1K Мат. Анализ. Семинар №7.

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

① Непрерывность предельной функции и суммы ряда.

Пусть E – замкн. подм. $\mathbb{R}$, $[a,b]$

Утв 1. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, $x \in E$, сходится равномерно на E, $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f(x)$ непрерывна на E.

Утв 2. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются непрерывными функциями на E и ряд сходится равномерно на E, то его сумма $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывной функцией.

---

② Почленный предельный переход в рядах и функциональных последовательностях

Утв 3. Если функц. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в некоторой окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, и если $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, причем

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Утв 4. Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится в окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность чисел $\{A_n\}$ так же сходится и при этом

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

---

③ Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование функциональных рядов

Утв 5. Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, сходится к ф-ии $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ а последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно к ф-ии $\varphi(x)$, $\varphi: [a,b]\to\mathbb{R}$ то функция $f(x)$ также дифференцируема на $[a,b]$, причем

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x)$$

Утв 6. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, в котором члены $u_n(x)$ являются непрерывно дифференцируем.

функциями, сходятся на $[a, b]$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится к функции $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, то сумма $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и этот ряд можно почленно дифференцировать.

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x).$$

Задача 1. Доказать, что сумма ряда на $[0, 1] = E$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx}$ непрерывна и найти ее.

Решение. Члены ряда $u_n(x) = x^2 \cdot e^{-nx}$ являются непрерывными функциями на $[0, 1]$. На прошлом семинаре доказали, что ~~этот~~ ряд равномерно сходится, т.к.

$0 \le u_n(x) \le \frac{4}{e^2} \cdot \frac{1}{n^2}$, (признак Вейерштрасса)

Следовательно, сумма $S(x)$ этого ряда является непрерывной функцией. Найдем ее

При $x > 0$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = x^2 \cdot \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$$S(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

При $x = 0$ $u_n(0) = 0 \Rightarrow S(0) = 0.$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$, $x\in[0,1]$.

На прошлом семинаре мы доказали, что этот ряд сходится на $[0,1]$, но <u>не равномерно</u>,

при $x<1$ $\quad S_n(x)=x-x^{n+1}$, $\quad S(x)=x$

при $x=1$ $\quad S_n(1)=0$, $\quad S(1)=0$.

Функция $S(x)$ является разрывной в т. $x=1$

Отметим, что если ряд из непрерывных функций сходится к разрывной функции, то этот ряд <u>сходится неравномерно</u>.

<u>Задача 2.</u> Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.
Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$, $x\geq 0$.
Доказать, что его сумма является непрерывной функцией.

<u>Решение:</u> Покажем, что этот ряд равномерно сходится. Для этого применим <u>равномерный признак Абеля</u>.

Ряд $\sum a_n$ сходится (он числовой)

Функция $x\to\frac{1}{n^x}$ ограничена 1 $\forall x\geq 0$

и при каждом $x\geq 0$ послед. $\frac{1}{n^x}$ – монотонна

$$\frac{1}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{n^x}$$

Задача 3. Показать, что функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, являющаяся суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$.

Решение Функции $\sin nx$ и $\cos nx$ непрерывны. Ряды $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

равномерно сходятся на $\mathbb{R}$ (пр. Вейерштрасса). Поэтому, функции $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны, а во-вторых, согласно Утв 6, можно ряд $f(x)$ почленно дифференцировать,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=g(x)$$

Задача 4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$, $|x|<1$, с помощью почленного дифференцирования подходящего ряда.

Решение Пусть $|x|<1-\delta$, $\delta>0$ – любое. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ равномерно сходятся на $E_\delta=\{|x|<1-\delta\}$, поэтому ряд $\sum x^n$ можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

т.е. $$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\right) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

<u>Задача 5.</u> Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx} - (n-1)x\cdot e^{-(n-1)x}\right)$ сходится неравномерно на $[0,1]$, однако его сумма является <u>непрерывной</u> ф-цией.

<u>Решение:</u> Находим частичн. сумм ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot xe^{-kx} - (k-1)e^{-(k-1)x}\right) = n\cdot xe^{-nx},$$

тогда $$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0, \quad x\in[0,1].$$

Значит, $S(x)$ – непрерывная функция.

Однако $n\cdot x\cdot e^{-nx} \not\rightrightarrows 0$ на $[0,1]$.

Возьмем $x_n = \frac{1}{n}$, $\quad S_n(x_n) = \frac{1}{e} > 0$.

т.е. $$\sup_{x\in[0,1]} S_n(x) \not\to 0 \quad (n\to\infty)$$

<u>Задача 6.</u> Найти область существования функции $f(x)$ и исследовать её на непрерывность

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$, б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$

Решение а) По признаку Коши, ряд сходится, если $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} |x+\frac{1}{n}| < 1$, т.е., $|x|<1$, при $|x|\geq 1$ ряд расходится, поскольку $u_n(x) \not\to 0$. При $|x|\leq r < 1$ ряд сходится равномерно, т.к. есть мажоранта
$$|u_n(x)| \leq \left(r+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(r+\frac{1}{n}\right)^n < \infty$$

Следовательно f непрерывна на $|x|\leq r<1$ при любом $r>0$, т.е. $f\in C(]-1,1[)$.

б) Функция $u_n(x) = \dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ непрерывна $x\in\mathbb{R}$.

Покажем, что ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Представим в виде:
$$u_n(x) = \frac{n^2}{x^2+n^2}\left(\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right) = a_n(x)\cdot b_n(x)$$

Заметим, что функц. $a_n(x) = \dfrac{n^2}{x^2+n^2}$ - ограничена $|a_n(x)|\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ и монотонно возрастает по n $(\forall x\in\mathbb{R})$ $a_n(x) = 1-\dfrac{x^2}{x^2+n^2} \nearrow (n\to\infty)$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ сходится равномерно на $[-L, L]$ $\forall L>0$.

Тогда, по равномерному признаку Абеля, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[-L,L]$ $\forall L$.

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

<u>Задача 7.</u> Найти $\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$

<u>Решение</u>: Данный ряд, согласно равномерному признаку Абеля, сходится равномерно в области $\{x\geqslant 0\}$, поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – сходится, $\frac{x^n}{x^n+1}$ – ограничена и монотонна по n ($x>1$, возрастает; $x<1$ убывает). Следовательно, согласно Утв. 3, можно переставить $\lim\limits_{x\to1}$ и суммирование по n:

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\lim_{x\to1}\frac{x^n}{x^n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{\ln 2}{2}$$