}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; Обл. сход $\{-1 \le x < 1\}$

При $|x| < 1$ По Вейерштрассу сход.

При $x = -1$ По Лейбницу сход.

При $x = 1$ Расходится, гармонический ряд

Равномерная сходим: $E\delta = \{ |x| < 1 - \delta \}$.

На самом деле: $\{ -1 \le x < 1 - \delta \}$ (отлично)

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$, $E = \{0\}$.

при $x \neq 0$, $n! x^n \to \infty$, т.е. расходится
