1K Мат. Анализ Семинар № 8

Свойства равномерно сходящихся функц. последовательностей и рядов (продолжение)

Задача 1. При каких значениях параметра α: а) последовательность $f_n(x) = n^\alpha \cdot x \cdot e^{-nx}$ сходится, б) равномерно сходится на $[0,1]$

Решение: а) Если $x > 0$, то используя правило Лопиталя, легко проверить, что $\lim\limits_{y\to 0} y^\alpha \cdot x e^{-xy} = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

при $x = 0$ $\lim f_n(0) = 0$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$

б) $\sup\limits_{x\in[0,1]} n^\alpha \cdot x e^{-nx} = n^{\alpha-1} \sup\limits_{x\in[0,1]} (nx \cdot e^{-nx}) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$,

тогда при $\alpha < 1$. есть равномерная сход.

при $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$ нет равномерн. сход.

Задача 2. Доказать, что ζ-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $\{x > 1\}$ и имеет непрерывные производные всех порядков

Решение: Пусть $x \geq x_0 > 1$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, из признака Вейерштрасса вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}} \quad (*)$$

сходится равномерно при $x > x_0 > 1$.
Кроме того, функция $\varphi(x) = n^{-x}$ непрерывна и дифференцируема в этой области,

$$\varphi^{(p)}(x) = (-1)^p \cdot \frac{\ln^p n}{n^x}$$

Следовательно, можно дифференцировать почленно ряд, задающий ζ-функцию:

$$\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x} \quad \underline{\forall x > 1.}$$

Сходимость ряда (*) вытекает из оценки:
(при $x_0 > 1$) $\quad \ln^p n \le n^{\frac{x_0 - 1}{2}}, \ \forall n \ge n_0(x_0).$

<u>Задача 3</u>. Доказать, что тэта-функция

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Решение: Сходимость этого ряда вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=}^{\infty} e^{-\pi|n|\cdot x}$ по признаку сравнения $\left(e^{-\pi n^2 x} \le e^{-\pi|n|x}\right)$.

Рассмотрим теперь ряд
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2p} \cdot e^{-\pi n^2 x_0}, \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{(**)}$$
где $x \geq x_0 > 0$, который мажорирует ряд
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2p} e^{-\pi n x}. \quad \text{(***)}$$

Ряд (**) сходится по признаку Коши (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n(x))^{1/n} = 0$). Поэтому ряд (***) равномерно сходится по призн. Вейерштрасса.

Наконец $\frac{d^p}{dx^p} e^{-\pi n^2 x} = (-\pi n^2)^p e^{-\pi n^2 x}$

Следовательно, ряд θ-функции можно дифференцировать любое число раз:
$$\theta^{(p)}(x) = (-\pi)^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \cdot e^{-\pi n^2 x}.$$
при $x \geq x_0 > 0$. Но x_0 - любое, значит
$$\theta(x) \in C^{\infty}(0, \infty).$$

Задача 4. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать её на дифференц.

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$

Решение: а) Последовательность $\frac{x}{n+x}$ при $x \neq -n$ монотонно по n стремится к нулю. Следовательно по признаку Лейбница, ряд сходится (поточечно) $\forall x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Функция $\left(\frac{x}{n+x}\right)' = \left(1 - \frac{n}{n+x}\right)' = \frac{n}{(n+x)^2}$ непрерывна при $x \neq n$, $n \in \mathbb{N}$ и ряд

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2},$$

в силу равномерного признака Дирихле, сходится равномерно на каждом замкнутом ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}$ не содержащем точек $x = -1, -2, -3, \ldots$ Поэтому, ряд можно дифференцировать почленно при $x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$.

б) Ряд сходится равномерно по $x \in [-L, L]$ $\forall L > 0$ по признаку Вейерштрасса, т.к.

$$\frac{|x|}{n^2+x^2} \le \frac{L}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Следовательно, $f(x)$ существует $\forall x \in \mathbb{R}$.

Вычислим формально дифференцируя ряд:
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sign} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2}, \quad (*) \quad x \neq 0.$$

Поскольку
$$\varphi_n(x) = \frac{n^2 \operatorname{sign} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \le \frac{n^2+A^2}{n^4} \le \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$$

при $n \geq n_0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$, то по признаку Вейерштрасса ряд $(*)$ сходится равномерно. Тогда можно дифференцировать почленно и справедливо равенство $(*)$ при $x \neq 0$.

Исследуем дифференцируемость в точке $x=0$. Рассмотрим

$$(\&) \quad \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому, согласно УТ6 3 предельно почленно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Тогда, с учетом (8) заключаем, что

$$f'_+(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad f'_-(0)=-\frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно в точке $x=0$ функция не дифференцируема!

