1K

Мат Анализ. Семинар № 6

Сходимость и равн. сходимость функц. рядов (Продолжение)

① **Признаки Дирихле, Абеля и Лейбница равномерной сходимости рядов.**

Признак Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$, $x \in E$, сходится равномерно на мн-ве E, если:

1) последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно ограничена, т.е.

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M$$

2) $\{a_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in E$ и равномерно по E стремится к нулю, т.е. $\forall x \in E$, $a_{n+1}(x) \le a_n(x)$ или $a_{n+1}(x) \geq a_n(x)$

$$a_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0 \ (n \to \infty).$$

Признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$, $x \in E$ сходится равномерно на E, если:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ <u>равномерно сходится</u> на E

2) $\{a_n(x)\}$ - монотонна $\forall x \in E$ и ограничена на E: $\exists M: |a_n(x)| \le M \ \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}$

Из признака Дирихле выводится <u>Признак Лейбница</u>. Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n(x)$. Он равномерно сходится на E, если

1) $a_n(x)\geq 0$, $a_n(x)$ – монотонно убывает

2) $a_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows} 0 \ (n\to\infty)$.

Это частный случай пр. Дирихле при $b_n=(-1)^{n+1}$

<u>Задача 1.</u> (Дом) Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$ равномерно сходится на $E=[0,1]$.

<u>Решение:</u> $a_n=\frac{x^n}{n}$ – монотонно убывает,

$|a_n|\leq\frac{1}{n}$, т.е. $a_n\overset{E}{\rightrightarrows}0$

(Признак Лейбница). $\boxed{|r_n|\leq \sup\limits_{x\in E}|a_{n+1}(x)|}$

<u>Задача 2.</u> Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно, если

а) $u_n(x)=\dfrac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$, $E_\delta=(\delta,+\infty)$, $\delta>0$

б) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$, $E=[0,\infty)$.

Решение: а) $u_n(x) = \frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx}$

Поэтому $S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$, $S(x) = 1$.

$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{1}{1+nx}$; $0 \le r_n(x) \le \frac{1}{1+n\delta}$

при $x > \delta > 0$

Откуда следует равномерная сходимость

б) Знакочередующийся ряд $\sum (-1)^n \cdot a_n(x)$

$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ имеет предел 0 и монотонно убывает по n, т.к. функция $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t+\sqrt{x}}}$ убывает при $t \geqslant 1$ $\forall x \in E$ $\left(\varphi'(t) = -\frac{1}{3}(t+\sqrt{x})^{-4/3} < 0\right)$

Ряд сходится по пр. Лейбница, причем

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1+\sqrt{x}}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

Значит, равномерно сходится

Задача 3. С помощью признака Вейерштрасса доказать абсолютную и равномерную сход-ть ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на мн-ве E

а) $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2 x) \cdot \cos \pi n x}{n\sqrt{n}}$, $E = \mathbb{R}$;

б) $u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)}$, $E = [1, +\infty)$

в) $u_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^\alpha \cdot x^2}$, $\alpha > 4$, $E = \mathbb{R}$;

г) $u_n(x) = x^2 \cdot e^{-nx}$, $E = [0, \infty)$.

<u>Решение:</u> а) $|u_n(x)| \leq \dfrac{\frac{\pi}{2} \cdot 1}{n\sqrt{n}} = a_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ – сходится. Тогда равн. и абс. сх по Вейерштрассу

б) Пусть $\varphi(x) = x^2 + \sin x$, тогда $\varphi'(x) = 2x + \cos x > 0$ при $x > \frac{1}{2}$, т.е. $\varphi(x)$ – возрастающая ф-ция,

$\varphi(x) \geq \varphi(1) \Rightarrow \quad 0 < u_n(x) \leq e^{-n\varphi(1)}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n}$ сходится при $\alpha > 0$, $\alpha = \varphi(1)$

Значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход. абс. и равн. (Вей)

в) $a^2 + b^2 \geq 2|a| \cdot |b| \Rightarrow 1 + n^\alpha \cdot x^2 \geq 2n^{\frac{\alpha}{2}} \cdot |x|$.

$|u_n(x)| \leq \dfrac{n|x|}{n^{\alpha/2} \cdot |x|} = \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}} = \dfrac{1}{n^\beta}$

где $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1 > 1$ при $\alpha > 4$, т.е.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ – сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абс. и равн

г) $u_n(x) > 0$ при $x > 0$, $u_n(0) = 0$ при $x = 0$

$u_n'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = e^{-nx} x(2 - nx)$

$u'(x)=0$ имеет корень $x_n=\frac{2}{n}$

причем $u'(x)>0$ при $x\in(0,x_n)$

$u'(x)<0$ при $x\in(x_n,\infty)$

Значит x_n – т. максимума, т.е.

$$0\le\sup_{x\geq 0} u_n(x) \le u_n(x_n)=\frac{4}{n^2}\cdot e^{-2}=a_n$$

$\sum a_n$ – сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равн. на E сх. (Вей)

<u>Задача 4.</u> Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, если

а) $u_n(x)=\dfrac{1}{(1+nx)^2}$, $E=(0,\infty)$;

б) $u_n(x)=e^{-n^2x^2}\sin nx$, $E=\mathbb{R}$;

в) $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^p}$, $p>1$, $x\in\mathbb{R}$

г) $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$: $E_\varepsilon=[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$

$E_0=[0,\pi]$.

<u>Решение:</u> а) если $x>0$, то $0<u_n(x)<\dfrac{1}{n^2x^2}$

Значит, ряд сходится, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$.

Напомним условие, обеспечивающее <u>не равномерную</u> сходимость

$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \exists\, n_k \to \infty,\ x_{n_k} \in E: \quad |u_{n_k}(x_k)| \geq \varepsilon_0.$

Рассмотрим $x_n = \frac{1}{n}$, $u_n(x_n) = \frac{1}{4} = \varepsilon_0$

б) $u_n(0) = 0$, $|u_n(x)| \leq e^{-n^2x^2} < \frac{1}{n^2x^2}$, т.к.
$(x=0)$ $(x \neq 0)$

$e^t > t$ при $t > 0$. $(e^{-t} < \frac{1}{t})$

Значит: 1. Есть сходимость ряда $\forall x \in \mathbb{R}$.

Есть ли равн. сходимость? Найдем x_n.

$x_n = \frac{1}{n}$, $u_n(x_n) = e^{-1} \cdot \sin 1 = \varepsilon_0 > 0$.

в) $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^p}$, $p > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится.

есть равномерная сходимость (Вей).

г) $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$. Сходится $\forall x \in \mathbb{R}$
(признак Дирихле обыч)

Пусть $E_\varepsilon = [\varepsilon, \pi - \varepsilon] \ni x$. Тогда применим признак Дирихле равномерной сход-ти

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$, $a_n = \frac{1}{n} \downarrow 0\ (n \to \infty)$.

$b_n(x) = \sin nx$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| = \left| \frac{\sin (n+1) \cdot \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leq$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$ равн. огранич. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

Проверим, что нет равномерной сходимости на $E_0 = [0, \pi]$.

(Сходимость есть $\forall x$) ($x = 0; \pi$ — хор.).

Воспользуемся критерием Коши.

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \frac{\sin 2nx}{2n}\right| =$$

Подставим $X = \frac{1}{n}$

$$= \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2}{n+n} \geqslant$$

$$\geqslant \sin 1\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) \geqslant \sin 1 \cdot \frac{n}{2n} = \frac{\sin 1}{2} = \varepsilon_0 > 0.$$

$$|S_{2n}(x_n) - S_n(x_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$$
