

Степенные ряды

① Ряды сходимости степенного ряда

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

наибольшее степенное ряд. Числа a_n называются коэффициентами степенного ряда

Теорема 1 (А.С.Лав) Если степенный ряд сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он сходится и при любом x таком, что $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ и если ряд расходится при $x = x_2 \neq x_0$, то он расходится при любом x таком, что $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$

Теорема 2 Для любого степенного ряда сходится абсолютно $R \geq 0$, такое, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется интервалом сходимости (включая концы)

В любом меньшем интервале (внутри) $B_r = \{x - x_0 | x - x_0| < r\}$, где $r < R$ ряд сходится абсолютно и равномерно.

В точках границы интервала (внутри) сходимости, где $|x - x_0| = R$, ряд сходится

мыслим как сходится, тогда и расходится.
 Для $\mathbb{R}$ то же можно $x_0 - R$ и $x_0 + R$, а
 для $\mathbb{C}$ то же можно $|x - x_0| = R$.

Теорема 3 (А.Делю). Если R - радиус сходимости ряда (*), причем $0 < R < \infty$,
 и если этот ряд сходится при $x = x_0 + R$,
 то он сходится на отрезке $[x_0, x_0 + R]$ включительно.

Если считать за переменную $x - x_0 = y$, то
 сходимость ряда (*) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n. \quad (**)$$

Для радиуса сходимости R применимо предложение (*), или (**) и применим формулу Коши-Адамары:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $\lim = 0$, то $R = \infty$, если $\lim = \infty$, то $R = 0$.

Если известны пределы (коэффициенты или делители) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Исследование сходимости ряда на сходимости-
 знает найти до какого (критерия) сходимости
 и убедиться, сходится ли он на концах
 отрезка сходимости. Если нет, то сходимости + коэф.

② Аналитические (тождественные) ф-ии.

Функция $f(x)$, $x \in R$, (или $x \in D$) называется аналитической в точке $x = x_0$, если она дифференцируема в некоторой окр-ти $U(x_0) = \{ |x - x_0| < \rho \}$ (интервал или окр-ть) и представляется в нем сходящимся степенным рядом:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (\rho \leq R)$$

Например, аналитический функцией является любой многочлен $P(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$,

а также рациональная функция вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, в точках x_0 , где $Q(x_0) \neq 0$. Другое применение рассмотрим позже.

③ Дифференцирование степенного ряда

Пусть задан степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

который имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда в интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ функция $f(x)$ имеет производную и ряд можно почленно дифференцировать.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}.$$

Ряды сходимости того же ряда, очевидно, имеют R , поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Аналогично, $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ и т.д.

Задача 1. Определить радиус сходимости и интервал сходимости и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Решение: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1, \quad |x| < 1.$

1) $p \leq 0$. Расходится в конечных точках.

2) $0 < p \leq 1$. Расходится в т. $x = 1$
Сходится в т. $x = -1$ (Абель)

3) $p > 1$. Сходится в конечных точках

Вопрос: когда есть равномерная сходимость?

1) при $p \leq 0$ только при $|x| \leq 1 - \delta$

2) при $0 \leq p \leq 1$ на $[-1, 1 - \delta]$

3) при $p > 1$ на $[-1, 1]$.

Задача 2: Найти радиус сходимости и исследовать на сходимость в комплексной точке.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n \cdot \ln^2(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Решение: а) $x_0 = -1$. По формуле Коши-Адамары:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3$$

$R = \frac{1}{3}$. На комплекс:

$$x = -\frac{4}{3} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится

$$x = -\frac{2}{3} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^n$$

расходится

б) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow R = \infty$

сходится $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a_n < a_{n+1}, \text{ т.е. } a_n \nearrow 0 \text{ по } \underline{\text{Лакс}}$$

Аналогично, при $x = -4$ расхожиться

и) Воспользуемся асимптотическим разложением гармонического ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1),$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n + \gamma + o(1)} = 1$$

Значит $R = 1$.

При $x = \pm 1$ ряд расхожиться, т.е. ответ
нет при $a_n = (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$ не определены

Задача 3 Найти область сходимости и
исследовать на сходимости в концевых
точках.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $(a > 1)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot x^n$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot x^n$

Решение

a) Находим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2} (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty \quad (a > 1)$$

Рассогласно $\forall x \neq 0$.

b) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} e \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$

$$= e \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = e \cdot e^{-1} = e, \quad |x| < 1$$

при $x=1$, $\sum (-1)^n b_n$, $b_n = \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \frac{1}{n!}$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \exp \left\{ 1 + n \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right\} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1 \quad \text{при } n \gg 1.$$

Поэтому хотя бы, но $b_n \rightarrow 0$. Далее
исследуем.

при $x=-1$. Ряд расходящийся. (Применяя Лейбница)

Правило Гольдса

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \lambda, \mu = \text{const}$$
$$\varepsilon > 0$$
$$|\theta_n| < c$$

Если $\lambda > 1$, то ряд сходится

Если $\lambda < 1$, то ряд расходится

Если $\lambda = 1$, то если $\mu > 1$ сходится
если $\mu \leq 1$ расходится

$$b) \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\text{при } x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n} \quad \text{сходится (Листок)}$$

$$\text{при } x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\sqrt{n}}}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 4, 9, 16, \dots}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\sqrt{n}}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

первый - с. по Лейбницу.