Задача 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

Решение

Этот ряд, $u_n(x)=x^n(1-x)$, сходится на $[0,1]$, но неравномерно. Следовательно, нельзя переходить к пределу при $x\to 1-0$ под знаком суммы (т.е. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})\neq\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-1)=0$)

Поэтому необходимо вычисление суммы

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k-x^{k+1}=x-x^{n+1},\quad S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Следовательно $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=\lim\limits_{x\to 1-0}S(x)=1$

Задача 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^x}$

Решение. Этот ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $x\geq 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

<u>Задача 7.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$

<u>Решение.</u> Проверить неравенство:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+n^2\cdot x^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{(очевидно)}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty \Rightarrow$ исх. ряд сход. <u>равномерно</u>

Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n^2}$. Переходим к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

<u>Задача 8.</u> Возможно ли почленное дифференцирование ряда?

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}.$$

<u>Решение.</u> Функция $u_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\in C^1(\mathbb{R})$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ сходится, т.к.

$\forall y>0$ $\operatorname{arctg} y\le y \Rightarrow u_n(x)\le\frac{x}{n^2}$.

Найдем формальную производную этого ряда: $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$

Для этого ряда $\frac{n^2}{n^4+x^2} \le \frac{1}{n^2}$, поэтому он равномерно сходится.

<u>Вывод</u>: почленное дифференцирование возможно.

<u>Задача 9</u> Возможно ли почленное дифференцирование рядов?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $0<x<\pi$

<u>Решение</u> а) Этот ряд сходится $\forall x \in (0, \pi)$ и равномерно сходится при $x \in (\delta, \pi)$. (Доказано на прошлом семинаре. Однако, формально продифференцированный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$.

Этот ряд расходится $\forall x \in (0, \pi)$, т.к. $\cos nx \not\to 0$ $(n\to\infty)$. Значит, нельзя дифференцировать почленно.

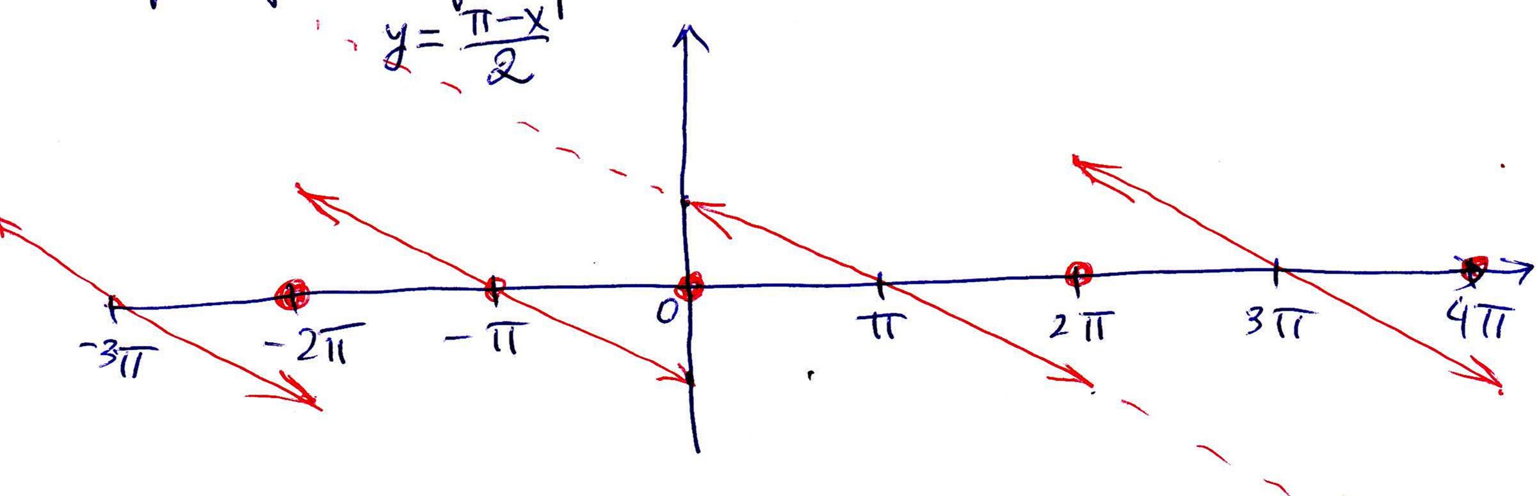
б) Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ равномерно сходятся. Первый ~~на~~ $\forall x \in \mathbb{R}$, а. вторый на $(\delta, \pi-\delta)$ $\forall \delta > 0$.

Следовательно, допустимо почленное дифференцирование.

Заметим, что в задаче а) сумма этого ряда равна: $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$

Слева стоит дифференцируемая функция на $(0, \pi)$. Однако нельзя дифференцировать ряд!

Нарисуем график правой части при $x \in \mathbb{R}$



Такие ряды называются рядами Фурье. Будем их изучать на 2 курсе.